NUMERO: 1298 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Piemontese

MATERIA: Meccanica dei Fluidi + Eserc., Prof.Camporeale

MECCANICA dei FLUIDI

FLUIDO:

Corpo materiale ad alta mobilità → GAS, LIQUIDI

↓

Comportamento del fluido: sollecitazione e velocità di deformazione vanno di pari passo

↓

IPOTESI di CONTINUITA' del CORPO (minima scala d'interesse: numero elevato di molecole)

→ campo di esistenza per la validità delle leggi di studio.

→ che abbia una scala di osservazione ragionevole

GAS: 10 μm

LIQUIDI: 1 μm (perché più densi)

DENSITA':

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad [kg/m^3]$$

PESO SPECIFICO

$$\gamma = \rho \cdot g \quad [N/m^3]$$

g: acc. di gravità

EQ. di STATO:

$$\rho = \rho(p, T)$$

p: pressione; T: Temperatura

↓

cambia da fluido a fluido

DENSITA' dell'ACQUA: se $p = 1$ atm $T \to [0° < T < 40°]$ $\Delta\rho = 0{,}08\%$

$$\rho \cong 1000 \ kg/m^3$$

$$\gamma \cong 9800 \ N/m^3$$

$$m = \rho V$$

[$dm = 0$ per ipotesi che $m = cost$]
(sempre [o quasi])

$$dm = \rho\, dV + V\, d\rho = 0$$

$\Rightarrow$ • $\dfrac{dV}{V} = -\dfrac{d\rho}{\rho}$

$\downarrow$

• $\dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{dp}{\varepsilon}$

VISCOSITÀ

VISCOSIMETRO: 2 cilindri coassiali, all'interno dell'intercapedine c'è del fluido.
Il cilindro più grande (esterno) è messo in rotazione a velocità ω_E. Dopo un certo tempo si mette in rotazione anche il cilindro interno con velocità ω_I ($\omega_E \neq \omega_I$)
Con una coppia frenante si impone che il cilindro interno sia fermo $\omega_I = 0$.
Si misura il valore della coppia frenante.

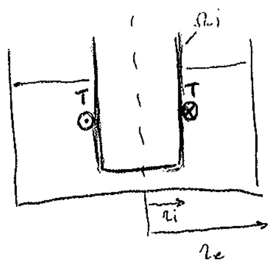
$$T = \Omega_i\, \eta\, \frac{\Delta u}{\Delta r}$$

$\Delta r = r_e - r_i$

Ω_i = superficie interna

$\downarrow$

forza trasferita alla superficie interna



vale se $\left(\dfrac{\Delta r}{r_i} \ll 1\right)$
l'intercapedine non deve essere troppo grande

$$\frac{T}{\Omega_i} = \tau = \eta\, \frac{\Delta u}{\Delta r}$$

viscosità dinamica   [Ns/m^2]   [$Pa \cdot s$]

$\Rightarrow$ • $\tau = \eta \dfrac{du}{dr}$

LEGGE di NEWTON
(vale per fluidi Newtoniani)

$$-\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{DD' - AA'}{dy} = \frac{u_D\,dt - u_A\,dt}{dy} = \frac{du}{dy}\,dt$$

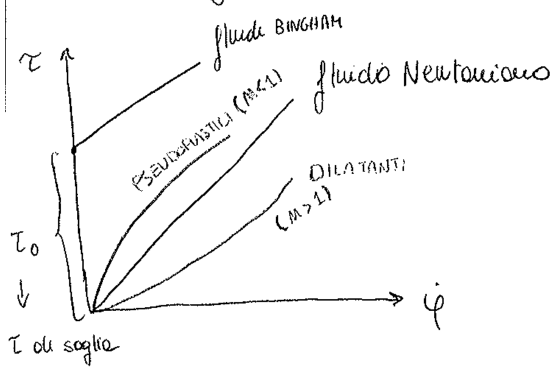
$$\left(u_D = u_A + \frac{du}{dy}\,dt\right)$$

- $\frac{du}{dy} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}$

$\Rightarrow \boxed{\tau \propto \dot{\varphi}}$

Piano Reologico

$-\ \tau = \eta \cdot \dot{\varphi}^{\,n}$



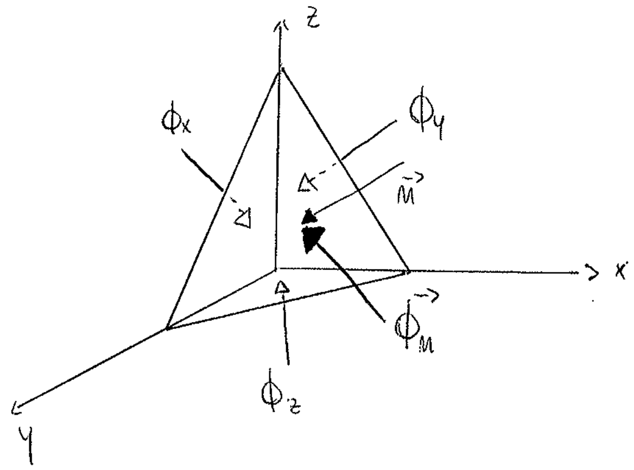
fluidi TIXOTROPICI $\quad \tau \searrow$ tempo

fluidi REOPECTICI $\quad \tau \nearrow$ tempo

FLUIDI VISCOELASTICI

$$\dot{\varphi} = \frac{\tau}{\eta} + \frac{\dot{\tau}}{G}$$

ϕ_n : sforzo unitario, cambia al variare della giacitura dell'area su cui agisce, quindi al variare di $\vec{n}$



$(n \wedge x) \to \cos(n \wedge x) < 0$ angolo ottuso
$(n \wedge y) \to$ " $(n \wedge y) < 0$ " "
$(n \wedge z) \to$ " $(n \wedge z) < 0$ " "

coseni direttori

$$\begin{cases} d\Omega_x = -\cos(n \wedge x)\, d\Omega & \text{(proiez. dell'area } d\Omega \text{ su } x) \\ d\Omega_y = -\cos(n \wedge y)\, d\Omega & (\text{ " " " " " } y) \\ d\Omega_z = -\cos(n \wedge z)\, d\Omega & (\text{ " " " " " } z) \end{cases}$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{\phi}_n d\Omega + \vec{\phi}_x d\Omega_x + \vec{\phi}_y d\Omega_y + \vec{\phi}_z d\Omega_z + \gamma \underbrace{\cancel{dV}}_{\sim 0} = \rho \underbrace{\cancel{dV}}_{\sim 0} \vec{a}$$

(se $dV \to 0$) o ($dV \sim 0$ molto piccolo)

$$\vec{\phi}_n \cancel{d\Omega} = \vec{\phi}_x \cos(n \wedge x) \cancel{d\Omega} + \vec{\phi}_y \cos(n \wedge y) \cancel{d\Omega} + \vec{\phi}_z \cos(n \wedge z) \cancel{d\Omega}$$

$$\vec{\phi}_x = \begin{pmatrix} \phi_{xx} \\ \phi_{xy} \\ \phi_{xz} \end{pmatrix} ; \quad \vec{\phi}_y = \begin{pmatrix} \phi_{yx} \\ \phi_{yy} \\ \phi_{yz} \end{pmatrix} ; \quad \vec{\phi}_z = \begin{pmatrix} \phi_{zx} \\ \phi_{zy} \\ \phi_{zz} \end{pmatrix}$$

Se $[\Phi]$ è diagonale $\forall$ sistema di riferimento

$\rightarrow$ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$

$\rightarrow$ a) IDROSTATICA (velocità nulla) $\rightarrow$ $\frac{du}{dn} = 0$ dalla legge di Newton $\rightarrow \tau = 0$

$\rightarrow$ b) FLUIDI PERFETTI $\rightarrow \mu = 0 \rightarrow \tau = 0$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = pI \Rightarrow \vec{\Phi}_n = [\Phi]\cdot\vec{n} = pI\cdot\vec{n} = p\vec{n}$$

IDROSTATICA

$$\boxed{\vec{u} = 0}$$

EQ. GLOBALE della STATICA

Forze di massa $= \int_V \rho \vec{F} \, dV = \gamma V = \vec{P}$

$\rightarrow F\,[N/kg] = [m/s^2]$

Forze di superficie $= \int_\Omega \vec{\Phi}_n \, d\Omega \xrightarrow[\text{(IDROSTATICA)}]{} = \int_\Omega p\,\vec{n}\,d\Omega = \vec{F}_c$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}_c = 0}$$

forze volumiche (forze peso)

forze di superficie o di contorno

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$$

$$\int_V \rho \vec{F}\, dV + \int_\Omega p \cdot \vec{n}\, d\Omega = 0$$

↓ th. gauss

(per conv. di $\vec{n}$).

$$\int_V \rho \vec{F}\, dV \cancel{+} \overset{\wedge}{-} \int_V \nabla p\, dV = 0$$

$$\int_V (\rho \vec{F} - \nabla p)\, dV = 0$$

Genericamente : $\rho \vec{F} = \nabla p$

$$\vec{F} = -\nabla(z)\, g$$

$$-\gamma \nabla(z) = \nabla p$$

$$\gamma = \rho \cdot g$$

$$\nabla\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = cost$$

LEGGE di STEVINO

Se volessi conoscere z del p.c.i.a.

$\Rightarrow p(z) = 0$

$p_{atm} + \gamma(a - z) = 0$

$\Rightarrow z = \dfrac{p_{atm}}{\gamma} + a$

$\dfrac{p_{atm}}{\gamma}$: $\xrightarrow{H_2O}$ 10,33 m

$\xrightarrow{Hg}$ 0,76 m

Definizione pressione relativa di un liquido : $p^* = p - p_{atm}$

$p^*(z) = p(z) - p_{atm} = \gamma(a - z)$

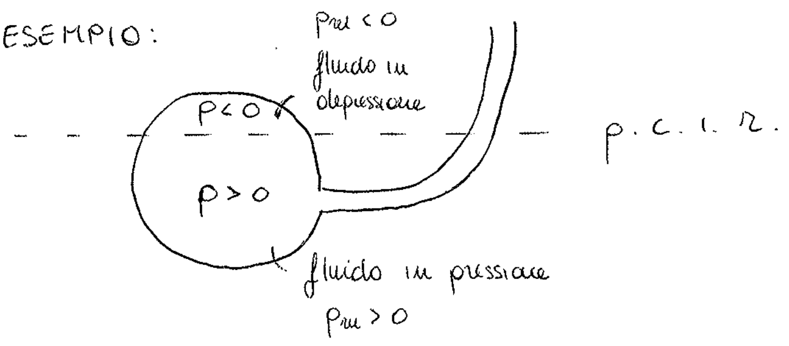
Se volessi conoscere z p.c.i.r. $\Rightarrow p^*(z) = 0$

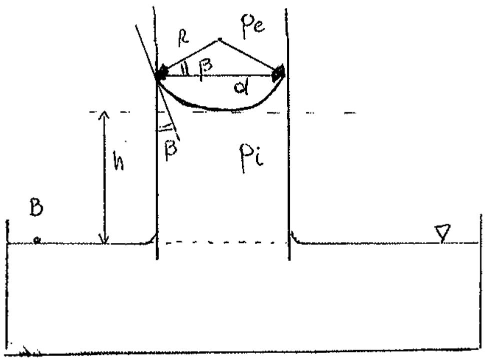
$\downarrow$

$z = a$

(In questo caso p.c.i.r. coincide con pelo libero, ma non è sempre così!)

ESEMPIO:





R : raggio di curvatura

$d = 2R\cos\beta$

$\rightarrow R = \dfrac{d}{2\cos\beta}$

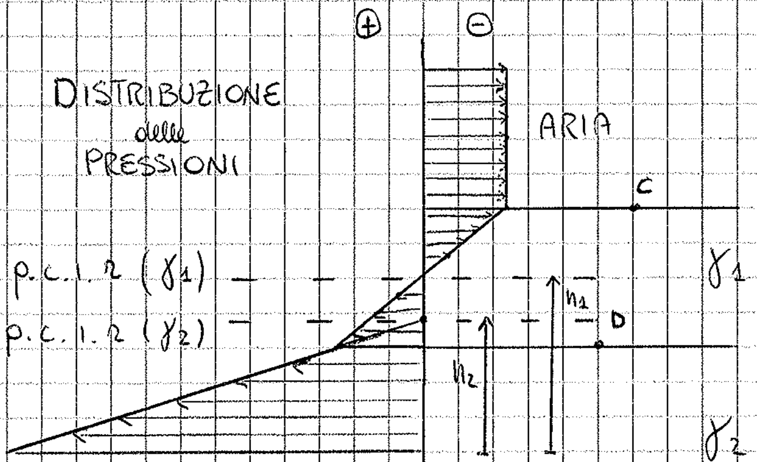
$\Delta p = p_i - p_e$ → poiché ho una sup. di interfaccia curva

$p_E = 0$ (è contatto con l'atmosfera)

$$z_D + \frac{p_D}{\gamma_2} = z_E + \cancel{\frac{p_E}{\gamma_2}} = h$$

$$h = \overset{(z_D)}{b} + \frac{1}{\gamma_2}\left(\gamma_1 a - \gamma_m \Delta\right)$$

$$p(z_m) \equiv m = \gamma_2 (h - z_m)$$

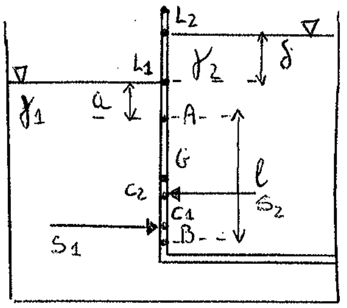


$$\left.\begin{aligned} \gamma_1)\quad & p_D = \gamma_1 (h_1 - b) \\ \gamma_2)\quad & p_D = \gamma_2 (h_2 - b) \end{aligned}\right\}$$

$$\gamma_1 h_1 - \gamma_2 b = \gamma_2 h_2 - \gamma_2 b$$

$$\hookrightarrow_D \quad h_1 = b + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(h_2 - b)$$

ES 3)



γ_1) $p_G = \gamma_1 (a + \ell/2)$

$S_1 = \gamma_1 (a + \ell/2) \cdot \ell$

$\overline{C_1G} = \frac{I_{y_0}}{M} = \frac{\ell^3/12}{\overline{GL_1} \cdot (\ell \cdot 1)}$

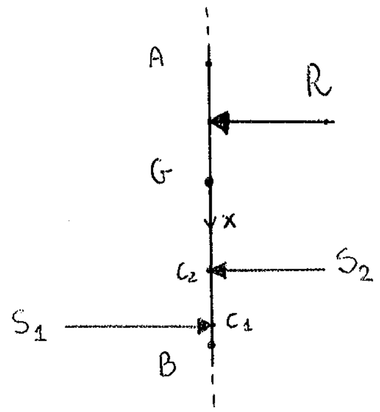
$\hookrightarrow \overline{GL_1} = \ell/2 + a$

γ_2) $|S_2| = p_G \cdot (\ell \cdot 1) = \gamma_2 (\ell/2 + a + \delta)(\ell \cdot 1)$

$\overline{GC_2} = \frac{\ell^3/12}{\overline{GL_2}(\ell \cdot 1)}$

$\hookrightarrow \overline{GL_2} = \frac{\ell}{2} + a + \delta$

$|R| = |S_2| - |S_1| = 1970 \longleftarrow$



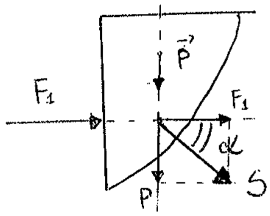
$M_2 + M_1 = R \cdot x$

$|S_2| \cdot \overline{GC_2} - |S_1| \cdot \overline{GC_1} = R \cdot x$

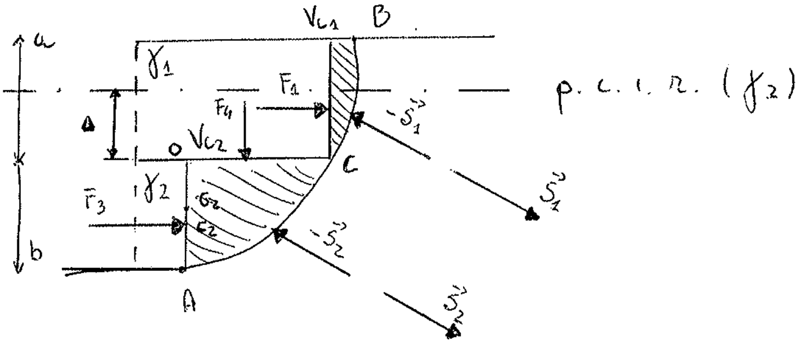
$\hookrightarrow x = \frac{S_2 \cdot \overline{GC_2} - S_1 \overline{GC_1}}{R} = -0{,}0423 \text{ m}$

$$|S| = \sqrt{S_o^2 + S_v^2} = \sqrt{\gamma^2 \frac{a^4}{4} + \gamma^2 V^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|S_v|}{|S_o|} = \operatorname{arctg} \frac{|P|}{|F_1|}$$



Es.

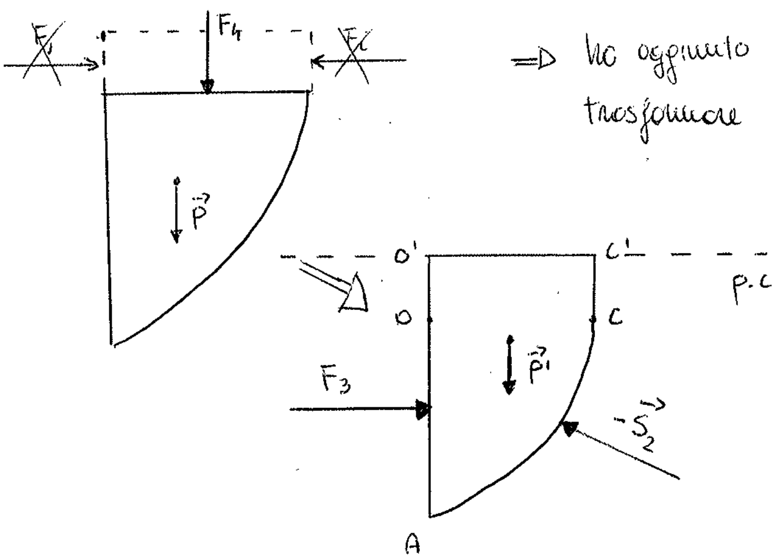


$$p_0 = \gamma_1 a = \gamma_2 \Delta \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a$$

$$|F_3| = p_G A = \gamma_2 \left(\frac{b}{2} + \Delta\right) \cdot b$$

$$|F_1| = \gamma_1 a^2/2$$

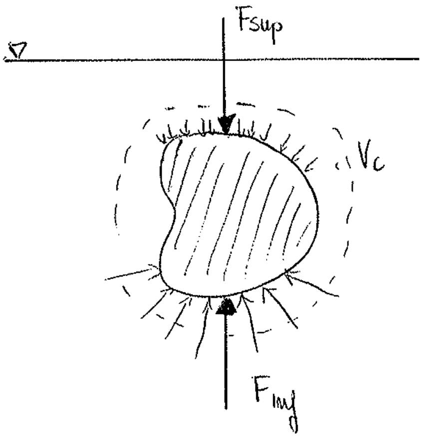
$$\overline{C_2G_2} = \frac{I_{y0}}{M} = \frac{b^3/12}{X_G A} = \frac{b^3/12}{\left(\frac{b}{2} + \Delta\right) \cdot b}$$



⇒ ho aggiunto un piccolo volumetto supplementare per trasformare F_4 [che in generale non agisce sullo stesso linea di $\vec{P}$]

↳ F_4 viene inglobata in una forza-peso $\vec{P}'$ più grande

$$\vec{S}_2 = \vec{P}' + \vec{F}_3$$



$$\vec{S} = \vec{F}_{inf} - \vec{F}_{sup}$$

$[F_{inf} > F_{sup}]$

$\downarrow$

$\vec{S} : \uparrow$

$$|S| = \gamma V$$

V_c : $\vec{P} + \vec{F}_c = 0$

$$|F_c| = \underbrace{|S|}_{}$$

Spinta di Archimede

EQUILIBRIO RELATIVO

$\vec{F}$: forze di massa

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

$$\vec{F} = -\text{grad}(gz) = \text{grad}(U)$$

$[U = -gz]$

In un sistema con sist. di riferimento non coincidente con la particella si vede delle forze aggiuntive

$\hookrightarrow$ $\vec{A}_g = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$

$\hookrightarrow$ $A_g = \text{grad}\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = \omega^2 r$

$$-\ \rho\left(\vec{F} - \vec{A}_g\right) = \text{grad } p$$

$$\rho\left[\text{grad}(-gz) - \text{grad}\left(\tfrac{1}{2}\omega^2 r^2\right)\right] = \text{grad } p$$

$$\text{grad}\left(gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + p/\rho\right) = 0$$

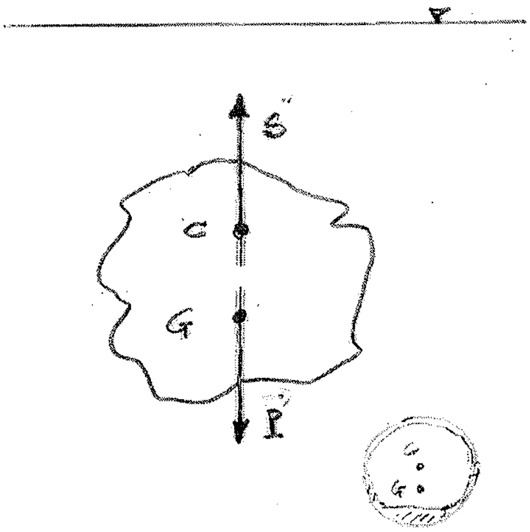
$$\Downarrow$$

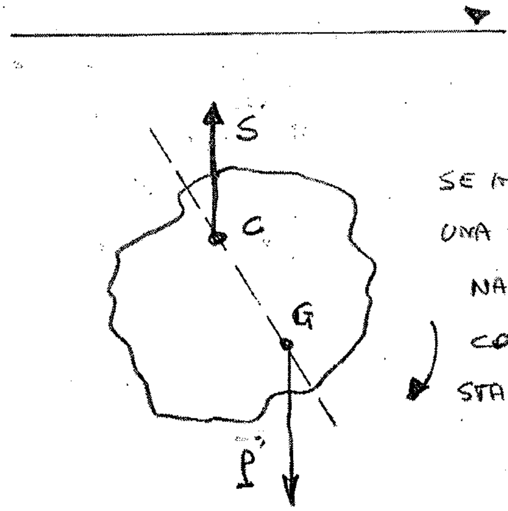
$$\boxed{z - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}}$$

Legge di Stevino

(con sist. riferimento non inerziale)

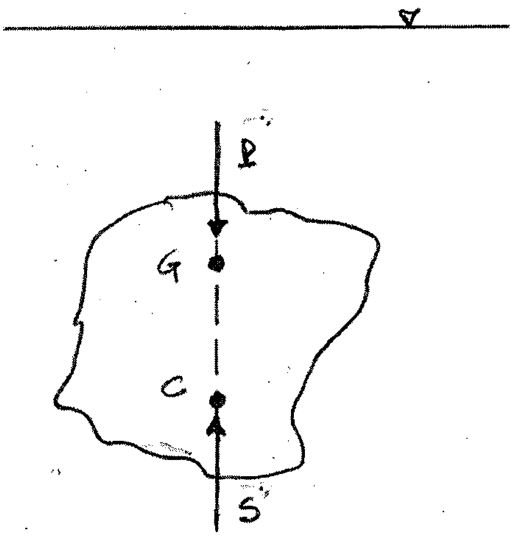
1° CASO : C È PIÙ IN ALTO DI G

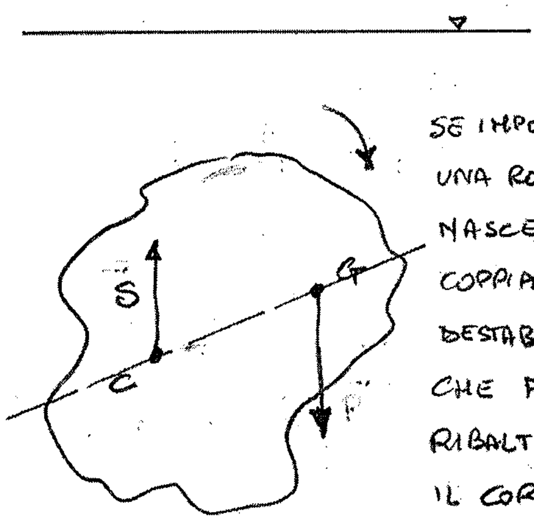




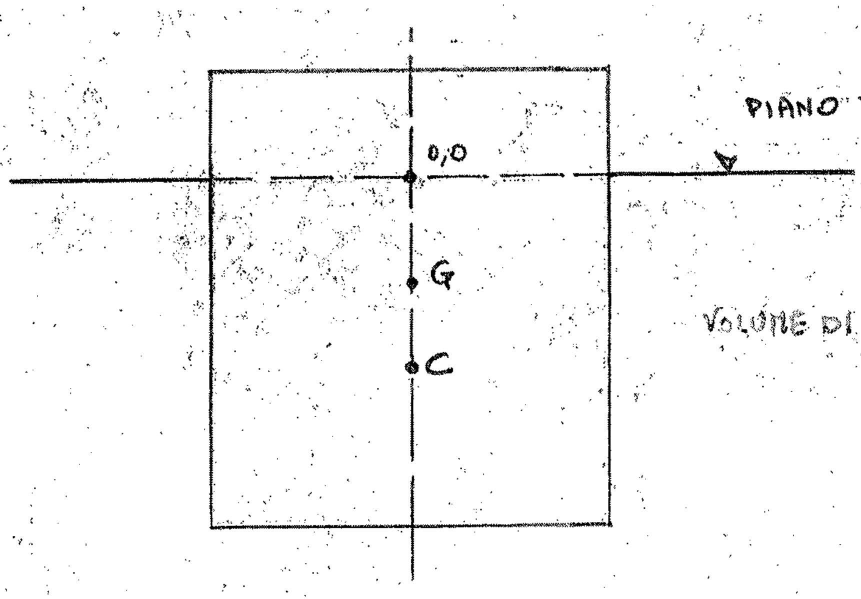
SE IMPONGO UNA ROTAZIONE NASCE UNA COPPIA STABILIZZANTE

2° CASO : C È PIÙ IN BASSO DI G



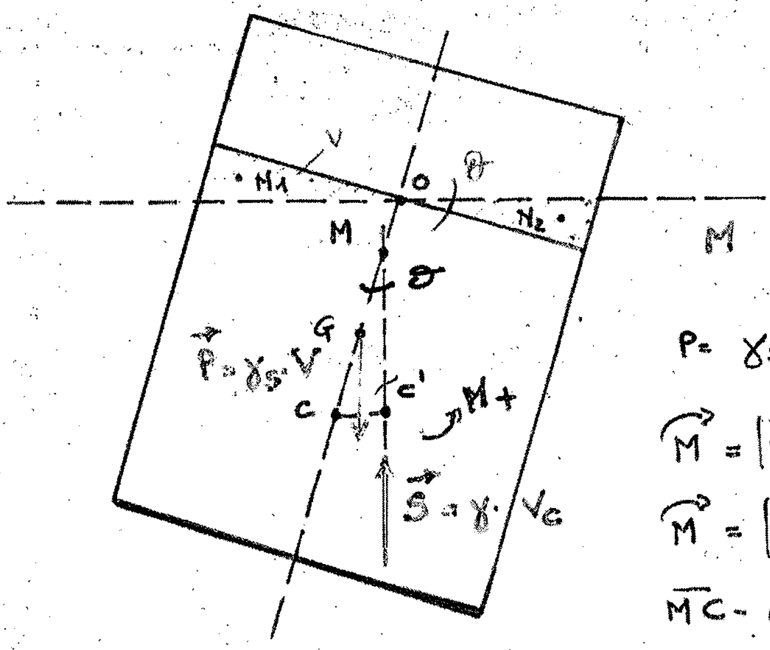


SE IMPONGO UNA ROTAZIONE NASCE UNA COPPIA DESTABILIZZ. CHE FA RIBALTARE IL CORPO



PIANO DI GALLEGGIAMENTO

VOLUME DI CARENA



M METACENTRO

$$P = \gamma_s \cdot V = \gamma \cdot V_c$$

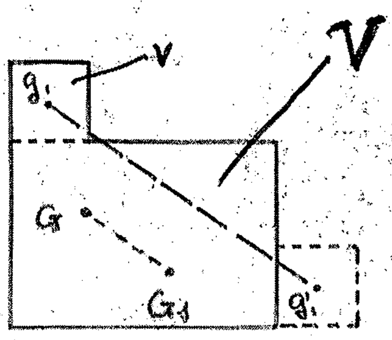
$$\vec{M} = |\vec{S}| \cdot \overline{MG} \cdot \sin\theta$$

$$\vec{M} = |\vec{S}| \, (\overline{MC} - \overline{GC}) \sin\theta$$

$$\overline{MC} - \overline{GC} > 0$$

$$\overline{MC} > \overline{GC}$$

SAPPIAMO CHE:



$$\frac{\overline{GG_1}}{v} = \frac{\overline{g_1 g_1'}}{V} \xrightarrow{\text{PERCUI}} \boxed{\frac{\overline{cc'}}{v} = \frac{\overline{N_1 N_2}}{V_c}}$$

$$\overline{cc'} = \overline{MC} \sin\theta$$

$$\frac{\overline{MC} \sin\theta}{v} = \frac{\overline{N_1 N_2}}{V_c}$$

CINEMATICA dei FLUIDI

- Approccio LAGRANGIANO -> "prendo una particella e la seguo"

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad \forall t$$

- Approccio EULERIANO

↳ "osservo ciò che succede in una certa regione di spazio"

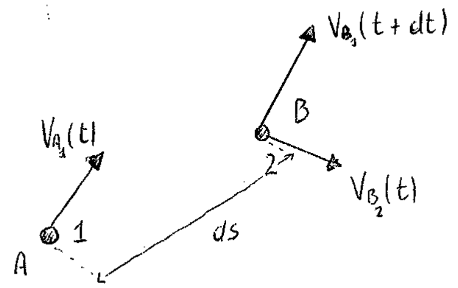
$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases} \quad \forall t$$

componenti di velocità del campo di moto

$u = \dfrac{dx}{dt}$ def. di velocità

A.L. <—> A.E.

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t)\,dt \\ dy = v(x, y, z, t)\,dt \\ dz = w(x, y, z, t)\,dt \end{cases} \quad + \quad \text{CONDIZIONI INIZIALI} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (t = 0)$$



$$\vec{A} = \frac{V_B(t+dt) - V_A(t)}{dt} =$$

$$\frac{V_B(t+dt)\left[-V_B(t) + V_B(t)\right] - V_A(t)}{dt} =$$

$$\frac{V_B(t+dt) - V_B(t)}{dt} + \frac{V_B(t) - V_A(t)}{dt} \cdot \frac{ds}{ds}$$

L'accelerazione secondo i due approcci non è lo stesso

↓

LAGR. : $a = \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

↳ EULERO : $\boxed{\vec{A} = \underbrace{\dfrac{d\vec{V}}{dt}}_{\text{acc. locale}^*} + \underbrace{\dfrac{d\vec{V}}{ds}}_{\text{acc. convettiva}} \cdot \vec{V}}$

[Sono derivate parziali]

* variaz. velocità temporale

acc. convettiva ⟶ variaz. velocità spaziale

Linee particolari

TRAIETTORIA: luogo dei punti occupati nel tempo dalle particelle

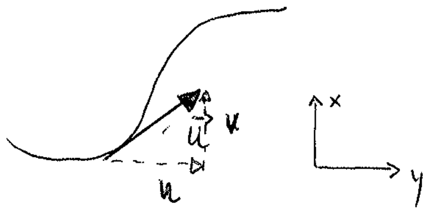
$$dx = u(x, y, z, t)\, dt$$

$$dy = v(x, y, z, t)\, dt$$

$$dz = w(x, y, z, t)\, dt$$

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

LINEE di CORRENTE : e' tangente il vettore velocita' in ogni punto
(Definita ad un tempo t)



$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

All'istante t_0 :

$$\frac{dx}{u(x,y,z)} = \frac{dy}{v(x,y,z)} = \frac{dz}{w(x,y,z)}$$

Per visualizzare le traiettorie si usano delle particelle colorate che vengono fotografate con lunghi tempi di esposizione.
Al contrario se voglio vedere le linee di corrente devo "fissare" l'istante e vedere lo spostamento infinitesimo, fissando brevi istanti uno successivo all'altro vedo le linee descritte dal vettore $\vec{u}$ che si sposta (e si tiene sempre tangente)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0}$$

I FORMA EQ. CONTINUITA'

div. di un vettore = scalare

$$\underbrace{\operatorname{div}(\rho \vec{u})}_{\text{scalare}} = \vec{u} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0$$

(derivata totale)

$$\frac{D\vec{\rho}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} \vec{\rho}$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0}$$

II FORMA

IPOTESI: a) ~~[illegible]~~ $\rho(x,y,z) = cost$ OMOGENEO

(CON I FORMA)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

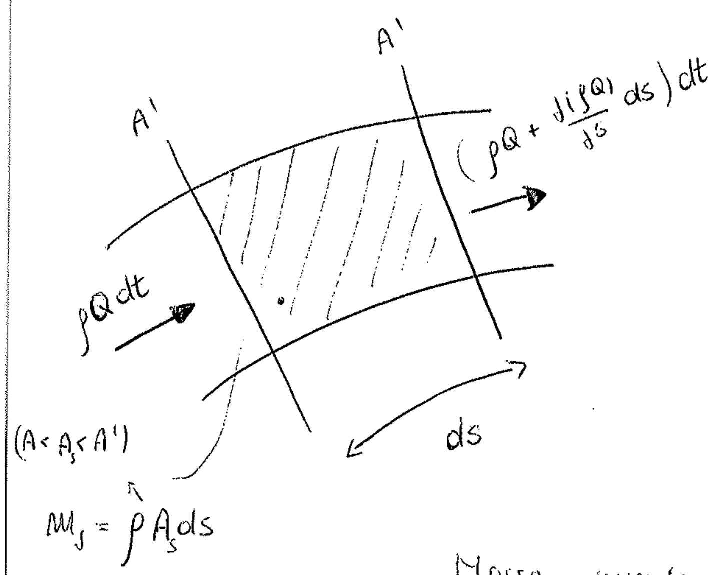
b) MOTO PERMANENTE $\partial / \partial t = 0$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

c) ~~MOTO PERMANENTE~~ $\rho(x,y,z,t) = cost$

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$$

EQ. CONTINUITA' per le CORRENTI



$\boxed{\rho Q = \frac{dm}{\cancel{dt}}}$

Massa uscente - massa entrante = variazione massa interna

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds\, dt = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho A\, ds)\, dt$$

$$\ldots = -\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} ds\, dt$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0}$$

$\rho = cost$ (nello spazio e nel tempo)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

MOTO PERMANENTE + $\rho = cost$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \implies Q = cost$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 124

$$\left(dm\, \vec{A} = \rho\, dx\, dy\, dz \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) \qquad \vec{A} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

$\downarrow$

$$\left(dm \cdot \vec{A} = d\vec{R} \right)$$

$$\boxed{\rho \left(\vec{F} - \vec{A} \right) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}}$$

EQ. INDEFINITA della DINAMICA

$\downarrow$

lungo le 3 direzioni

$$\rho \left(F_x - \frac{Du}{Dt} \right) = \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_y - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \left(F_z - \frac{Dw}{Dt} \right) = \frac{\partial \Phi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial z}$$

$$\left([\Phi] = \left\{ \vec{\Phi}_x , \vec{\Phi}_y , \vec{\Phi}_z \right\} \right)$$

$$\operatorname{div} \cdot \Phi = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\rho \left(F - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \operatorname{div} \cdot \Phi}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 124

$$\rho\left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = \operatorname{div} \Phi$$

$$\downarrow$$

$$\int_V \left[\rho\left(F - \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) - \operatorname{div}\Phi\right] dV = 0$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\int_V \rho F \, dV}_{\vec{P} = \gamma V} - \int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \, dV - \underbrace{\int_V \operatorname{div}\Phi \, dV}_{} = 0$$

forze-peso

$$= -\int_\Omega \underbrace{\Phi \cdot \vec{n}}_{\vec{\Phi}_n} \, d\Omega \qquad \text{(TH. DIVERGENZA)}$$

(TH. TETRAEDRO di CAUCHY)

$$= -\int_\Omega \vec{\Phi}_n \, d\Omega$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}}_{\frac{\partial(\rho u \vec{u})}{\partial x} - \vec{u}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

(vale x gli altri termini)

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{*_1} + \frac{\partial(\rho u \vec{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \vec{u})}{\partial z} - \vec{u}\underbrace{\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]}_{\operatorname{div}(\rho\vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$\downarrow$$

$$\left(+\vec{u}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \quad *_2$$

$*_1$ e $*_2$ $\rightarrow$ $\dfrac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \times \vec{u})$$

$$\rightarrow (\rho\vec{u} \times \vec{u}) = \rho \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Omega} \rho \vec{u}\, v_n \, d\Omega = \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

$\vec{M}$ = q.tà di moto

$$\int_{\Omega} \vec{\Phi}_n \, d\Omega = \vec{F}_c$$

$$\int_{V} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} \, dV = \vec{I} \quad \rightarrow \text{"inerzie locali"}$$

$$\boxed{\vec{P} + (\vec{M}_e - \vec{M}_u) + \vec{F}_c = \vec{I}}$$

CORRENTI GRADUALMENTE VARIABILI

$$|\vec{u}| = u_n \equiv V \cdot \vec{n}$$

$$\vec{M}_e = \int_{\Omega_e} \rho \vec{u} \cdot u_n \, d\Omega = \vec{n} \int_{\Omega_e} \rho V^2 d\Omega = \rho_m \beta V Q \cdot \vec{n}$$

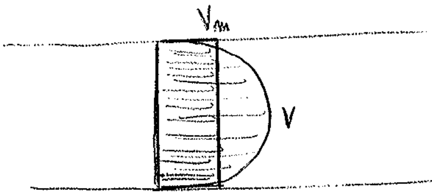
$$\beta = \frac{\int_{\Omega} \rho V^2 d\Omega}{\rho_m V^2 \Omega}$$

numeratore → flusso q.tà di moto generico

denominatore → flusso q.tà di moto in condizioni di V media

β → coeff. di ragguaglio

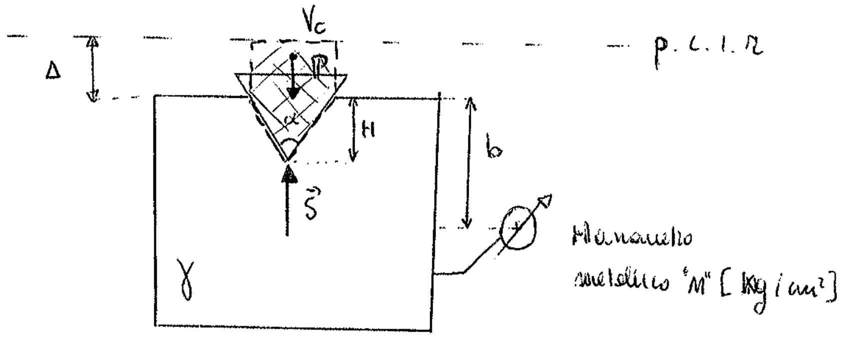
$$\boxed{Q = V\Omega}$$



MOTI TURBOLENTI : $\beta \sim 1$

ESERCITAZIONE 2

ES. 1



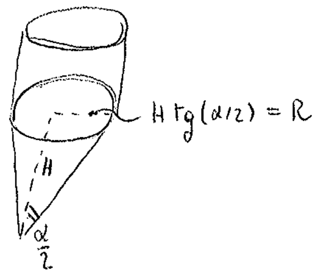
Dati: H, α, M, b, γ

?) Peso della valvola conica per tappare il "buco"

$1 \ Kg/cm^2 = 10^4 \ Kg/m^2$
$= 10^4 \cdot g \ \frac{N}{m^2}$

$$M[Pa] = \gamma(\Delta + b)$$

$$\Delta = \frac{M}{\gamma} - b = 0{,}4 \ m$$



$$\vec{\mathbb{P}} + \vec{S} = 0$$

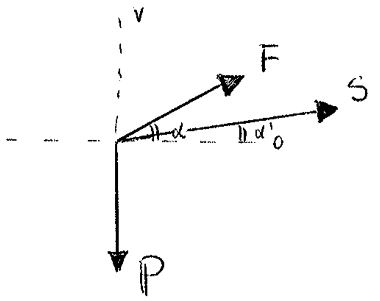
$$\mathbb{P} = \gamma V$$

$$V = V_{cono} + V_{cilindro} = \frac{2}{3}\pi R^2 H + \pi R^2 \Delta = \frac{2}{3}\pi H^3 tg^2(\alpha/2) + \pi H^2 tg^2(\alpha/2)\Delta =$$

$0{,}00487 \ m^3$

$$|S| = |\mathbb{P}| = 47{,}81 \ N$$

Rapp. qualitativo



$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{F}$$

$$S_o = |F| \cos\alpha$$

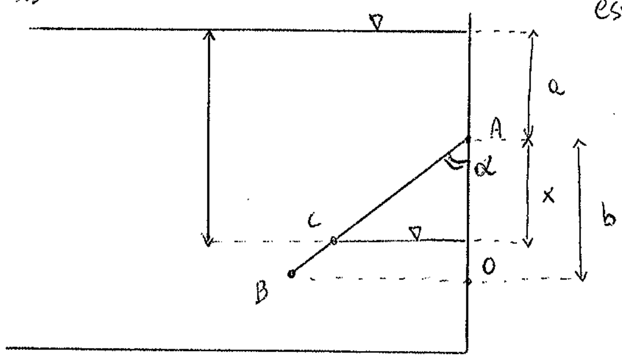
$$S_v = -|F| \sin\alpha + |P|$$

$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{S_v}{S_o}$$

La risultante delle spinte sulla sup. curva dovrà passare per il centro di curvatura (perchè tutte le spinte infinitesime hanno direzione radiali congiungenti il centro di curvatura) quindi sapendo direzione e inclinazione (α') posso sapere dove è applicata $\vec{S}$

ES. 3

$\overline{AB} = \ell$



Se riempio molto molto piano posso affermare di essere in cond. idrostatiche

$$V_i = \frac{b^2}{2} tg\alpha \cdot 1 \qquad p_i = p_{atm}$$

$$[\alpha = \arccos(b/\ell)]$$

$$V_f = \frac{x^2}{2} tg\alpha \cdot 1 \qquad p_f = \gamma(a+x) + p_{atm}$$

TRASF. ISO-T : $p_i V_i = p_f V_f$

$$p_{atm} \cdot \frac{b^2}{2} tg\alpha = [\gamma(a + x) + p_{atm}] \frac{x^2}{2} tg\alpha$$

eq. del tipo : $a_0 x^3 + a_1 x + a_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1,35 \text{ m}$

TH. di BERNOULLI

IPOTESI:

1 - FLUIDO PERFETTO

2 - FLUIDO "PESANTE" (soggetto a gravità)

3 - FLUIDO INCOMPRIBILE $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

4 - MOTO PERMANENTE

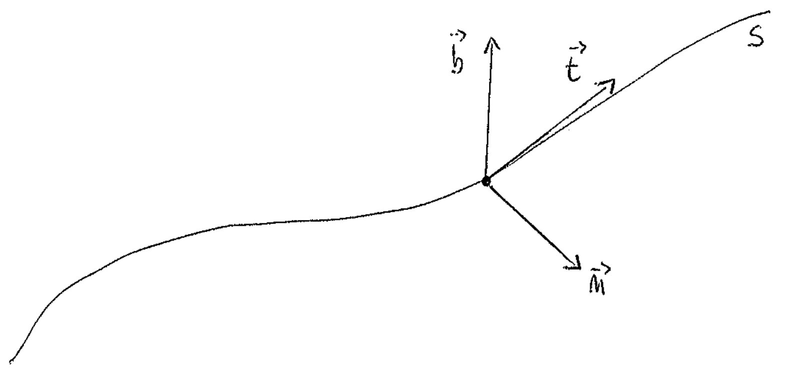
1) $\rightarrow$ eq. di Eulero: $\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p)$

2) $\vec{F} = -\text{grad}(gz) = -g\,\text{grad}(z)$ sostituendo in 1)

$$-\gamma\,\text{grad}(z) - \rho\vec{A} = \text{grad}(p)$$

$$-\frac{A}{g} = \text{grad}(z) + \frac{1}{\gamma}\,\text{grad}(p)$$

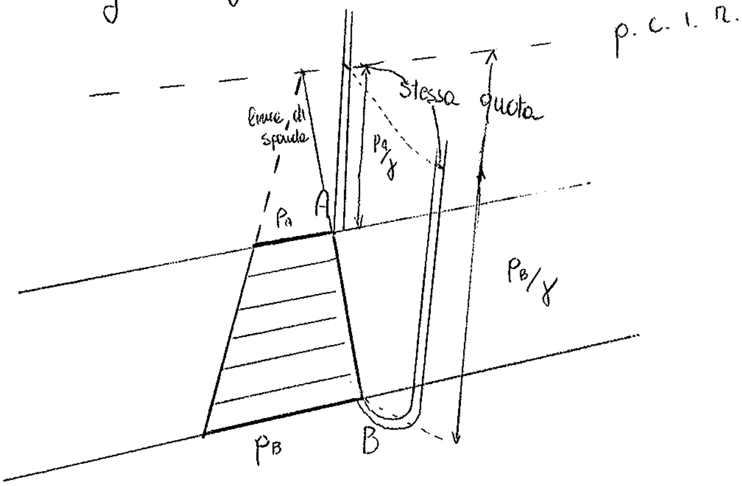
Traiettoria generica, coordinata curvilinea



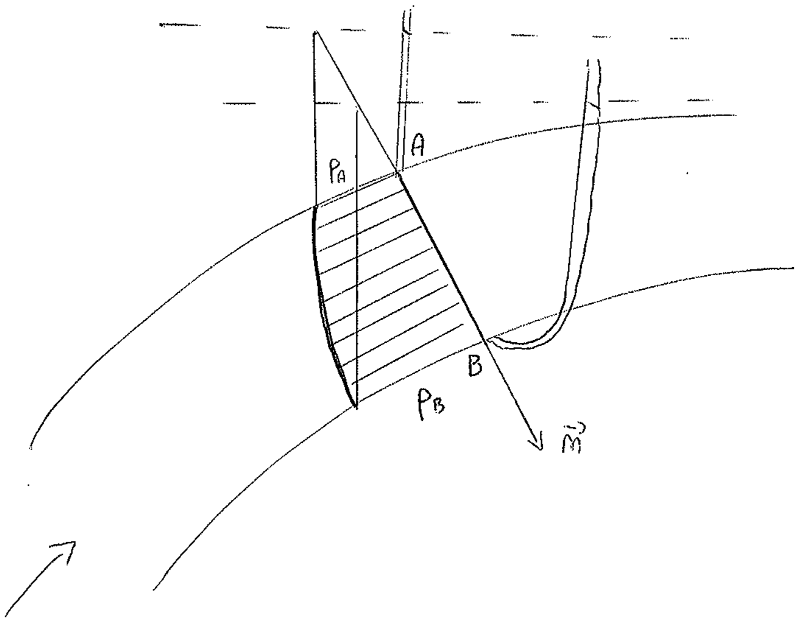
CASO $r \to \infty$ (curvatura nulla $\Rightarrow$ traiettorie rettilinee)

- $\frac{dh}{dn} = \frac{dh}{db} = 0$

h : carico piezometrico



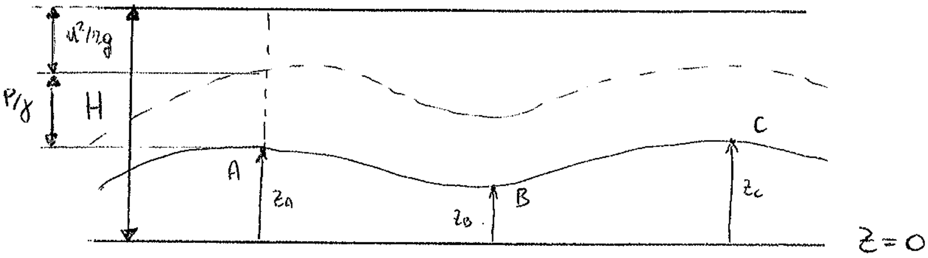
distribuzione idrostatica delle pressioni
↳ lineare



distribuzione non idrostatica (non lineare)

INTERPR. GEOMETRICA

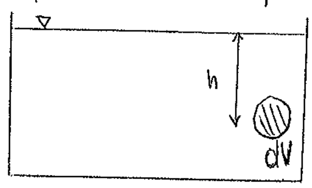
$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$



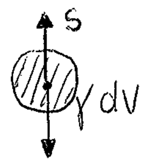
$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{u_C^2}{2g}$$

INTERP. ENERGETICA

- $z \equiv$ en. potenziale per unità di peso
- $\frac{u^2}{2g}$ = en. cinetica per unità di peso
- $\frac{p}{\gamma}$ = en. potenziale per unità di peso



$p = \gamma h$



Se ipotizziamo che dV si sposti molto lentamente a quote più alte verso il pelo libero, l'energia potenziale del dV spostato cresce di una quantità $(\gamma\, dV \cdot h) \to \gamma\, dV \cdot \frac{p}{\gamma}$ $\to$ riferendo all'unità di peso
$[mgh]$

$$E_p = \frac{p}{\gamma}$$

l'acquisto di E_p si traduce in una perdita di E di pressione che salendo passa da («γh» $\to 0$) sul pelo libero

$z_B = -d/2$

$u_B = \sqrt{2g(h + d/2)}$

• (se $h \gg d/2$)

$u_B = \sqrt{2gh}$ vel. torricelliana u_{torr}

$u_{effettiva} \propto u_{torr}$

$u_{eff} = C_v \cdot u_{torr}$

C_v : ricav. sperimentalmente

$C_v \cong 0{,}98$

area sez. contratta

$Q = \Omega_c \cdot C_v \sqrt{2gh}$

$C_c = \dfrac{\Omega_c}{\Omega} = 0{,}61$ (valore teorico)

→ sez. contratta

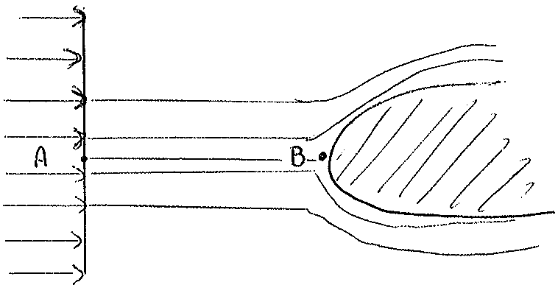
↳ sez. foro

$Q = \underbrace{(C_c \cdot C_v)}_{m} \Omega \sqrt{2gh}$

m → coeff. di efflusso ($\sim 0{,}6$)

$\Omega = \dfrac{\pi d^2}{4}$

TUBO di PITOT (moti a potenziale) → posso calcolare analiticamente le traiettorie



La velocità in B è zero

$u_B = 0$ ↳ punto di RISTAGNO

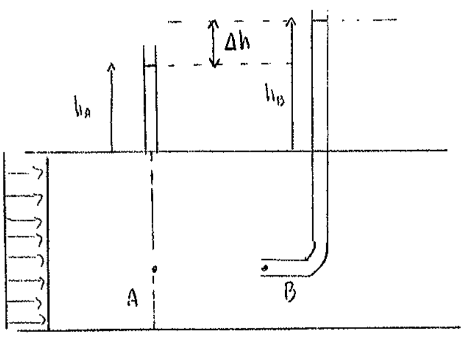
TH. BERNOULLI AB:

$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} + \frac{u_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B}$$

$$u_A = \sqrt{2g\,(h_B - h_A)}$$

$$h_B - h_A = \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{u_A^2}{2g}$$



	A		B	
u	u_A	→	$u_B = 0$	↘ (u)
p	p_A	→	p_B	↗ (p)
z	z_A	=	z_B	—

ES. 2

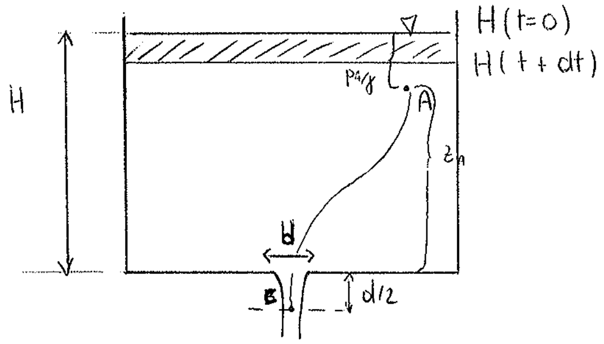
Problema di svuotamento serbatoio : $\longrightarrow$ se il livello si abbassa molto gradualmente $\Rightarrow$ moto uniforme

$\downarrow$

Vedo il problema come una successione di stati permanenti ad istanti successivi

- foro piccolo
- Volume grande

$H \gg d$



TRAIETTORIA $\widetilde{AC}$

$$\underbrace{\Omega\left[H(t) - H(t+dt)\right]}_{dV} = -Q\left[H(t)\right] dt$$

$$\Omega \frac{dH(t)}{dt} = -Q\left[H(t)\right]$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{Q\left[H(t)\right]}{\Omega} = -\frac{Q}{\Omega}$$

$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{H} + \cancel{\frac{u_A^2}{2g}}^{=0} = z_c + \cancel{\frac{p_c}{\gamma}}^{=0} + \frac{u_c^2}{2g}$$

$$H + d/2 = \frac{u_c^2}{2g} \longrightarrow u_c = \sqrt{2g\,(H + d/2)} \sim \sqrt{2gH}$$

se $H \gg d$, $H \gg d/2$

$$Q = u_c \Omega_c = c_c \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sqrt{2gH}$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = -c_c \frac{\pi d^2}{4\Omega}\sqrt{2gH} \longrightarrow \int \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int -c_c \frac{\pi d^2 \sqrt{2g}}{4\Omega}\, dt$$

$$2\sqrt{H} + cost = -\frac{c_c \pi d^2}{4\Omega}\sqrt{2g} \cdot t$$

Sapendo che $t=0 \rightarrow H = H(t=0)$

$$\Delta H_{12} = H_{A_2} - H_{A_1} = z_A + \left(\frac{U_A^2}{2g} - \frac{U_B^2}{2g} \right) \quad (> 0) \quad \Leftarrow \quad (U_A > U_B)$$

$z_A \uparrow \quad \uparrow \Delta H$ (tubo lungo)

$\left(\frac{U_A^2}{2g} - \frac{U_B^2}{2g} \right) \uparrow \quad \uparrow \Delta H$ (tubo divergente)

} compromesso con le perdite

$p_A = - \Delta \gamma_m$

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{U_B^2}{2g} - \frac{U_A^2}{2g} - z_A = \frac{Q^2}{2g\Omega_A^2} - \frac{Q^2}{2g\Omega_B^2} - z_A$$

} e si ricava Δ

$\Delta = -0,23$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\gamma \int_\Omega \frac{u^3}{2g}\, d\Omega}{\gamma \frac{U^2}{2g} \cdot \underbrace{U\Omega}_{(Q)}}$$

α : coeff. ragguaglio pot. cinetica

U : vel. media

$$\boxed{\alpha = \frac{\int_\Omega u^3\, d\Omega}{U^3 \Omega}}$$

→ $\alpha = 1$ profili piatti

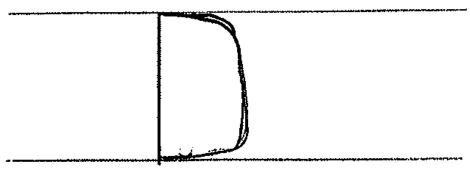
→ $\alpha > 1$ profili generici

$$P = \gamma Q \Big[\underbrace{h + \alpha \frac{U^2}{2g}}_{H^*} \Big] = \gamma Q H^*$$

⇒ $\boxed{H^* = cost}$

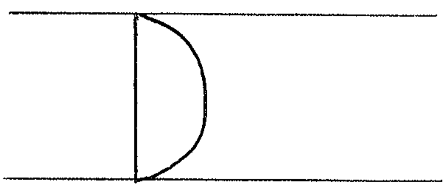
• MOTO TURBOLENTO

↳ dopo aver fatto una media temporale, il profilo di velocità (spaziale) →



$\alpha = 1{,}05 \div 1{,}06 \sim 1$

• MOTO LAMINARE



$\alpha = 2$

$$Q = \frac{\Omega_A \cdot \Omega_B}{\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_B^2}} \cdot \sqrt{2g\delta}$$

δ : valore letto dal manometro differenziale

$\downarrow$

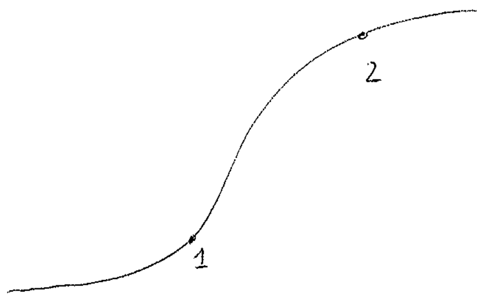
$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$\downarrow$

$$\left[Q \propto \sqrt{\Delta} \right]$$

Th. BERNOULLI per il MOTO VARIO

$$\frac{dH}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$



Fissiamo t, e integriamo

$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} \, ds$$

Esempio: tubo cilindrico con pareti rigide

$Q \neq Q(s)$; $U \neq U(s)$ "non dipendono" da s

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt}$$

$$H(s) = H_0 - \frac{s}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\left[H(2) = H_1 - \frac{s}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \right]$$

... ESERCITAZIONE 3

ES. 5 (foglio esercitazione)

$$J = \underbrace{\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}_{1} = h_1 - h_2$$

$$H_1 = H_2$$

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow h_1 - h_2 = \underbrace{\frac{1}{2g}(U_1^2 - U_2^2)}_{2}$$

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} \quad ; \quad U_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2}$$

1 = 2

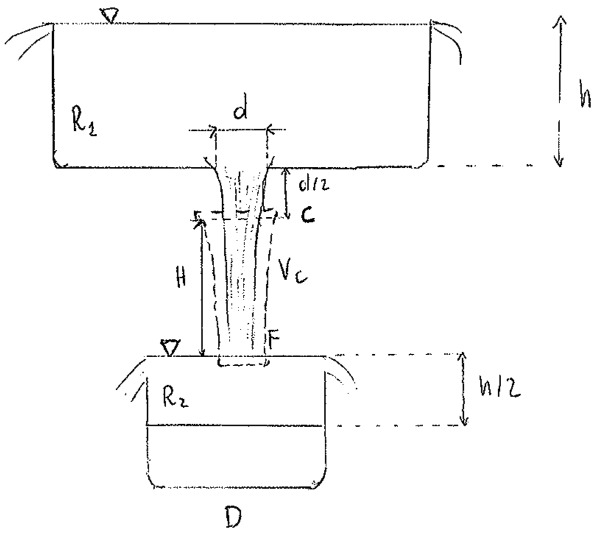
↳ e trovi il Δ

ESERCITAZIONE 4

$\vec{M}$: flusso q.tà di moto

Eq. globale equilibrio dinamico (moto stazionario) : $\vec{P} + \vec{F_c} + (\vec{M_e} - \vec{M_u}) = 0$

ES. 1



Th. Bernoulli : In caduta libera la portata si conserva la sua E_{tot} pure, scendendo lungo z $E_p \searrow$ $E_c \nearrow$ [a contatto con l'atmosfera [dove $p = 0$]]

$E_p : z$

$E_c : \frac{U^2}{2g}$

$\Downarrow$ la sez. si restringe se Q deve rimanere costante

$\Downarrow$ In un tubo verticale il discorso vale, ma cambiano i termini, poiché Q = cost , ma questa volta $p \neq 0$; se D_{tubo} = cost $\rightarrow U = cost$

Th. Bernoulli $\forall$ punto serb. R_1 e sez. contratta C

$$U_c = \sqrt{2g\,(h + d/2)}$$

$$Q = U_c \cdot \Omega_c = U_c \cdot \underset{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)}{\Omega} \cdot C_{cc} = 0{,}214 \ m^3/s$$

[Nel nostro Volume di controllo $\vec{F_c} = 0$ [$p_c = 0$, $p_F = 0$, $p_{est} = 0$]

$$\vec{P} = \vec{M_u} - \vec{M_e}$$

$M = \rho \beta \cdot Q U$ ($\beta = 1$ turbolento)

$$z_A = z_D + R_{CD}(1-\cos\beta) + L\sin\alpha + R_{AB}(1-\cos\alpha) = 1285 \ m$$

$$|F_A| = p_A \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cong 650271 \ N$$

$$|F_B| = p_B \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cong 252048 \ N$$

(p_B si calcola con Bernoulli)

$$|M_A| = |M_B| = \rho Q U_A = 56560 \ N$$

$$\vec{S}_{AB} = \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + (\vec{M}_A - \vec{M}_B)$$

direz. orizzontale

$$\rightarrow (\vec{S}_{AB})_o = F_A + (-F_B\cos\alpha) + M_A - M_B\cos\alpha$$

$$\rightarrow (\vec{S}_{AB})_v = F_B\sin\alpha - P - (-M_B\sin\alpha)$$

direz. verticale

$$|S_{AB}| = \sqrt{(S_{AB})_o^2 + (S_{AB})_v^2} \cong 512 \ kN$$

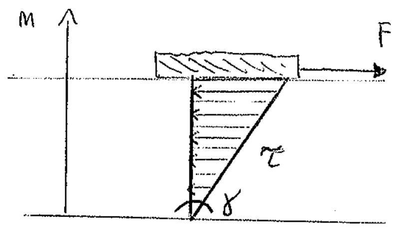
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{(S_{AB})_v}{(S_{AB})_o} \cong 60°$$

MECCANICA dei FLUIDI II

η = VISCOSITA' DINAMICA

ν = VISCOSITA' CINEMATICA

$$\nu = \eta / \rho$$



$$|\tau| = \eta \frac{du}{dn}$$

(Th. lavoro di deformazione)

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x} dx\, dt \qquad d\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x} dt$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} dz\, dt \rightarrow d\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

$$\frac{d\gamma_1}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{d\gamma_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

γ_1, γ_2 (angoli di deformazione)

$$d\gamma = d\gamma_1 + d\gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\tau = \eta \frac{du}{dz} = \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\eta = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho\left(F_x - \frac{Du}{Dt}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} - 2\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\left(-\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

svolgendo le derivate

$$\rho\left(F_x - \frac{Du}{Dt}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}$$

$= 0$ $\rho = \text{cost}$

FLUIDO INCOMPRIMIBILE $\operatorname{div}\cdot\vec{V} = 0$

$$\begin{cases} \rho\left(F_x - \dfrac{du}{dt}\right) = \dfrac{\partial p}{\partial x} - \eta\nabla^2 u \\ \rho\left(F_y - \dfrac{dv}{dt}\right) = \dfrac{\partial p}{\partial y} - \eta\nabla^2 v \\ \rho\left(F_z - \dfrac{dw}{dt}\right) = \dfrac{\partial p}{\partial z} - \eta\nabla^2 w \end{cases}$$

- $$\boxed{\rho\left(\vec{F} - \vec{A}\right) = \operatorname{grad} p - \eta\nabla^2\vec{V}}$$

↳ termine che tiene conto della viscosità!

(FLUIDI REALI)

$$Re \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\nabla^2 u}{Re} \to 0$$

$$\boxed{\frac{\dot{F}_x}{Fr^2} - \frac{d\dot{u}}{d\dot{t}} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial \dot{x}}}$$

N° $Fr = \dfrac{u_0^2}{gl} = \dfrac{\text{forze inerziali}}{\text{forze gravitazionali}}$

N° $Re = \dfrac{\rho u_0 l}{\eta} = \dfrac{u_0 l}{\nu} = \dfrac{\text{forze inerziali}}{\text{forze viscose}}$

EQ. FLUIDI IN LENTO MOVIMENTO

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p - \eta \nabla^2 \vec{v} \qquad \left[\frac{DV}{Dt} = 0 \right]$$

$$\downarrow$$

$$x) \quad \rho\left(-g \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{\gamma} \nabla^2 u$$

$$\partial/\partial x \left(z + p/\gamma \right) = \eta/\gamma \, \nabla^2 u$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\eta}{\gamma} \nabla^2 u} \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = -i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 u = -\frac{\gamma i}{\eta}}$$

Relazioni nei condotti

$$\tau = \gamma R i$$

$$i = -\frac{dh}{ds}$$

carichi piezometrici

es (R) -> [sez. circolare]

$$R = \frac{\Omega}{B}$$

area bagnata

contorno bagnato

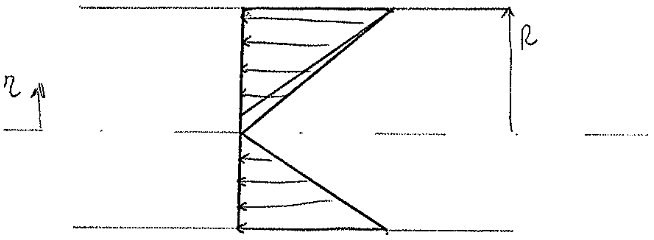
Raggio idraulico

$$\Omega = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$B = \pi d$$

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$$

$\tau(R)$



$[\,0 < r \leq R\,]$

$$\tau_{max} = \gamma \frac{r}{2} \cdot i$$

$$\tau = \tau_{max} \frac{r}{R}$$

$$\tau = \tau(\eta, \rho, \bar{u}_m, r_f, \ell, \varepsilon)$$

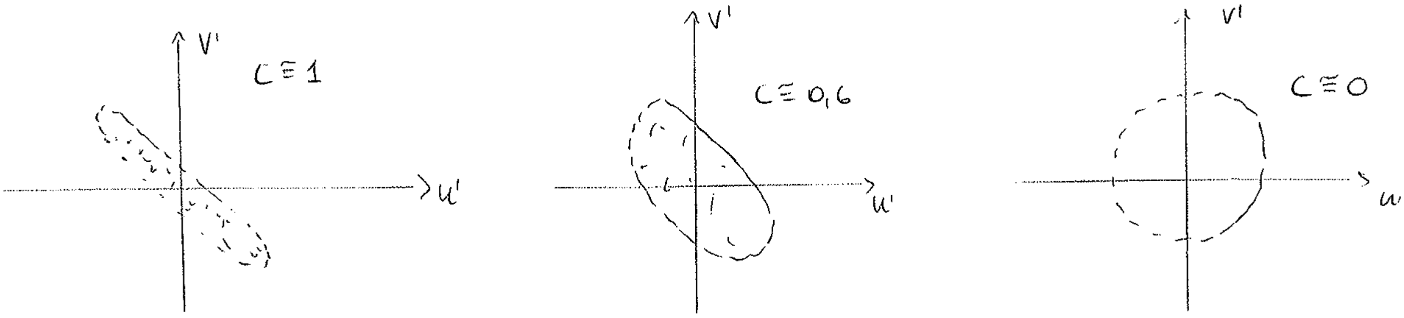
rugosità

fattore di forma

$r_s = \varepsilon/\ell$ (ε/d) "scabrezza relativa"

$$i = \frac{\bar{u}_m^2}{2g} \cdot \frac{f(Re, r_s)}{d}$$

$$C = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \cdot \sqrt{\overline{v'^2}}}$$ coeff. di correlazione



$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u \, dt \qquad \bar{u}' = \frac{1}{T}\int_0^T u' \, dt$$

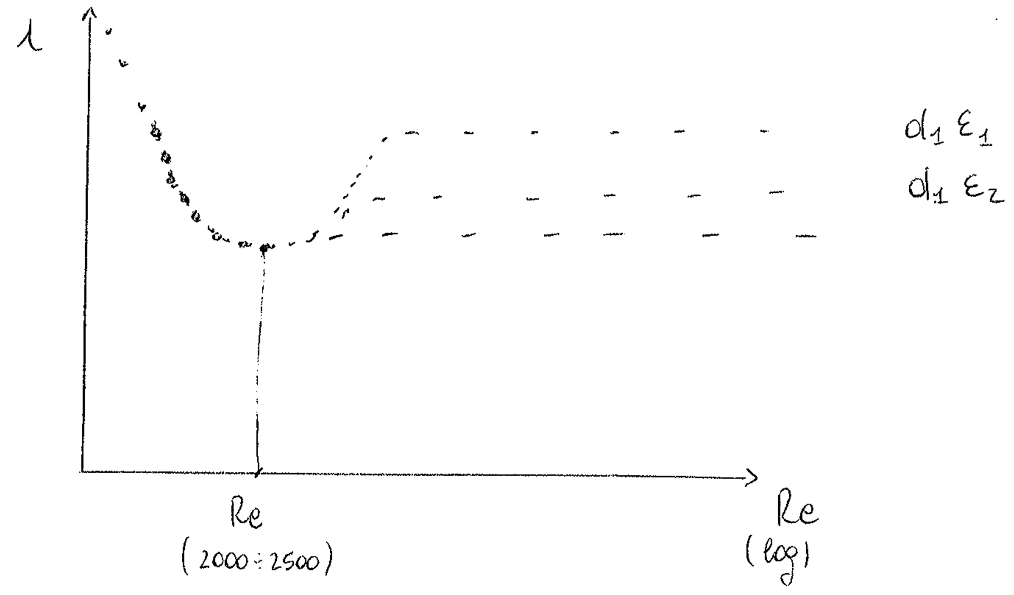
$$u' = A \operatorname{sen}(\omega t) \quad \rightarrow \quad \bar{u}' = 0$$

$$v' = B \operatorname{sen}(\omega t) \quad \rightarrow \quad \bar{v}' = 0$$

$$\overline{u'v'} = AB \operatorname{sen}^2(\omega t) \neq 0$$

$$\overline{u}'^2 \neq 0 \quad ; \quad \overline{v}'^2 \neq 0$$

$$\tau_{TURB} = \rho \, \overline{u'v'}$$



Per valori del numero di Re piccoli fino (2000 ÷ 3000) i valori di λ ottenuti sono coincidenti per tutti i casi e sono indipendenti da ε_s

$\hookrightarrow \lambda = \lambda(Re)$ MOTO LAMINARE

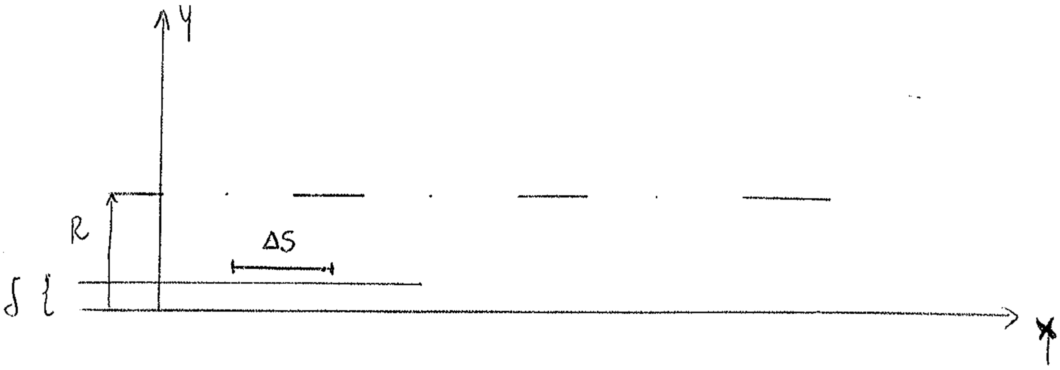
$$i = \frac{\bar{u}_m^2}{2g} \cdot \frac{\lambda(Re)}{d} \rightarrow \lambda(Re) = \frac{2gdi}{\bar{u}_m^2} = \frac{2gdi}{u_m \cdot \frac{\gamma i R^2}{8\eta}}$$

$$\lambda(Re) = \frac{64\eta}{\bar{u}_m \rho d} = \frac{64}{Re}$$

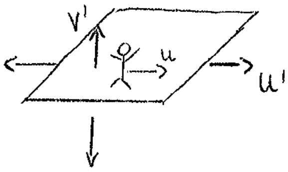
Per valori del numero Re elevati (circa $> 10^5$), dove il moto turbolento è completamente sviluppato, il valore di λ (l'andamento) di una singola curva rimane costante (orizzontale rettilineo). Cioè l'λ non dipende da Re

$\lambda = \lambda(\varepsilon_s)$ MOTO TURBOLENTO

[redacted]



Le grandezze osservabili sono le stesse che trovo spostandomi da piano all'altro → esse sono indipend. da z



$$F = ma \times \hat{i}$$

$$F_x = m a_x$$

$$F = \rho \, \Delta S \, v' \, dt \, \frac{du'}{dt}$$

$$F \, dt = \rho \, \Delta S \, v' \, dt \, u'$$

$$\tau_i = \frac{F}{\Delta S} = \rho v' u' = \rho \overline{v' u'} = \rho \overline{u'^2}$$

$$|u'| \Delta S = |v'| \Delta S \Rightarrow |u'| = |v'|$$

Teoria di Prandtl:

$$u'_{efficace} = \sqrt{\overline{u'^2}} = m y^{\alpha} \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^{\beta}$$

$$m y^{\alpha} \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^{\beta} = \frac{\tau}{\rho} \Rightarrow \alpha = \beta = 2$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = m y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$ [τ_0 in prossimo della [redacted] fine dello spessore δ] → $$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{m} \, y \, \frac{d\bar{u}}{dy}$$

EQ. INDEFINITA della DINAMICA per fluidi NEWTONIANI

- fluidi newtoniani : $\tau = \eta \dfrac{du}{dy}$

$$\boxed{\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \operatorname{div} \Phi} \qquad \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \right)$$

↓ (scritture equivalenti)

$$\boxed{\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \operatorname{grad}(p) - \underbrace{\eta \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \eta \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u})}}$$

ho esplicitato i termini dovuti alla viscosità del fluido

- Se aggiungiamo l'ipotesi di fluido incomprimibile ($\rho = cost$) $\rho(x,y,z,t)$

↳ $\operatorname{div} \vec{u} = 0$

$$\boxed{\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \operatorname{grad}(p) - \eta \nabla^2 \vec{u}}$$ EQ. NAVIER - STOKES

Integriamo l'eq. di Navier-Stokes in dV :

Scritta con la notazione

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

(Integrando in dV) :

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} = 0$$

↳ forze superficie dovute agli sforzi σ e τ

Navier - Stokes :

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \operatorname{grad}(p) - \eta \nabla^2 \vec{u}$$

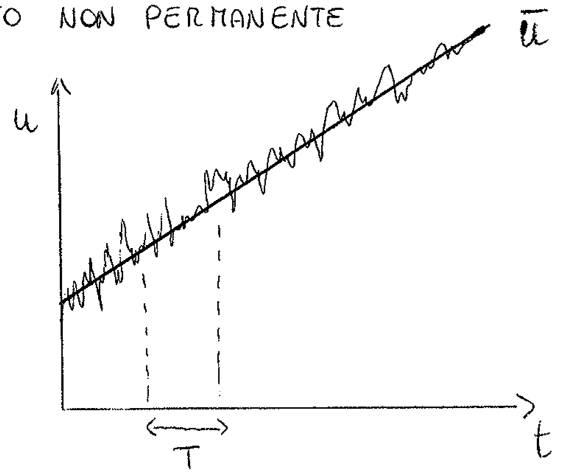
(Integrando in dV)

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi}_p + \int_V \eta \nabla^2 \vec{u} = 0$$

↳ dovuti solo dalla pressione

→

MOTO NON PERMANENTE



$u = \bar{u} + u'$

↳ non dev'essere troppo elevato ho perdo l'informazione di $\bar{u}$ (potrei vederla orizzontale)

Nei tubi [$T = 1 \div 0{,}1$ s]

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

Anche la pressione può essere definita come

$$p = \bar{p} + p'$$

$\bar{u}' = 0$

↳ $\bar{u}' = \frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (u - \bar{u})\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \bar{u}\,dt = \bar{u} - \frac{1}{\cancel{T}}\bar{u}\cdot\cancel{T} = 0$

$\bar{u}'^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u'^2\,dt > 0$ → definisce l'intensità della turbolenza I

$$I_x = \frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{\bar{u}} \quad ; \quad I_y = \frac{\sqrt{\bar{v}'^2}}{\bar{v}}$$

Es. $u' = \sin t$ $(\bar{u}' = 0)$

$u'^2 = \sin^2 t$ $(\bar{u}'^2 \neq 0)$
$\quad\quad >$

⟶

$$m(v_f - v_i) = \int \rho v' dA\, dt\, (u_B - u_A) \qquad u' = u_A - u_B$$

$$= \int \rho v' dA\, dt\, (-u') = -\int \rho u'v' dA\, dt$$

[$\vec{F}\, dt = m\, d\vec{v}$ th. dell' impulso]

$$\vec{F} = -\int \frac{\rho u'v' dA\, \cancel{dt}}{\cancel{dt}} = -\int \rho u'v' dA \longrightarrow \text{Sforzo turbolento}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\vec{F}}{dA} = -\int \rho u'v'$$

[Sforzo dovuto alla turbolenza]

Nel moto turbolento l'equilibrio non e' più istantaneo, ma vale in un tempo caratteristico T [nelle applicazioni praticamente istantaneo]

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} = 0 \qquad (1) \qquad \longrightarrow \quad \frac{1}{T}\int_0^T (1) = 0 \\ \text{oppure} \\ \vec{P} + \vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi}_p - \int \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dA = 0 \qquad (2) \qquad \longrightarrow \quad \frac{1}{T}\int_0^T (2) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

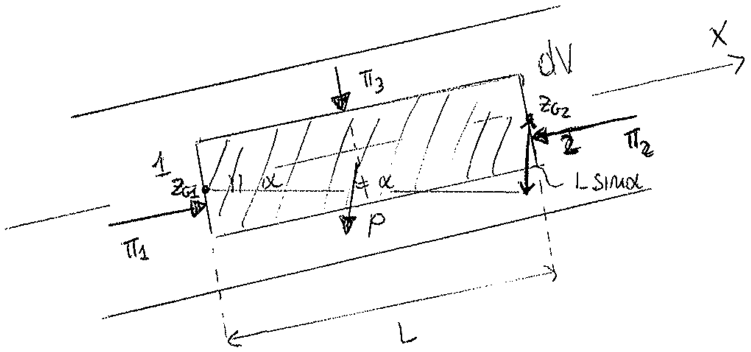
$$\vec{P} + \vec{\Pi}_{\bar{p}} + \vec{I}_{\bar{u}} + \vec{M}_{\bar{u}} + \underbrace{\int_A \rho \overline{\vec{u}' u'_n}\, dA - \int_A \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\, dA}_{\text{termini che rappresentano le resistenze al moto}} = 0$$

termini che rappresentano le resistenze al moto (si oppongono)

↓

FORZA di TRASCINAMENTO della corrente nel volume V in movimento

a) MOTO UNIFORME



$A_1 = A_2 = A$

Se moto uniforme $\vec{I} = 0$, $\vec{M} = 0$

$$\vec{T} = \vec{P} + \vec{\Pi}_{\bar{p}} = \vec{P} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_3$$

FORZA di TRASCINAMENTO

$$\vec{T} = \int \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} dA - \int \rho \underbrace{\overline{\vec{u}' u'_n}}_{/\!/ \vec{x}} dA \quad \Rightarrow \quad \vec{T} \;/\!/\; \vec{x}$$

($\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ // $\vec{x}$)

$\vec{x}$) $T = -\vec{P}\sin\alpha + p_1 A_1 + p_2 A_2 = -\gamma A L \sin\alpha + p_1 A + p_2 A$

$(z_{G_2} - z_{G_1})$

$$T = \gamma A \left[z_{G_1} - z_{G_2} + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right]$$

$$T = \gamma A [\, h_1 - h_2 \,]$$

$$T = \gamma A \underbrace{\frac{h_1 - h_2}{L}}_{=i} \cdot L = \gamma V i$$

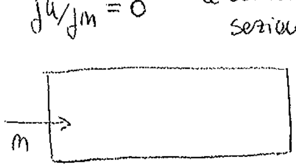
A = area di base

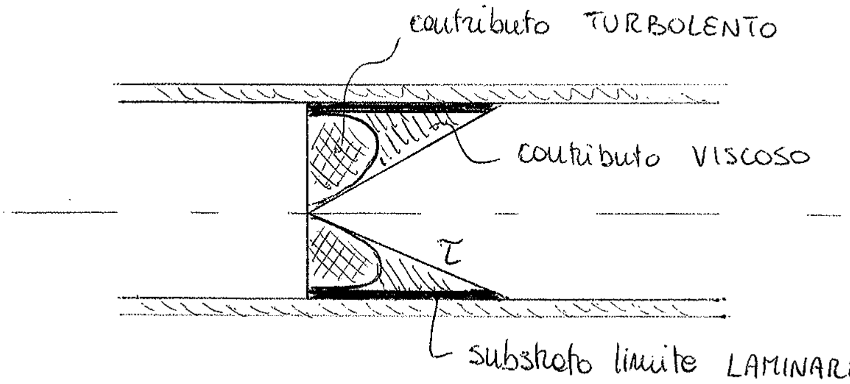
$$T = \gamma V i = \int_A \eta \frac{\partial u}{\partial n} dA - \int_A \rho \overline{\vec{u}' u'_n} dA$$

solo sulla sup. laterale

(i contributi sulle sez. trasversali non sono nulli, ma la loro somma sì)

(moto uniforme) $\partial u / \partial n = 0$ il contributo sulle sezioni trasversali è = 0





$$\tau = \rho\overline{u'v'} - \eta \frac{d\bar{u}}{dr}$$

substrato limite LAMINARE: in questa zona non c'e' sforzo turbolento perche' alla parete $v' = 0$

Profilo di velocita': moto uniforme (condotto circolare)

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{\gamma}{\eta}\frac{r}{2}i + \rho/\eta\ \overline{u'v'}$$

integriamo...

cond. contorno $[\,u = 0 \quad \text{se } r = R\,]$ *

$$\bar{u} = -\frac{\gamma}{\eta}\frac{r^2}{4}i + \int_0^r \frac{\rho}{\eta}\overline{u'v'}\,dr + C_1$$

$$* \quad C_1 = \gamma/\eta\ i\ \frac{r^2}{4} - \int_0^{D/2} \rho/\eta\ \overline{u'v'}\,dr$$

$$\bullet \quad \boxed{\bar{u} = \gamma/\eta\ i\left(\frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4}\right) - \int_r^{D/2} \rho/\eta\ \overline{u'v'}\,dr}$$

MOTO TURBOLENTO

Se faccio gli stessi passi con $u' = v' = 0$ e con $\bar{u} = u$ posso ottenere l'espressione per il moto laminare

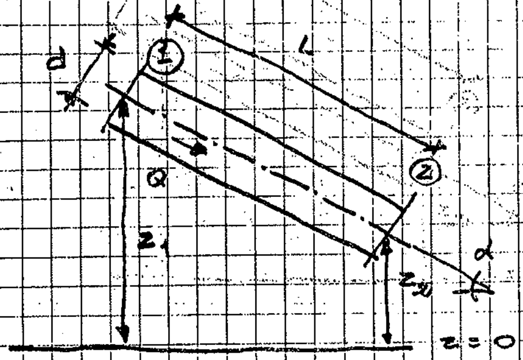
$$\bullet \quad \boxed{u = \gamma/\eta\ i\left(\frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4}\right)}$$

MOTO LAMINARE

→

ESERCIZIO N° 1

La portata Q di un olio avente viscosità ν percorre in regime laminare una condotta rettilinea di diametro d.



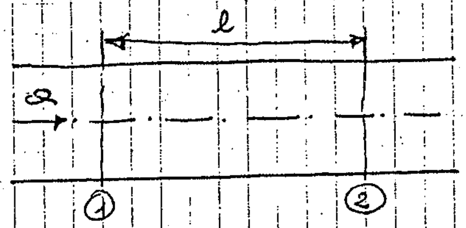
Trovare l'angolo che la condotta deve formare con la orizzontale affinché la pressione si mantenga costante lungo l'asse.

$\nu = 0.0002 \ m^2/s$

$d = 18 \ mm$ $\quad Q = 45 \ cm^3/sec$

$\gamma = 860 \ Kg/m^3$

ESERCIZIO N° 2



$D = 0.8 \ m$

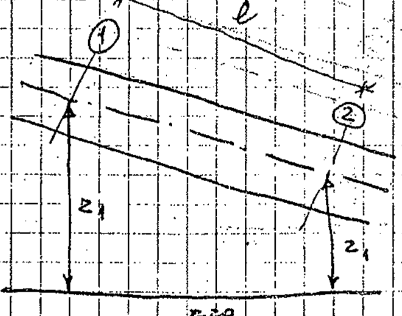
$\gamma_0 = 800 \ Kgf/m^3$ $\quad \nu = 250 \times 10^{-6} \ m^2/s$

$h_1 - h_2 = 0.83 \ m$

$l = 1000 \ m$

Un condotto cilindrico di diametro D è percorso in moto laminare da un liquido di peso specifico γ_0 e viscosità ν.
Tra le sezioni ① e ② distanti l la differenza di carico piezometrico è $h_1 - h_2$.
Calcolare la portata, la τ_{max} alla parete e la forza totale resistente tra le sezioni ① e ②.

ESERCIZIO N° 3



Calcolare la differenza tra i carichi piezometrici necessari al movimento della portata Q di acqua a 20°C nel tratto di tubazione di diametro d nei due seguenti casi:

1) $d = 0.15 \ m$ $\quad Q = 0.015 \ m^3/s$ $\quad l = 100 \ m$
$\varepsilon_s = 1.5 \times 10^{-4} \ m$ $\quad \nu = 1.015 \times 10^{-6} \ m^2/s$

2) $d = 0.45 \ m$ $\quad \varepsilon_s = 0.002 \ m$ $\quad Q = 0.262 \ m^3/s$
$l = 1000 \ m$ $\quad \nu = 1.015 \times 10^{-6} \ m^2/s$