NUMERO: 1295 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Villois

MATERIA: Fisica II + Eserc., Prof.Kaniadakis

FISICA II

La teoria elettromagnetica di Maxwell è la più importante della fisica.
4 equazioni (a una Ampère ha dato contributo).
Sono indipendenti tra loro, non sono dimostrabili, sono assiomi su cui si costruisce la teoria elettromagnetica.

Ogni teoria, fisica o no, ha una struttura assiomatica.
Maxwell → intuizione di assiomatizzare l'elettromagnetismo.

Aritmetica: assiomi di Peano
Geometria: Euclide
Meccanica: Newton

Il matematico Godel ha dimostrato la struttura assiomatica delle teorie.

4 equazioni di Maxwell: empiriche. Uno è il Teorema di Gauss, si dimostra partendo dalla legge di Coulomb, che non si dimostra, è sperimentale.

→ Teoria di campo, usa il linguaggio delle derivate parziali
EQ DI MAXWELL

Descrivono la forza elettromagnetica partendo dalle cariche.
Sistema di eq. diff con derivate parziali.
Pur conoscendo la distribuzione delle cariche non è detto che ci sia una soluzione esatta → approssimazione numerica.

Si ottengono le forze elettromagnetiche, poi si inseriscono nelle equazioni di Newton.

TEORIA DI MAXWELL

⇒ riguarda
- forza elettrica
- forza magnetica

Nel 20° secolo sono state scoperte: forza debole (decadim. radiattivo), forte (tiene insieme gli elem. del nucleo)
Si conosceva già la forza gravitazionale.

Sembra strano che ci siano 5 forze diverse. Si è convinti che la forza sia unica ⇒ unificarle è il problema attuale

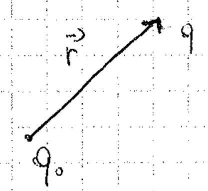
Maxwell: ha unificato forza elettrica e forza magnetica.
Einstein ha lavorato, senza successo, per unificare elettromagnetica con gravitazionale. Al tempo non si conoscevano

5) Le nuove frontiere della fisica certe volte richiedono matematica nuova.
Le eq. differenziali alle derivate parziali nascono per la necessità di scrivere le eq. di Maxwell in forma differenziale.

L'elettromagnetismo di Maxwell, tra tutte le teorie scientifiche, e' quella che ha avuto più influenza.

Legge di Coulomb (e principio di sovrapp. effetti)

$$\vec{F} = k \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}$$



$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$ → modulo di $\vec{r}$

Possiamo porre:

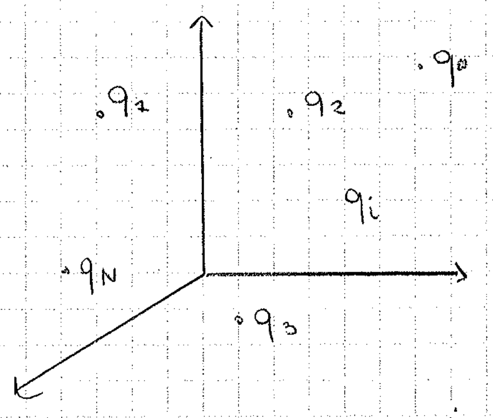
$O \equiv q_0$ $\qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{F} = k \frac{q_0 q}{r^3} \vec{r}$$

La forza $\vec{F}$, cambiata di segno, e' quella che q applica a q_0.

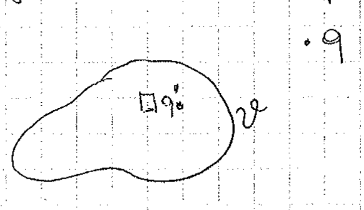
Forza esercitata da N cariche



q sente forze dalle altre cariche. Forza risultante $\vec{F}$ (Principio Sovrapp. effetti)

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{N} k q_0 \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r_i}$$

Carica distribuita con continuità sul volume V. Qual è la forza che sente q?



$dq_0' = \rho \, dv$ → costante di proporzionalità detta DENSITÀ DI CARICA

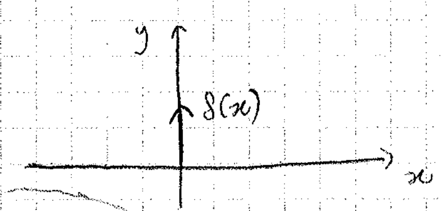
$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ campo elettrico creato da una carica

$\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{KQ}{r^3}\vec{r}$

Questa formula si ottiene dall'integrale (1)

Si usa la <u>funzione di distribuzione di Dirac</u>

Es:

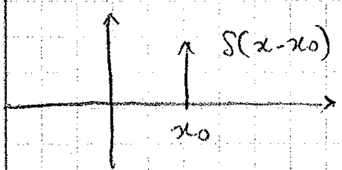


$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Se al posto di ρ si mette δ:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ +\infty & x = x_0 \end{cases}$$

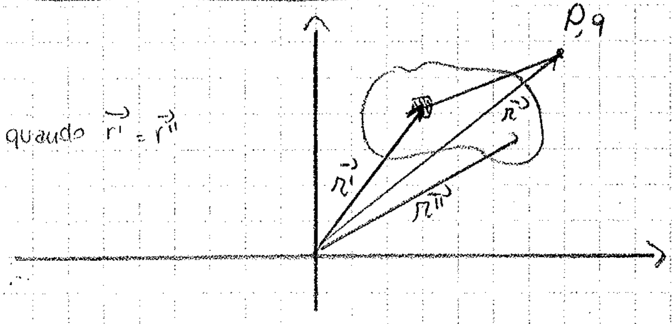


$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x)\,dx = f(x_0)$$

$\rho(\vec{r}',t) = \delta(\vec{r}'-\vec{r}'')\cdot Q$ $\to +\infty$ quando $\vec{r}' = \vec{r}''$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = KQ\,\frac{\vec{r}-\vec{r}''}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}}$$



nel nostro caso:

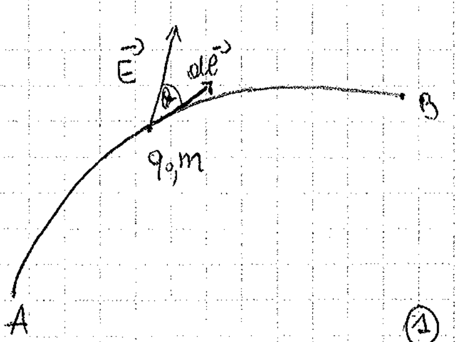
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x'-x'') f(x')\,dx' = f(x'')$$

sostituisco $\vec{r}''$ a $\vec{r}'$, è l'unico termine che sopravvive

Q: carica nel volume V
$\vec{r}''$: coordinata di un p.to in cui è come fosse racchiusa tutta la carica Q
$\vec{r}'$: coord. che varia e descrive il volume V

Campo elettrico: vettore

$\vec{E}(\vec{r},t) = \boxed{\vec{E}(x,y,z,t)} = E_x(\vec{r},t)\,\vec{i} + E_y(\vec{r},t)\,\vec{j} + E_z(\vec{r},t)\,\vec{k}$



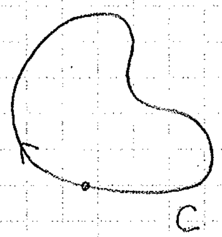
θ cambia a seconda del tempo.

$dW = \vec F d\vec l$

lavoro prodotto dalla forza elettrica

① $W_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec F d\vec l = q_0 \int_{C_{AB}} \vec E d\vec l = q_0 \mathcal{E}_{AB}$

Curva chiusa:



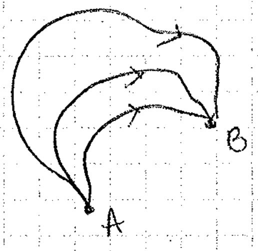
$W = \oint_C \vec F d\vec l = q_0 \oint_C \vec E d\vec l = q_0 \mathcal{E}$

forza elettromotrice

Il lavoro fatto da una particella che si muove sulla linea chiusa C, è uguale alla circuitazione del campo elett. $\cdot q_0$

$$\int_{C_{AB}} \vec E d\vec l = V(\vec r_A) - V(\vec r_B) = -\Delta V_{AB}$$

non dipende dal percorso, ma solo da A e da B



V: potenziale del campo elettrico

dalla ①: $\mathcal{E}_{AB} = \frac{1}{q_0} W_{AB}$ $\qquad \frac{1}{q_0} W_{AB} = -\Delta V_{AB}$

$W_{AB} + q_0 \Delta V_{AB} = 0$

$W_{AB} = \Delta K_{AB} = K_B - K_A$

$\Delta K_{AB} + q_0 \Delta V_{AB} = 0 \qquad K_B - K_A + q_0 V_B - q_0 V_A = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,2x = -\frac{x}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -Kq\left(-\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k}\right) = Kq\left(\vec{i}\,\frac{x}{r^3} + \vec{j}\,\frac{y}{r^3} + \vec{k}\,\frac{z}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{Kq}{r^3}\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Kq}{r^3}\vec{r}$$

OPERATORE ROTORE

rot $\vec{E}$ vettore $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_{\cancel{y}}}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial \cancel{z}}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{j}$

$$+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

$\underbrace{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}}_{\text{prod. vettoriale}} = 0$

Altro modo per scrivere rot $\vec{E}$

$$\text{rot}(-\vec{\nabla}V) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)}_{=0}\vec{i} + \dots$$

E_z è $-$ deriv. rispetto a z di V

Per vedere che un campo elettrico è conservativo uso il rotore.

<u>Dipolo elettrico</u>

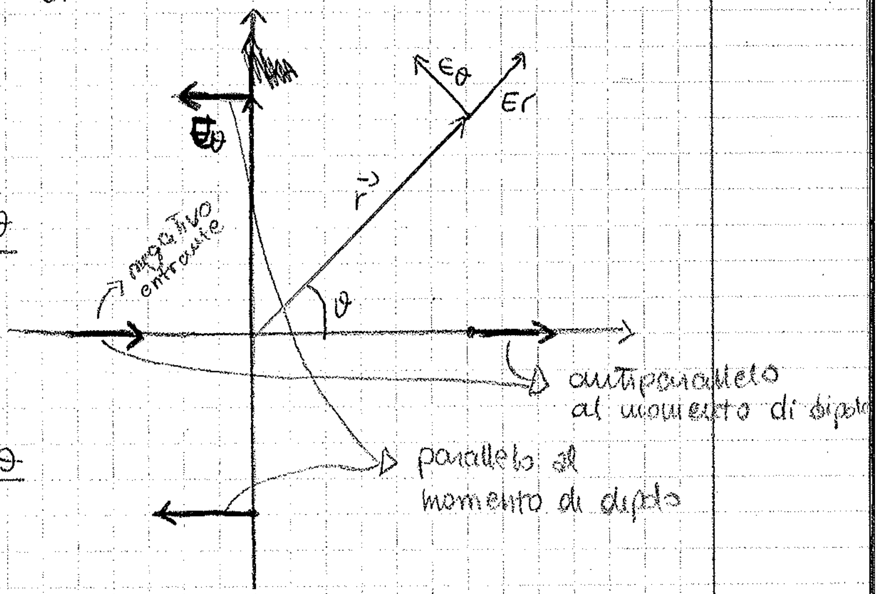
Due cariche opposte ma di modulo uguale.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_\theta$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

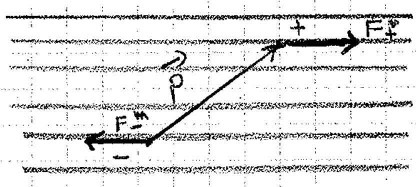
ricordare che $V(\vec{r}) = K\frac{p\cos\theta}{r^2}$



$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2Kp\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = +\dfrac{1}{r}\dfrac{Kp\sin\theta}{r^2} = \dfrac{Kp\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = \dfrac{Kp}{r^3} \end{cases}$

Se $\theta = \pi$: $\begin{cases} E_r = -\dfrac{2Kp}{r^3} \\ E_\theta = 0 \end{cases}$ se $\theta = \frac{3}{2}\pi$ $\begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = -\dfrac{kp}{r^3} \end{cases}$



$\vec{E}$

$U = -\vec{p}\vec{E}$ (no dim)

$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ (no dim)

2 cariche immerse in un campo uniforme.
2 forze agiscono su ⊕ e ⊖.
Calcolare il momento della coppia

$\vec{M} = \vec{d} \wedge \vec{F}_+ = \vec{d} \wedge q\vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

momento del campo

mom. del dipolo

$M = -\frac{dU}{d\theta}$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ momento di 1 forza

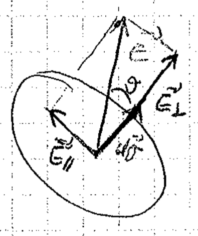
$(\vec{p} \wedge \vec{E})d\theta = -dU$

$-\int_{\theta_1}^{\theta_2} pE\sin\theta\, d\theta = +\int_1^2 dU$

$pE\cos\theta = U$

$U = -p \cdot E$

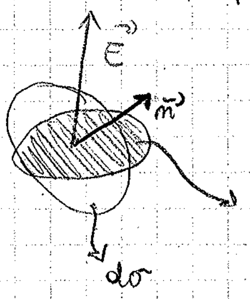
vedi pag 48, cambio segno a M perché considero quello che si oppone



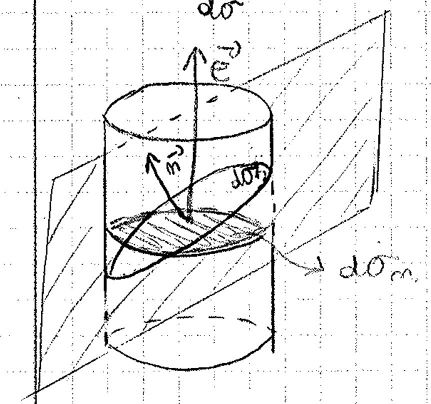
$$d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = \left(E_\perp \vec{n} + E_\parallel \vec{\tau}\right)\cdot \vec{n}\, d\sigma =$$

$$= E_\perp d\sigma + 0 = E_\perp d\sigma = E\cos\theta\, d\sigma = E\, d\sigma_n$$

Nel calcolare il flusso attraverso una superf, non tutto $\vec{E}$ entra nel calcolo, ma solo la componente perpendicolare.



proiezione di $d\sigma$ nella direzione nel campo vale $d\sigma_n$



$$\phi = \int d\phi = \int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{\sigma}$$

integrale di superficie

Ottengo sempre una quantità finita, a parte casi estremi.

$\vec{E}$ è finito in tutti i p.ti della superficie. E' una funzione regolare.

Flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa:

$$\phi = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{\sigma}$$

non dipende dalla forma, ma solo dalla carica. Ciò vale grazie all' r^2 della legge di Coulomb. Anche per il campo gravitazionale vale un teorema di Gauss.

Campo elettrico qualsiasi creato da una distribuzione arbitraria di cariche.

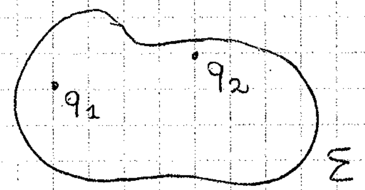
ϕ è indipendente da:

- forma della superficie
- posizione della carica nella superficie

Deriva da:

$$E = \frac{Kq}{r^2} \qquad d\Omega = \frac{d\sigma_n}{r^2}$$

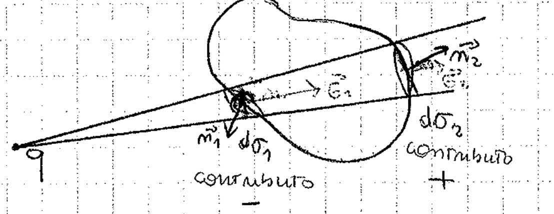
Caso 2: q_1 e q_2



$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

Carica continua? Somma infinita di cariche infinitesime.

Caso 3: carica esterna



$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = \vec{E_1} \cdot \vec{d\sigma_1} + \vec{E_2} \cdot \vec{d\sigma_2} = \frac{kq}{r_1^2} \underbrace{\vec{u_{r_1}} \, \vec{n_1}}_{<0 \text{ perché } \theta_1 > \frac{\pi}{2}} d\sigma_1 + \frac{kq}{r_2^2} \vec{u_{r_2}} \, \vec{n_2} \, d\sigma_2 =$$

$$= \frac{kq}{r_1^2}(-)\, d\sigma_{1n} + \frac{kq}{r_2^2} d\sigma_{2n} = -\frac{kq\, d\sigma_{1n}}{r_1^2} + \frac{kq\, d\sigma_{2n}}{r_2^2} =$$

$$= -kq\, d\Omega_1 + kq\, d\Omega_2 = -kq\, d\Omega + kq\, d\Omega = 0$$

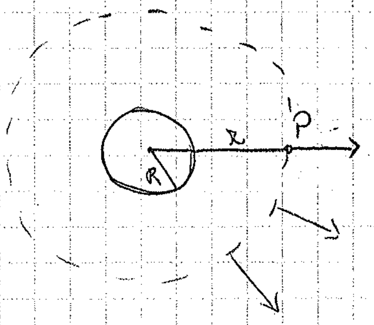
perché le due superfici sono state staccate dal medesimo cono

Per ogni cono che formo riesco a formare coppie del genere.

$\Rightarrow$ Se la carica è esterna ad una superficie chiusa, il flusso del $\vec{E}$ creato dalla carica è $= 0$

Il ϕ del $\vec{E}$ creato da una distribuzione qualsiasi di cariche è sempre uguale a $\dfrac{q_{TOT} \text{ interno alla superf}}{\varepsilon_0}$

Th Gauss è + generale del Th Coulomb. Va oltre la sola carica puntiforme. In realtà però non dice di più.



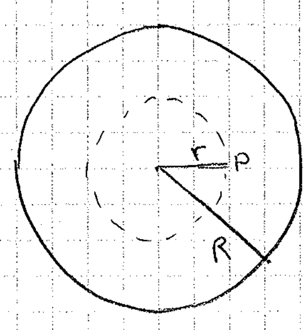
$\phi = E\, 4\pi r^2$

Per il th. Gauss $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$

Il campo elettrico in P è lo stesso che si avrebbe se la carica puntiforme fosse al centro della sfera. Ma vale solo se $r > R$

Se $0 < r < R$

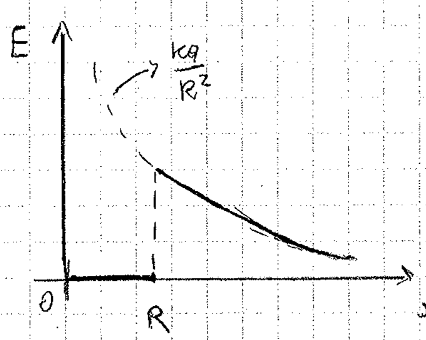


Th Gauss: in P la carica è carica nella sfera di raggio r (=0)

P è sulla superf di S_r

$E = 0 \quad 0 < r < R$

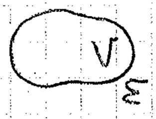
$$E = \begin{cases} \frac{kq}{r^2} & r > R \\ 0 & 0 < r < R \end{cases}$$



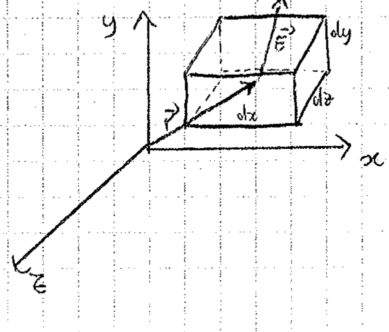
La legge esattamente coulombiana vale solo per $R=0$

Teorema di Gauss: equazione integrale

$$\oint_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$



• Scrivere il th. di Gauss per un parallelepipedo infinitesimale



$\vec{r}$ individua il centro

Tutti i punti della superf. chiusa di Gauss sono infinitamente prossimi al punto individuato da $\vec{r}$

Poi: $E_y\left(x, y-\frac{dy}{2}, z\right)$ e $E_y\left(x, y+\frac{dy}{2}, z\right)$

$E_z\left(x, y, z-\frac{dz}{2}\right)$ e $E_z\left(x, y, z+\frac{dz}{2}\right)$

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = \frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}dV + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}dV + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}dV$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}\right)dV \quad \circledast$$

Si passa dalle facce al centro del cubetto. (Grazie allo sviluppo in Serie di Taylor)

$$\circledast = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV = \underline{\operatorname{div}\vec{E}\cdot dV} = \vec{\nabla}\vec{E}\cdot dV$$

Flusso di $\vec{E}$ creato da una distribuzione di cariche generica

Divergenza del campo elettrico: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

Th Gauss

$$\text{Flusso} = \frac{\text{carica racchiusa in } dV \to dq}{\varepsilon_0}$$

$dq = \rho(\vec{r})\,dV$ e poi eventualmente $q = \int_V \rho(\vec{r})\,dV$

$\vec{\nabla}\vec{E}\,dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$ $\quad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ TEOREMA DI GAUSS IN FORMA DIFFERENZIALE

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

→ solitamente è la funzione nota

Permette, partendo da ρ, funzione scalare in 3 variabili, (funz. di $\vec{r}$, quindi di x, y, z) di calcolare $\vec{E}$ (funzione vettoriale di x, y, z)

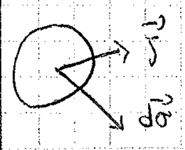
Conservatività del campo elettrostatico pag 30, 45

$\oint_\Gamma \vec{E}\,d\vec{\ell} = 0$ $\quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$

Γ — gamma è 1 curva geometrica chiusa $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$ $\quad$ } equivalenti (ma l'ultimo dice di più)

$\vec{v}$: funzione in 3 variabili. In ogni punto dello spazio definisce come si muovono le particelle

Il flusso di $\vec{j}$ attraverso $d\vec{\sigma}$:

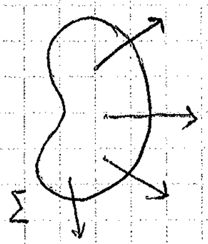


$$di = \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$ 226

INTENSITÀ DI CORRENTE =

flusso della densità di corrente attraverso una superficie

Superficie finita:



$$i = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

- Conduttore di sezione S. Se $j = cost$

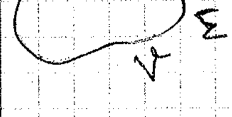
$i = jS \qquad j = \frac{i}{S}$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ Ci sono 2 funzioni indipendenti: ρ e $\vec{v}$

$\{\rho, \vec{v}\}$; $\{\rho, \vec{j}\}$ sono due descrizioni equivalenti

In realtà non è proprio così, c'è una relazione che vincola ρ e $\vec{j}$



In ogni punto dello spazio è definito il vettore $\vec{j}$, in particolare sulla superficie

$$i = \oint_{\Sigma} \vec{j}\, d\vec{\sigma} \qquad dq = \rho\, dV$$

Carica racchiusa:

$$q = \int_{V} \rho\, dV$$

def

$$i = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

il − è una convenzione. C'è perché se diminuisce la carica all'interno del volume, i è positiva perché vedo il volume come SORGENTE di corrente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 136

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(\infty) - f(-\infty)$$

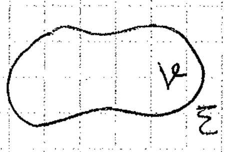
All'infinito le funzioni fisiche sono 0, allora

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \vec{j}\, d\mathcal{V} \xrightarrow[\mathcal{V} \to +\infty]{} 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \Rightarrow q(t) = \text{cost}$$

?? <u>EQUAZIONE DI CONTINUITÀ ⇒ Conservazione della carica</u>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0$$



$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \vec{j}\, d\mathcal{V} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho\, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \vec{j}\, d\mathcal{V} = 0$$

$q(\mathcal{V})$ dipende solo dal tempo ⇒ derivata totale

$\| \rho\, d\mathcal{V}$

$$\frac{d q(\mathcal{V})}{dt} + \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \vec{j}\, d\mathcal{V} = 0 \quad \circledast$$

$$q = \lim_{\mathcal{V} \to +\infty} q(\mathcal{V}) = 0$$

Th div ⇒ $\oint_{\Sigma} \vec{j}\, d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \vec{j}\, d\sigma$ (1)

$$\circledast \quad \frac{dq(\mathcal{V})}{dt} + \oint_{\Sigma} \vec{j}\, d\vec{\sigma} = 0$$

<u>All'∞ tutte le funzioni fisiche → 0, anche la $\vec{j} \to 0$</u>

$q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\, \rho(\vec{r}, t)$ perché converga, ρ deve tendere a 0

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ ⇒ anche $\vec{j}$ tende a 0

‖ L'integrale superficiale all'infinito vale 0
L'integrale di volume è costante

⇒ $\boxed{\frac{dq}{dt} = 0}$ significa che <u>la carica non varia nel tempo in tutto lo spazio</u>

(con l'hp che non ci sono sorgenti di cariche e pozzi che assorbono cariche)

① + ② $\Rightarrow$ $\frac{V}{h} = \frac{\rho i}{\Sigma}$ $\quad V = \underbrace{\frac{\rho h}{\Sigma}}\, i$

RESISTENZA DEL CONDUTTORE
(dipende dalla sua geometria)

$V = Ri$ I LEGGE DI OHM PER I CONDUTTORI METALLICI

$= V_A - V_B$

$i\,[A] = -\frac{dq}{dt}\;[C \cdot s^{-1}]$

v.d.m. in elettromagnetismo: MKSC; MKSA

RIASSUNTO

$E = \frac{F}{q} \quad [N \cdot C^{-1}]$

$V = Eh \quad [N \cdot C^{-1} \cdot m] = [V]$ volt

$\rho = \frac{m}{Ne^2\tau} \quad [Kg \cdot m^3 \cdot C^{-2} \cdot s^{-1}] =$

$R = \frac{\rho h}{\Sigma} \quad [Kg\, m^3 C^{-2} s^{-1}\, m\, m^{-2}] = [Kg\, m^2 C^{-2} s^{-1}] = [\Omega]$ ohm

$i = \frac{dq}{dt} \quad [C \cdot s^{-1}] = [A]$

$G = \frac{1}{R}$ CONDUTTANZA $\rightarrow$ $i = GV$ I LEGGE OHM

N.B. Relazione approssimata, non tutti i materiali sono ohmici

Potenza

Derivata del lavoro rispetto al tempo.

$dW = \vec{F} d\vec{S}$

$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{S}}{dt} \qquad \frac{dW}{dt} = F\vec{v} \qquad P = \vec{F}\vec{v}$

Calcolo la potenza consumata per far funzionare il conduttore.
l'e^- in ogni urto cede energia.

$$\begin{cases} V_A - V_B = Ri \\ i = i_1 + i_2 \end{cases} \qquad V_A - V_B = R(i_1 + i_2) \qquad V_A - V_B = R\left(\frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = R\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$ conduttanza tot = somma conduttanze

CONDUTTORE

Cariche in movimento (a livello microscopico). A livello macro si ha movimento solo se si applica un ΔV.
Il potenziale non è misurabile direttamente, ma si può misurare la differenza.

Campo esterno nullo ⇒ cariche distribuite uniformemente all'interno del conduttore.

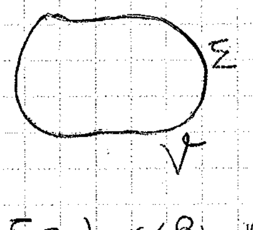
pag 110

Considero il conduttore in condizioni stazionarie. Ogni carica non sente forze elettriche. Assenza di campo elett. interno.
⇒ per il Th di Gauss non possono esserci cariche ⇒ tutte le cariche sono sulla superficie del conduttore
⇒ fuori dal conduttore c'è un campo elettrico coulombiano

es: sfera con carica sulla superficie — centrale, $\propto r^{-2}$

⇒ una sfera uniformemente carica non può essere metallica, se no tutte le cariche andrebbero sulla superficie (lì sono ferme, non possono andare via, ma almeno lasciano $E=0$ all'interno).

Conduttore condizioni stazionarie ⇒ porta la sua carica sulla superficie



$$q = \oint_\Sigma \rho_s \, d\sigma$$

$$E = \begin{cases} r<R & 0 \\ r>R & \frac{kq}{r^2} \end{cases} \qquad q = \rho_s 4\pi r^2 \qquad E = \frac{\sigma 4\pi r^2}{4\pi \varepsilon r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

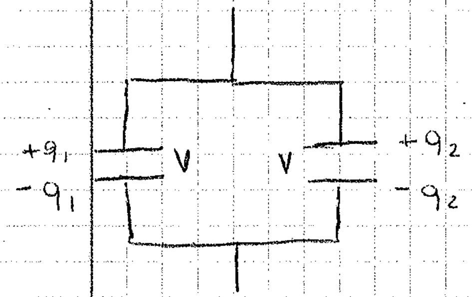
Per $r>R$

$$E = -\frac{dV}{dr} \qquad dV = -E\,dr \qquad V = c - \int E\,dr = c - kq\int \frac{dr}{r^2} = c_2 + \frac{kq}{r}$$

$$c_2 = 0$$
$$c_1 = \frac{kq}{R}$$ (per avere continuità)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 136

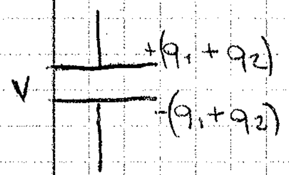
Condensatori in parallelo



La differenza di potenziale tra la parte inferiore e quella inferiore è anche uguale alla ddp tra un'armatura e l'altra di ogni condensatore.

(✱)

Condensatore equivalente



$$C = \frac{q_1+q_2}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} = C_1 + C_2$$

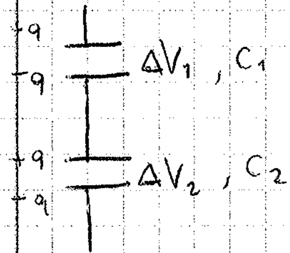
(✱) $c_1 = \frac{q_1}{V} \Rightarrow q_1 = C_1 V$

$c_2 = \frac{q_2}{V} \Rightarrow q_2 = C_2 V$

$C = C_1 + C_2$

$q = (C_1 + C_2)V$

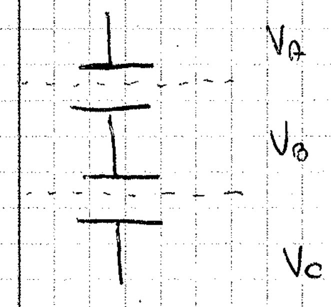
Condensatori in serie



Penso il sistema come formato da 3 conduttori

- armatura sup 1
- armatura inf 1 + armatura sup 2
- armatura inf 2

Ogni conduttore deve avere il suo V.



$\Delta V_1 = V_B - V_A$

$\Delta V_2 = V_C - V_B$

Se io carico sup 1 con $+q$, immediatam. si inducono le cariche successive

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 136

$dW = F' \, ds = E' dq' \cdot ds = V' dq'$

All'inizio $V=0$, poi aumenta $\Rightarrow$ sto creando $\vec{E}$

$W = U$ (per il momento scrivo u)

dq' : quantità che sto staccando dall'armatura sup

q': carica, ad un generico istante, su ogni armatura

$dW' = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$ lavoro fatto da me sulla carica dq' mentre si sposta da sopra a sotto

Man mano che carico si crea 1 campo sempre + intenso

dW' è infinitesimale perchè sto spostando una carica infinitesimale, ma lo spostamento è finito.

$W = \int dW' = \frac{1}{C} \int_0^q q' \, dq' = \frac{1}{C} \frac{q'^2}{2} \Big|_0^q = \frac{q^2}{2C}$

(lavoro da fornire a un condensatore per caricarlo con una carica q

$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ $V_q = \frac{q}{2C}$

$C = \frac{q}{V} \Rightarrow W = \frac{q^{\cancel{2}} V}{2 \cancel{q}} = \frac{qV}{2} = \frac{CV^2}{2}$

$\Rightarrow U = \frac{q^2}{2C}$ U: energia accumulata

$\mathcal{V}$: volume tra le 2 armature

$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left(\frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{dA \, \sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathcal{V} = u \mathcal{V}$

$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = u$

condensatore piano

E è costante $\Rightarrow u$ costante $u = \frac{U}{\mathcal{V}}$ energia elettrostatica per unità di volume

$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ densità di energia elettrostatica

$U = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} u \, d\mathcal{V}}_{\text{qualunque regione dello spazio}} = u \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = u \mathcal{V}$ | condensatore piano

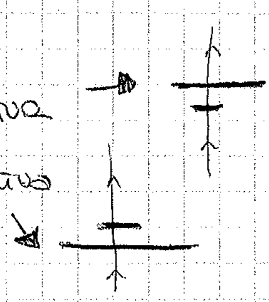
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 136

(1) $V_{AB} + V_{BD} + V_{FA} = 0$ (non considero V_{DF} perchè è 0)

Elemento attivo: generatore di tensione

Se incontro prima il − poi il +: ε positiva

Se incontro prima il + − negativa



$V = Ri$ (non si mette ΔV, ma è
$V = \frac{q}{C}$ un ΔV)

(1) $-\frac{q}{C} - Ri + \varepsilon = 0$ $\boxed{\varepsilon = \frac{q}{C} + Ri}$ (scrivo $i = \frac{dq}{dt}$ e divido per R)

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{1}{R}\varepsilon$ eq. differenziale

$dq = \frac{\varepsilon C - q}{RC} dt$ $\frac{dq}{C\varepsilon - q} = \frac{dt}{RC}$ $\int_0^q \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$

valori assoluti

$\ln|q - C\varepsilon| \Big|_0^q = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$

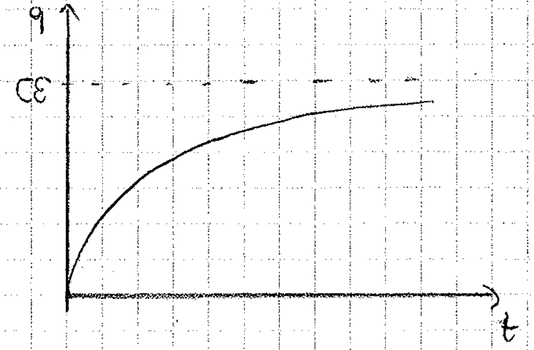
$\ln|q - C\varepsilon| - \ln|-C\varepsilon| = -\frac{t}{RC}$

$\ln|q - C\varepsilon| - \ln(C\varepsilon) = -\frac{t}{RC}$ $\ln\left|\frac{q - C\varepsilon}{C\varepsilon}\right| = -\frac{t}{RC}$

$\left|\frac{q}{C\varepsilon} - 1\right| = e^{-\frac{t}{RC}}$ $\frac{q}{C\varepsilon} - 1 = \pm e^{-\frac{t}{RC}}$ $q = C\varepsilon\left(1 \pm e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

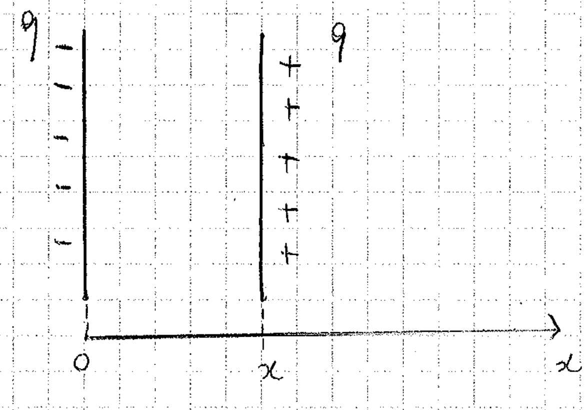
In fisica non può esserci questa ambiguità

Ma io so che a $t=0$ $q=0$ $\Rightarrow$ scelgo $q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$



$q(\infty) = C\varepsilon$

La carica che può accumulare il condensatore non è infinita, non può superare $C\varepsilon$.



$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} x$$

$$dU = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} dx$$

$$dW = F dx = dU$$

Se sposto l'armatura verso destra c'è una variazione di energia. Posso fornire lavoro per spostare l'armatura oppure ottenere lavoro.
Se va a ~~destra~~ sinistra è naturale, fornisce lavoro

Se il sistema è libero, le armature cercano di avvicinarsi. L'energia immagazzinata diminuisce, consumo di energia

Se l'armatura + va verso destra devo fornire lavoro, aumenta l'energia elettrostatica perchè aumenta il volume.

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} A \qquad (q = \sigma A)$$

La stessa forza che sente l'armatura +, la sente l'armatura − cambiata di segno

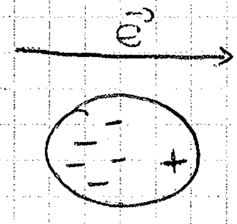
F è proporzionale ad A $\quad \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$: PRESSIONE ELETTROSTATICA

$\frac{1}{2}\sigma E$ $\qquad \frac{\frac{\cancel{C^2}}{m^4}}{\frac{\cancel{C^2}}{Nm^2}} = \frac{N}{m^2}$

Materiale dielettrico pag 35

Si polarizza se immerso in un $\vec{E}$.

① POLARIZZAZIONE ELETTRONICA



La carica nucleare positiva si sposta nella direzione del campo, quella negativa nell'opposta. Si crea una sorta di dipolo.
Il baricentro delle cariche ⊕ e ⊖ non coincide più.

Nella zona dove c'è il dielettrico ci sono 2 campi.

Calcolo E_p:

$$E_p = E_0 - E_k = E_0 - \frac{1}{k} E_0 = \frac{k-1}{k} = \frac{\chi}{k} E_0$$

Il campo di polarizzazione è proporzionale a E_0

$\frac{\chi}{k} < 1 \Rightarrow \underline{E_p < E_0}$ (altrimenti E_k non avrebbe la stessa direzione di E_0)

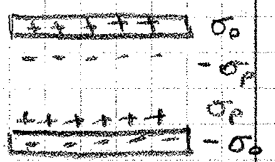
$E_k < E_0$

$E_p = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$ $\qquad E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

$$E_p = \frac{\chi}{k} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{\sigma_p}{\cancel{\varepsilon_0}} = \frac{\chi}{k} \frac{\sigma_0}{\cancel{\varepsilon_0}} \Rightarrow \sigma_p = \frac{\chi}{k} \sigma_0 \qquad \sigma_p < \sigma_0$$

densità di carica sulla superf. dell'isolante

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$



CAPACITÀ

La capacità dipende da k, cioè da ε.

- Prima dell'inserimento

$$C_0 = \frac{q}{V_0}$$

- Dopo l'inserimento

$$C_k = \frac{q}{V_k} = \frac{q}{\frac{1}{k} V_0} = k \frac{q}{V_0} = k C_0$$

$$C_k = k C_0$$

Es: condensatore sferico

- Immerso nel vuoto

$$C_0 = 4\pi \varepsilon_0 R$$

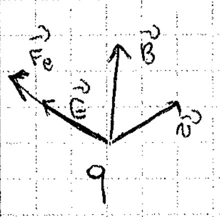
- Immerso in un mezzo

$$C_k = 4\pi \underbrace{k \varepsilon_0}_{\varepsilon} R = 4\pi \varepsilon R$$

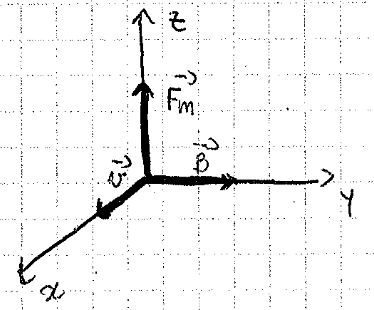
$\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F_m} = 0$

La particella sente una forza magnetica solo se $\vec{v} \neq 0$ e se $\vec{v}$ e $\vec{B}$ non sono //.

$F_m = q v B \sin\theta$



La forza magnetica è uscente dal foglio



Ricordare che bisogna procedere in senso antiorario.

$$q\, \underset{x}{\vec{v}} \times \underset{y}{\vec{B}} = \underset{z}{\vec{F_m}}$$

Forza magnetica 145

Forza che non produce lavoro

$W = \Delta E_k$ (in generale)

ΔE_k particella $=$ W forze che agiscono sulla particella

$\Rightarrow E_k = \text{cost} \Rightarrow v = \text{cost}$

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = W_{A_1 A_2} = \int_{\Gamma_{A_1,A_2}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{\Gamma_{A_1,A_2}} \vec{v} \wedge \vec{B} \, \frac{d\vec{l}}{dt} \, dt =$$

$$= q \int_{\Gamma_{A_1,A_2}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \, dt = 0$$

perché tra il vettore $\vec{v} \times \vec{B}$ e $\vec{v}$ ci sono $90° \Rightarrow \cos 90° = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 136

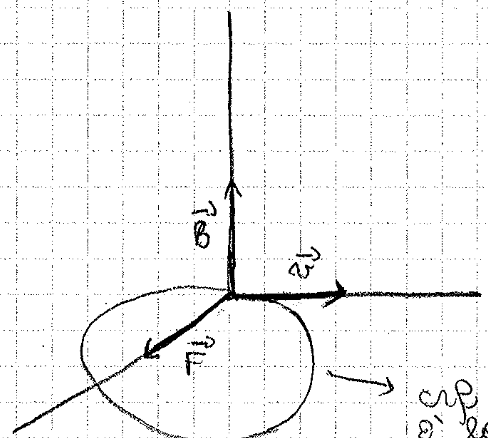
pag 155

$v = \frac{qRB}{m}$ essendo $v = cost$, $\Rightarrow R = cost \Rightarrow$ la traiettoria è una circonferenza

$R = \frac{vm}{qB}$

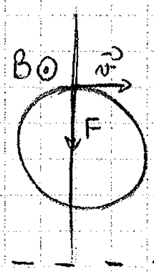
Risultati che valgono $\Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{B}$

Gli anelli di accumulazione funzionano così



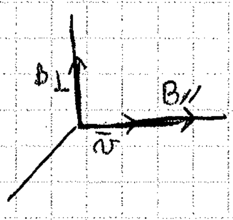
crf che sta su un piano $\perp \vec{B}$. è la traiettoria

<u>Forza magnetica</u> : <u>forza centrale</u>
(permette di avere questo moto)



Se all'inizio $\vec{B}$ e $\vec{v}$ non sono $\perp$, decompongo $\vec{B}$

moto: elica



$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ perchè $\vec{F} \perp d\vec{l}$

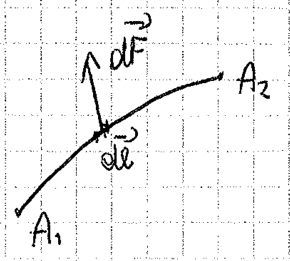
$\Rightarrow \Delta E_k = 0 \Rightarrow E_k$ cost $\Rightarrow v$ cost ($|\vec{v}|$ cost)

$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_N = \frac{v^2}{R} \end{cases}$

$F_N = \frac{v^2}{R} m = qvB$ $\boxed{\text{se } v \perp B}$

$R = \frac{v^2 m}{qvB} = \frac{vm}{qB}$

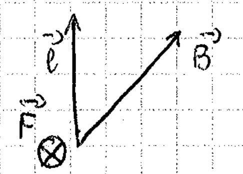
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 136



$$\vec{F} = i \int_{\Gamma_{A_1,A_2}} d\vec{l} \wedge \vec{B} = - i \int_{\Gamma_{A_1,A_2}} \vec{B} \wedge d\vec{l}$$

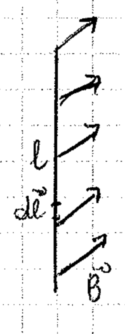
la funzione integranda è un vettore

$\vec{F}$ è $\perp$ al piano definito da $d\vec{l}$ e $\vec{B}$



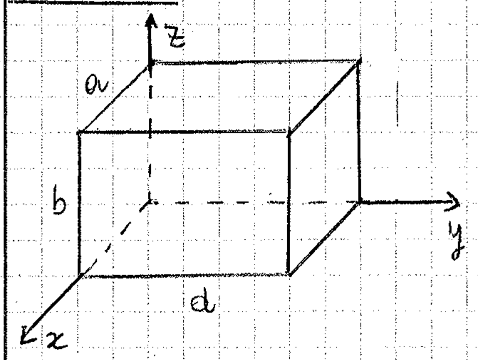
Es

Tratto rettilineo di conduttore di lunghezza l. Qual è la forza che sente il conduttore se immerso in $\perp$ $\vec{B}$ uniforme?



$$\vec{F} = i \int d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \left(\int_{\Gamma_{A_1,A_2}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = i\, \vec{l} \wedge \vec{B}$$

Esercizio



$\vec{B} = B\hat{u}_x$

$\vec{j} = \frac{i}{ab}\hat{u}_y$

$\vec{j} = Ne\vec{v}$

$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{i}{abNe}\hat{u}_y$

Prendiamo cariche $\oplus$ che fluiscono verso dx (stessa cosa di e^- che vanno verso sx, ma più semplice)

$$\vec{M} = \underbrace{\vec{l}_{A_2A_3} \wedge \vec{F}_{A_3A_4}}_{} = l_{A_2A_3}\, \vec{u}_y \wedge \left(-i l_{A_1A_2} B\, \vec{u}_z\right) = i l_{A_1A_2} l_{A_2A_3} B \left(-\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z\right) =$$

$$= -i l_{A_1A_2} l_{A_2A_3} B\, \vec{u}_x$$

rotazione oraria
intorno all'asse x

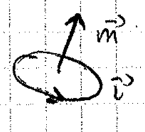
$$\vec{M} = l_{A_2A_3} \vec{u}_y \wedge \left(-i l_{A_1A_2} B \vec{u}_z\right) = i l_{A_2A_3} l_{A_1A_3} B\, \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = i \left(l_{A_1A_3} l_{A_2A_3} \vec{u}_z\right) \wedge B \vec{u}_z =$$

$$= i \left(l_{A_1A_2} l_{A_2A_3} \vec{u}_z\right) \wedge \vec{B} = i S \vec{u}_z \wedge \vec{B} = i \underbrace{\vec{S}}_{} \wedge \vec{B}$$

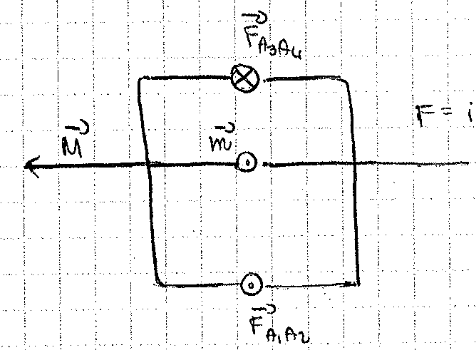
vettore area orientata

$\vec{m} = i\vec{S}$ MOMENTO MAGNETICO DELLA SPIRA

$\Rightarrow \vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$



dipende dalla corrente che circola nella spira, la sua area e la sua orientazione



$F = i l_{A_1A_2} B$

se $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{m} \parallel \vec{B}$ (angolo a 0° o 180°)

$m \uparrow\uparrow B \Rightarrow \vec{M} = 0 \quad \theta = 0$ equilibrio stabile

$m \uparrow\downarrow B \rightarrow \vec{M} = 0 \quad \theta = \pi$ equilibrio instabile

Calcolo energia

$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} \qquad U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

$\left(M = -\dfrac{dU}{d\theta} \qquad F = -\dfrac{dU}{dx} \quad \text{FISICA 1} \right)$

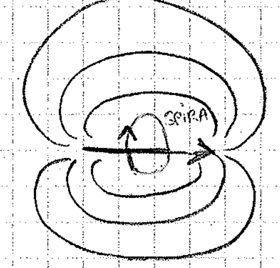
Sorgente elettrico $\Rightarrow$ monopoli
Sorgente del campo magnetico $\Rightarrow$ poli

FORZE

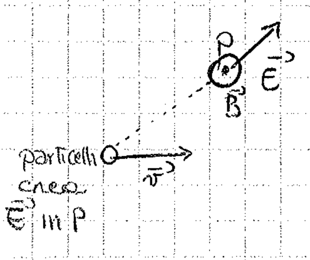
- Gravitazionale → descritta da Einstein (deformazione dello spazio)
- Forte
- Elettromagnetica debole → descritta da Maxwell (la forza agisce sulla particella)

Linee di campo
- elettrico: linee aperte semi infinite e seguenti
- magnetico: linee chiuse

Linee di campo del dipolo elettrico = linee di campo del campo magnetico



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3}$$



(1) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$ ← ASSIOMA

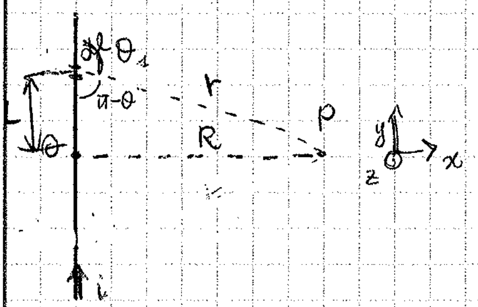
$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \wedge \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \wedge \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}}$$

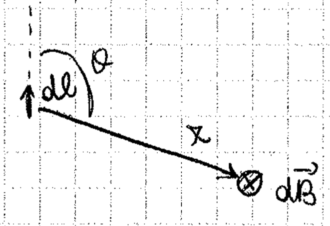
$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ — VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO

ESERCIZIO

Campo $\vec{B}$ creato da un conduttore di lunghezza L, percorso dalla corrente i, ad una distanza R dall'estremità inferiore



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_C \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl\,\cancel{r} \sin\theta}{r^{\cancel{3}2}} \left(-\vec{u_z}\right) = -\vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} dl$$

$$R = r\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$$

$$tg\theta = -tg(\pi-\theta) = -\frac{R}{l} \Rightarrow l = -\frac{R}{tg\theta} \Rightarrow dl = \cancel{\frac{dl}{d\theta} d\theta} = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$\vec{dB} = -\vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin^2\theta}{R^2} \sin\theta \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta = -\vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \sin\theta\, d\theta$$

perché è entrante

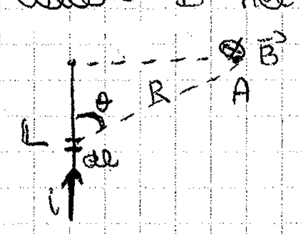
$$\vec{B} = (-)\vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\pi/2}^{\theta_1} \sin\theta\, d\theta = -\vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left(-\cos\theta_1\right) = \vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos\theta_1 =$$

$$= -\vec{u_z} \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}$$

$$-\cos\theta_1 \quad r = L \qquad \cos\theta_1 = -\frac{L}{r} = \frac{-L}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

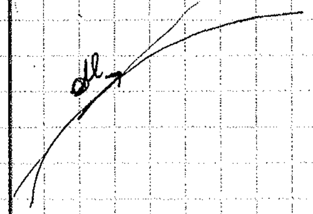
CASO 2

Calcolo $\vec{B}$ nel punto A

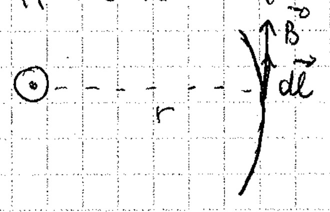


$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

$$\vec{dl} \wedge \vec{r} = r\, dl \otimes$$



Rappresento il filo così:



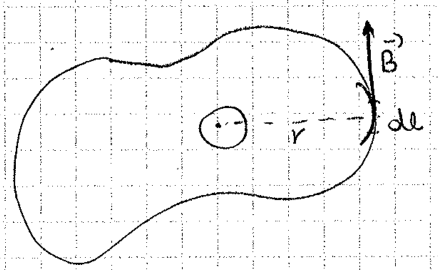
Approssimo la curva con crf osculatrice

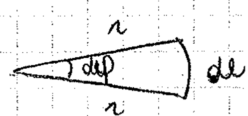
$\vec{B} \parallel \vec{dl}$

Allora

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B\,dl\cos\theta = \oint_\Gamma B\,dl = \oint_\Gamma \overbrace{\frac{\mu_0 i}{2\pi r}}^{\text{LEGGE DI BIOT-SAVART}} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{dl}{r} \quad (*)$$

perchè varia





$\frac{dl}{r} = d\varphi \qquad dl = r\,d\varphi$

$(*)\ \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint_\Gamma d\varphi = \mu_0 i$ integrale di $d\varphi$ lungo curva chiusa $\Rightarrow 2\pi$

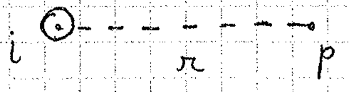
$$\oint_\Gamma \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 i$$

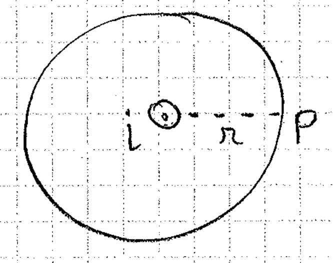
Th Gauss c. elett $\longrightarrow$ I eq
Th Gauss campo magnetico $\longrightarrow$ II eq
Legge Ampère $\longrightarrow$ III o IV eq

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 136

APPLICAZIONE

$\vec{B}(P)$?





Lungo quella crf $|\vec{B}| = cost$

$\Rightarrow$ Posso fare la circuitazione velocemente

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma |\vec{B}| \, |d\vec{l}| = B \oint_\Gamma d\vec{l} = B \cdot l = 2\pi r B$$

(l: lunghezza della curva)

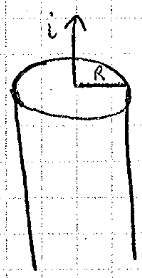
$2\pi r B = \mu_0 i \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

ESERCIZIO

Conduttore indefinito di raggio R.
Calcolo B in tutti i p.ti dello spazio.

Non uso Ampère - Laplace

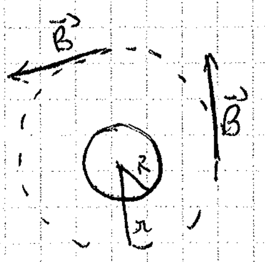
$j = \frac{i}{\pi R^2}$



Le linee di campo magnetico sono crf
(data la simmetria cilindrica)

$$\vec{B} = \begin{cases} r < R & \dots \\ r > R & \dots \end{cases}$$

$\boxed{r > R}$



n.b. La crf di raggio r è concentrica a quella di raggio R

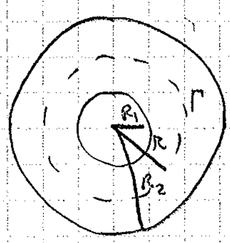
$2\pi r B = \mu_0 i \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \longrightarrow r > R$

$\boxed{r < R}$

$\exists$ curva Γ passante per P lungo la quale posso calcolare $\oint$

$2\pi r B = \mu_0 i_c$

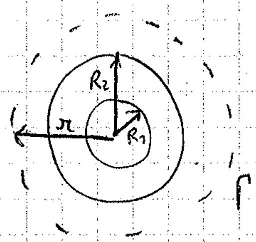
2) $R_1 < r < R_2$



$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = B \, 2\pi r = \mu_0 i_1$$

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

3) $r > R_2$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B$$

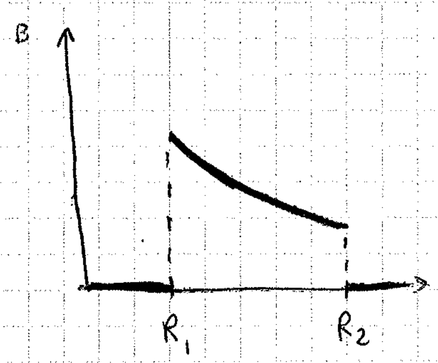
$$2\pi r B = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

$$B = \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi r}$$

CASO SPECIALE

$|i_1| = |i_2|$

$$B = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} \\ r > R_2 & 0 \end{cases}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 136

LEGGE AMPÈRE IN CONDIZIONI DINAMICHE (Ampère - Maxwell)

① $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0 \quad \forall \vec{F} \text{ campo vettoriale}}$$

divergenza di un rotore $= 0$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}_{=0} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \nabla \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Allora Maxwell ha osservato che la legge di Ampère vale solo in condizioni stazionarie

② Ricavarla in condizioni dinamiche:

1. $\vec{\nabla} \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ continuità

2. $\vec{\nabla} \vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E}) = 0$ Gauss

$$\vec{\nabla} \vec{j} + \vec{\nabla}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

Si possono permutare gli operatori differenziali $\dfrac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{\nabla}$ perché uno è rispetto allo spazio, l'altro rispetto al tempo

La parentesi è un vettore. Siccome ho $\vec{\nabla} \vec{A}_1 = 0$ ($\vec{A}_1$ generico vettore), allora $\vec{A}_1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_2$, con $\vec{A}_2$ altro vettore

$$\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\boxed{\mu_0 \vec{A} = \vec{B}}$; lo deduco dall'eq di Ampère in forma differenziale.

$\vec{A}$: vettore arbitrario.

Legame tra $\vec{B}$ ed $\vec{E}$.

Mi aspetto che $\exists$ equazione analoga a questa, ma che coinvolga $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ e $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

So che:

L $\quad \underline{\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l} = 0} \quad ; \quad \underline{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}}$

la ricavo dalla differenziale con Stokes

Lo sapevo già, perchè $\vec{E}$ è conservativo $\Rightarrow$ la sua circuitazione è nulla.

Legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday - Lenz - Henry

LEGGI DI MAXWELL

I $\quad$ Th Gauss, $\vec{E}$ $\quad \oint_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

II $\quad$ Th Gauss, $\vec{B}$ $\quad \oint_\Sigma \vec{B}\, d\vec{\sigma} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$

III $\quad$ L AM $\quad \oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\sigma} \quad ; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

IV $\quad$ L F $\quad \oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{B}\, d\vec{\sigma} \quad ; \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 136

$$= -\int_{MN} v B \, dl = -vBl = -\frac{dy}{dt} l B = -B \frac{d(yl)}{dt} = -B \frac{dA}{dt} =$$

area

$$= -\frac{d(BA)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\phi_B = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma} \vec{B}\, d\vec{\sigma}$$

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \vec{E}\, d\vec{l}}_{\text{F.E.M.}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{\Sigma} \vec{B}\, d\vec{\sigma}}_{\text{FLUSSO}} \qquad 204$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t}$$

FARADAY - HENRY

Un campo $\vec{B}$ variabile nel tempo crea una forza elettromotrice

Cresce il flusso => il circuito reagisce creando una f.e.m. negativa (per questo c'è il segno −)

In elettrostatica la F.E.M. era = 0

Infatti $\frac{\partial}{\partial t}$ del flusso era 0, $\vec{E}$ era conservativo

Deve dipendere dal tempo non per forza $\vec{B}$, ma ϕ_B, cioè o B o l'A o entrambi. (A: area investita da $\vec{B}$)

Si chiama legge di induzione elettromagnetica perchè $\vec{B}$ induce $\oint_{\Gamma} \vec{E}\, d\vec{l}$

Se riesco a creare ϕ_B variabile, riesco a mettere in circolazione nel circuito una corrente elettrica

CONSIDERAZIONE:

Sia nella 3 che nella 4, $\vec{B}$ e $\vec{E}$ sono correlati

Se le risolvo ottengo $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ prendendo come sorgenti la densità di carica ρ e la densità di corrente $\vec{J}$

$\boxed{\rho \text{ e } \vec{J}}$: termini disomogeneizzanti delle eq. di Maxwell

ρ e $\vec{J}$ sono a loro volta legate dall'equazione di continuità

SOLUZIONI PIANE

- Sorgenti nulle
- $\rho = 0$

(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ $\rightarrow$ $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ (1)

(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\rightarrow$ $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ (2)

(3) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned}\right\} (3)$$

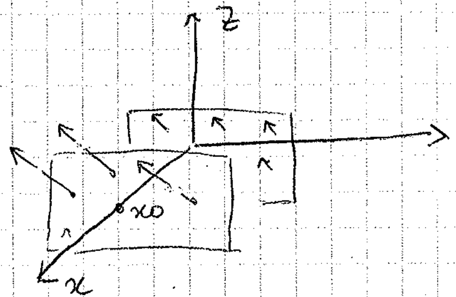
(4) $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ &\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{aligned}\right\} (4)$$

— perchè $E_x = 0$?

Se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dipendono solo da x e t:
se trovo soluzioni per le eq di Maxwell, sono soluzioni uguali in ogni piano $x = x_0$

SOLUZIONI PIANE



? E_y, E_z, B_y, B_z

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (a) \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (b) \end{aligned}\right\} \Leftarrow (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (c) \\ &\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (d) \end{aligned}\right\} \Leftarrow (4)$$

Es: ragionevole pensare distanza dal sole.

(1) $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ perchè gli altri termini della divergenza $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ e $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ sono nulle. E non dipende da y e z.

$\boxed{\text{N.B.}}$ Non dico che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ non hanno componente lungo y e lungo z, semplicemente in ogni piano $x = x_0$ sono costante.

Ottengo $$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}}$$ Equazione di evoluzione di B_y

Equazione pulita in B_y, ma difficile da $\int$

Analogamente,

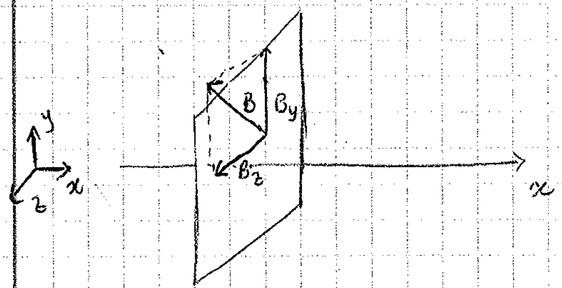
$\frac{\partial}{\partial t}$ (b) $$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ (d) $$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}}$$

Equazione di evoluzione di B_z. E' la stessa di B_y

(infatti y e z sono assi arbitrari, la fisica non può cambiare)



• Definisco $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$(a), $\frac{\partial}{\partial t}$(c)

$\frac{\partial}{\partial x}$(b), $\frac{\partial}{\partial t}$(d)

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}$$

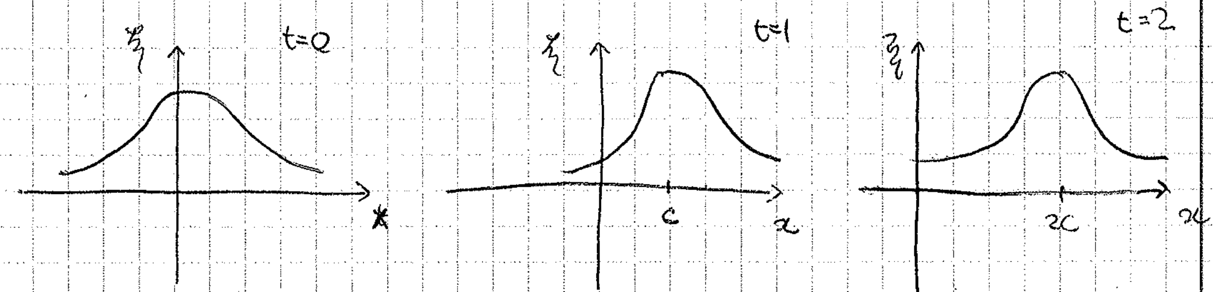
$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}}$$

• Generico ξ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 136



Rappresenta un'onda che si propaga verso dx.
Qual è la velocità di propagazione?

$$v = \frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{c}{1}}_{\text{differenza finita}} = c$$

Onda di profilo arbitrario che si propaga verso dx con $v = c$

⇒ Si chiama equazione delle onde. o di D'ALEMBERT

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \\ \xi(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Problema di Cauchy.
Serve ancora una condizione iniziale perché l'equazione è del II ordine.

⇓

→ $\xi_1(x,t) = f(x-ct)$

Si può dimostrare che c'è anche una 2ª soluzione

→ $\xi_2 = \xi(x+ct)$ → onda che si propaga a sx

C'è la possibilità che un'onda si propaghi a $\begin{cases} dx \\ sx \\ dx \text{ e } sx \end{cases}$

Onda elettrica e onda magnetica:
si propagano nel vuoto con velocità $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

⇒ $\vec{v}$ dipende dalle caratteristiche elettromagnetiche nel vuoto. È la massima velocità che si conosce in fisica.

In un mezzo materiale la velocità è minore

Soluzione generale: $\boxed{\xi = A_1 \xi(x-ct) + A_2 \xi(x+ct)}$

→ (b) ⇒ $B_z = \frac{E_y}{c}$

$$\boxed{\begin{aligned} B_y &= -\frac{E_z}{c} \\ B_z &= \frac{E_y}{c} \end{aligned}}$$

$\left[\vec{E} = E_y(x-ct)\,\hat{u}_y + E_z(x-ct)\,\hat{u}_z\right]$ ①

$\left[\vec{B} = -\frac{1}{c}E_z(x-ct)\,\hat{u}_y + \frac{1}{c}E_y(x-ct)\,\hat{u}_z\right]$ ③

Si possono abbinare ① e ③ o ② e ④

$E^2 = E_y^2 + E_z^2$

$B^2 = \frac{1}{c^2}E_z^2 + \frac{1}{c^2}E_y^2 = \frac{1}{c^2}\left(E_y^2 + E_z^2\right) = \frac{1}{c^2}E^2$

$B = \frac{1}{c}E$ moduli

Da ① e ③

$\vec{E}\cdot\vec{B} = -\frac{1}{c}E_zE_y + \frac{1}{c}E_zE_y = 0$ $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$

Vuol dire che $\vec{E} \perp \vec{B}$

$\vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E_z^2}{c}\hat{u}_x + \frac{E_y^2}{c}\hat{u}_x = \frac{E_z^2 + E_y^2}{c}\hat{u}_x = \frac{E^2}{c}\hat{u}_x$

$\vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E^2}{c}\hat{u}_x$ $\hat{u}_x$ è la stessa direz di propagazione dell'onda.

$\vec{E} \wedge \vec{B} = EB\vec{u}_x$ Ho riottenuto che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono su un piano ⊥ asse x

$\frac{\omega}{k} = c$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $[m^{-1}]$

numero d'onda — lunghezza d'onda

$k = [m^{-1}]$
$\lambda = [m]$
$\omega = [s^{-1}]$
$\nu = [s^{-1}]$
$T = [s]$
$c = [m \cdot s^{-1}]$

ω: pulsazione

$\omega = 2\pi\nu$ — frequenza

$c = \frac{\lambda}{T}$

$T = \frac{1}{\nu}$ — periodo

$\lambda\nu = c$ (a)

$\omega = 2\pi\nu$
$T = \frac{1}{\nu}$
$\nu\lambda = c$
$\frac{\omega}{k} = c$
$c = \frac{\lambda}{T}$

(a): λ e ν non sono grandezze indipendenti

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Onda elettromagnetica:

- Priva di massa
- Trasporta energia. Una volta data λ o ν conosco l'energia che trasportano i quanti di quel campo elettromagnetico (formula con h)

Fotone: un quanto di luce

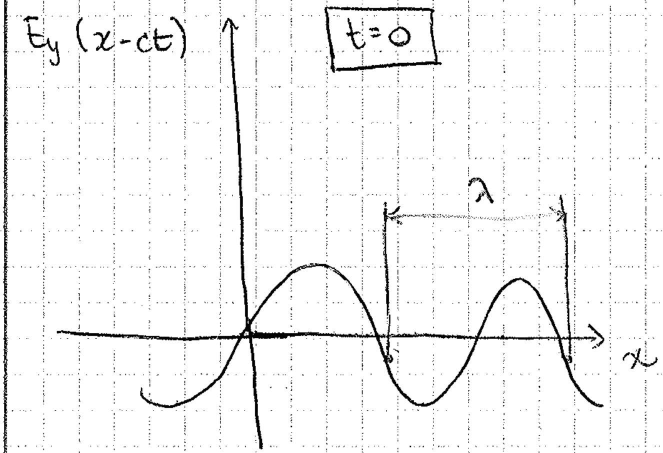


Grafico rispetto allo spazio

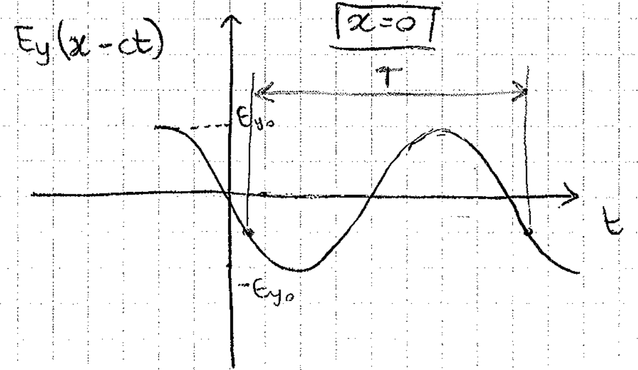


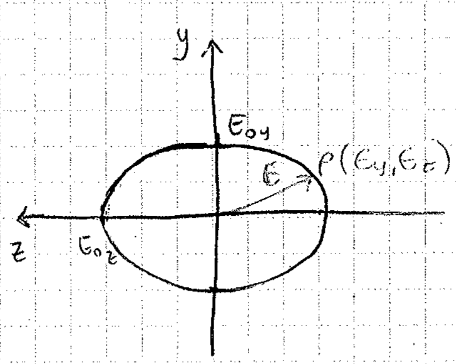
Grafico rispetto al tempo

71

- $\delta = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \vec{E} = E_{0y} \sin(kx-\omega t)\, \hat{u}_y \pm E_{0z} \cos(kx-\omega t)\, \hat{u}_z$

$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \sin(kx-\omega t) \\ E_z = \pm E_{0z} \cos(kx-\omega t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2(kx-\omega t) \\ \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = (\pm \cos(kx-\omega t))^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = 1$$



Il $\vec{E}$ è un vettore la cui punta $\forall$ ellisse centrato in O, in ogni istante nel tempo

$|\vec{E}|$ varia sempre tra min (E_y, E_z) e max (E_y, E_z)

Si parla di $\vec{E}$ con <u>POLARIZZAZIONE ELLITTICA</u>

Se $E_{0y} = E_{0z}$ <u>POLARIZZAZIONE CIRCOLARE</u>

Ci sono mezzi che polarizzano onde non polarizzate

densità istantanea di en. elettromagnetica

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad \frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2 \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boxed{c^2 B^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boxed{E^2} = \varepsilon_0 E^2 = 2u_E$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0 c^2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} B^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 = 2u_B$$

EQ MAXWELL

1) $\int_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}$; $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2) $\int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$; $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

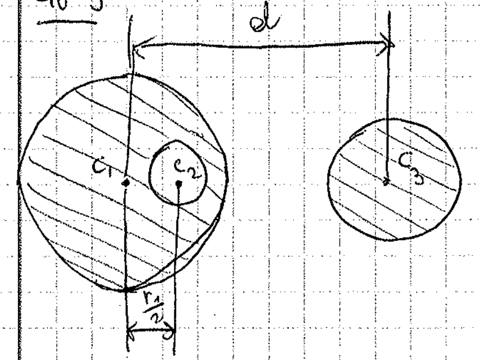
3) $\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$; $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4) $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \vec{E}\, d\vec{\sigma}$; $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\nabla j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\quad$ $\nabla j + \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = 0$ $\quad$ $j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

Es 3

a)



$r_1, q_1, c_1 = 0$

$r_3, q_3, c_3 = d$

$r_2, c_2 = \frac{r_1}{2}$

$E_1(c_2) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho_1 \frac{r_1}{2}$

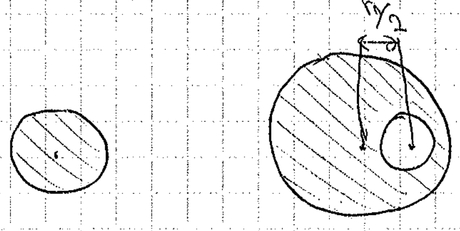
$\vec{E_1}$ $\overleftarrow{E_3}$

$$E_3 = \frac{k q_3}{\left(d - \frac{r_1}{2}\right)^2}$$

$$\rho_1 = \frac{q_1}{\frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)}$$

$$q_3 = q_1 \frac{r_1}{2\left(r_1^3 - r_2^3\right)} \left(d - \frac{r_1}{2}\right)^2$$

b)



$R_3, Q_3 < 0, C_3 = -D$

$R_1, Q_1 > 0, C_1 = 0$

$R_2, C_2 = \frac{R_1}{2}$

$\vec{E_1} = \overleftarrow{E_3}$

$$\frac{1}{3\varepsilon_0} \rho_1 \frac{R_1}{2} = \frac{k q_3}{\left(D + \frac{R_1}{2}\right)^2}$$

$$\rho_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\left(R_1^3 - R_2^3\right)}$$

$$D = \sqrt{\frac{Q_3}{Q_1} \frac{2}{R_1}\left(R_1^3 - R_2^3\right)} - \frac{R_1}{2}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Big| \quad E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho_1 \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{\cancel{4\pi}\, \cancel{r^2}\, \varepsilon_0} = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 136

$$\cos\theta_1 = \frac{l+a}{r_1} = \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} \qquad \cos\theta_2 = \frac{a}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \arcsin\frac{b}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} \qquad \theta_2 = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{k\lambda}{b}\left(\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \arcsin\frac{b}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}}\right)$$

formula che dipende solo dalla geometria della sbarra e della posizione del punto e della carica

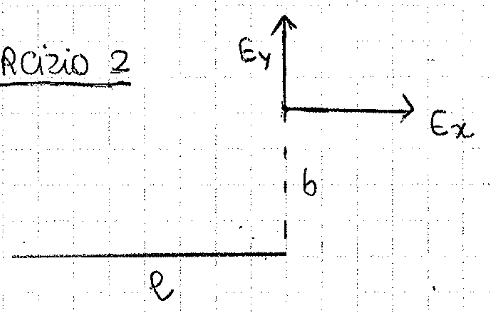
$$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda}{b}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{b}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) =$$

$$= \frac{k\lambda}{b}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}}\right) = k\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}}\right)$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{k\lambda}{b}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{b}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) =$$

$$= \frac{k\lambda}{b}\left(\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ESERCIZIO 2



a caso

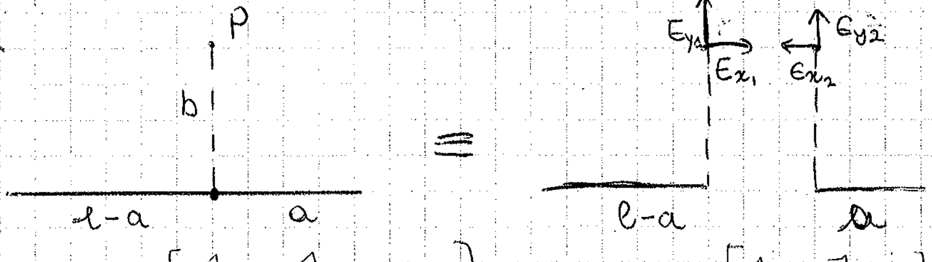
$$E_x = k\lambda\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{l^2+b^2}}\right]$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{b}\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2+b^2}}$$

Qui: semplificazione $\rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

ESERCIZIO 3

come il 2 ma anche l c'è $l-a$



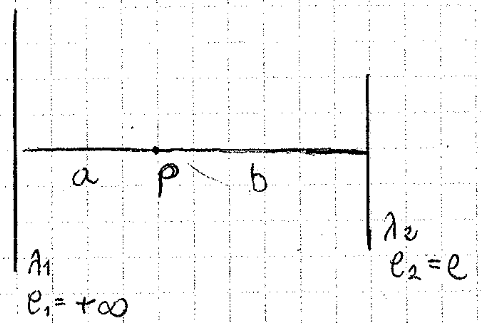
$$E_{x_1} = k\lambda\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{(l-a)^2+b^2}}\right] \qquad E_{x_2} = k\lambda\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$E_{y_1} = \frac{k\lambda}{b}\cdot\frac{l-a}{\sqrt{(l-a)^2+b^2}} \qquad E_{y_2} = \frac{k\lambda}{b}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

come il 2, ma c'è un − davanti a E_{x_2}

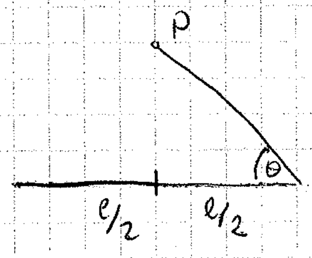
ESERCIZIO 7

$\vec{E}_p = ?$



$$E_x = \frac{2k\lambda_1}{a} - \frac{2k\lambda_2}{b} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+4b^2}}$$

Serve questo:

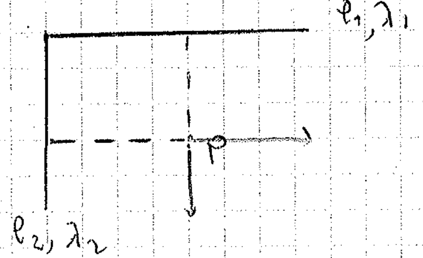


$$\theta \in \left[\operatorname{arctg} \frac{2b}{\ell}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} \frac{2b}{\ell}}$$

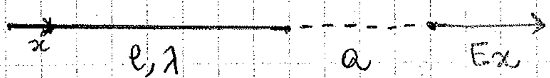
uso es 4

ESERCIZIO 8



ESERCIZIO 9

uso es 1



oppure:

$$E_x = \int dE_x = \int_0^{\ell} \frac{k\lambda\, dx}{(\ell+a-x)^2} = k\lambda \int_0^{\ell} \frac{dx}{(\ell+a-x)^2} = -k\lambda \int_{a+\ell}^{a} \frac{dy}{y^2} =$$

$\ell+a-x=y \qquad dx = -dy$

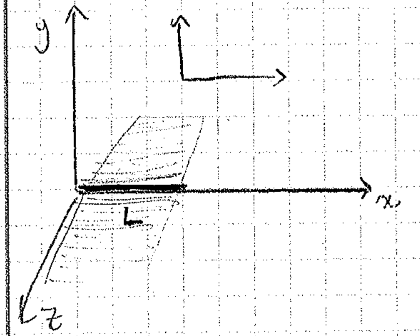
$$= -k\lambda \int_{a+\ell}^{a} \frac{dy}{y^2} = k\lambda \left[-\frac{1}{y} \right]_{a+\ell}^{a} =$$

$$= ky \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell} \right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 136

(1° esercizio: faccio sostituzioni)

CASO SPECIALE 1



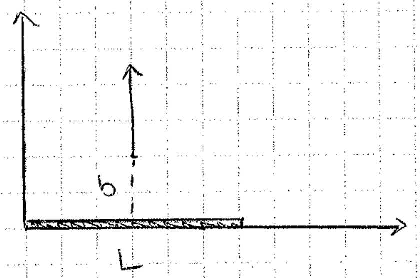
$a=0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \sin\theta_2 = 1 \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}}$

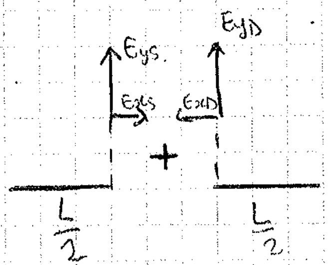
$E_x = k\sigma \ln\left(1+\frac{L^2}{b^2}\right)$

$E_y = 2k\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}}\right)$

corpo con estensione ∞, crea un campo finito

Caso speciale 2





$E_x = 0$; $E_y = E_{yS} + E_{yD} = 4k\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}}\right)$

Caso speciale 3

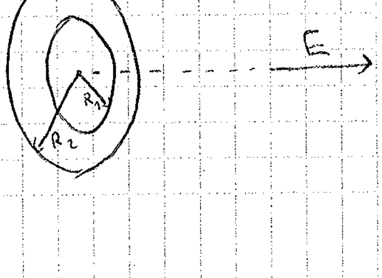
Piano di larghezza infinita carico uniformemente

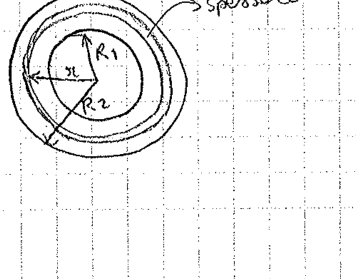
lim $L \to +\infty$ caso precedente

$$E_y = \lim_{L\to+\infty} \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}}\right) = \frac{\sigma\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Esercizio 3

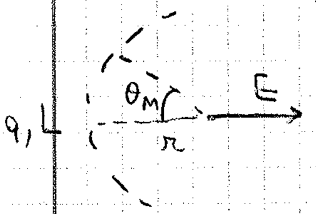
Corona circolare

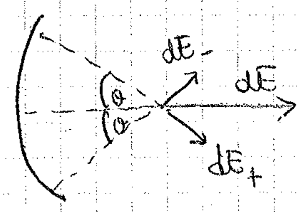




Vedi es 1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 136



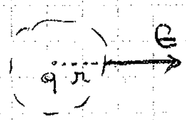


$$dE = 2\frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = 2\frac{kq\cos\theta}{Lr^2}\,dl =$$

GAUSS Es 4

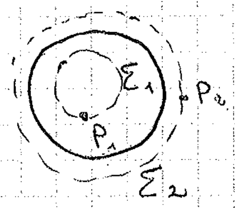
Carica puntiforme. Prendo come superf. di Gauss una sfera con centro nella carica

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$



Es 5

Sfera cava: R, q ⇒ E ?

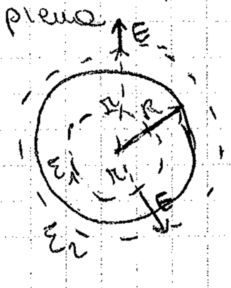


$$\Sigma_2 : 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$

$$\Sigma_1 : 4\pi r^2 E = \frac{0}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = 0$$

Es 7

Sfera R, q unif. al suo interno ⇒ E(r) ?
piena



$$\Sigma_2 : 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \quad r > R;\ E = \frac{kq}{r^2}$$

$$\Sigma_2 : 4\pi r^2 E = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$4\pi r^2 E = \frac{q r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

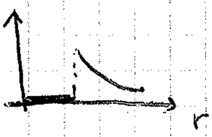
$$E = \frac{q r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0 R^3\, 4\pi \cancel{r^2}} = kq\frac{r}{R^3}$$

$$q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q\,\cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3} = q\frac{r^3}{R^3}$$

$$q_1 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^2$$

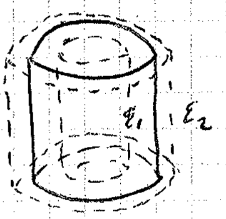
uso ρ densità di carica

(1) $E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r}$ $E = \frac{2k\lambda}{r}$



Es 10

Cil. pieno, ∞, λ, R



Σ_2: $2\pi r L E = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$ $r > R$ $E = \frac{2k\lambda}{r}$

Σ_1: $q_L = \lambda L = \rho V = \rho \pi r^2 L$

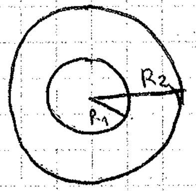
$\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$ — uso R, non r

$$2\pi r L E = \frac{\lambda}{\pi R^2 \varepsilon_0} \cdot V$$

$2\pi \cancel{r} \cancel{L} E = \frac{\lambda}{\cancel{\pi} R^2 \varepsilon_0} \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{L}$ $2\pi E = \frac{\lambda r}{\varepsilon_0 R^2}$ $E = \frac{\lambda r}{\varepsilon_0 2\pi R^2} = \frac{2k\lambda r}{R^2}$

Es 11

Guscio sferico, R_1, R_2, $\rho = \text{cost}$



$$E(r) = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & \frac{4}{3}\pi \frac{\rho k}{r^2}(r^3 - R_1^3) \\ r > R_2 & \frac{kq}{r^2} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{q}{V_{guscio}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)}$$

(1) $r < R_1 \Rightarrow E = 0$

(3) $r > R_2 \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$ $E = \frac{qk}{r^2}$

(2) $4\pi r^2 E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)}{\varepsilon_0}$ $E = \frac{\rho \frac{\cancel{4}}{3} \cancel{\pi} (r^3 - R_1^3)}{\cancel{4}\cancel{\pi} r^2 \varepsilon_0}$

$$E = \frac{\rho k 4\pi}{r^2 \, 3}(r^3 - R_1^3)$$

- Calcolo V

$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ $\int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho k 4\pi}{r^2 \, 3}(r^3 - R_1^3)\, dr = -\int_0^V dV$

$$\int_{R_2}^{r} \frac{kq}{r^2}\, dr = \int_?^V dV$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 136

Calcolare la capacità del sistema

La sfera R_1 è metallica ⇒ la carica è sulla superficie

Le cariche del guscio sentono forze elettriche. Le cariche + migrano verso la superficie esterna, quelle − verso la superf. esterna.

Che valore hanno le cariche −?
Valgono $-q$ ⇒ le cariche + su R_3 valgono $+q$

Questo perchè la carica $-q$ è indotta da $+q$ in R_1.
Infatti la carica $-q$ garantisce che all'interno del guscio $\vec{E}=0$.

Punto P nel guscio. Se prendo come superf. di Gauss una sfera passante per P, la carica interna alla sfera è 0 ⇒ il flusso di $\vec{E}$ in P è $=0$.

Poi, su R_3 c'è per forza $+q$ perchè il guscio è neutro. Gli e⁻ hanno abbandonato gli atomi e caricato positivamente la parte esterna.

$$E,V \begin{cases} r < R_1 & E=0 & V=\text{cost}_1 \\ R_1 < r < R_2 & & \\ R_2 \leq r \leq R_3 & E=0 & V=\text{cost}_3 \\ r > R_3 & & \end{cases}$$

- $R_1 < r < R_2$: $\vec{E}=\frac{kq}{r^2}$ (già fatto) $\qquad \frac{kq}{r^2}=-\frac{dV}{dr}$

$$-\frac{kq}{r^2}\,dr=+\,dV \qquad +\frac{kq}{r}+\text{cost}_2=V \qquad V=\frac{kq}{r}+\text{cost}_2$$

- $r > R_3$ $\qquad 4\pi r^2 E=\frac{+q}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E}=\frac{qk}{r^2} \qquad \frac{kq}{r^2}=-\frac{dV}{dr}$

$$\frac{kq}{r}+\text{cost}_4=V$$

CONDIZIONI

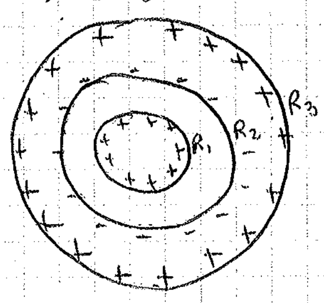
- $V(+\infty)=0 \Rightarrow \text{cost}_4=0$
- $V(R_3^+)=V(R_3^-) \Rightarrow \text{cost}_3=\frac{kq}{R_3}$
- $V(R_2^-)=V(R_2^+) \Rightarrow \frac{kq}{R_2}+\text{cost}_2=\text{cost}_3 \Rightarrow$

garantire la continuità della funzione V

4 casa

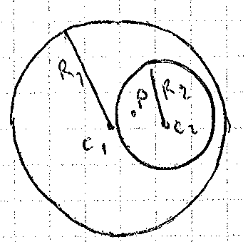
Condensatore cilindrico. Calcolo la capacità del sistema

R_1: cil. pieno
R_2, R_3: guscio cilindrico



+q sulla superficie del cil. di raggio R_1

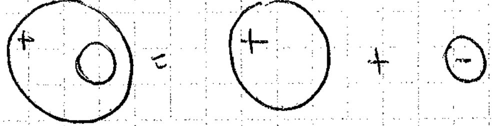
Es 1



Sistema asimmetrico.
Sovrapp. di 2 sistemi simmetrici (le 2 sfere)
Il campo elettrico è la somma dei $\vec{E}$ creati dalle 2 sfere.

Cavità sferica R_2 eccentrica

E all'interno della cavità in P?



$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\left(R_1^3 - R_2^3\right)}$$

$$E_+(\rho) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad , \quad E_+(P) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overline{C_1P}$$

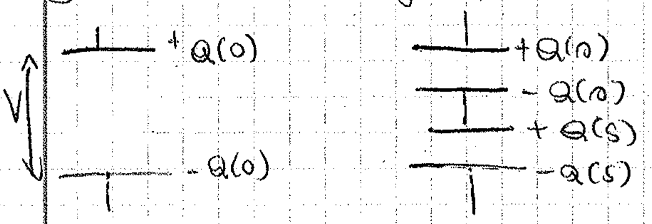
$$E(P) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overline{C_1P} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overline{C_2P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overline{C_1C_2}\right)$$

$\Rightarrow \vec{E}$ non dipende da dov'è P $\Rightarrow$ il E all'interno della cavità è uniforme e và lungo $\overline{C_1C_2}$.
Se $c_1 = c_2 \Rightarrow \vec{E} = 0$

Se la cavità è eccentrica, $\vec{E} \neq 0$

diminuzione dell'energia elettrostatica del sistema. Ho consumato energia per inserire la lastra. Allora vuol dire che l'energia non l'ho fornita io come lavoro, ma il sistema. Il sistema ha risucchiato la lastra, quindi ha perso energia.

② Generatore collegato, mantiene ΔV costante. Q varia



$$Q(0) = C(0)\,V = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V$$

$$Q(s) = C(s)\,V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d-s}$$

$$\Delta Q = Q(s) - Q(0) = \varepsilon_0 A V \left(\frac{1}{d-s} - \frac{1}{d} \right) = \frac{\varepsilon_0 A V s}{d(d-s)} > 0$$

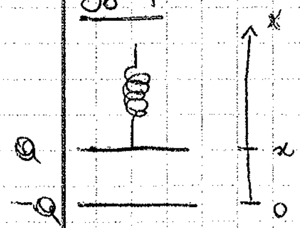
$C = \frac{Q}{V}$. C cambia sia in 1 che in 2. $\Rightarrow$ Cambia Q (caso 2) / Cambia V (caso 1)

$$\Delta U = U(s) - U(0) = \frac{1}{2} V^2 \left(C(s) - C(0) \right) = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d-s} - \frac{1}{d} \right) =$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2 V^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} \qquad = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 A \cdot \frac{s}{d(d-s)} > 0$$

Il sistema ha più energia.
L'energia è arrivata dal generatore, il generatore ha effettuato lavoro.

Es 4



k: costante elastica
l'armatura sup. ha massa m e area A

l: distanza tra le armature quando la molla è a riposo

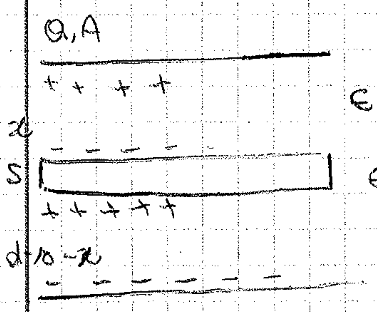
L'armatura inferiore è ferma.

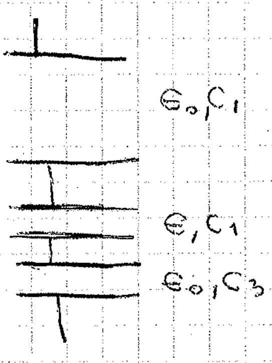
ESERCITAZIONE 6

Es 1

Inserimento di un dielettrico tra le armature

$Q, A, d, \epsilon, \epsilon_0$ Calcolo ΔU





$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{x}{\varepsilon_0 A} + \frac{s}{\varepsilon A} + \frac{d-s-x}{\varepsilon_0 A}$$

$$C = \frac{A}{\frac{d-s}{\varepsilon_0} + \frac{s}{\varepsilon}} \qquad C_0 = \frac{A\varepsilon_0}{D}$$

Spessore metal $\varepsilon = \infty$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d-s}$$

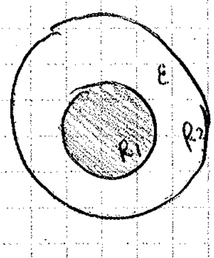
$$\Delta U = U(C) - U(C_0) = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C_0} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{Q^2 s}{2\varepsilon_0 A}$$

Es 2: a casa

Es 4 fare

Sfera metallica R_1, ricoperta di un guscio spesso $R_2 - R_1$, dielett ϵ

Calcolo C della sfera metallica R_1



Gauss $\int_\Sigma \vec{D}\, d\vec{\sigma} = q$

induzione elettrica

$$D = \begin{cases} r < R_1 \rightarrow 0 \\ R_1 < r < R_2 \text{ e } r > R_2 \rightarrow \frac{q}{4\pi r^2} \end{cases} \qquad (4\pi r^2 D = q)$$

$D = \varepsilon E$

$$E = \begin{cases} r < R_1 \longrightarrow 0 \\ R_1 < r < R_2 \longrightarrow \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon} \\ r > R_2 \longrightarrow \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 136