NUMERO: 1297

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Piemontese

MATERIA: Elettrotecnica, Prof.Giaccone

GRANDEZZE ELETTRICHE, CONVENZIONI

Modello a parametri concentrati: problema di campo differenziale risolto grazie a semplificazioni spaziali del fenomeno elettromagnetico.

(es: Dimensione finita del dispositivo)

- Si può usare il modello a parametri concentrati se il tempo di propagazione del segnale elettrico "τ" è molto minore del periodo dell'onda (o frequenza).

$\tau \ll \gamma$;

"Si dice che il modello è a parametri concentrati se il tempo di propagazione è «istantaneo»".

CORRENTE ELETTRICA:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$[A] = [C \cdot s^{-1}]$

Ampere — Coulomb

CORRENTE CONTINUA: $i = \frac{dq}{dt} = cost.$

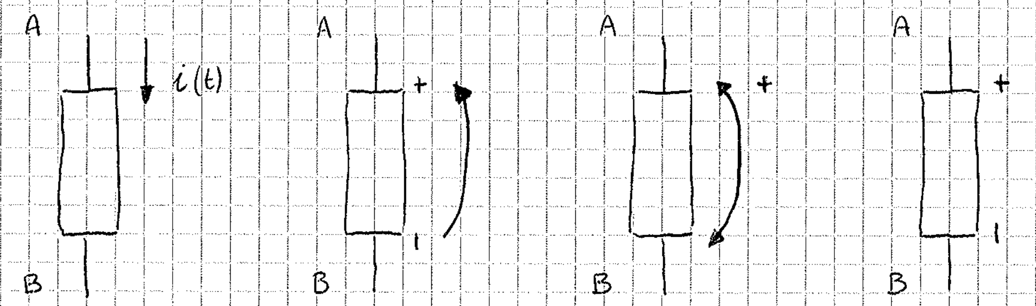
TENSIONE ELETTRICA:

Si vuole spostare un elettrone da un punto A ad un punto B. La TENSIONE è il lavoro per unità di carica necessario ad ottenere tale spostamento.

energia necessaria per spostare le cariche da A a B

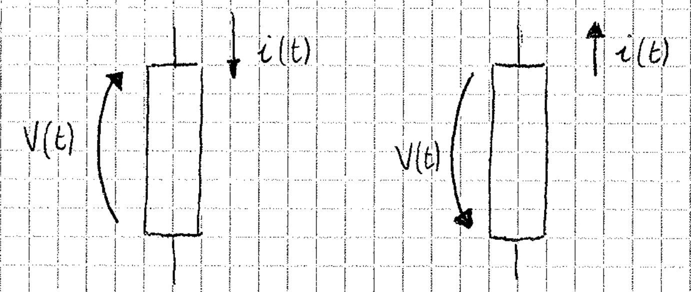
$$V_{AB} = \frac{dw}{dq} = \frac{W_{AB}}{q}$$

CONVENZIONI

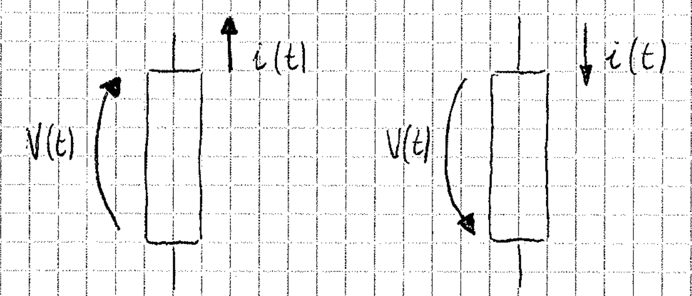


$$u(A) - u(B) = V_{AB}$$

CONV. UTILIZZATORI



CONV. GENERATORI



La POTENZA è definita dal prodotto = $V(t) \cdot i(t)$, perciò il suo segno dipende da quelli di "V" e "i".

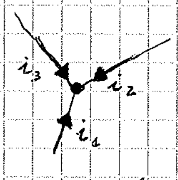
$$\left.\begin{array}{ll} P > 0 & \text{GENERATA} \\ P < 0 & \text{ASSORBITA} \end{array}\right\} \text{CONV. GENERATORI}$$

$$\left.\begin{array}{ll} P < 0 & \text{GENERATA} \\ P > 0 & \text{ASSORBITA} \end{array}\right\} \text{CONV. UTILIZZATORI}$$

LEGGI di KIRCHOFF per le CORRENTI e per le TENSIONI

LKC: deriva dal principio che una carica non si crea e non si distrugge (legge di conservazione della carica)

→ si applica la legge al nodo



"... la somma algebrica delle correnti rispetto al nodo è nulla ..."

Bisogna scegliere per convenzione il verso e il segno di una corrente:

es. corr. entrante POSITIVA
corr. uscente NEGATIVA

$$(i_1 + i_2 + i_3 = 0) \iff \sum_{k=1}^{N} i_k = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} \iff q = \int i \, dt$$

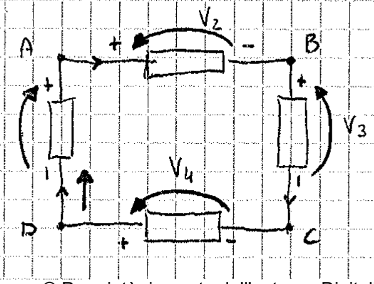
$$\int (i_1 + i_2 + i_3) \, dt = 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$ [legge di conservazione della carica]

(Si potrebbe anche dire che la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti)

LKT: deriva dal principio di conservazione dell'energia.

→ si applica la legge ad una maglia



→ 1) IDENTIFICARE una maglia
2) DEFINIRE un verso convenzionale di percorrenza
3) ESEGUIRE somma algebrica

→

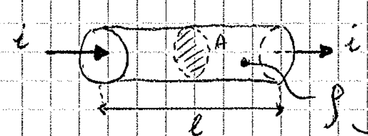
2. CONS. POTENZA :
$$\sum P_G(t) = \sum P_A(t)$$
$$\underbrace{\sum V_k i_k}_{\text{CONV. GEN}} = \underbrace{\sum V_J i_J}_{\text{CONV. ASSOR}}$$
$$\sum_{k=1}^{N} P_k(t) = 0$$
(usando una sola convenzione)

COMPONENTISTICA

1) COMPONENTI <u>ATTIVI</u> : <u>generano</u> potenza / energia

2) COMPONENTI <u>PASSIVI</u> : <u>assorbono</u> potenza / energia
- a. → compon. dissipativi (trasformano l'energia)
- b. → compon. conservativi (immagazzinano energia)

2 a.) RESISTENZA ELETTRICA IDEALE
(capacità di opporsi al flusso di carica elettrica)



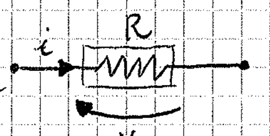
→ Resistività [proprietà del materiale]

$A\,[m^2]$ $l\,[m]$ $\rho\,[\Omega \cdot m]$ ← Ohm

$$\underline{R = \rho \cdot \frac{l}{A}}$$ (II LEGGE di OHM)

– EQ. COSTITUTIVA (nota la corrente trovo la tensione relativa o viceversa)

"legame tra corrente e tensione del dipolo"



studiato in conv. degli utilizzatori

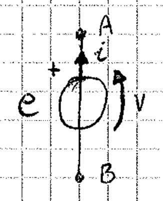
$$V(t) = f(i, t)$$
$$i(t) = h(V, t)$$

LEGGE di OHM: (I LEGGE)
$$V(t) = R(i,t) \cdot i(t) \rightarrow \underline{V = R \cdot i}$$
(con $R = cost$ e $i = cost$)

$\frac{1}{R} = G$ ⟶ CONDUTTANZA $[S]$ ⟶ Siemens
(o CONDUCIBILITÀ)

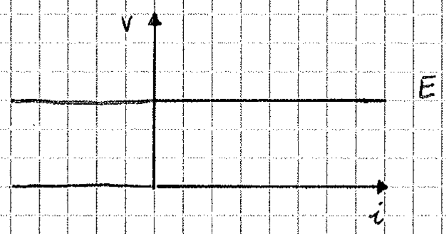
1) BATTERIA IDEALE (o GENERATORE IDEALE di TENSIONE)

⟶ impone e mantiene un valore di tensione tra due punti



$e = u_A - u_B = V_{AB}$ EQ. COSTITUTIVA $(\forall i)$ *
$(e = V)$

$\boxed{e = E \geq 0}$

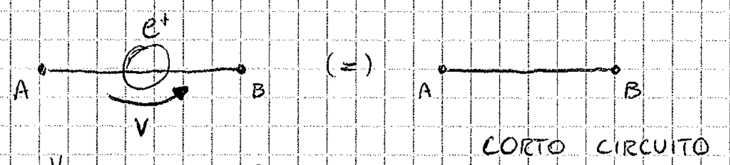


$$\begin{cases} P = V \cdot i \\ V = e = E \end{cases} \rightarrow P = E \cdot i > 0 \text{ o } < 0$$

E (≥ 0) i $(\gtrless 0)$ (<0)

dall'equazioni si evince che
IDEALE: è in grado di gestire livelli di potenza infinita * (modello fisico)

CASO $e = E = 0$

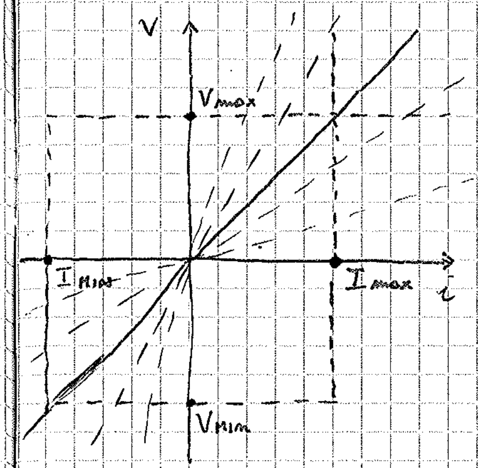


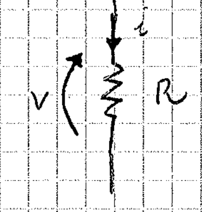
$V_{AB} = u_A - u_B = 0$

$u_A = u_B$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 144

RESISTENZA REALE





$$P = Ri^2$$

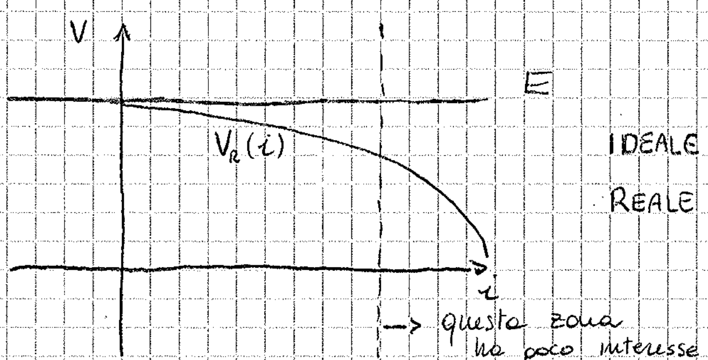
$$\begin{cases} P = Vi \\ V = Ri \end{cases}$$

Correnti troppo elevate aumentano di un valore i^2 la potenza da dissipare, ciò vuol dire che all'aumentare della corrente aumenta la quantità di calore da dissipare (perché il conduttore si scalda).

(L'andamento è simile a quello ideale soltanto che ha un dominio limitato in cui lavora).

Il limite tensionale è dovuto al fatto che nelle reti elettriche i cavi conduttori sono isolati con materiali dielettrici, che schermano il campo elettrico generato, se la tensione è troppo alta il valore del campo E potrebbe essere troppo alto per quel materiale dielettrico che si comporterebbe da "conduttore".

GENERATORE $\boxed{\text{REALE}}$ di TENSIONE



→ questa zona ha poco interesse (perché decade bruscamente il valore di tensione)

E si può approssimare in serie con V_R (Maclaurin)

$$V_R(i) = V(i=0) + \left.\frac{dV}{di}\right|_{i=0}$$ (Sviluppo arrestato al I ordine)

- $V(i=0) = E$; $\left.\frac{dV}{di}\right|_{i=0} = -(R_G)$ "resistenza interna"

ha le dimensioni di una resistenza negativa (non avrebbe sign. fisico) allora

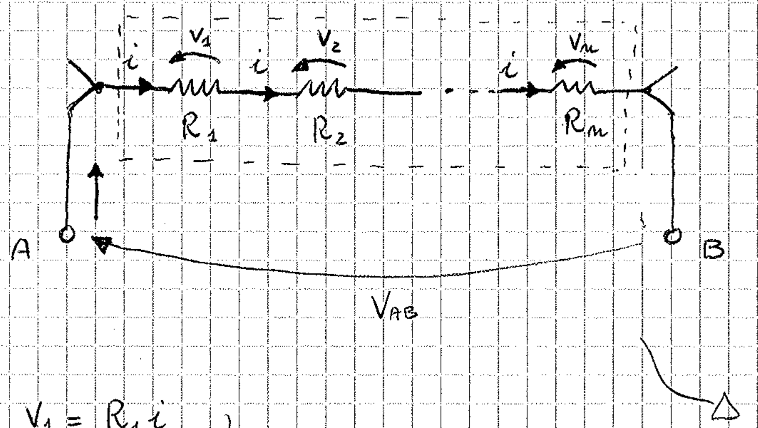
→

CONNESSIONE DI BIPOLI

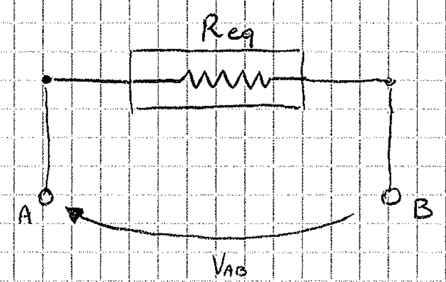
- SERIE
- PARALLELO

SERIE: due o più bipoli sono connessi in serie se appartengono allo stesso lato.
↳ in ciascun bipolo fluisce (lo stesso valore di corrente) la stessa corrente.
$(= i)$

SERIE di RESISTENZE



$V_1 = R_1 i$
$V_2 = R_2 i$
$V_n = R_n i$
eq. costitutive



LKT: $V_{AB} - V_1 - V_2 \dots - V_N = 0$

$V_{AB} = V_1 + V_2 \dots + V_N$

$V_{AB} = R_1 i + R_2 i \dots + R_N i$ (insieme di eq. costitutive)

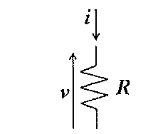
$V_{AB} = (R_1 + R_2 \dots R_N) i$

- $V_{AB} = R_{eq} \cdot i$ $\qquad R_{eq} = \sum_{n=1}^{N} R_n$

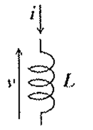
PRINCIPIO di EQUIVALENZA: "Due bipoli diversi tra loro, ma descritti dalla stessa eq. costitutiva, sono del tutto equivalenti tra loro rispetto ai due morsetti AB"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 144

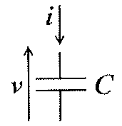
EQUAZIONI COSTITUTIVE DEI BIPOLI



$$v = Ri$$
$$\bar{Z} = R$$

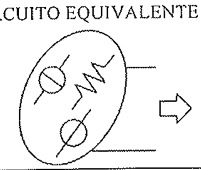


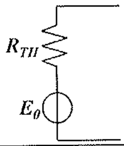
$$v = L\frac{di}{dt}$$
$$\bar{Z} = jX_L = j\omega L$$

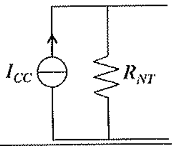


$$i = C\frac{dv}{dt}$$
$$\bar{Z} = -jX_c = -j\frac{1}{\omega C}$$

CIRCUITO EQUIVALENTE DI THEVENIN E NORTON

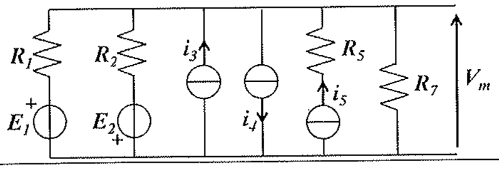






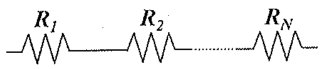
$$E_0 = R_{TH} I_{CC}$$
$$R_{NT} = R_{TH}$$

TEOREMA DI MILLMAN

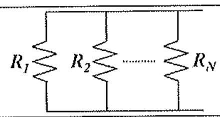


$$V_m = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + i_3 - i_4 + i_5}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7}}$$

CONNESSIONI DI RESISTENZE

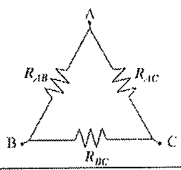


$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{N} R_k$$



$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}}$$

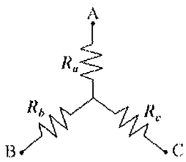
TRIANGOLO



TRASFORMAZIONE STELLA → TRIANGOLO

$$R_{AB} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_bR_c}{R_c} \qquad R_{AC} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_bR_c}{R_b} \qquad R_{BC} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_bR_c}{R_a}$$

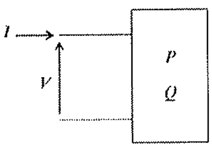
STELLA



TRASFORMAZIONE TRIANGOLO → STELLA

$$R_a = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \qquad R_b = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \qquad R_c = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

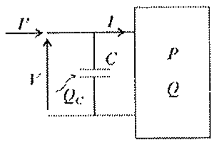
MONOFASE - POTENZE



$$P = VIcos\varphi$$
$$Q = VIsin\varphi$$
$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

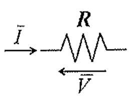
$$tg\varphi = \frac{Q}{P} \rightarrow \varphi$$
$$cos\varphi = \frac{P}{S}$$
$$sin\varphi = \frac{Q}{S}$$

RIFASAMENTO MONOFASE a $cos\varphi'$

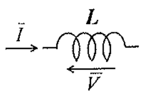


$$Q_C = P(tg\varphi' - tg\varphi)$$

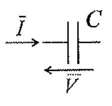
CALCOLO POTENZE COMPLESSE



$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$



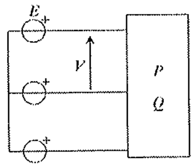
$$Q_L = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L}$$



$$Q_C = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C}$$

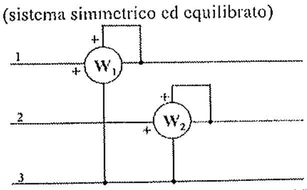
(valido per Xc positiva)

TRIFASE SIMMETRICO ED EQUILIBRATO



$$P = \sqrt{3}VIcos\varphi = 3EIcos\varphi$$
$$Q = \sqrt{3}VIsin\varphi = 3EIsin\varphi$$
$$S = \sqrt{3}VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$
$$tg\varphi = \frac{Q}{P} \rightarrow \varphi$$

INSERZIONE ARON
(sistema simmetrico ed equilibrato)



1ª legge

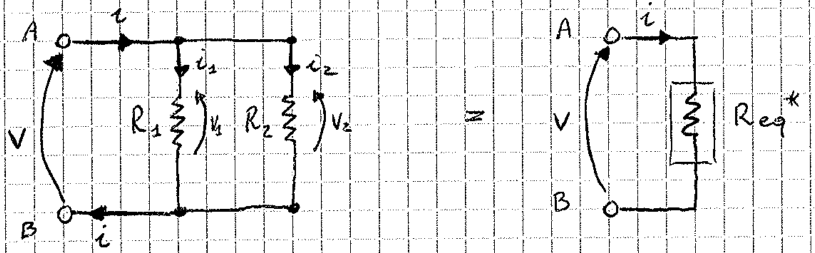
$$\begin{cases} W_1 + W_2 = P \\ \sqrt{3}(W_1 - W_2) = Q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W_1 = 1/2\left(P + Q/\sqrt{3}\right) \\ W_2 = 1/2\left(P - Q/\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

2ª legge

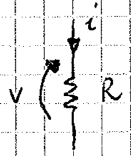
$$W = -Q/\sqrt{3}$$

Relazione tra tensioni concatenate e tensioni di fase sistema di generatori simmetrico	Relazione tra corrente di linea e corrente di fase (per carico equilibrato a triangolo)
$V = \sqrt{3}E$	$I_{FASE} = \frac{I_{LINEA}}{\sqrt{3}}$

PARALLELO DI RESISTENZE



$V = V_1 = V_2$



$V = Ri \rightarrow i = \frac{V}{R} = GV$

$G = \frac{1}{R} \quad [S]$

$i_1 = G_1 V_1 = G_1 V$

$i_2 = G_2 V_2 = G_2 V$

$i_N = G_N V_N = G_N V$

LKC (A) : $i = i_1 + i_2 \ldots + i_N$

$i = G_1 V + G_2 V \ldots + G_N V$

$i = (G_1 + G_2 \ldots + G_N) V$

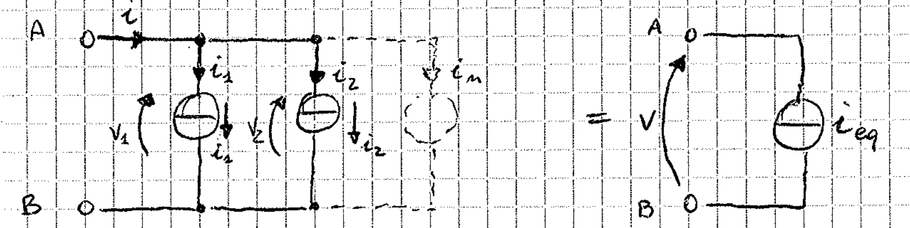
• $i = G_{eq} \cdot V$

$G_{eq} = \sum_{n=1}^{N} G_n$

$* \quad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} (R_k^{-1})} = \sum \frac{1}{R_k}$

$R_{eq} \leq \min\{R_1, R_2\}$

PARALLELO DI GENERATORI DI CORRENTE



$V_1 = V_2 = \dots V_n$

LKC (A) : $i = i_1 + i_2 \dots + i_n$

- $i = i_{eq} \quad (\forall V)$ $\qquad i_{eq} = \sum_{k=1}^{N} i_k$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 144

<u>CASO</u>: $R_A = R_B = R_C = R_y$

$$R_{AB} = R_{BC} = R_{AC} = \underline{R_\Delta = 3 R_y}$$

Trasf. TRIANGOLO → STELLA $\Delta \rightarrow y$

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

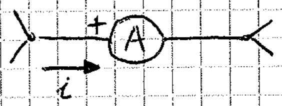
$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

<u>CASO</u>: $R_{AB} = R_{BC} = R_{AC} = R_\Delta$

$$R_A = R_B = R_C = \underline{R_y = \frac{R_\Delta}{3}}$$

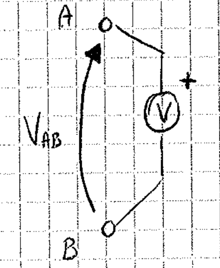
STRUMENTI DI MISURA

- CORRENTE: AMPEROMETRO (si inserisce in un lato del circuito)



(+, ⊕, ∗)

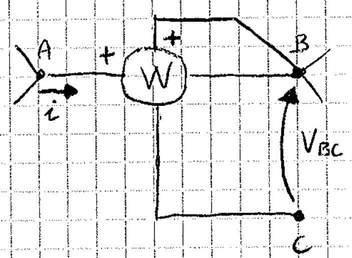
- TENSIONE: VOLTMETRO (si "attacca" a due terminali)



(+, ⊕, ∗) → lo metto io per convenzione arbitraria (in quel caso considero il punto A ad un potenziale maggiore)

$$V_{AB} = u_A - u_B$$

- POTENZA: WATTMETRO



$$P = V_{BC} \cdot i$$

Posso ricavare le correnti per sostituzione ...

$$V = V_3 = R_3 i_3$$

$$i_1 = \frac{E_1 - R_3 i_3}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{E_2 - R_3 i_3}{R_2}$$

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad \rightarrow \quad \frac{E_1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} \cdot i_3 + \frac{E_2}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \cdot i_2 = i_3$$

$$\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right) = \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2}\right) i_3$$

$$\frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2} = i_3 \left(\frac{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1}{R_1 R_2}\right)$$

- $$i_3 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1}$$

OMOGENEITA':

- $i' = k i$

  $V' = R i' \rightarrow R k i \rightarrow k V$

- $V' = k V$

ADDIVITA':

$V_1 = R i_1$

$V_2 = R i_2$

$V' = R i'$

con $i' = i_1 + i_2$

$$V' = R(i_1 + i_2) = V_1 + V_2$$

OMOGENEITA' + ADDITIVITA' = LINEARITA'

$\rightarrow (V = R i)$

PRINC. SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI:

"Date una rete si possono ricavare i valori delle variabili circuitali come le somme degli N contributi singoli dovuti ad ogni elemento circuitale (agli N) (generatori)

CALCOLO I_3'' $(E_1 = 0)$: (Vd. CALCOLO I_3')

- $E_2 = I'' R''_{eq}$

  $\hookrightarrow I'' = \dfrac{E_2}{R''_{eq}}$

(LKC: $I'' = I_2'' + I_3''$)

$$I_3'' = I'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = E_2 \cdot \underbrace{\frac{1}{R''_{eq}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}}_{K_2\ [\Omega^{-1}]}$$

$$I_3 = I_3'(E_1) + I_3''(E_2) = \underline{K_1} E_1 + \underline{K_2} E_2$$

A NUMERATORE: - ho 4 contributi, come 4 sono i generatori (corrente e tensione)

- i generatori di tensione vanno divisi per la resistenza associata al proprio lato

- il segno dei vari contributi va preso in relazione al segno dato della tensione di Millman

A DENOMINATORE: - L'inverso delle resistenze circuitali, tutte di segno positivo (Resistenze con gener. di tensione e Resistenze isolate (cioè con gen. di tensione = 0))

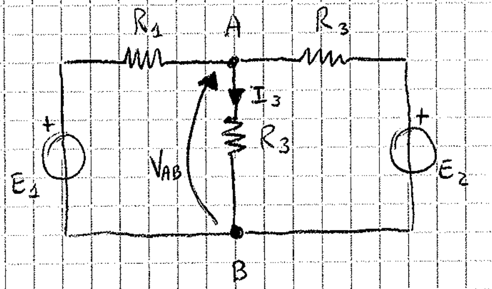
↓

eccetto:

↓

(Eventuali Resistenze in serie con generatori di corrente non contribuiscono!)

[APPLICAZ. TH. di MILLMAN]:



Voglio conoscere I_3

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$ (Th. di Millman)

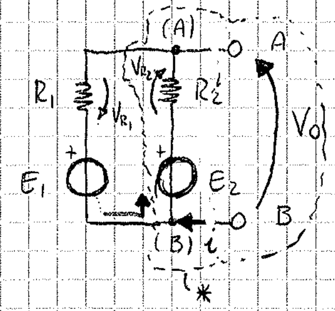
- $I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3}$

P.S. a NUMERATORE: se un generatore di tensione* non avesse in serie una resistenza la tensione di Millman $V_{AB} = E_1$

↓

*(es. E_1)

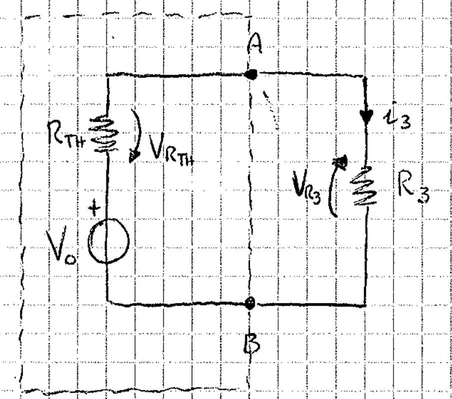
Identificazione V_0 → tensione a vuoto (apro il circuito dove ho deciso di sostituire)



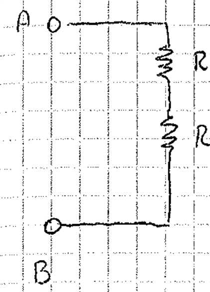
$$\left.\begin{aligned} V_{R_1} &= R_1 i \\ V_{R_2} &= R_2 i \\ E_2 + V_{R_2} + V_{R_1} - E_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

$$\left.\begin{aligned} * \quad V_0 - V_{R_2} - E_2 &= 0 \\ V_{R_2} = R_2 i &= R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}\right\} \quad \underline{V_0} = E_2 + V_{R_2}$$

Uso la sostituzione e calcolo:

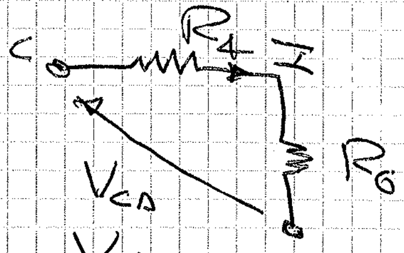


$$\left.\begin{aligned} V_{R_3} + V_{R_{TH}} - V_0 &= 0 \\ V_{R_3} &= R_3 i_3 \\ V_{R_{TH}} &= R_{TH} \cdot i_3 \end{aligned}\right\} \quad i_3 = \frac{V_0}{R_3 + R_{TH}}$$



R', R'' serie

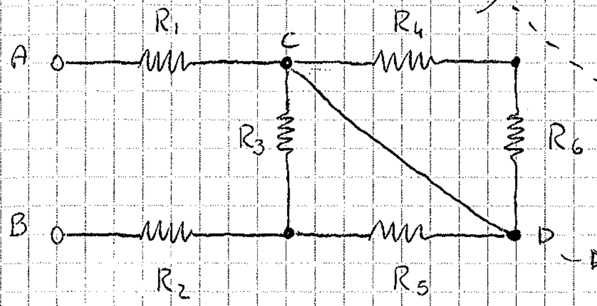
$\Rightarrow R_{eq} = R' + R'' = 18,91 \; [k\Omega]$



$$I = \frac{V_{CD}}{R_4 + R_6} = 0$$

* non influiscono sul circuito

ES. 3



R_4, R_6 sono due resistenze in serie connesse tra due terminale con diff. di potenziale nullo, $\Rightarrow$ *

$V_{CD} = 0$

$R_1 = 10 \; [m\Omega]$ $R_4 = 20 \; [m\Omega]$

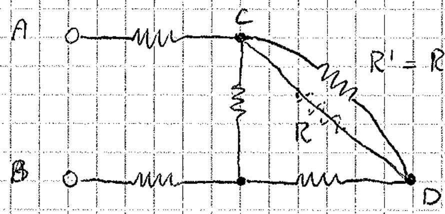
$R_2 = 10$ " $R_5 = 20$ "

$R_3 = 20$ " $R_6 = 20$ "

$\Rightarrow$ il corto circuito (CD) by-passa solo le resistenze in parallelo col cortocircuito stesso.

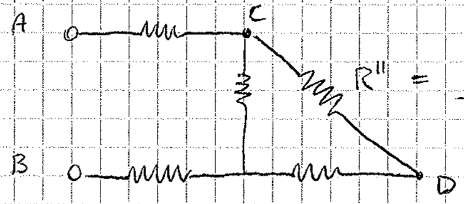
$\Rightarrow$ (R_3, R_5 non lo sono)

R_4, R_6 serie

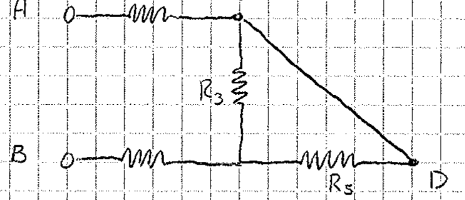


$R' = R_4 + R_6$

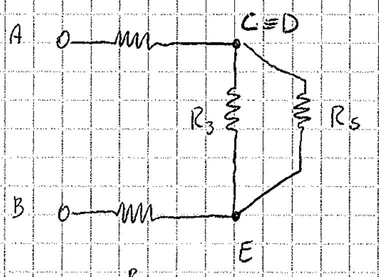
$R = 0$



$$R'' = \frac{R' R}{R' + R} = 0$$

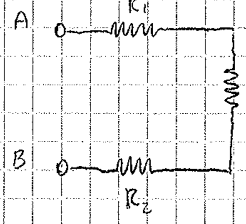


$u_C = u_D \qquad C \equiv D$



$$R_3 // R_5 : \quad R''' = \frac{R_3 R_5}{R_5 + R_3} = \frac{R}{2} \; *$$

$R = R_3 = R_5$

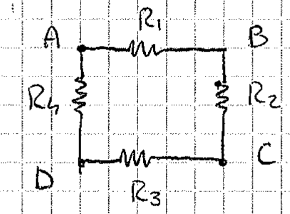


$\Rightarrow R_{AB} = R_1 + R_2 + R''' = 30 \; [m\Omega]$

* Se ho N resistenze in parallelo di valore tutte uguali: $R_{eq} = \frac{R}{N}$

La Resistenza equivalente di un circuito dipende strettamente da quali sono i nodi rispetto ai quali la voglio calcolare, se questi non sono specificati (cioè non mi si dice dove applico la tensione) non posso calcolarla.

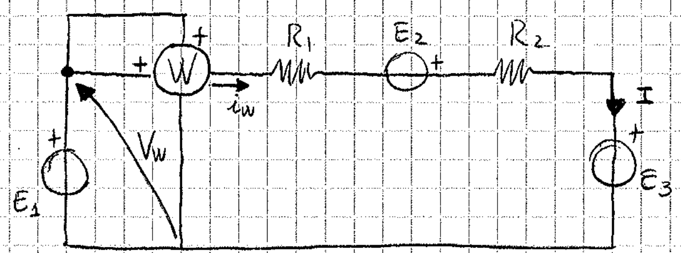
ES.



$R_{eq}(AC) = (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)$

$R_{eq}(AB) = R_1 // (R_2 + R_3 + R_4)$

ES. 5



$E_1 = 30$ [V] $\quad R_1 = 3$ [Ω]

$E_2 = 10$ " $\quad R_2 = 5$ [Ω]

$E_3 = 8$ "

$P_W = 120$ [W] ; I ?

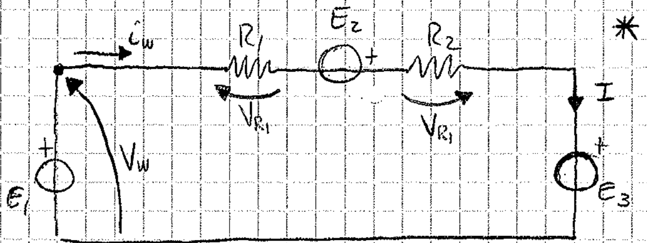
V_{R_1} , V_{R_2} ?

[I versi di V_W, i_W li deduco da dove sono posizionati i due + intorno al Wattmetro]

↳ il Wattmetro non altera il circuito *

$P_W = V_W \cdot i_W$

*



$\Rightarrow \quad I = i_W \qquad V_W = E_1$

• $I = \frac{P_W}{V_W} = \frac{P_W}{E_1} = 4$ [A]

$V_{R_1} = R_1 I = 12$ [V]

$V_{R_2} = - R_2 I = -20$ [V]
(perchè conv. generatori)

$P_{E_1} = E_1 I = 120$ [W] G ↳ generata

$P_{E_2} = E_2 I = 40$ [W] G

$P_{E_3} = E_3 I = 32$ [W] U ↳ assorbita

$P(R_1) = V_{R_1} \cdot I = 48$ [W] U

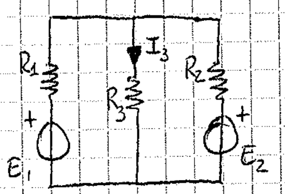
$P(R_2) = V_{R_2} I = -80$ [W] G ↳ assorbita

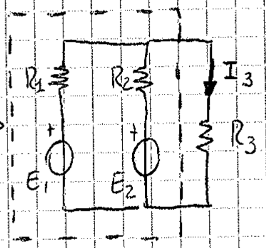
$P_G = P_A$

$(120 + 40 - 80) = (32 + 48)$

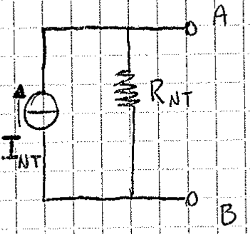
$80 = 80$ ✓

Usiamo la rete test

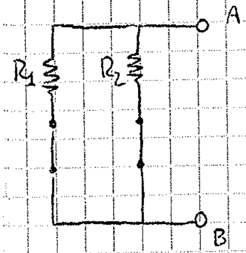




Lo semplifichiamo con un equivalente Norton →

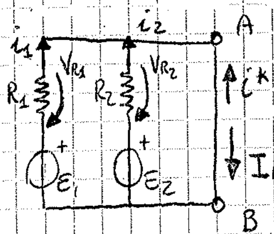


Calcolo della R_{NT}



$$R_{eq} = R_{NT} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Calcolo I_{NT}



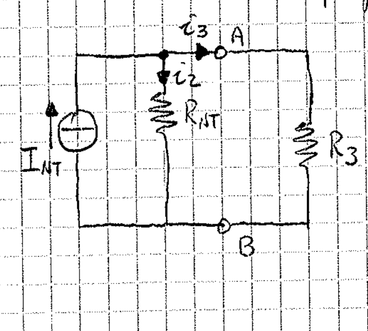
$V^* = 0$ corto circuito AB, definiamo le correnti i_1, i_2 e le tensioni V_{R_1}, V_{R_2}.

LKT $\quad \begin{cases} E_1 - V_{R_1} = 0 \\ V_{R_1} = R_1 i_1 \end{cases} \quad i_1 = \frac{E_1}{R_1}$

LKT $\quad \begin{cases} E_2 - V_2 = 0 \\ V_{R_2} = R_2 i_2 \end{cases} \quad i_2 = \frac{E_2}{R_2}$

LKC : $\quad I_{NT} = i_1 + i_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$

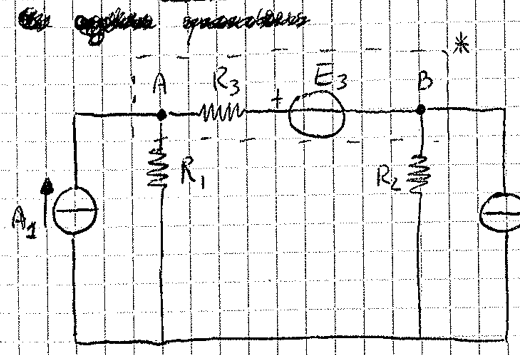
Il circuito totale semplificato con Norton diventa:



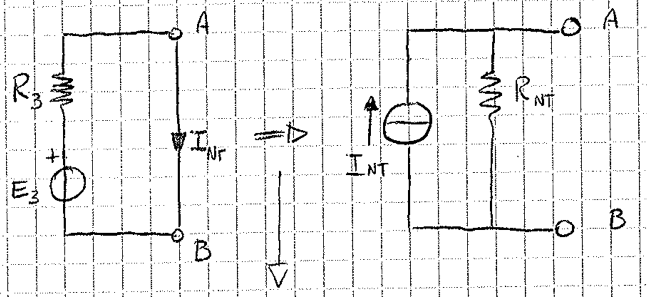
La corrente I_{NT} del generatore ideale si ripartisce tra due resistenze e dunque posso usare la formula del partitore di corrente (con I_{NT} corrente globale) per trovare I_3:

$$I_3 = I_{NT} \frac{R_{NT}}{R_{NT} + R_3}$$

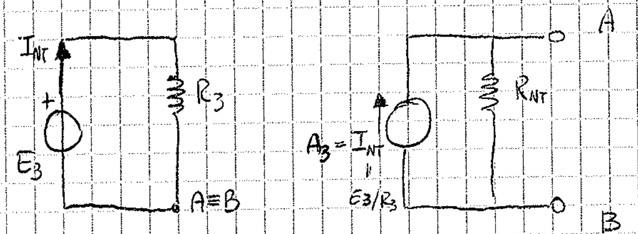
METODO DEL POTENZIALE AI NODI (ANALISI NODALE)



*

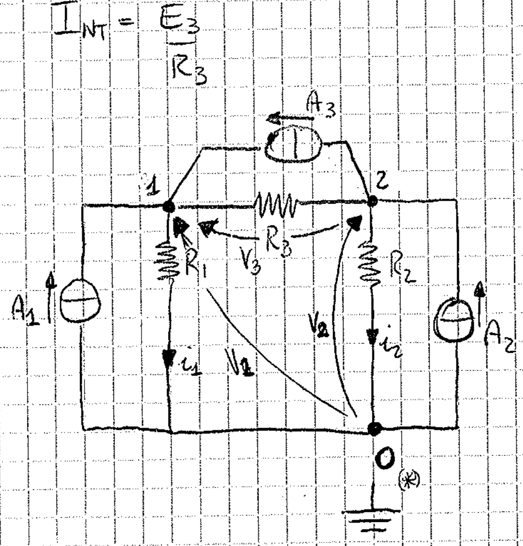


$E_3 = 0 \rightarrow R_{NT} = R_3$



$E_3 = R_3 I_{NT}$

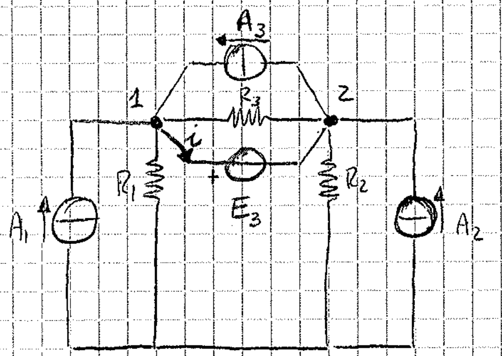
$I_{NT} = \frac{E_3}{R_3}$



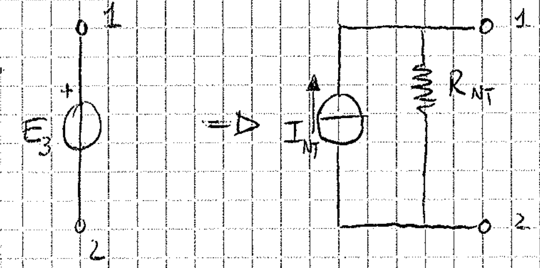
Ora che abbiamo solo generatori di corrente e resistenze possiamo applicare direttamente l'analisi nodale.

↓

Innanzitutto scelgo un nodo di riferimento *

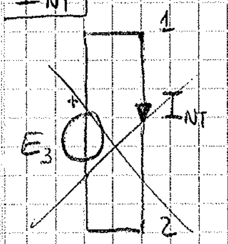


Immaginiamo di volere trasformare questo circuito nel suo equivalente NORTON trasformando il gen. di tensione...



Non posso trasf. il semplice gen. di tensione in un equivalente NORTON

I_{NT}



R_{NT}

$\rightarrow R_{NT} = 0$

$$I_{NT} = \frac{E_3}{R_{NT}} \rightarrow \infty$$

Andiamo a valutare gli effetti di E_3 sul circuito

LKC ① : $A_1 - i_1 - i_3 + A_3 - i = 0 \rightarrow i_1 + i_3 + i = A_1 + A_3$

LKC ② : $A_2 - i_2 + i_3 - A_3 + i = 0 \rightarrow i_2 - i_3 - i = A_2 - A_3$ $\rightarrow$

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} + i = A_1 + A_3 \rightarrow V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_2}{R_3} + i = A_1 + A_3$$

$$\frac{V_2}{R_2} - \frac{V_1 - V_2}{R_3} - i = A_2 - A_3 \rightarrow -\frac{V_1}{R_3} + V_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - i = A_2 - A_3$$

- $E_{jk} = V_j - V_k \rightarrow E_3 = V_1 - V_2$ quindi mi sono tolto una incognita (E_3 noto)

Fissando un istante di riferimento "t_0" posso spezzare l'integrale

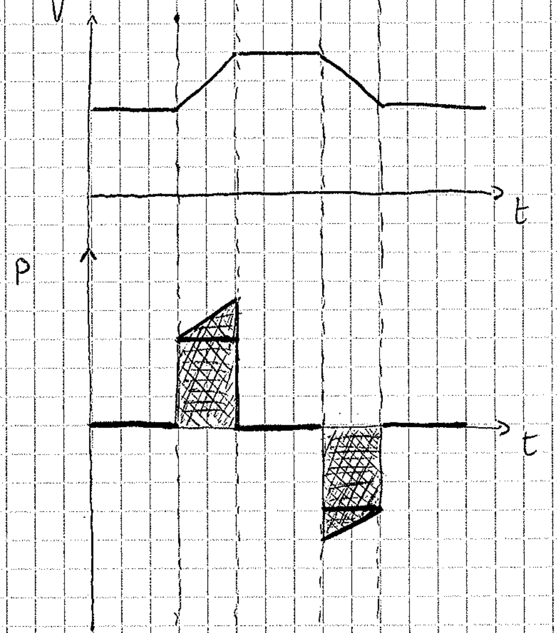
$$V(t) = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\,dt}_{\text{CONDIZIONE INIZIALE}} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

$$V(t) = \underset{\text{tensione iniziale}}{V(t_0)} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

Potenza ed Energia del condensatore

- $$P(t) = V(t)\cdot i(t) = C\,V(t)\cdot\frac{dV(t)}{dt}$$

es.



Il dispositivo è in grado in certi istanti di assorbire potenza, in altri di generarla

(Genera la stessa potenza che accumula?)

↓

Vediamo un bilancio energetico

$$P = \frac{dW}{dt}$$

- $$dW = P\,dt = CV\frac{dV}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right)$$

(è un diff. esatto)

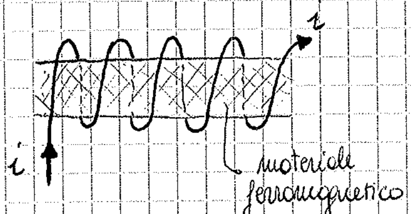
↓

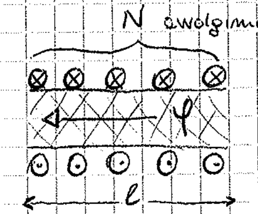
Il bipolo è conservativo
(no fenomeni dissipativi)

⇓

La stessa energia che fornisco, estraggo.

INDUTTORE





φ flusso magnetico generato dalla spira

λ : flusso magnetico concatenato $[Wb] \rightarrow [V \cdot s]$

↳ Weber

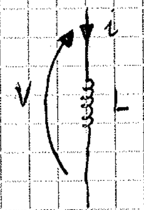
$\lambda = N\varphi$

$\lambda \propto i \rightarrow \bullet\ \lambda = Li$

L = induttanza $[H] = [Wb \cdot A^{-1}]$

↳ Henry

$$\hookrightarrow L = \frac{\mu N^2 S}{l} = N^2 \cdot \mu \cdot \frac{S}{l}$$



L = L(materiale, avvolgimenti, geometria)

$(\mu) \quad (N^2) \quad \left(\frac{S}{l}\right)$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) \qquad [L = cost]$$

- $V = L\dfrac{di}{dt}$ EQ. COSTITUTIVA

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V(t)\, dt$$ FORMA INTEGRALE

Fisso un tempo t_0 di riferimento →

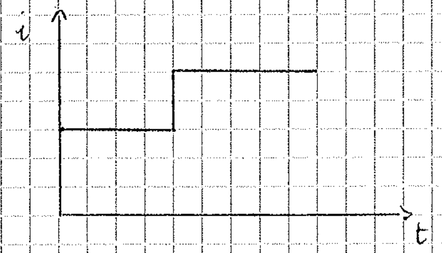
$$P(t) = \frac{dW}{dt}$$

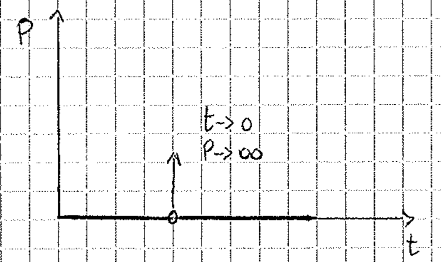
- $$dW = P(t)\,dt = L i \frac{di}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = d\left(\frac{1}{2} L i^2\right)$$

L'energia è un diff. esatto,
cioè il fenomeno è conservativo

$$W = \int_{-\infty}^{t_1} d\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \frac{1}{2} L \left[i^2(t_1) - i^2(-\infty) \right]$$ con $i(-\infty) = 0$ per convenzione

- $$\boxed{W = \frac{1}{2} L i^2}$$

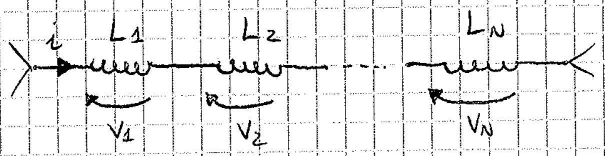




La variabile di stato (i) corrente
dove essere una funzione continua

altrimenti: $P \to \infty$ (NO sign. fisico)

INDUTTORI



$$V_K = L_K \frac{di}{dt}$$

$$V = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \dots + L_N \frac{di}{dt}$$

$$V = (L_1 + L_2 \dots + L_N) \frac{di}{dt}$$

$$L_D \bullet L_{eq} = (L_1 + L_2 \dots + L_N)$$

ANALOGIE di COMPORTAMENTO

capacità — conduttanza

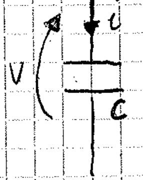
$C \sim G \left(\frac{1}{R}\right)$

induttanza — resistenza

$L \sim R$

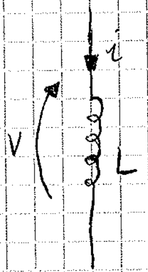
COMPORTAMENTO IN CORRENTE CONTINUA

L_D (i = cost ; V = cost)



$$i = C\,\frac{dV}{dt} = 0$$

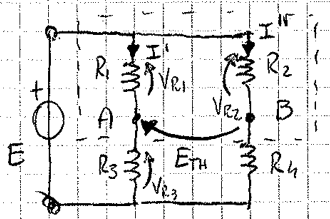
L_D CIRCUITO APERTO



$$V = L\,\frac{di}{dt} = 0$$

L_D CORTO CIRCUITO

E_{TH} : Suppongo di poter conoscere V_{R_1} e V_{R_2}



• $E_{TH} = V_{R_2} - V_{R_1}$

(ma V_{R_1} e V_{R_2} ?)

[Maglia E, V_{R_1}, V_{R_3}] $\rightarrow$ $E - V_{R_1} - V_{R_3} = 0$

↳ $E = V_{R_1} + V_{R_3} = R_1 I' + R_3 I'$

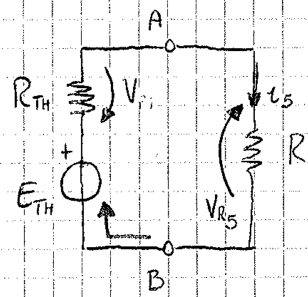
$$I' = \frac{E}{R_1 + R_3}$$

(formula del partitore di tensione resistivo) $V_{R_1} = R_1 I' = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$

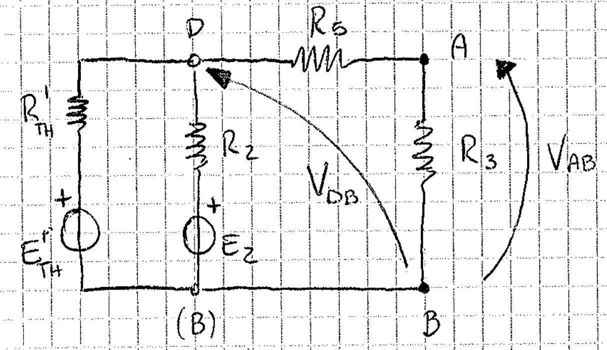
↳ la applico per V_{R_2}: $V_{R_2} = E \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_4}$

$E_{TH} = V_{R_2} - V_{R_1} = 120\ V$

Riattivo R_5, e la connetto alla rete equivalente di Thevenin che ho appena calcolato



$$\begin{cases} E_{TH} - V - V_{R_5} = 0 \\ V = R_{TH} \cdot i_5 \\ V_{R_5} = R_5 \cdot i_5 \end{cases} \Rightarrow i_5 = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_5} = 5\ [A]$$

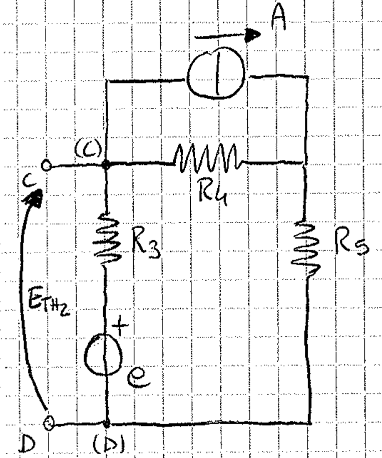


Applico il teorema di Millman per calcolare V_{DB}

$$V_{DB} = \frac{\frac{E_{TH}'}{R_{TH}'} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_{TH}'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(R_5+R_3)}} = 40 \, [V]$$

$$V_{AB} = V_{DB} \frac{R_3}{R_3+R_5} = 20 \, [V]$$

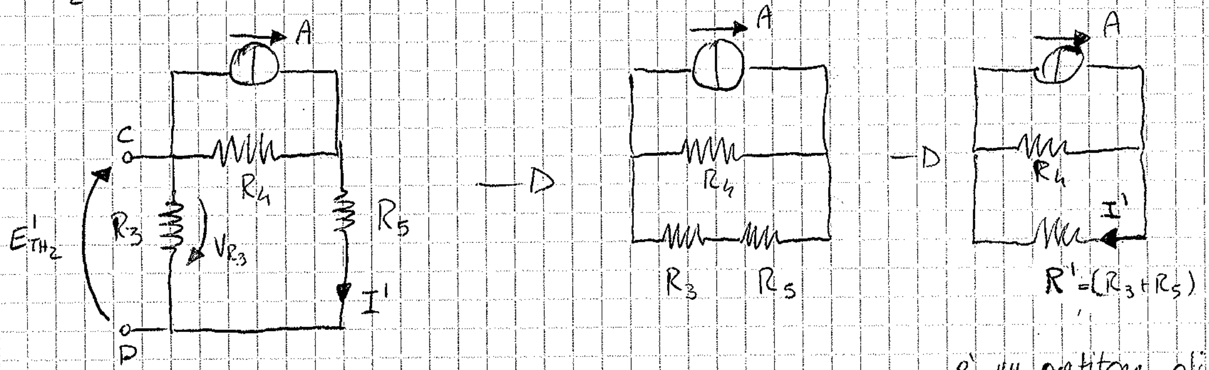
Calcolo E_{TH_2} :
(Rete 2)



Uso sovrap. degli effetti :

$$E_{TH_2} = E'_{TH_2}(A) + E''_{TH_2}(e)$$

$E'_{TH_2}(A)$ con $e=0$



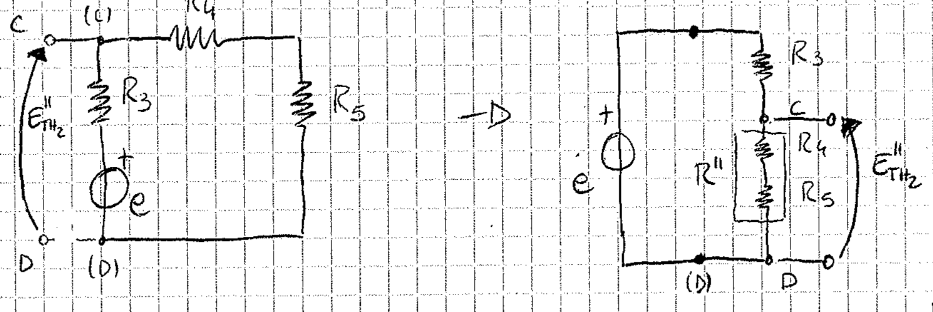
è un partitore di corrente resistivo

$$\downarrow$$

$$I' = A \frac{R_4}{R_4 + R'}$$

$$E'_{TH_2} = -V_{R_3} = -R_3 I' = -\frac{5}{3} \text{ [V]}$$

$E''_{TH_2}(e)$ con $A=0$



$$R'' = R_4 + R_5$$

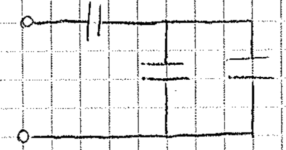
partitore di tensione resistivo

$$E''_{TH_2} = e \frac{R''}{R_3 + R''} = \frac{2}{3} e$$

RETI DINAMICHE

Ad ogni rete dinamica è possibile attribuire un ordine di rete N, che equivale al numero di componenti dinamici "indipendenti".

es.



$N = 1$ perché posso definire C_{eq}

Posso ricondurre le varie eq. caratteristiche e leggi ad una sola eq. dinamica del sistema:

U : variabile di stato

N : rete di ordine N

$$a_N \cdot \frac{d^N U}{dt^N} + a_{N-2} \frac{d^{N-1} U}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dU}{dt} + a_0 U = b$$

↳ forzante (continua o periodica) del sistema

La soluz. di questa equazione è data da:

$$U(t) = U_p + U_t$$

U_p : integrale particolare

U_t : integrale dell'omogenea associata

↳ legata alla componente transitoria

↓

[si trova ponendo $b = 0$]

U_p = cost se b = cost.

U_p = periodico se b = periodico

Posso scrivere i termini $\frac{d^N U}{dt^N} = p^N$ e trasformare l'eq. differenziale in una algebrica dove posso identificare N radici $\{p_1; p_2; \dots; p_N\}$

$$a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Se le radici sono distinte la soluzione U_t è del tipo

$$U_t = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_N e^{p_N t}$$

Questa è una soluz. transitoria ottenuta annullando le cause cioè con $b = 0$

(Per far sì che la soluz. si estingua $\{p_1, p_2 \dots p_N\}$ devono essere negativi in $\mathbb{R}$ o con Re negativa in $\mathbb{C}$)

$R \cdot C = [s]$ ⟶ $\boxed{R \cdot C = \tau}$ ⟶ COSTANTE di TEMPO

t/τ = V adimensionale (esponente)

La soluzione generale diventa quindi:

$$V(t) = E + K e^{-t/\tau}$$

per trovare K ho bisogno delle cond. iniziale

es. * $\begin{cases} V(t) = E + K e^{-t/\tau} \\ V(t=0) = 0 \end{cases}$

Siccome la variabile di stato varia con continuità:

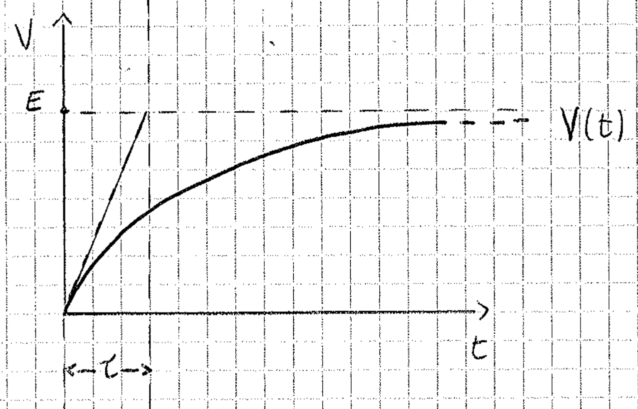
$$V(t=0^-) = V(t=0^+) = 0$$

$$* \quad 0 = V_p(t=0^+) + V_t(t=0^+) = E + K e^{-0/\tau} = E + K$$

$$\boxed{K = -E}$$

$$\boxed{\bullet \; V(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

CARICA CONDENSATORE



$t \to \infty \quad V(t) = V_\infty = E$

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0}$ = tangente a $V(t)$

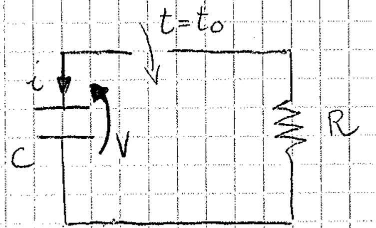
Quando finisce il transitorio?

In teoria mai (poiché V(t) rimane asintotica ad E) ma per convenzione il transitorio si estingue quando

$$V(t) = 0{,}98\,E \quad (V(t) = 0{,}98\,V_p)$$

SCARICA CONDENSATORE

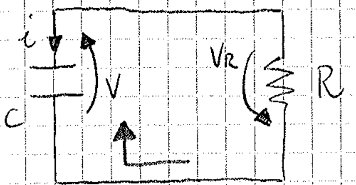
Scollego il condensatore dal "circuito di carica" una volta carico, e lo collego ad un altro circuito.



$V(t=t_0) = E$

Analizziamo $V(t)$ per $t > t_0$

$\boxed{t > t_0}$



$$\left.\begin{aligned} & V + V_R = 0 \\ & V_R = Ri \\ & i = C\frac{dV}{dt} \end{aligned}\right\} \quad V + RC\frac{dV}{dt} = 0 \qquad \tau = RC$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad V(t) = V_t + V_p$$

V_p : cost. $\quad \frac{dV}{dt} = 0 \qquad \frac{V_p}{\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad V_p = 0 \qquad (V_\infty = 0)$

V_t : Sost: $\quad \frac{dV}{dt} = p \;;\; V = 1 \qquad p + \frac{1}{\tau} = 0 \qquad p = -1/\tau$

$$V_t = K e^{-(t-t_0)/\tau}$$

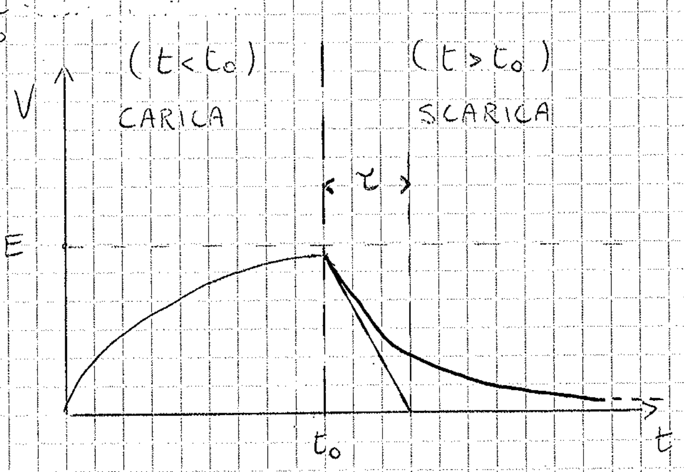
$$\begin{cases} V(t) = V_p + V_t = K e^{-(t-t_0)/\tau} \\ V(t=t_0) = E \end{cases}$$

$\rightarrow$ cond. iniziale dettata dalla fine del transitorio precedente

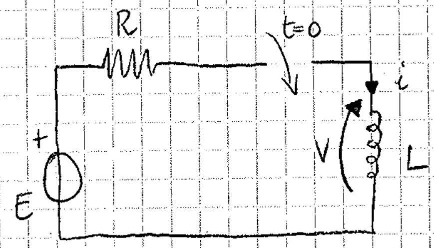
$$E = K e^{-(t_0-t_0)/\tau} \rightarrow K = E$$

$$\boxed{V(t) = E\, e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

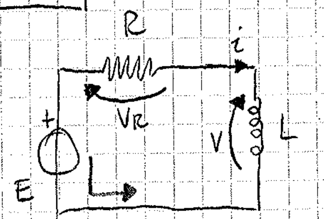
$[t > t_0]$



CARICA dell' INDUTTORE



$\boxed{t>0}$: (il tasto si e' chiuso)



$$\begin{cases} V + V_R - E = 0 \\ V_R = R i \\ V = L \dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

- $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L} \cdot i = \dfrac{E}{L}$ con $\dfrac{L}{R} = \tau$ [s]

$$i = i_p + i_t$$

i_p: dell' integrale particolare; i_t: integrale dell' omogenea associata -> (studio dell' evoluzione libera del circuito)

i_p: -> deve essere COSTANTE

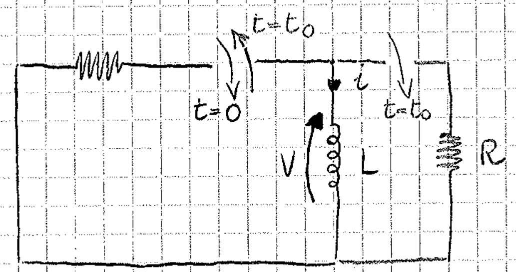
$$\underbrace{\cancel{\frac{di_p}{dt}}}_{=0} + \frac{R}{L} i_p = \frac{E}{L} \quad \rightarrow \quad \bullet \; i_p = \frac{E}{R}$$

i_t:

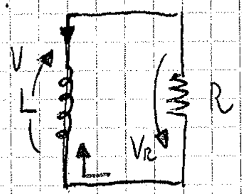
$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \qquad \frac{di}{dt} = p \qquad \rightarrow$$

$$i = 1$$

SCARICA INDUTTORE



$\boxed{t > t_0}$:



$$\begin{cases} V + V_R = 0 \\ V_R = Ri \\ V = L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i = 0 \qquad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i = i_p + i_t$$

i_p: $\rightarrow$ COSTANTE

$$\underbrace{\cancel{\frac{di_p}{dt}}}_{=0} + \frac{i_p}{\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad \bullet\ i_p = 0$$ (perchè non ci sono generatori)

i_t :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \qquad \text{con} \quad \frac{di}{dt} = p$$

$$i = 1$$

$$p + \frac{1}{\tau} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad p = -\frac{1}{\tau}$$

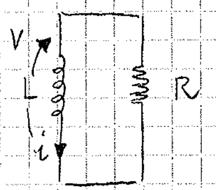
Vediamo il bilancio energetico dell'induttore...

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R}\right)^2$$

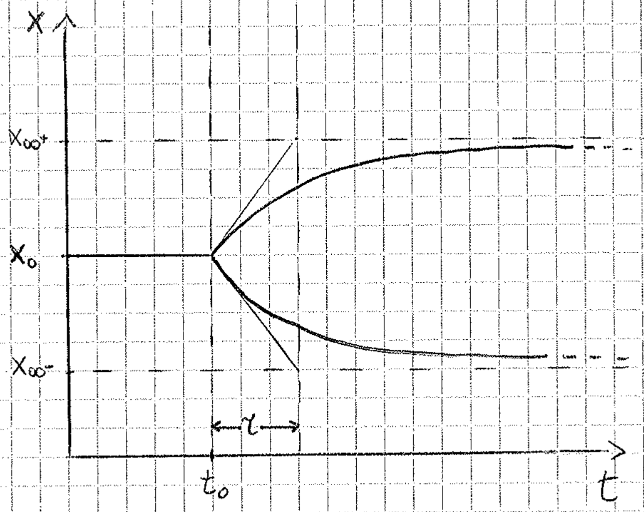
$$P_R(t) = R i^2(t) = R\left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)^2$$

$$W_R(t) = \int_{t_0}^{\infty} P_R(t)\, dt = \int_{t_0}^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2(t-t_0)}{\tau}}\, dt = \frac{E^2}{R}\left(-\frac{\tau}{2}\right) \int_{t_0}^{\infty} -\frac{2}{\tau} e^{-\frac{2(t-t_0)}{\tau}}\, dt$$

$$\underline{W_R(t)} = \frac{E^2}{R}\left(-\frac{L}{2R}\right)\left[e^{-\frac{2(t-t_0)}{\tau}}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2} L \frac{E^2}{R^2}\left[\overset{e(\infty)}{0} - \overset{e(t_0)}{1}\right] = \underline{\frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R}\right)^2}$$



Anche l'induttore (come il condensatore) conserva l'energia



$X_\infty > X_0$ CARICA

$X_\infty < X_0$ SCARICA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 144

$$\sin(\overbrace{\omega t + \varphi}^{x}) = \sin(\overbrace{\omega t + \varphi}^{x} + \omega T)$$

$$\sin(x) = \sin(x + \omega T)$$

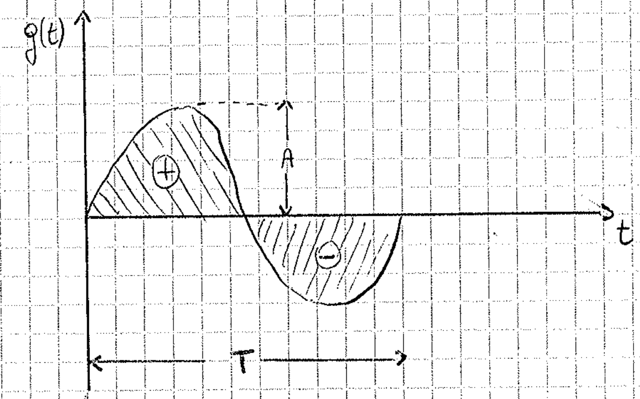
$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE SENO

$$\omega T = 2\pi$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f}$$

ω = freq. angolare o pulsazione



A: ampiezza

$g_{m}(t) = 0$ —> è grandezza alternata

$$G = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{(t+T)} \left[\hat{A}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\right] dt}$$

$$G = \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{T}\int_t^{(t+T)} \sin^2(\omega t + \varphi)\, dt}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$G = \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{2T}\int_t^{(t+T)} 1\, dt - \underbrace{\int_t^{(t+T)} \cos[2(\omega t + \varphi)]\, dt}_{=0}}$$

= 0 (per proprietà di periodicità del coseno)

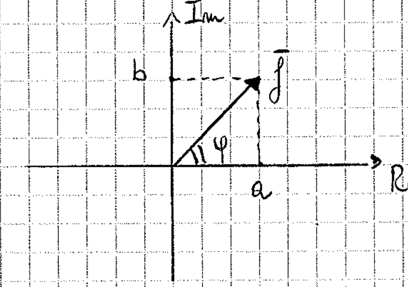
$$G = \sqrt{\frac{\hat{A}^2}{2\cancel{T}} \cdot [\cancel{T}]} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$$

(Vale solo per funzioni sinusoidali)
—> [sen, cos]

NUMERI COMPLESSI

$$\bar{F} = \underset{(Re)}{a} + j\underset{(Im)}{b}$$

$$j = \sqrt{-1}$$



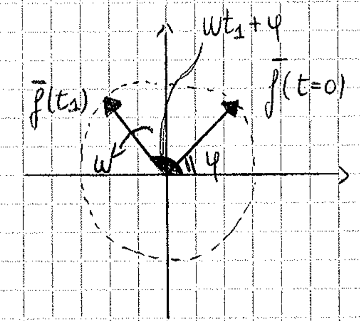
$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \underbrace{[+180°]}_{\text{se si è nel II e III quadrante}}$$

$$\bar{F} = F e^{j\varphi}$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \quad \longrightarrow \quad \bar{F} = \underbrace{F\cos\varphi}_{\substack{a \\ (Re)}} + j\underbrace{F\sin\varphi}_{\substack{b \\ (Im)}} = F(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

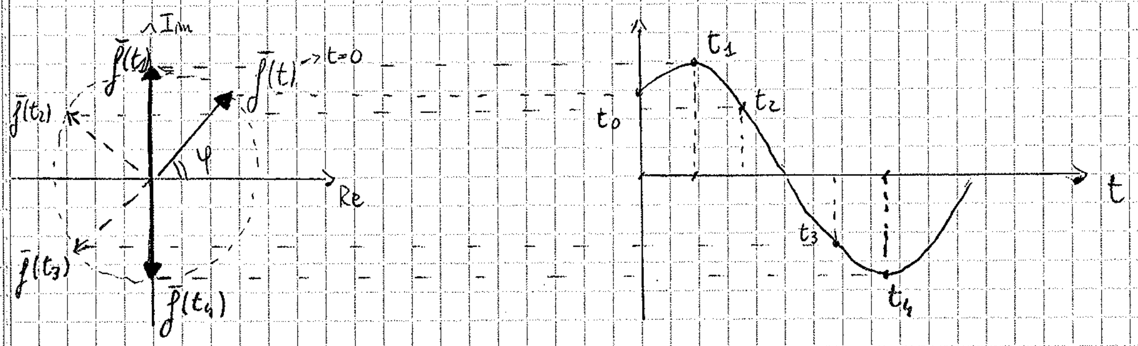
$$\bar{F}(t) = F e^{j(\omega t + \varphi)}$$



ω = vel. angolare o pulsazione

$$Re[\bar{F}(t)] = \hat{F}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$Im[\bar{F}(t)] = \hat{F}\sin(\omega t + \varphi)$$



$$\hat{F} = \sqrt{2} F$$

$$\bar{F}(t) = \hat{F} e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2}\, \boxed{F e^{j\varphi}}\, e^{j\omega t}$$

FASORE (associato alla sinusoide)
↳ [indipend. dal tempo]

$$F(t) = \sqrt{2} F \sin(\omega t + \varphi) = Im[\sqrt{2} F e^{j(\omega t + \varphi)}] \Longrightarrow (F e^{j\varphi})$$ → descrive la fase iniziale

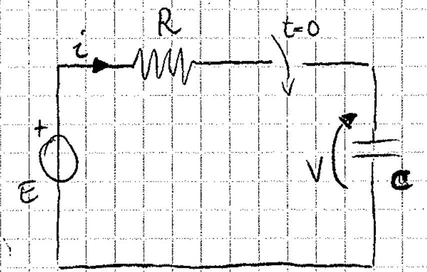
Se suppongo di inserire un gen. di tensione ideale tra i nodi 1 e 3, il quale non può essere semplificato con un equivalente Norton, devo modificare la mia matrice risolutiva aggiungendo una riga e una colonna alla matrice R.

$E = V_1 - V_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & R & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V \\ \hline i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A \\ \hline E \end{array}\right]$$

è rimasta simmetrica perché ho scelto i entrante nella polarità positiva di E

ES. 2



$E = 10\ V \qquad C = 100\ \mu F$

$R = 100\ \Omega \qquad V(t=0) = 0$

$P(E)_{MAX}$? $(t>0)$

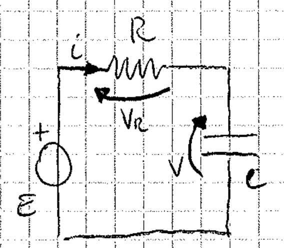
$\overline{t<0}$:

$i = 0$

$P(E) = E \cdot i = 0$

$\overline{t>0}$

$P(E) = E \cdot i(t)$



$E = V_R + V$

$V_R = R \cdot i$

$i = C \dfrac{dV}{dt}$

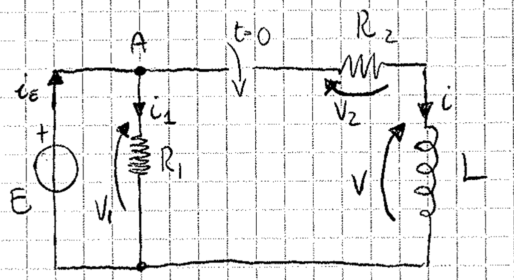
$\rightarrow RC \dfrac{dV}{dt} + V = E$

$\downarrow$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = E}$$

con $\tau = RC$ $(= 10\ ms)$

ES. 3



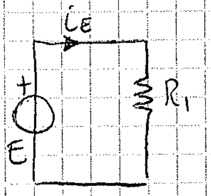
$E = 12\ V$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$L = 0,5\ H$

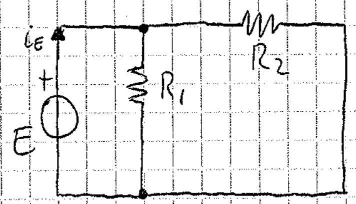
$\boxed{t<0}$



$i_E = E/R_1$

$\boxed{t>0}$ (a regime)

$t \to \infty$ $\quad L \to$ corto circuito



$R_1 \parallel R_2 \to R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5\ \Omega$

$i_E = E/R_{eq} = 2,4\ A$

$\boxed{t>0}$ (transitorio)

$P(E) = E \cdot i(t)$

LKT $\quad E - V_2 - V = 0$

$V_2 = R_2 i$

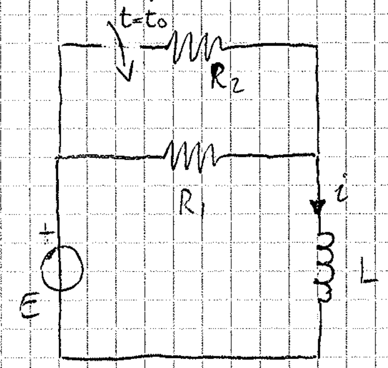
$V = L \dfrac{di}{dt}$

$L \dfrac{di}{dt} + R_2 i = E$

$\Downarrow$

$\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = E$ $\qquad \tau = \dfrac{L}{R_2}$

ES. 4



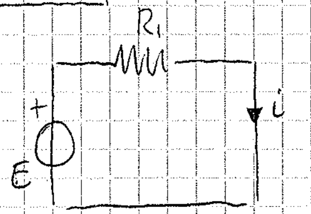
$E = 10\ V$

$R_1 = 2\ \Omega$

$R_2 = 2\ \Omega$

$L = 1\ H$

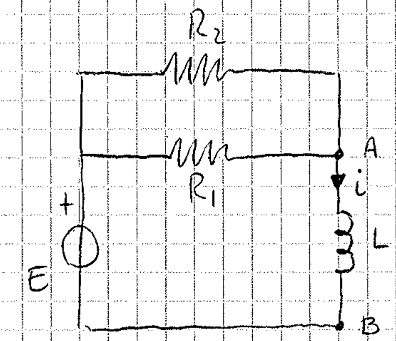
$t < t_0$



a regime L = corto circuito

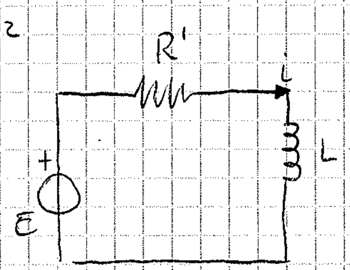
$i(t=t_0) = E/R_1$ (cond. iniziale)

$t > t_0$



$R_1 // R_2$

$\longrightarrow$



$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Usando l'eq. generale risolutiva dei transitori

$$x(t) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)\, e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$$i(t) = I_\infty + (I_0 - I_\infty)\, e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$\tau = \frac{L}{R'}$

$I_0 = E/R_1$

$I_\infty = E/R'$

($t \to \infty$ L → corto circuito)

$$i(t) = \frac{E}{R'} + \left(\frac{E}{R_1} - \frac{E}{R'}\right) e^{-(t-t_0)/\tau}$$

i_p : $\frac{di_p}{dt} = 0 \rightarrow i_p = I$

i_t : $i_t = K e^{-t/\tau}$

$$\begin{cases} i(t) = I + K e^{-t/\tau} \\ i(t=0) = I_0 \end{cases} \quad K = I_0 - I$$

- $i(t) = I + (I_0 - I) e^{-t/\tau}$

$\boxed{\frac{T}{2} < t < T}$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = -\frac{I}{\tau}$$

$i\left(t = \frac{T}{2}\right) = I_1$ cond. iniziale

$$i(t) = i_p + i_t$$

i_p : $\frac{di_p}{dt} = 0 \rightarrow i_p = -I$

i_t : $i_t = K e^{-(t-T/2)/\tau}$

$$\begin{cases} i(t) = -I + K e^{-(t-T/2)/\tau} \\ i\left(t=\frac{T}{2}\right) = I_1 \end{cases} \quad K = I_1 + I$$

- $i(t) = -I + (I_1 + I) e^{-(t-T/2)/\tau}$

ALGEBRA dei FASORI

Dom. del tempo:

$$a(t) = \sqrt{2}\, A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow$$

Dom. delle frequenze:

$$\bar{A} = A e^{j\varphi}$$

SOMMA ALGEBRICA

$$a_1(t) = \sqrt{2} A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$a_2(t) = \sqrt{2} A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

...

$$a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) = b(t)$$

$$a_1(t) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} A_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$a_2(t) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} A_2 e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[\sqrt{2} A_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} + \sqrt{2} A_2 e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\left(A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}\right)\right]$$

$$\mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\underbrace{\left(\bar{A}_1 + \bar{A}_2\right)}_{\bar{B}}\right]$$

$\bar{B}$ fasore risultante

$$\bar{B} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = B e^{j\varphi_B}$$

$\downarrow$

torno nel Dom. del tempo

$$b(t) = \sqrt{2} B \sin(\omega t + \varphi_B)$$

PRODOTTO per COSTANTE

$$a(t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$b(t) = K \cdot a(t)$$

$$a(t) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} A e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right]$$

$$b(t) = K a(t) = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\underbrace{K A e^{j\varphi}}_{\bar{B}} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\bar{B} = K A e^{j\varphi} = K \bar{A}$$

DERIVAZIONE TEMPORALE

$$a(t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad b(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

$$b(t) = \sqrt{2} A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$$

$$b(t) = \sqrt{2} A \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\hookrightarrow \bar{B} = \omega A e^{j(\varphi + \pi/2)}$$

$$\bar{B} = \omega A e^{j\varphi} e^{j\pi/2}$$

$$e^{j\pi/2} = \underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + j \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} = j$$

$$\boxed{\bar{B}} = j\omega \underbrace{A e^{j\varphi}}_{\bar{A}} = \boxed{j\omega \bar{A}}$$

Nel dominio di t: $\boxed{\frac{d}{dt} = j\omega}$ $\hookrightarrow$ Dominio delle frequenze

$x^2 + y^2 \dots$

$$E^2 = (RI)^2\cos^2\varphi + (\omega LI)^2\sin^2\varphi - 2R\omega L\cancel{I^2\cos\varphi}\sin\varphi +$$
$$+ (RI)^2\sin^2\varphi + (\omega LI)^2\cos^2\varphi + 2R\omega L\cancel{I^2\cos\varphi}\sin\varphi$$

$$E^2 = (RI)^2 + (\omega LI)^2 \rightarrow \boxed{\cdot\ I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega L^2}}}$$ VALORE EFFICACE

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega L\cancel{I}}{R\cancel{I}} \rightarrow \cdot\ \underbrace{\varphi}_{\text{FASE}} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega L}{R}\right) = -\operatorname{arctg}\left[(\omega L)/R\right]$$

$i(t) = i_t + i_p$

$$\begin{cases} i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi) + Ke^{-(t-t_0)/\tau} \\ i(t = t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}I\sin(\omega t_0 + \varphi) + K = 0$$

$$K = -\sqrt{2}I\sin(\omega t_0 + \varphi)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi) \underbrace{\boxed{\underbrace{-\sqrt{2}I\sin(\omega t_0 + \varphi)}_{I_0\ (=K)} e^{-(t-t_0)/\tau}}}_{i_t\ *}$$

Dopo 4/5 volte il tempo τ la componente transitoria* si annulla, rimane solo la prima parte in regime sinusoidale

EQUAZIONI TOPOLOGICHE

LKC → elemento nodo $\quad i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$

LKT → elemento maglie $\quad V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = 0$

Nel dominio del tempo: (x variabile generica)

es $\quad x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) - x_4(t) = 0$$

$$\downarrow$$

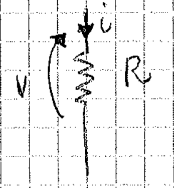
dominio delle frequenze:

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 - \bar{X}_4 = 0$$

Si passa dalle funzioni seno nel dominio del tempo ad equazioni con i fasori associati nel " delle frequenze

EQUAZIONI COSTITUTIVE

RESISTENZA



$$V(t) = R\, i(t) \qquad [\in t]$$

$$\downarrow$$

$$\bar{V} = R \cdot \bar{I} \qquad [\in f]$$

es. $\quad i(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \varphi_I)$

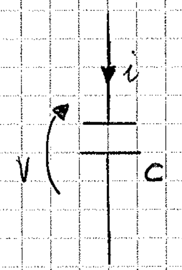
↳ $\bar{I} = I e^{j\varphi_I}$

$$\bar{V} = R\bar{I} = RIe^{j\varphi_I} = Ve^{j\varphi_V}$$

$\boxed{\bullet\ \bar{V} = R\bar{I}}$

$$\begin{cases} V = RI & \text{(modulo)} \\ \varphi_I = \varphi_V & \text{(fase)} \end{cases}$$

CONDENSATORE



$$i(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\bar{I} = C(j\omega)\bar{V}$$

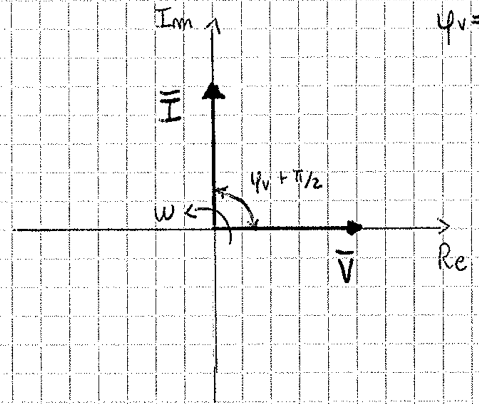
es. $V(t) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \varphi_v)$

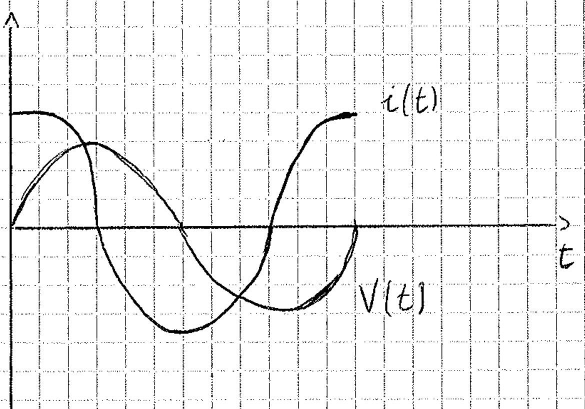
$\rightarrow \quad \bar{V} = V e^{j\varphi_v}$

$$\bar{I} = j\omega C V e^{j\varphi_v} = \omega C V e^{j\varphi_v} \cdot e^{j\pi/2} = \omega C V e^{j(\varphi_v + \pi/2)}$$

$$\begin{cases} I = \omega C V & \text{(modulo)} \\ \varphi_I = \varphi_v + \frac{\pi}{2} & \text{(fase)} \end{cases}$$

$\varphi_v = 0$





Cambiando variabili ...

$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I} \cdot \frac{j}{j} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$-\frac{1}{\omega C} = [\,\Omega\,]$

$\downarrow$

Im

$\downarrow$

$$\boxed{X = -\frac{1}{\omega C}}$$ REATTANZA (CAPACITIVA)

è < 0

$\downarrow$

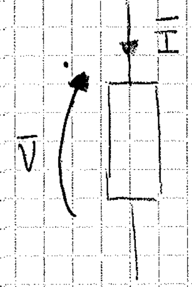
dipende da f

$$\boxed{\bar{V} = jX\bar{I}}$$

se mi viene dato un valore di $X = 10\,\Omega$

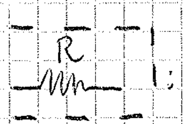
devo cambiare l'eq. in: $\bar{V} = -jX\bar{I}$

In generale per i bipoli

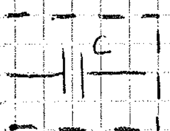


$$\frac{\bar V}{\bar I} = \bar Z \quad \underline{\text{IMPEDENZA}}$$

$$\bar Z = Z e^{j\theta}$$



: $\bar Z = R$ $\begin{cases} Z = R & \text{(modulo)} \\ \theta = 0 & \text{(fase)} \end{cases}$



: $\bar Z = -j\frac{1}{\omega C}$ $\begin{cases} Z = \frac{1}{\omega C} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

: $\bar Z = j\omega L$ $\begin{cases} Z = \omega L \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$[-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}]$: $\bar Z = Ze^{j\theta} = \underbrace{R}_{Re} + j\underbrace{X}_{Im}$

Im → <u>Reattanza</u> (induttiva o capacitiva)

Re ↓ <u>Resistenza</u>

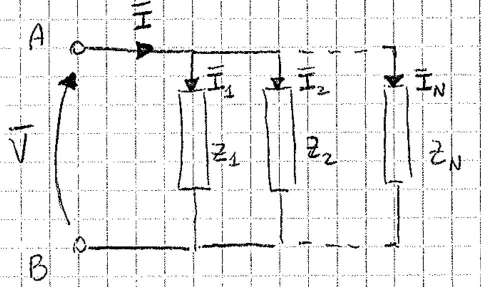
$\bar Z$ è un fasore?

$$\bar Z = \frac{\bar V}{\bar I} = \frac{Ve^{j\varphi_V}}{Ie^{j\varphi_I}} = \frac{V}{I} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}$$

No, è un numero complesso ma non è un vettore rotante.
È un operatore di rapporto tra V e I

↳ mi dà info su: - modulazione
- sfasamento

Parallelo di Impedenze



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \dots + \bar{I}_N$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{V} &= Z_1 I_1 \\ \bar{V} &= Z_2 I_2 \\ \bar{V} &= Z_N I_N \end{aligned}\right\} \qquad \bar{I}_k = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_k}$$

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \bar{Y} \quad \text{AMMETTENZA } [S]$$

$$\downarrow$$

$$\bar{Y} = \underset{(Re)}{G} + j \underset{(Im)}{B}$$

$$G = \frac{1}{R} \qquad B = \frac{1}{X}$$

B ↓ SUSCETTANZA

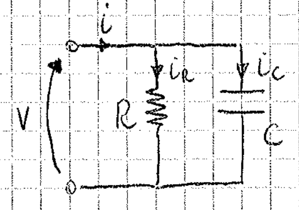
$$\bar{I} = \bar{Y}_1 V + \bar{Y}_2 V + \dots + \bar{Y}_N V$$

$$\bar{I} = (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 \dots + \bar{Y}_N)\bar{V}$$

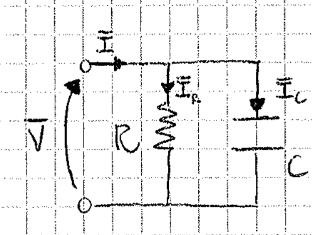
- $\bar{I} = \bar{Y}_{eq} \bar{V}$

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{1}{\bar{Y}_{eq}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{Z_k}}$$

Esempio:



$\longrightarrow$



$C \rightarrow X_C = -\frac{1}{\omega C}$

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C$$

$$\bar{V} = R\bar{I}_R \rightarrow I_R = \frac{\bar{V}}{R} = G\bar{V}$$

$$\bar{V} = jX_C \bar{I}_C \rightarrow I_C = j\omega C \bar{V}$$

- $\bar{I} = \underbrace{(G + j\omega C)}_{\bar{Y}_{eq}} \bar{V}$