NUMERO: 1294

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Villois

MATERIA: Analisi Matematica II, Prof.Mazzi

ANALISI II

Prof. Luisa Mazzi

Lezioni / esercitazioni senza divisione formale

calvino.polito.it/~mazzi

Serie:

$a_0, a_1, a_2, \dots$ $\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

$2{,}15 = 2 + 1\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$

$2{,}1\bar{5} = 2 + 1\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 5\times10^{-3} \dots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \dots$ non converge

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ converge

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

$\{a_n\} \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$

$\{f_n(x)\}$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

$$x^n \begin{cases} \to +\infty & (x>1) \\ \to 1 & (x=1) \\ \to 0 & (0<x<1) \end{cases}$$

Ci serve $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

$f(x)$ → funz. vera

$f_n(x)$ → funz. approssimata

Libri

Lancelotti Lezioni di Analisi Matematica II, Celid

Esame

Scritto + orale. Si può fare l'orale se voto ≥ 15

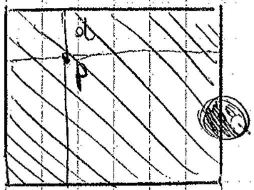
Orale: domande teoriche modulate sullo scritto

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 260

Def Punto interno

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. $P \in A$ è interno ad A se $\underline{\exists B_\varepsilon(P) \text{ t.c. } B_\varepsilon(P) \subseteq A}$

Es:



P è interno con, ad esempio, $\varepsilon = \frac{d}{2}$

Q non è interno

Punto esterno

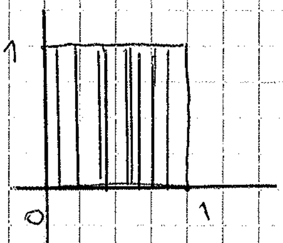
$P \in \mathbb{R}^n$ è esterno ad A se $\underline{\exists B_\varepsilon(P) \text{ t.c. } B_\varepsilon(P) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)}$

$P \in \mathbb{R}^n$ è punto di frontiera di A se $\underline{\forall B_\varepsilon(P)}$ è tale che $\underline{B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset}$

$\underline{B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset}$

es:

$[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge x \in \mathbb{Q}\}$



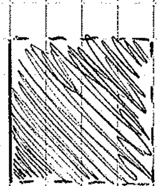
$\forall \varepsilon \quad B_\varepsilon(P) \cap A \neq 0$

$B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq 0$

$\Rightarrow$
- A non ha punti interni
- Tutti i punti di A sono di frontiera
- (Tutti i punti del rettangolo sono di frontiera)

$\forall (x,y) : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1$ sono di frontiera

es:



$0 < x < 1$

$0 \leq y < 1$

- P.ti interni (x,y): $\begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$

Def

- P.ti di frontiera: (x,y): $x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \vee y = 1$

1) Insieme dei p.ti di frontiera di A si chiama <u>frontiera o bordo</u> (boundary) di A. $\underline{\partial A}$

2) Insieme dei p.ti interni di A si chiama interno di A
$\underline{\mathring{A} = \mathrm{Int}(A)}$

3) Insieme dei p.ti esterni di A si chiama <u>esterno di A</u> $\underline{\mathrm{Est}(A)}$

4) <u>A aperto in $\mathbb{R}^n$</u> se tutti i suoi p.ti sono interni, cioè $\underline{\mathring{A} = A}$

Def $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$

$\forall B_\varepsilon(l) \ \exists B_\delta(\bar{x}) : \ \underset{x \neq \bar{x}}{x \in B_\delta(\bar{x}) \cap \text{dom} f} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l)$

Ha senso calcolare i limiti solo nei p.ti di accumulazione

Def

$P \in A$ è un p.to isolato di A se non è p.to di accumulazione di A

OSS Un p.to isolato per forza $\in A$, un p.to di accumulazione può non esserlo

Esercizi

1) P isolato $\Rightarrow$ P interno ad A? No

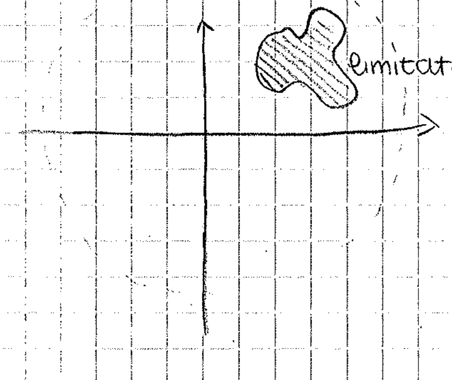
2) P di accumulazione $\Rightarrow$ P di frontiera per A? No

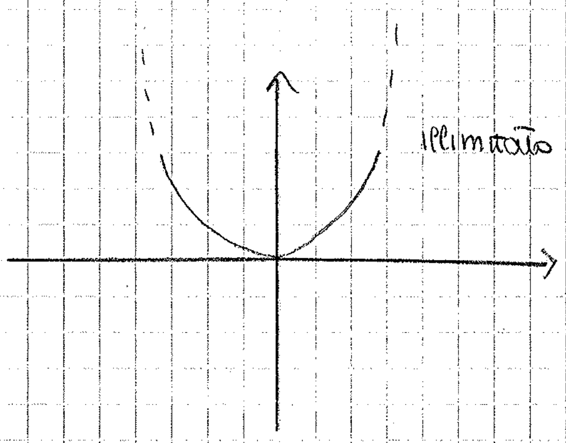
3) P di frontiera $\Rightarrow$ P di accumulazione? Sì

4) Un p.to isolato è di frontiera? Sì

Def

A è LIMITATO se $\exists M > 0 : A \subseteq B_M(0)$





A è ILLIMITATO se non è limitato

$\forall M > 0 \ \exists P \in A : P \notin B_M(0)$

Def

A limitato superiormente se $\exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in A \ x \leq b$] in $\mathbb{R}$
Similmente per lim. inferiormente

In $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ una definizione del genere non ha senso, non c'è un ordine naturale

Invece si può dare la def. di LIMITATEZZA perchè in $\mathbb{R}^n$ $\exists$ il concetto di distanza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 260

- Se $\bar{X}$ è di acc. per F

  F è cont. in $\bar{X}$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{X \to \bar{X}} F(X) = F(\bar{X})$

- Se $\bar{X}$ è isolato $\Rightarrow$ F è continua in $\bar{X}$

Th Weierstrass

A compatto, $f: A \to \mathbb{R}$ continua

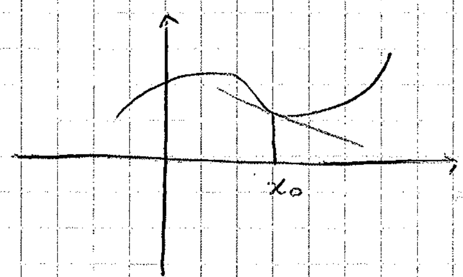
$\Rightarrow \exists\, \bar{X}, \underline{X} \in A$ t.c. $\forall x \in A$ $\underbrace{f(\underline{X})}_{\min} \leq f(X) \leq \underbrace{f(\bar{X})}_{\max}$

Prop

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\} \\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\} \end{array}\right\}$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$

$\left.\begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\} \\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\} \end{array}\right\}$ sono chiusi di $\mathbb{R}^n$



Derivabilità / Differenziabilità

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

x_0 interno a dom f

f derivabile in x_0 se $\exists$ finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

1) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ tg al grafico di f in x_0

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

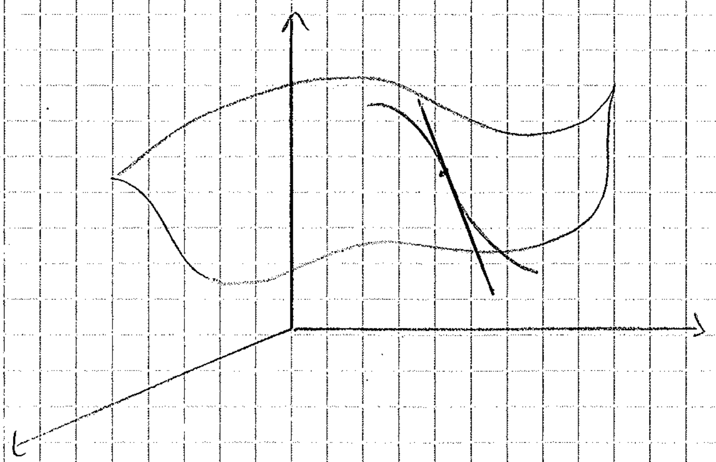
2) f è derivabile in $x_0 \Rightarrow$ f è continua in x_0

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y)$ $\quad$ $P(x_0, y_0)$ interno a dom f

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

se $\exists$ finito, $= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$



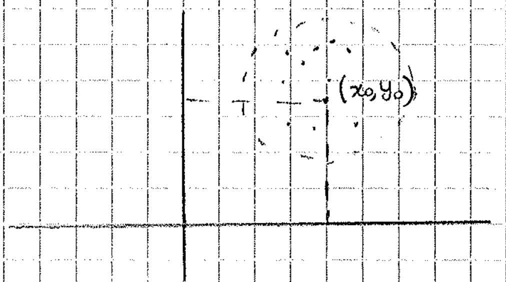
derivata direzionale:
"pendenze" della strada per salire la montagna

Differenziabilità

f differenziabile in (x_0, y_0) se $\exists$ un' applicazione lineare $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y) = f(x_0 y_0) + L(x - x_0, y - y_0) + o\left(\|(x - x_0, y - y_0)\| \right)$$

$(x,y) \to (x_0, y_0)$



Differenziabilità: prendo tutti i punti in un intorno di (x_0, y_0) e studio la f

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\bar{x}$ punto interno a dom$f$

$h = (h_1, \dots, h_n)$ vettore degli incrementi. f è diff in $\bar{x}$ se $\exists$ $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare t.c.

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + L(h) + o(\|h\|) \quad h \to 0$$

oppure

$$f(x) = f(\bar{x}) + L(x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|) \quad x \to \bar{x}$$

$\forall \bar{x}$ $\exists L_{\bar{x}}$ che si chiama DIFFERENZIALE di f in $\bar{x}$

Teorema del differenziale $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (?)

f differenziabile in (x_0, y_0) interno a dom$f$ $\Rightarrow$

1. f continua in (x_0, y_0)
2. $\exists$ deriv. parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
3. $\forall$ $\vec{v}$ versore v
$\exists$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot \vec{v}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 260

Def

f è di classe C^1 su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$ se $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ esistono e sono continue su A.

Teorema (no dim)

- $f \in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ f differenziabile in A.

- $g(x)$ classe C^1 su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x,y) = g(x)$ è una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$

Derivate successive

$\exists$ su un aperto A $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$f \in C^2(A)$ se tutte le derivate seconde $\exists$ continue

$f \in C^\infty(A)$ se $\exists$ tutte le derivate parziali (continue) di $\forall$ ordine

Teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

$$f \in C^2(A) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \forall\, x,y \in A$$

Matrice Jacobiana

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m))$

$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m$

$\bar{x}$ p.to interno ad $A = \operatorname{dom} F$

es: $\log(x+\bar{x})$ $\qquad f(x) = x + x^2$, $\quad g(x) = \log x$

$$\frac{d}{dx}\log(x+x^2) = \frac{1}{x+x^2}\cdot(1+2x)$$

Ora abbiamo: TEOREMA

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} \mathbb{R}^p$$

$$G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$\bar{x}$ punto interno a $\mathrm{dom}(G\circ F)$.
F differenziabile in $\bar{x}$
G differenziabile in $F(\bar{x})$

$\Longrightarrow$ $G \circ F$ differenziabile in $\bar{x}$

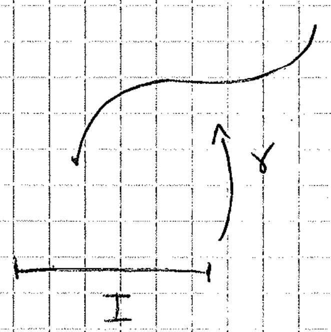
$$J(G\circ F)(\bar{x}) = JG(F(\bar{x}))\cdot JF(\bar{x})$$

prodotto di matrici, non commutativo.

$$(p\times n) = (p\times m)\cdot(m\times n)$$

Esempio

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



f è ad esempio la temperatura

$$f\circ\gamma(t) = f(\gamma(t))$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_m(t))$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right)$$

$f(\gamma(t))$ è da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t))\cdot\begin{pmatrix}\gamma'_1(t)\\ \vdots \\ \gamma'_m(t)\end{pmatrix} = \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\cdot\gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\gamma(t))\,\gamma'_m(t)$$

es: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \;:\; (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 260

$\bar{x}$ può assumere qualunque valore, tranne $\bar{x}=0$.

Th invertibilità locale

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia $\bar{x}$ punto interno al dominio di A
f derivabile in $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$

$\Rightarrow \exists B_r(\bar{x}) \quad \exists B_s(f(\bar{x}))$

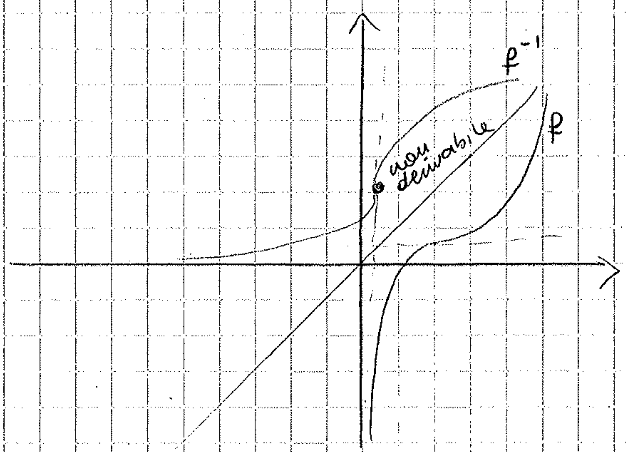
$\exists f^{-1}: B_s(f(\bar{x})) \to B_r(\bar{x})$
inversa di f

Grafico f $(x, f(x))$

Grafico f^{-1} $(f(x), x)$

• f^{-1} è derivabile in $f(\bar{x})$

$$(f^{-1})'(f(\bar{x})) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, differenziale di f in $\bar{x}$ $\quad f'(\bar{x})$

$f'(\bar{x}): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f'(\bar{x})x \qquad f'(\bar{x}) \neq 0$

Se $f'(\bar{x}) \neq 0$ allora l'a.l. lineare associata è invertibile.

Obiettivo: non calcolare l'inversa, ma sapere che $\exists$, sapere che c'è
f'
Non so com'è f^{-1}, ma riesco ad approssimarla al I ordine

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\bar{X}$ p.to interno a dom F.

Si dice INVERSA LOCALE di F in $\bar{x}$ una funzione

$F^{-1}: B_s(F(\bar{x})) \longrightarrow B_r(\bar{x})$

tale che, $\forall x \in B_r(\bar{x})$

• $F^{-1}(F(\bar{x})) = x \qquad$ • $\forall y \in B_s(F(\bar{x})) \quad F(F^{-1}(y)) = y$

Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$

$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C_1 è un cambiamento di variabili se:

1) $\text{dom}\,\phi = \mathbb{R}^n$

2) $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$

3) $J\phi$ è invertibile $\forall x \in \mathbb{R}^n$

4) ϕ è biunivoca (garantisce l'invertibilità globale)

da qui segue che ϕ^{-1} è di classe C^1
(perchè la 3 mi garantisce che ϕ^{-1} è differenziabile ed è C^1 su un intorno di $\forall y$)

$$J\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$\det J\phi(x)$ si ottiene con somme e prodotti delle derivate

$\det J\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$\det J\phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

in $\mathbb{R}$ $\quad f$ continua su intervallo I, $\quad f(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

Th. degli zeri vale anche in $\mathbb{R}^n$

Per funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\text{dom} f = \mathbb{R}^n$:

$\exists \bar{x} : f(\bar{x}) < 0 \qquad \exists \tilde{x} : f(\tilde{x}) > 0$

$\Rightarrow \exists z : f(z) = 0$

$\det J\phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \det J\phi(x)$ ha lo stesso segno su $\mathbb{R}^n$ (se ϕ è di classe C^1)

Def

Curva in forma parametrica di $\mathbb{R}^n$

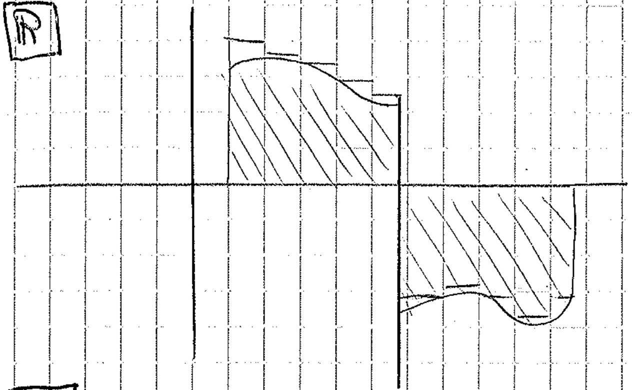
- $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua
- γ iniettiva, cioè se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

Sostegno di $\gamma = \text{im}\,\gamma = \{ \gamma(t) : t \in [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}^n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 260

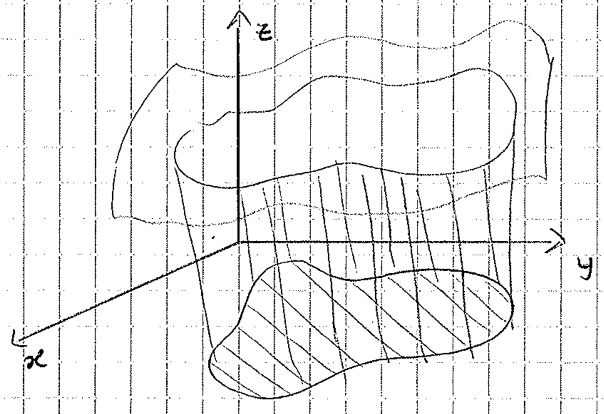
INTEGRALI DOPPI

$\boxed{\mathbb{R}}$



Integrale:
con funzioni maggioranti:
$\inf \{ \Sigma \text{ base} \times \text{altezza} \} \in \mathbb{R}$
con funzioni minoranti
$\sup \{ \Sigma \text{ base} \times \text{altezza} \}$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$



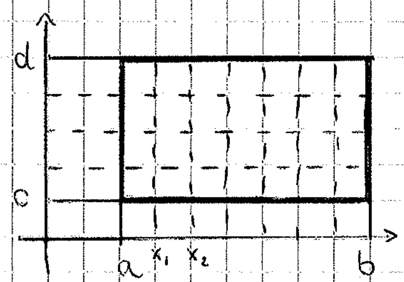
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(f \geq 0)$

$0 \leq z \leq f(x,y)$

$(x,y) \in A$

integrale: volume, è una specie di cilindro ma la base sup non è piana



$[a,b] \times [c,d]$

(x,y)

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

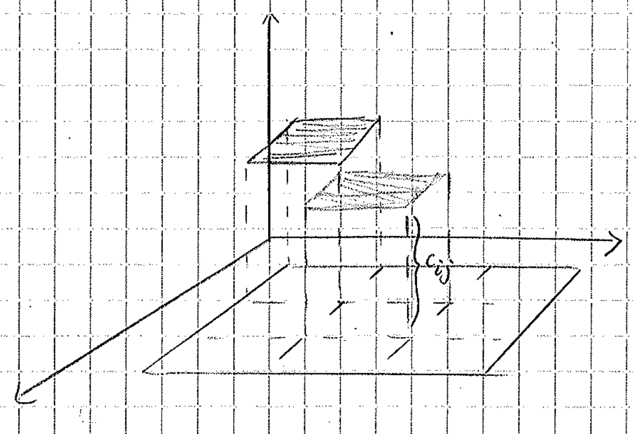
$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$

$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

$i = 0, \dots, n-1 \quad j = 0, \dots, m-1$

f è a scala adattata alla suddivisione $\{R_{ij}\}$ se

$f(x,y) = c_{ij}$ se $(x,y) \in R_{ij} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$



non è importante cosa succede sui bordi, il volume non cambia

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 260

$\exists \inf \left\{ \int_R h,\ h \text{ magg. a scala} \right\}$

$\sup \left\{ \int_R g,\ g \text{ minorante a scala} \right\} \leq \inf \left\{ \int_R h,\ h \text{ maggiorante a scala} \right\}$

(1) $\underline{\int_R} f = \sup \left\{ \int_R g,\ g \text{ minorante a scala di } f \right\}$ integrale inferiore di f su R

(2) $\overline{\int_R} f = \inf \left\{ \int_R h,\ h \text{ minorante a scala di } f \right\}$ integrale superiore di f su R

$\forall f$ limitata su R $\quad \underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f$

Def

Se $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f = \int_R f$ si dice che f è Riemann - integrabile su R

Ci sono f limitate non integrabili
es: in $\mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet

es:

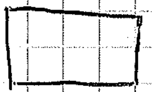
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

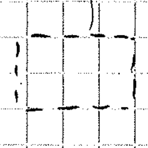
ad esempio su $R = [0,1] \times [0,1]$ non è integrabile

$\underline{\int_R} f = 0 \qquad \overline{\int_R} f = 1$

Teorema

(1) Tutte le funzioni continue su un rettangolo chiuso R sono Riemann - integrabili su R.



(2) Tutte le funzioni continue su $\mathring{R}$  e limitate su R sono R-integrabili su R.

Teorema (formule di riduzione)

sia f integrabile su $R = [a,b] \times [c,d]$

(1) Se $\forall y \in [c,d] \ \exists \ g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

$$\Rightarrow \int_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\int_R f = \int_0^{\pi/4}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x\right] dx = \left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= -\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

$\cos(x+y)$ con $(x,y) \in [0,\frac{\pi}{4}] \times [0,\frac{\pi}{2}]$

non è sempre >0 $\Rightarrow$ l'integrale non è il volume del solido.

es:

$f(x,y) = x\cos xy$ $\qquad R = [1,2]\times[0,\pi]$

$f(x,y)$

Primitiva di f rispetto a x

$F(x,y)$ t.c. $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$

$\iint_R f$

$$\int_0^{\pi} x\cos xy \, dy = x\int_0^{\pi}\cos xy \, dy = +\sin xy \Big|_0^{\pi} =$$

$t(y) = xy$ $\qquad = +\sin \pi x$

$dt = \frac{\partial(xy)}{\partial y} dy = x\,dy$

$$\int_1^2 +\sin \pi x \, dx = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x\Big|_1^2 = -\frac{1}{\pi}\cos 2\pi + \frac{1}{\pi}\cos\pi = -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

notazione

$$\int_R f = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$\to$ così sottointendo che calcolo prima $\int$ in x e poi $\int$ in y

Proposizione

Se $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ e g è integrabile su $[a,b]$, h è integrabile su $[c,d]$

$$\Rightarrow (*) \int_R f = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

$(*)$ $g(x)\,h(y)$ è integrabile su $R = [a,b]\times[c,d]$

Dim

$$\iint_R g(x)\overbrace{}^{h(y)} dx\,dy = \int_a^b\int_c^d g(x)\overbrace{}^{h(y)} dy\,dx =$$

$$\int_a^b g(x)\cdot\int \quad dx =$$

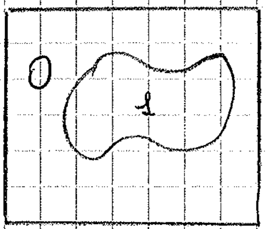
$$\int_R g(x)h(y) = \int_a^b\left(\int_c^d h(y)g(x)\,dy\right)dx$$

$$\int_c^d h(y)g(x)\,dy = g(x)\underbrace{\int_c^d h(y)\,dy}_{H}$$

Def

Se Ω è misurabile, si dice misura (di Peano - Jordan) di Ω

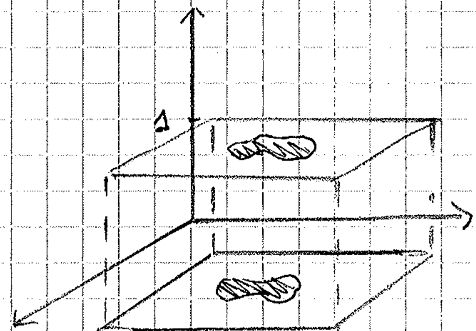
$$|\Omega| = \int_R \chi_\Omega$$



La definizione è DATA, perchè nonostante sembri che la misura dipenda dal rettangolo, in realtà non lo è, perchè fuori dal dominio l'area vale 0

① $|\Omega|$ non dipende dal rettangolo R

②



Vol (parallelepipedo) = Area (R)

$f \geq 0$ su R

$\int_R f$ = area

$f(x,y) = 1$

② $|\Omega|$ = area di Ω per tutte le figure piane di cui so calcolare l'area

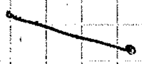
Def

Un insieme è trascurabile se è misurabile e la sua misura è nulla. $|\Omega| = 0$

es:

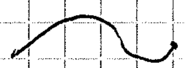
① Punti $P \in \mathbb{R}^2$ ha area nulla

② Segmenti



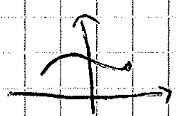
③ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ continua e iniettiva

Sostegno di $\gamma = \{ \gamma(t), t \in [a,b] \}$

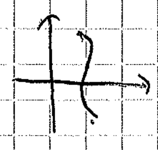


ha area nulla

④ $\{ (x, f(x)), x \in [a,b] \}$



$\{ (f(y), y), y \in [c,d] \}$

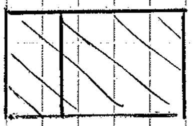


⑤ Hanno misura nulla:
L'unione di un n° finito di insiemi di misura nulla

Prop Ω_1, Ω_2 insiemi misurabili in $\mathbb{R}^2$

1) $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow |\Omega_1| \leq |\Omega_2|$

es:



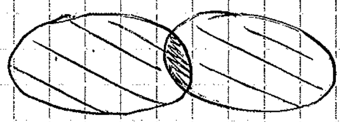
$\Omega_2 = R$

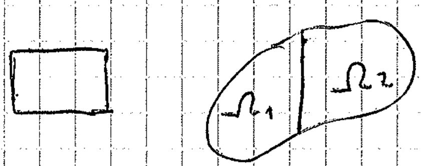
Ω_1 = Rett. \ segmento

$\Rightarrow |\Omega_1| = |\Omega_2|$

2) $\Rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2$ sono misurabili

e $|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| - |\Omega_1 \cap \Omega_2|$





Prop Se Ω è misurabile in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

1. $\mathring{\Omega}$ è misurabile
   $\overline{\Omega}$ è misurabile

2. $\forall \tilde{\Omega} \quad \mathring{\Omega} \subseteq \tilde{\Omega} \subseteq \overline{\Omega} \Rightarrow |\mathring{\Omega}| = |\tilde{\Omega}| = |\overline{\Omega}|$

dim

$\overline{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega$. Ma se Ω misurabile $\Rightarrow |\partial\Omega| = 0$

$$|\overline{\Omega}| = |\mathring{\Omega} \cup \partial\Omega| = |\mathring{\Omega}| + \underbrace{|\partial\Omega|}_{=0} - \underbrace{|\mathring{\Omega} \cap \partial\Omega|}_{\partial\mathring{\Omega} \;=0} = |\mathring{\Omega}|$$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

1. Ω misurabile
2. f limitata su Ω $\quad (\exists M > 0 : \forall x \in \Omega, \ |f(x)| \leq M)$

Consideriamo un rettangolo $R \supseteq \Omega$

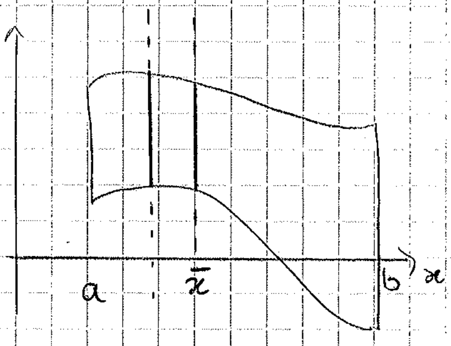
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 260

② Se f è limitata su Ω e $|\Omega| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f = 0$

- $a \leq x \leq b$ $\qquad \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

  $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$



deformazione "elastica", continua del rettangolo

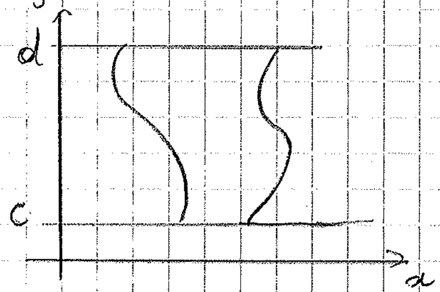
Insieme verticalmente convesso o y semplice

↳ è l'unione di tanti segmenti

- $c \leq y \leq d$

  $\gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$

  $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue



Orizzontalmente convesso o x semplice

Teorema di Riduzione

$\Omega = \{ (x,y) : a \leq x \leq b, \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$

α, β continue su $[a,b]$

f continua q.o. su Ω

$$\Rightarrow \int_\Omega f = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx =$$

L'ordine dx, dy non è indifferente

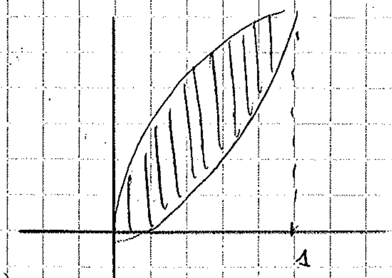
$$= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

perché integro prima in y

$\Omega = \{ (x,y) : c \leq y \leq d, \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$ $\quad \gamma$ e δ continue su $[c,d]$

$$\Rightarrow \int f = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

esempio: $\quad f(x,y) = 2xy \qquad \Omega = \{ 0 \leq x \leq 1, \; x^2 \leq y \leq x+1 \}$



Esercizio

$f(x,y) = x+y$

$A = \{ 0 \leq x \leq 1 , \quad 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x} \}$

insieme verticalm. convesso
(le $\cap$ con rette verticali sono segmenti)

$$\int_A (x+y) = \int_0^1 \left(\int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\, dy \right) dx = ⊛$$

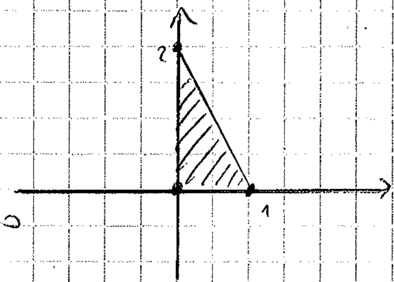
$$\int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\, dy = \left[yx + \frac{y^2}{2} \right]_{2x^3}^{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + 2x - 2x^4 - 2x^6$$

$$⊛ \int_A (x+y) = \int_0^1 (\underbrace{2x\sqrt{x}}_{x^{3/2}} + 2x - 2x^4 - 2x^6)\, dx = \left[4\frac{x^{5/2}}{5} + x^2 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7 \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{5} + 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{24+35-14-10}{35} = 1$$

è un volume

Esercizio



$f(x,y) = \sqrt{x} + 2xy$

sul triangolo T di vertici $(0,0)$ $(1,0)$ $(0,2)$

È sia orizzontalmente che verticalmente convesso

Posso dire ad esempio:

$$T = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq -2x+2 \end{cases}$$ (verticalm. convesso)

Oppure

$$T = \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\int_T f(\sqrt{x} + 2xy) = \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} (\sqrt{x}+2xy)\, dy \right) dx = ⊛$$

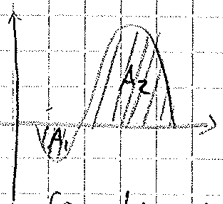
$$\int_0^{-2x+2} (\sqrt{x} + 2xy)\, dy = \left[\sqrt{x}\, y + xy^2 \right]_0^{-2x+2} = \sqrt{x}(-2x+2) + x(4x^2+4-8x) =$$

$$= -2x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^3 + 4x - 8x^2$$

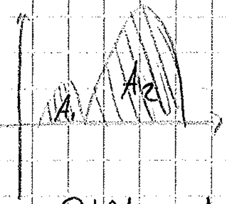
③ $f \leq g$ su $\Omega \setminus C$, $|C| = 0$ $\quad (g - f \geq 0)$

$\Rightarrow \int_\Omega f \leq \int_\Omega g$

④ $\left| \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f|$



$\int f = |A_2 - A_1|$

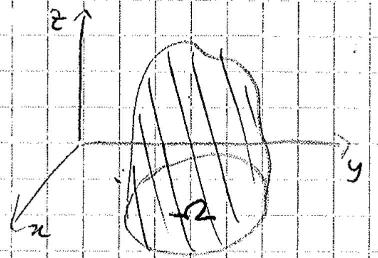


$\int |f| = A_1 + A_2$

⑤ $\int_\Omega |f| =$ volume della parte di spazio t.c.

$(x, y) \in \Omega$

$0 \leq z \leq |f(x,y)|$



⑥ Teorema della media integrale

$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f$ equivale a $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ (su $\mathbb{R}$)

$\inf_{x \in \Omega} f(x) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \leq \sup_{x \in \Omega} f(x)$

⑦ Additività rispetto al dominio

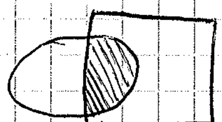
a) Ω_1, Ω_2 misurabili

$|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$ misura dell'intersez.

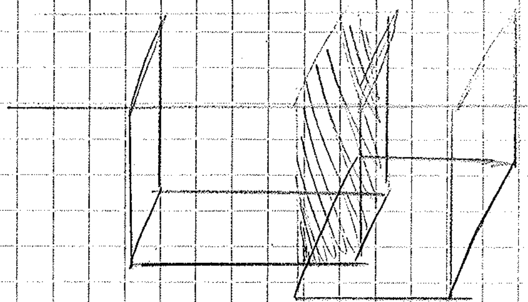
$\Downarrow$

$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$

b) $|\Omega_1 \cap \Omega_2| \neq 0$



$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$



$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$

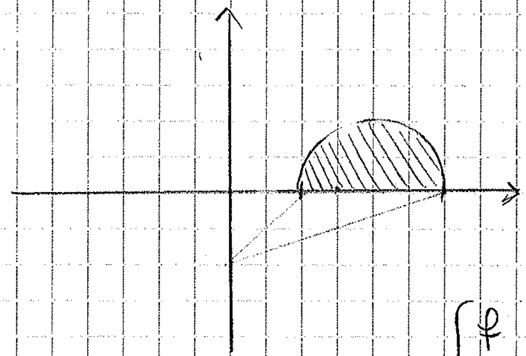
Esempio 2

$f(x,y) = xy$

$D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 = \left\{ (x,y): \begin{array}{l} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-(x-2)^2} \end{array} \right\} \qquad y^2 = 1-(x-2)^2 \qquad (x-2)^2 + y^2 = 1$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} -1 \le y \le 0 \\ 1+y \le x \le 3y+3 \end{array} \right\}$$



$D_1 \cap D_2 =$ segmento $\qquad |D_1 \cap D_2| = 0$

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

$$\int_{D_1} f = \int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy \, dy \, dx$$

$$\int_{D_2} f = \int_{-1}^0 \left(\int_{1+y}^{3y+3} xy \, dx \right) dy$$

$$\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy \, dy = x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \frac{x}{2} \left[1 - (x^2+4-4x) \right] =$$

$$= \frac{x}{2} \left[1 - x^2 - 4 + 4x \right] = \frac{x}{2} \left[-x^2 + 4x - 3 \right] = -\frac{x^3}{2} + 2x^2 - \frac{3}{2} x$$

$$\int_{D_1} f = \int_1^3 \left(-\frac{x^3}{2} + 2x^2 - \frac{3}{2} x \right) dx = -\frac{1}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_1^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{8}} \cancel{80}^{10} + \frac{2}{3} \cdot 26 - \frac{3}{4} \cdot \cancel{8}^{2} = -10 + \frac{52}{3} - 6 = \frac{52}{3} - 16$$

$$\int_{1+y}^{3y+3} xy \, dx = \left[y \frac{x^2}{2} \right]_{1+y}^{3y+3} = \frac{y}{2} \left[(3y+3)^2 - (y+1)^2 \right] =$$

$$= \frac{y}{2} \left(9y^2 + 9 + 18y - y^2 - 1 - 2y \right) = \frac{y}{2} \left(8y^2 + 16y + 8 \right) = 4y \left(y^2 + 2y + 1 \right) =$$

$$= 4y^3 + 8y^2 + 4y$$

$$\int_{D_2} f = \int_{-1}^0 \left(4y^3 + 8y^2 + 4y \right) dy$$

Cambiamenti di variabili

$\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- biunivoca, di classe C^1
- $J_p \Phi$ invertibile

$\Phi: A' \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$

aperto, connesso, $\neq \emptyset$

Prop

1) $\forall\ B' \subseteq A'$ aperto $\Rightarrow$ $\Phi(B')$ è aperto in A

non è Ω?

2) $\Omega \subseteq A$ misurabile $\Rightarrow$ $\Phi^{-1}(\Omega')$ misurabile

3) $B' \subseteq A'$ $\Rightarrow$ $\Phi(\partial B') \subseteq \partial(\Phi(B))$ non è B'?

Teorema

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme misurabile e $\Phi: \Omega' \to \Omega$ un cambiamento di variabili (Φ biunivoca, di classe C^1, $J_p \Phi$ è invertibile $\forall\, p \in \Omega'$)
- f continua su Ω

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \cdot \left| \det J_\Phi (u,v) \right| du\, dv$$

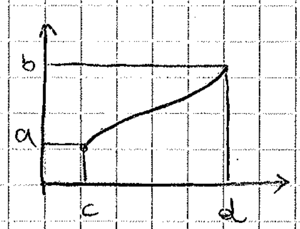
$$(x,y) = \phi(u,v)$$

In 1 variabile:

$\Phi\ [c,d] \to [a,b]$

$t \mapsto \phi(t) = x$

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(b)} f(\Phi(t))\, \Phi'(t)\, dt \overset{(\Phi'(t)>0)}{=} \int_c^d f(\Phi(t))\, \Phi'(t)\, dt$$

$\Rightarrow$ 

$\Phi'(t) > 0$ Φ crescente

$\Phi^{-1}(a) = c$ $\Phi^{-1}(b) = d$

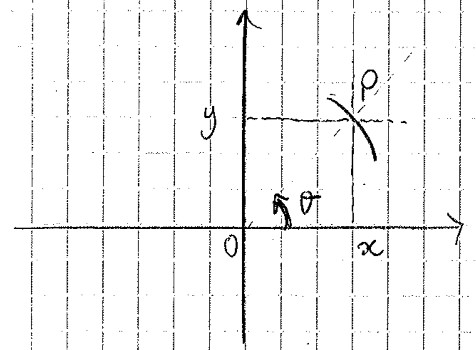
Se $\Phi'(t) < 0$

$\Phi'(b) = c$ $\Phi'(a) = d$

$$\int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_c^d f(\Phi(t))\ \phi'(t)\, dt =$$

$$= -\int_c^d f(\phi(t)) \cdot \Phi'(t)\, dt = \int_c^d f(\phi(t)) \cdot |\phi'(t)|\, dt$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 260



Vedere un piano come insieme di circonferenze concentriche.

$P \neq O$
un'unica circf che passa per P

θ: angolo che la semiretta OP forma con il semiasse delle $x > 0$

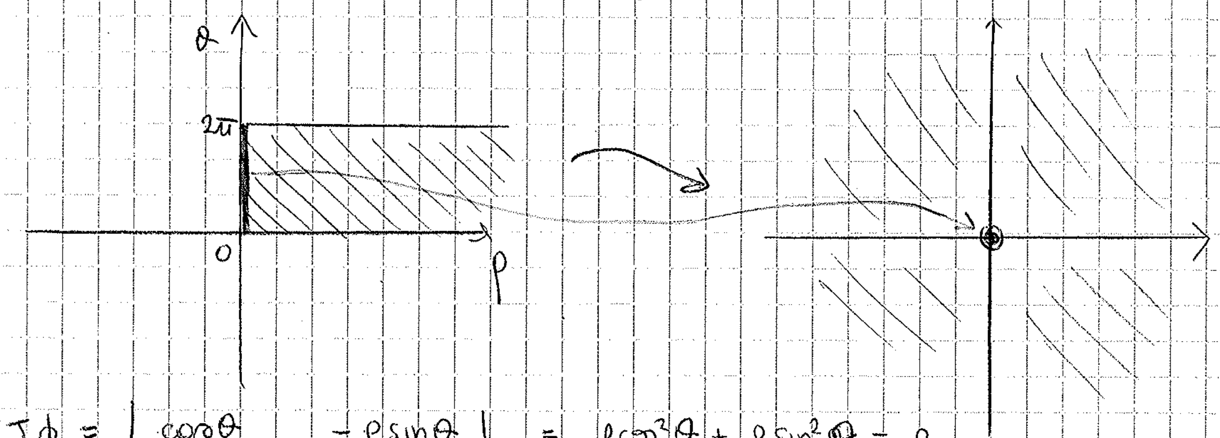
$\rho = \overline{OP}$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad \rho > 0$ (escludo l'origine)

$0 \leq \theta < 2\pi$

l'origine è un problema, perché $O(0,0) \rightarrow \rho = 0$, θ qualsiasi
non è biunivoco

$\phi : [0, 2\pi) \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ è biunivoco



$$\det J\phi = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

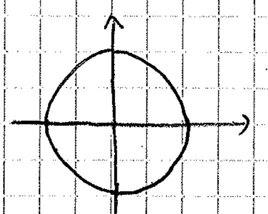
$\rho > 0$ se $\rho \neq 0$

Allora det > 0

$\phi(\rho, \theta) = (x, y)$ $\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\rho > 0$ $\quad \rho = 0 \Rightarrow$ origine

__Area cerchio__

$C: x^2 + y^2 \leq r^2$



Area $(C) = \pi r^2$

$-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$

$$|C| = \int_C 1 \cdot dx\,dy = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx \quad \text{a cosa}$$

- $\displaystyle\int_R e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \qquad \left\{\begin{array}{l}\rho\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right\} R'$

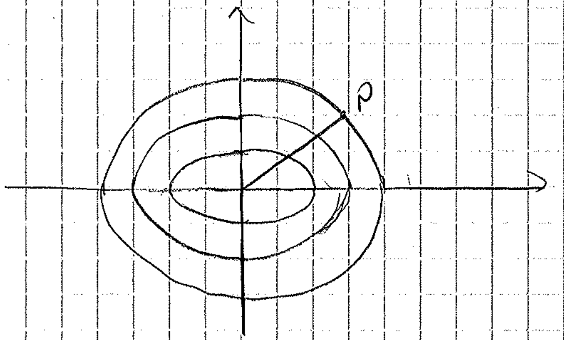
$$\int_{R'} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} 1\,d\rho \int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = -\pi\cdot\int_0^{-R^2} e^t\,dt =$$

$-\rho^2 = t$

$$= -\pi\left[e^{-R^2}-1\right] = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

$-2\rho\,d\rho = dt \qquad \rho\,d\rho = -\frac{dt}{2}$

Coordinate polari ellittiche



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{(\lambda a)^2}+\frac{x^2}{(\lambda b)^2}=1 \qquad \lambda>0$$

(così ho semiassi proporzionali)

$$\begin{cases} x=\rho a\cos\theta \\ y=\rho b\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\rho^2\cancel{a^2}\cos^2\theta}{\cancel{a^2}}+\frac{\rho^2\cancel{b^2}\sin^2\theta}{\cancel{b^2}}=\rho^2$$

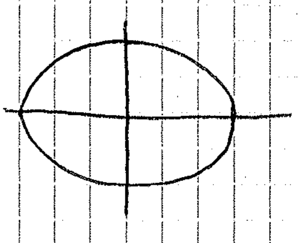
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \iff \rho^2\le 1$$

$\rho=1 \Rightarrow$ descrivo i pti dell'ellisse che ha semiassi λa e λb

θ non è l'angolo tra il semiasse $x>0$ e la linea che unisce O a P!

$$\frac{y}{x}=\frac{\rho b\sin\theta}{\rho a\cos\theta}=\frac{b}{a}\,tg\,\theta$$

Calcolo area ellisse



$$\begin{cases} x=\rho a\cos\theta \\ y=\rho b\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta<2\pi\end{array}$$

$$\int_E dxdy \qquad \det J\phi = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -\rho a\sin\theta \\ b\sin\theta & \rho b\cos\theta \end{vmatrix} = \rho ab > 0$$

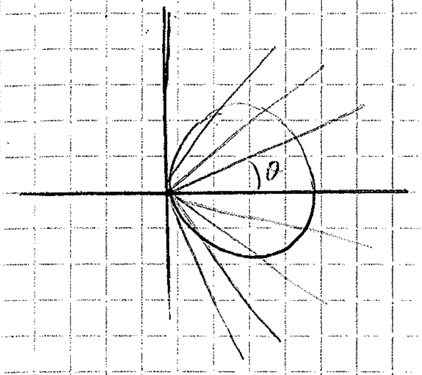
$\boxed{=0 \iff \rho=0}$

$$\int_E dxdy = \int_{E'} d\rho\,d\theta\,\rho ab = ab\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta =$$

$$= ab\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} = ab\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi ab$$

Sostituisco $\rho^{\cancel{2}} \leq 2R\cancel{\rho}\cos\theta \qquad \rho \leq 2R\cos\theta$

$$\{(x,y) : (x-R)^2+y^2 \leq R^2\} = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 2R\cos\theta, \ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$



Per tutti i θ tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ le semirette $\cap$ dominio
Descrivo in coord. polari centrate nell'origine una cif che non è centrata nell'origine

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \rho \qquad R=2$

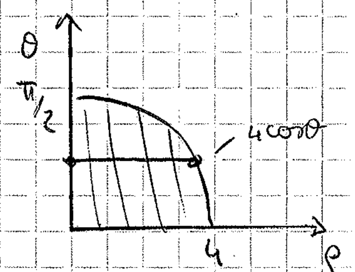
$C : \{(x,y) : (x-2)^2+y^2 \leq 4, \ y \geq 0\}$

$C' = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{4\cos\theta} \rho \cdot \underbrace{\rho}_{\det J} \, d\rho\right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{4\cos\theta}\right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{64}{3}\cos^3\theta \, d\theta = ⊛$$

N.B.

Qui ρ e θ non sono indipendenti, ρ dipende da $\theta \Rightarrow$ l'ordine possibile è solo uno (prima rispetto a ρ, poi rispetto a θ)



N.B.
integrale di una potenza dispari di sin x o cos x

$$⊛ \ \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{64}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$\frac{64}{3}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{64}{3} - \frac{64}{9} = \frac{128}{9}$$

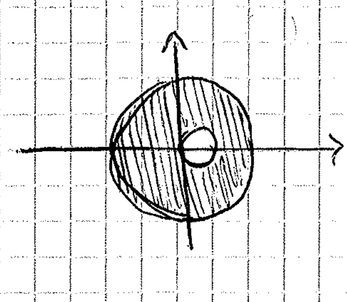
Esercizio a casa

Parametrizzare in coord. polari centrate in $(0,0)$ cerchi di centro $(0,R)$ $(-R,0)$ $(0,-R)$ e raggio R

Esercizio

$$\iint_\Omega (x^2+y^2)^{3/2} \, dx\, dy$$

$$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, \ x^2+y^2-x \geq 0\}$$



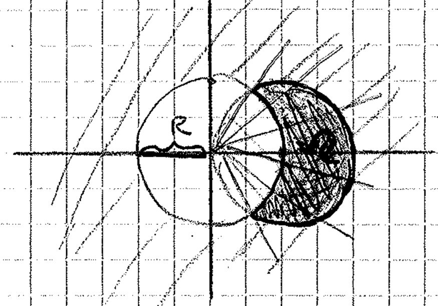
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 260

$$(*) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5\theta}{5}\,d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^2 \cos\theta\, d\theta$$

$\cos^5\theta = \cos^4\theta \cdot \cos\theta = (\cos^2\theta)^2 \cos\theta = (1-\sin^2\theta)^2\cos\theta$

ESERCIZIO

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dx\,dy \qquad \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} R \leq \rho \leq 2R\cos\theta \\ 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta \end{cases}$$

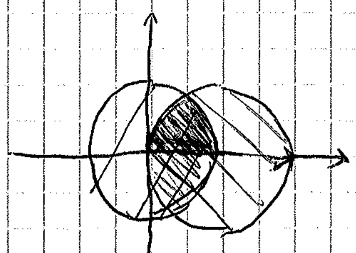
trovo i punti di ∩ delle 2 circ

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho=1 \\ (\rho\cos\theta-1)^2+\rho^2\sin^2\theta=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho=1 \\ \rho^2 - 2\rho\cos\theta=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho=1 \\ \cos\theta=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{ho intersezioni}$$

$$C' = \left\{ (\rho,\theta) : 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta;\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\iint_C \frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint_{C'} \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\,\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_1^{2\cos\theta}$$



Es

$$D = \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

in questo dominio $\frac{y}{x}$ non può essere integrata

$\Rightarrow g(x,y) = xy^2 \qquad y \geq 0$

D ⇒ in coord. polari

$A \cup B \qquad A = \left\{ (\rho,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\ 0 \leq \rho \leq 1 \right\} \qquad B = \left\{ (\rho,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \right\}$

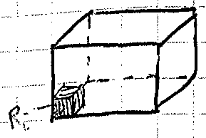
$$\int_D xy^2\,dx\,dy = \iint_A \rho\cos\theta \cdot \rho^2\sin\theta \cdot \rho + \iint_B \rho^4\cos\theta\sin\theta\, d\theta\, d\rho$$

posso fare il prodotto perché il dominio è 1 rettangolo — ρ dipende da θ perciò integro prima rispetto a ρ, poi rispetto a θ

Integrali tripli

Domini $D \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad \mathbb{R}^n$

f a scala



$[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$

$$\int_R f = f \cdot V \square = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \text{Volume}(R_i)$$

$f(x)$ costante sui parallelepipedi su R_i $= c_i$

- Se f è limitato su un parallelepipedo R

→ magg. a scala h $\qquad g(x) \le f(x) \le h(x)$
min. a scala g

$$\sup \left\{ \int_R g \,;\, g \text{ min} \right\} \qquad \inf \left\{ \int_R h \,;\, h \text{ magg} \right\}$$

$$\underline{\int_R} f \le \overline{\int_R} f$$

Se $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$ si dice che f è Riemann integrabile su R

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato

R parallelepipedo t.c. $\Omega \subseteq R$

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

χ_Ω è def su R ed è limitata su R

Def

Ω è misurabile se χ_Ω è R-integr. su R e $\boxed{|\Omega| = \int_R \chi_\Omega}$

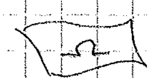
(la misura di Ω è il volume di Ω)

La misura di Peano-Jordan coincide con la misura euclidea

Prop

Ω è misurabile in $\mathbb{R}^3 \iff |\partial\Omega| = 0$

- Hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$:



1) archi di curva regolare, segmenti, punti

2) Parti di superfici

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 260

teorema

$f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile e f limitata su Ω

Sia R parallelepipedo che contiene Ω

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

f è Riemann - integrabile su Ω se $\tilde{f}$ è integr su R e

$$\int_\Omega f = \int_R \tilde{f}$$

Proprietà

① $\int_\Omega f$ è lineare

② • se $f \geq 0$ su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \geq 0$

• se f è continua su Ω e $f \geq 0$

$$\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

③ $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus C, \quad |C| = 0$

f è integrabile $\iff$ g è integrabile,

$$\int_\Omega f = \int_\Omega g$$

④ Ω_1, Ω_2 misurabili, f integrabile su Ω_1 e Ω_2

$\Rightarrow$ f è integrabile su $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$$

⑤ $|\Omega| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f = 0$

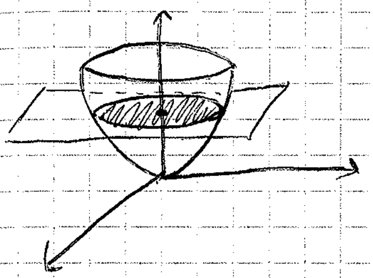
Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \partial \Omega_1$
$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \partial \Omega_2$ $\Rightarrow |\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

$$\circledast = \iint_D \frac{1}{2}\left(1-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{D'}(1-\rho^4)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\left[\int_0^1(\rho-\rho^5)\,d\rho\right]\cdot\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1\cdot 2\pi = \pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix}\right\} = D'$$

Parametrizzazione per strati

fettine non per forza tutte uguali



$x^2+y^2=z$

Vedo il dominio come:

$$\bigcup_{z\in[0,1]}\{x^2+y^2\le z\}$$

Descrizione per strati di un dominio quando:

- $a\le z\le b$
- $\Omega\cap\{z=z_0\}=\Omega_{z_0}$ è misurabile $\forall z_0\in[a,b]$ (?)

$\Rightarrow \Omega$ è misurabile

f è continua su $\Omega \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f = \int_a^b\left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$

Es

$f(x,y,z)=z$ su $\Omega=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le z\le 1,\ \ x^2+y^2\le 1\}=$

$=\{x^2+y^2\le z,\ 0\le z\le 1\}$

$\Omega_z=\{(x,y):\ x^2+y^2\le z\}$

$$\int_\Omega z = \int_0^1\left(\iint_{\Omega_z} z\,dx\,dy\right)dz = \int_0^1 z\left(\iint_{\Omega_z}dx\,dy\right)dz$$

$\displaystyle\iint_{\Omega_z}dx\,dy = \text{Area}(\Omega_z) = \pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$ area di un cerchio con $r=\sqrt{z}$

$$\int_\Omega z = \int_0^1 z\cdot\pi z\,dz = \pi\int_0^1 z^2\,dz = \pi\cdot\frac{z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

rivedere eq quadriche! Homepage prof

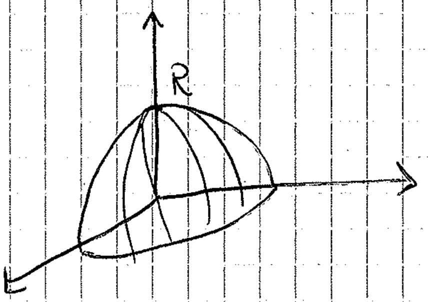
$$\int_{-2}^{2} (x^2+y^2)\,dy = x^2\int_{-2}^{2} dy + \underbrace{\int_{-2}^{2} y^2\,dy}_{= 2\int_0^2 y^2\,dy} = 4x^2 + 2\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 4x^2+\frac{16}{3}$$

$$\int_\Omega z = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4x^2+\frac{16}{3}\right)dx = \int_0^2\left(4x^2+\frac{16}{3}\right)dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^2 + \frac{16}{3}x\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 8 + \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

Es

$f(x,y) = x^2 z \qquad \Omega = \{(x,y,z) \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad z \ge 0\}$



Va bene ma strati che fili

Fili $\quad z^2 \le R^2 - (x^2+y^2)$

$0 \le z \le \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

$x^2+y^2 \le R^2$

Strati $\quad 0 \le z \le R \quad \{x^2+y^2 \le R^2 - z^2\} = \Omega_z$

Fili $\displaystyle\iint_C \Bigg(\underbrace{\int_0^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} x^2 z\,dz}_{= x^2\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} = \frac{x^2}{2}\left(R^2-(x^2+y^2)\right)}\Bigg)dx\,dy = \iint_C \rho^2\cos^2\theta \cdot \frac{1}{2}(R^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta = (*)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ y = \rho\sin\theta & 0\le\rho\le R \end{cases}$

$$(*) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3\cos^2\theta\,(R^2-\rho^2)\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (\rho^3 R^2 - \rho^5)\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^R (R^2\rho^3-\rho^5)\,d\rho\right) \quad (*)$$

$$I = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\cos\theta\,d\theta = \sin\theta\cos\theta + \int\sin^2\theta\,d\theta = \sin\theta\cos\theta +$$

$$\int(1-\cos^2\theta)\,d\theta = \sin\theta\cos\theta + \theta - \int\cos^2\theta\,d\theta = \int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$2\int\cos^2\theta\,d\theta = \sin\theta\cos\theta + \theta + K$$

$$\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\sin\theta\cos\theta+\theta}{2} + \underbrace{\frac{K}{2}}_{= c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Sol: $\pi\dfrac{R^6}{24}$

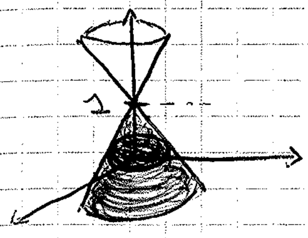
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 260

Esercizio 3

$A = \{ (x,y,z) : \quad x^2+y^2 \leq (1-z^2)^2 \}$ $\quad 0 \leq z \leq 1$ $\qquad f(x,y,z) = z$

solido di rotazione intorno all'asse z

se $y=0 \Rightarrow x^2 = (1-z)^2$ $\quad$ (qui $1-z \geq 0$) $\quad \sqrt{x^2} = \sqrt{(1-z)^2}$ $\quad x = 1-z \geq 0$



1° vedere se il solido è di rotazione
(es: z dipende da x^2+y^2)

$$\int_0^1 \iint_{\Omega_z} z \, dx dy \, dz = \int_0^1 z \underbrace{\iint_{\Omega_z} 1 \, dx dy}_{\substack{\text{area cerchio} \\ \text{raggio } 1-z \\ = \pi(1-z)^2}} dz =$$

$$= \int_0^1 z\pi(1-z)^2 \, dz =$$

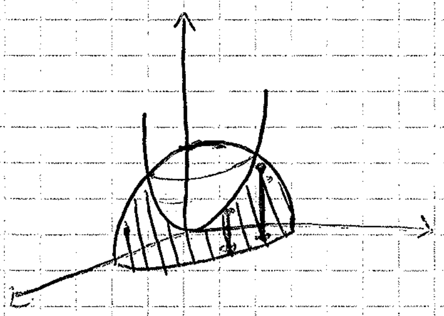
$$= \pi \int$$

se gli strati sono cerchi e se $f(x,y,z) = f(z)$, allora posso usare l'area del cerchio senza fare l'integrale!

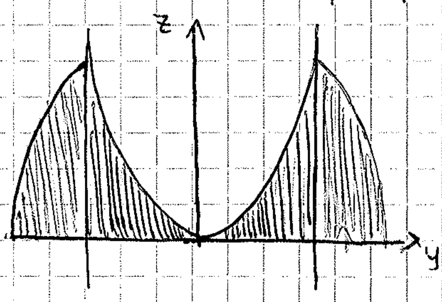
Esercizio 4

$\Omega = \{ z \geq 0 \quad z \leq x^2+y^2 \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$

$f(x,y,z) = 1-z^2$



Fili: devo dividere il dominio in 2 parti (z tra 0 e eq paraboloide; z tra 0 e eq sfera)



Strati

Ho: cerchio interno (determinato da parabola) e cerchio esterno (determinato da sfera)
Tante corone circolari

$z \leq x^2+y^2 \leq 1-z^2$ $\qquad$ Fino a dove? trovo p.ti $\cap$ sfera e paraboloide

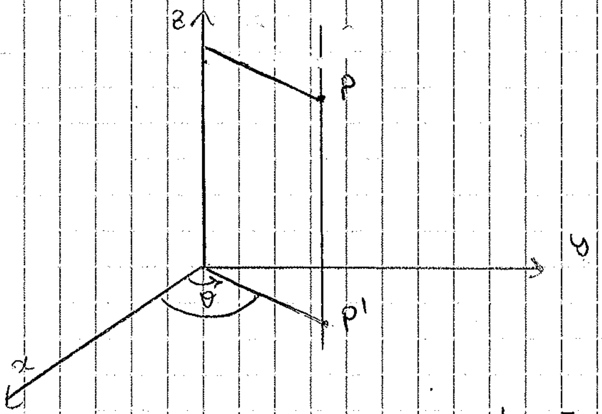
$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$ $\quad z = 1-z^2 \quad z^2+z-1=0 \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$z = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ non accettabile (è } <0) \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} z \leq x^2+y^2 \leq 1-z^2 \\ 0 \leq z \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 260

$$\int_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \left| \det J\phi\,(u,v,w) \right| du\,dv\,dw$$

Coordinate cilindriche



$x^2+y^2=R^2$ è ~~un cilindro~~ una crf

θ angolo che OP' forma con il semiasse delle $x>0$ sul piano xyz

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \rho \le +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\phi : [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\rho,\theta,t) \longmapsto (x,y,z)$$

$\rho = 0$ non è biunivoco

$\Rightarrow \phi$ manda tutti i p.ti $\phi[(0,\theta,t)]$ in $(0,0,t)$

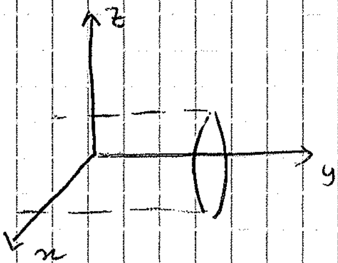
$$\det(J\phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \ge 0$$

di fatto stiamo facendo un cambiamento di variabili bidimensionale

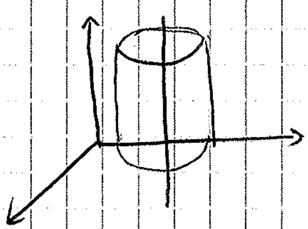
$\rho = 0$ sull'asse z

Altri esempi

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = t \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$

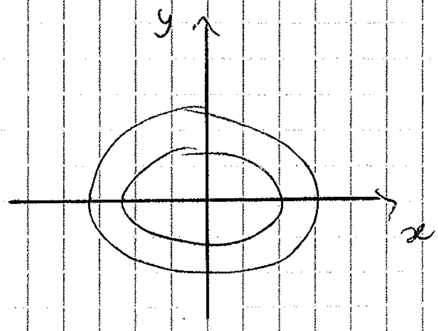


$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$



Coordinate cilindriche ellittiche

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \ge 0 \\ \theta \in [0,2\pi] \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 260

Al polo Nord e al polo Sud l'applicazione non è biunivoca. Non lo è su un insieme di misura nulla

$$\det J_\varphi(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$\cancel{\rho\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta - \rho\cos\varphi\sin}$

$= \rho^2\sin\varphi \geq 0$

$\det J\phi = 0$ se $\rho = 0$ o se $\varphi = 0, \pi$

$\Rightarrow$ non soddisfa le hp del cambiamento di coord. in questi casi

<u>VOLUME SFERA</u>

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq R \end{array}\right\} \Omega'$$

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi \cdot 2\pi = 2\pi\frac{R^3}{3}2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

<u>Es</u>

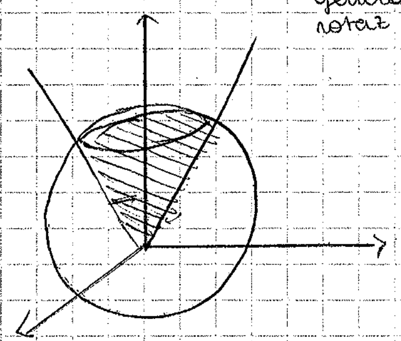
$\Omega = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1;\ z > \sqrt{x^2+y^2} \}$ $\qquad f(x,y,z) = x^2z^2$ a casa

$f(x,y,z) = z$

Si può fare in coord. cilindriche
$x^2+y^2 \leq z^2 \leq 1-(x^2+y^2)$

$z > \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z = x^2+y^2$ cono generato da rotaz di $z = x$

Ma anche sferiche



$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \Omega' \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \text{ raggio sfera} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

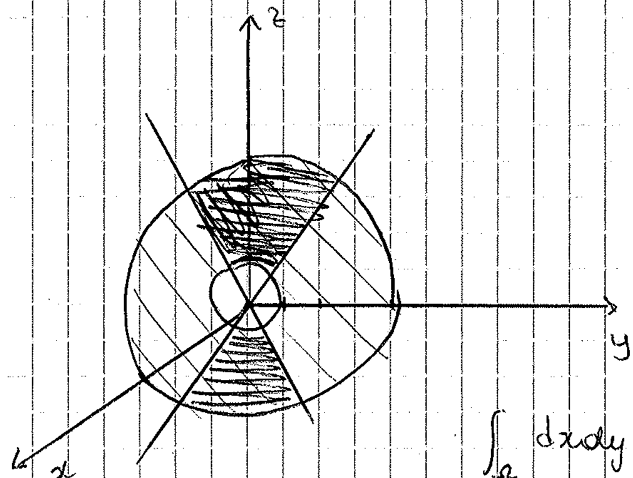
$$\int_\Omega z\, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho\cos\varphi\, \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/4} \cos\varphi\sin\varphi \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\cancel{2}\pi = \frac{\pi}{8}$$

Passo in cartesiane

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2+y^2 \\ z = z \end{cases} \quad \left\{ \sqrt{1-z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-z^2} \quad x^2+y^2 \le z^2 \right\} =$$

$$= \left\{ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \quad , \quad x^2+y^2 \le z^2 \right\}$$



Passo in sferiche

$$\begin{cases} x = R \sin\varphi \cos\theta \\ y = R \sin\varphi \sin\varphi \\ z = R \cos\varphi \end{cases}$$

$$\Omega' \begin{cases} 1 \le R \le 4 \\ 0 \le \varphi \le \pi/4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$ numeri!!

$$\int_\Omega dx\,dy\,dz = 2\int_{\Omega'} dx\,dy\,dz = 2\int_{\Omega''} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Massa e densità

Dato Ω insieme misurabile di $\mathbb{R}^3$

$\rho(x,y,z) : \Omega \to [0,+\infty)$

$\rho \geq 0$ $\quad$ Ω: oggetto fisico non necessariamente omogeneo

$M(\Omega) = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$

↓

massa

$$x_G = \frac{1}{M(\Omega)} \int_\Omega x\rho$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_\Omega y\rho$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_\Omega z\rho$$

$$\frac{1}{M}\int_\Omega z\rho = \frac{1}{\cancel{\rho} V} \cdot \cancel{\rho} \int_\Omega z = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega z$$

Se $\rho(x,y,z) = k \Rightarrow$ $\quad x_G = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega x$

↳ misura di Ω, cioè il VOLUME

SOLIDI DI ROTAZIONE

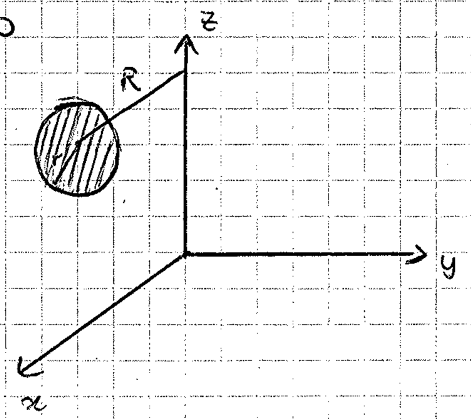
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 260

I° teorema di Guldino

volume?

L'area del solido ottenuto ruotando S intorno all'asse z è uguale all'area di S moltiplicata per la lunghezza della circ. descritta da G (baric. di S) nella rotazione intorno all'asse z.

es: TORO



Cerchio di centro $(R, 0, z)$ e raggio r
$r \leq R$

Rotazione: ottengo un Toro

$$Vol_{TORO} = (\text{Area cerchio}) \cdot (2\pi x_C) =$$
$$= \pi r^2 \, 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

$\boxed{N.B.}$

$$|\Omega_S| = 2\pi \int_S x \, dx dz = 2\pi \int_S y \, dy dz \qquad \text{con } S \subseteq \text{piano } (y, z)$$

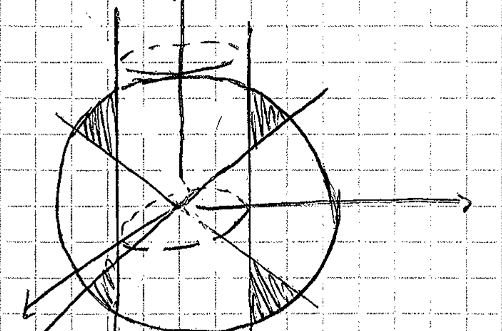
$S = \{ (x, 0, z), \ z \geq 0 \}$ Rotazione intorno all'asse x

$$|V| = 2\pi \int_S z \, dx dz$$

Esercizio

Solido: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$

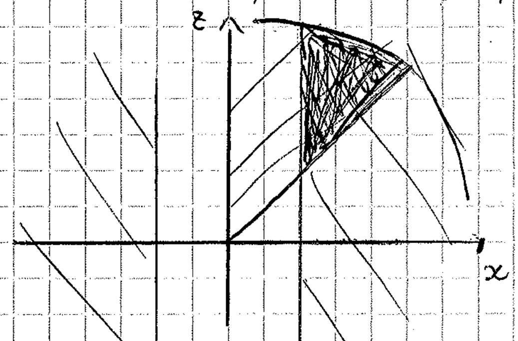
Solido di rotazione, perché tutte le cose che ho definito dipendono da $x^2 + y^2$



Solido di rotaz.

S' ottenuta intersecando, ad esempio, con $y = 0$

$\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq z^2 \\ x^2 + z^2 \leq 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$



$$|\Omega_1| = 2\pi \int_{S'} x \, dx dz \qquad \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ x^2 = z^2 \end{cases}$$

$2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \quad x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

S': $\begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq z \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$ dominio

$$\int_0^{\sqrt{h/2}} \left(\int_{2x^2}^{h} x \, dz \right) dx = \int_0^{\sqrt{h/2}} \left(\int_{2x^2}^{h} z \, dz \right) dx \quad \circledast$$

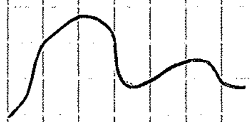
$$\parallel$$

$$\int_0^{\sqrt{h/2}} x \left(h - 2x^2 \right) dx = \int_0^{\sqrt{h/2}} \left(hx - 2x^3 \right) dx = h \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\frac{h}{2}}} - \cancel{2} \frac{x^4}{\cancel{4}_2} \Big|_0^{\sqrt{\frac{h}{2}}}$$

$$= h \frac{h}{4} - \frac{h^2}{4 \cdot 2} = \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{8} = \frac{h^2}{8}$$

$\circledast =$

Curve in forma parametrica



Def I intervallo

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua

(Prendo  e lo deformo)

$\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\parallel$

$\{ (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \; t \in I \}$ SOSTEGNO DELLA CURVA, per noi è la curva

In questa def. includo:

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

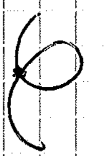
$t \mapsto \gamma(t) = (0, 0, 0, \dots, 0)$

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$?

$\gamma([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$

① Se γ è iniettiva e continua

$t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

 NO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 260

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

Il vettore tg in ogni p.to ha lo stesso modulo $\Rightarrow$ moto circolare uniforme

oppure parametrizzo la cif così:

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$\delta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t) \qquad \|\gamma'(t)\| = 2$

La velocità raddoppia, ma è sempre costante

$$\begin{cases} x = \cos(t^3) \\ y = \sin(t^3) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \sqrt[3]{2\pi}$$

$\delta_1(t) = (\cos t^3, \sin t^3)$ in $t=0$ non è regolare

$\delta_1'(t) = (-3t^2 \sin t^3, 3t^2 \cos t^3)$

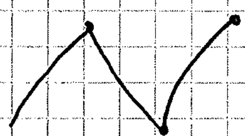
$\|\delta_1'(t)\| = 3t^2 \Rightarrow$ moto circolare non uniforme

Def

- γ arco di curva se $I = [a, b]$
- γ curva chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- γ semplice se $\forall t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (deve essere anche continua?)
  ($\gamma(I)$ non ha autointersezioni)
- γ è chiusa e semplice se:

  $\gamma(a) = \gamma(b)$

  $\forall t_1, t_2 \in (a, b) \quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
- γ è regolare a tratti se su ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq I$, γ ha al più un numero finito di punti in cui $\gamma'(t) = 0$



- $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ $\quad$ γ: curva somma
- $-\gamma : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ $-\gamma$ cambia il verso di percorrenza

$-\gamma(t) = \gamma(-t)$

$\alpha : [c,d] \to [a,b]$ $\quad$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$?

① α biunivoca
② α sia di classe C^1 $\quad$ (si dice che lo è se c'è un piccolo intervallo aperto che contiene $[c,d]$ su cui è ~~...~~ di classe C^1)

~~$(\,[\quad]\,)$~~

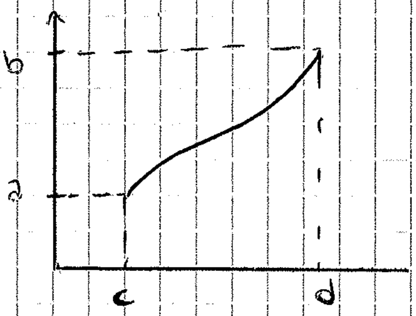
$\alpha \in C^1([c,d])$

③ $\alpha'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [c,d]$

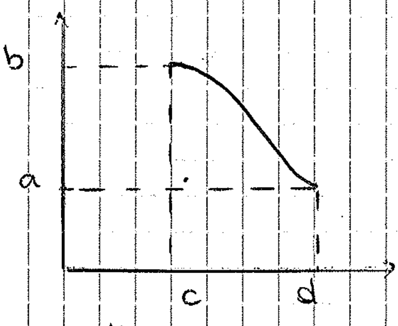
oss
$\alpha'(s)$ ha sempre lo stesso segno, perchè se $\alpha'(\bar{s}) > 0$ in $\bar{s}$, $\alpha'(s)$ è continua
$\Rightarrow$ per il th. permanenza del segno, $\exists$ intorno di $\bar{s}$ in cui $\alpha'(s) > 0$

$\left.\begin{array}{l}\alpha'(s_1) > 0 \\ \text{e } \alpha'(s_2) < 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ per il th. degli zeri $\exists\, \tilde{s}$ t.c. $\alpha'(\tilde{s}) = 0$

- $\alpha'(s) > 0 \quad \forall s \in [c,d] \Rightarrow \alpha$ è strett. crescente
oppure
$\alpha'(s) < 0 \quad \forall s \in [c,d] \Rightarrow \alpha$ è strett. decresc



$\alpha'(s) > 0$



$\alpha'(s) < 0$

$\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$

CAMBIAMENTO DI PARAMETRIZZAZIONE

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

γ e δ differiscono per un cambiamento di parametrizzazione se $\exists$ cambiamento di variabili regolare

$\alpha : [c,d] \xrightarrow{\alpha} [a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$, $\quad \delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ α è biunivoca: non perdo nulla a passare da $[c,d]$ a $[a,b]$

- Se $\alpha'(s) < 0 \Rightarrow \gamma$ e δ hanno orientamenti opposti

Es

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\delta(s) = (\cos 2s, \sin 2s) \quad s \in [0, \pi]$

Verifico che γ e δ diff per un cambio di variabili

$\alpha : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$

$\quad s \longmapsto 2s = t$

COSE DA FARE

γ: arco di curva regolare

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \gamma$ è rettificabile e la lunghezza del suo sostegno è:

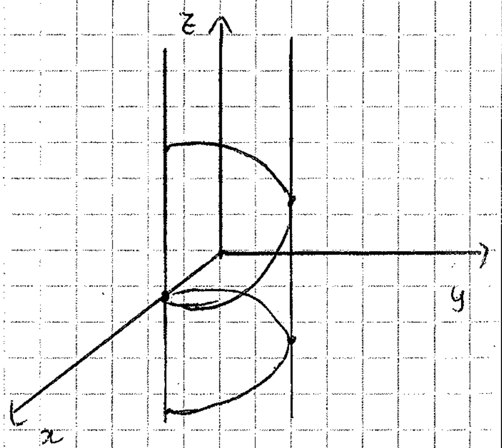
$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

es:

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\quad t \longmapsto (\underset{x}{\cos t}, \underset{y}{\sin t}, \underset{z}{3t})$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 3t \end{cases}$



ELICA CILINDRICA

Verifico che curva regolare

$\left.\begin{array}{l} \gamma(t) \in C^1 \\ \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 3) \neq \vec{0} \quad \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma$ è regolare

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9}$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10} \, dt = 2\pi\sqrt{10}$$

es:

$\gamma : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è regolare?

$\quad t \longmapsto (\sqrt{2} \sin t \cos t, 4 \sin t)$

- è C^1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 260

$$\Rightarrow \quad M(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_\gamma \rho \, ds$$

$$x^i_G = \frac{1}{M(\gamma)} \cdot \int_\gamma x^i \rho \, ds$$

La massa e le coord. del baricentro non dipendono dalla parametrizzazione.

Teorema

$\alpha : [c,d] \to [a,b]$

α cambiamento di variabili regolare

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare
$\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ regolare

$\delta(s) = \gamma(\alpha(s))$ (*)

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$\delta([c,d]) \subseteq A$

$$\Rightarrow \int_\gamma f \, ds = \int_\delta f \, ds$$

Dim

$\vec{\delta}'(s) = \alpha'(s) \, \vec{\gamma}'(\alpha(s))$ (*) $\forall s \in [c,d]$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_c^d f(\delta(s)) \, \|\delta'(s)\| \, ds$$ — parametro $s \neq S$

$$\int_\delta f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$t = \alpha(s) \qquad dt = \alpha'(s) \, ds$

$t = a \longrightarrow s = \alpha^{-1}(a)$

$t = b \longrightarrow s = \alpha^{-1}(b)$

$$\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s) \, ds \quad (*)$$

non è detto che sia c!!

$\gamma'(\theta) = \left(2\cos\theta - 2\theta\sin\theta,\ 2\sin\theta + 2\theta\cos\theta\right)$

$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{4 + 4\theta^2} = 2\sqrt{1+\theta^2}$

$\int$

COORD BARICENTRO

$\gamma : \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $r > 0$ $\Rightarrow \rho = 1$

CICLOIDE

$M(\gamma) = L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt$

$x_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_0^{2\pi} x\, ds$ $\quad y_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_0^{2\pi} y\, ds$

$\gamma'(t)$ $\quad x' = r(1 - \cos t)$, $\quad y' = r \sin t$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2(1 + \cos^2 t - 2\cos t) + r^2 \sin^2 t} = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos t} = r\sqrt{2(1-\cos t)}$

$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, r\, (1 - \cos t)\, dt$

$\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = \cos t$ $\qquad 1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$

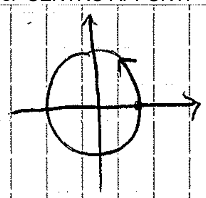
$\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$ perchè $t \in [0, 2\pi]$

$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, r \sqrt{2} \sin\frac{t}{2}\, dt = \int_0^{2\pi} 2r \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\int_0 r \sin u\, du$

$\frac{t}{2} = u \qquad du = \frac{dt}{2} \Rightarrow dt = 2du$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 260

$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$



$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)\cdot d\theta = \circledast$$

$$F(\gamma(\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$F(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$\circledast = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$$

Lavoro compiuto dalla forza per spostare un p.to da 0 a 2π

PROPRIETÀ

F campo continuo

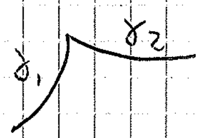
$F,G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ campi continui

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ curva regolare

$\forall\, a,b\in\mathbb{R}$

① $\int_\gamma (aF+bG)\cdot dP = a\int_\gamma F\cdot dP + b\int_\gamma G\cdot dP$ linearità

② Additività rispetto al dominio $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$

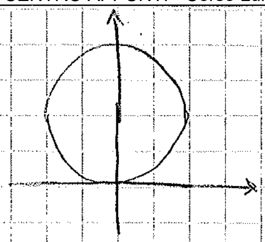


$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_{\gamma_1} F\cdot dP + \int_{\gamma_2} F\cdot dP$$

- Se γ regolare a tratti $\Rightarrow$ posso calcolare sia gli int. di linea che gli int. curvilinei lungo γ.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 260

Es pag 43



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

- Cerchio con centro $(0,R)$

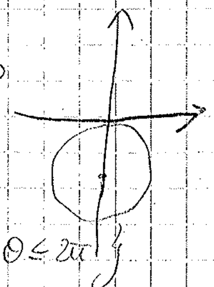
$x^2+(y-R)^2 \le R^2$

$x^2+y^2+\cancel{R^2}-2Ry \le \cancel{R^2}$ $\quad x^2+y^2 \le 2Ry$

$\rho^2 \le 2R\rho\sin\theta$ $\quad \rho \le 2R\sin\theta$

$\{(x,y): x^2+y^2 \le 2Ry\} = \{(\rho,\theta): 0 \le \rho \le 2R\sin\theta, \; 0 \le \theta \le \pi\}$

- Cerchio con centro $(0,-R)$



$x^2+(y+R)^2 \le R^2$ $\quad x^2+y^2+2Ry \le 0$ $\quad \rho^2+2R\rho\sin\theta \le 0$

$0 \le \rho \le -2R\sin\theta$

$\{(x,y): x^2+y^2+2Ry \le 0\} = \{(\rho,\theta): 0 \le \rho \le -2R\sin\theta, \; \pi \le \theta \le 2\pi\}$

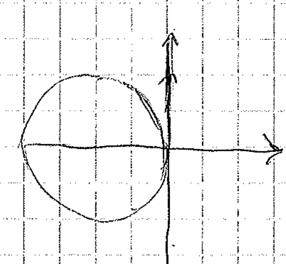
$$\iint_{C'} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_\pi^{2\pi}\left(\int_0^{-2R\sin\theta} \rho\, d\rho\right) d\theta = \int_\pi^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{-2R\sin\theta}\right) d\theta = \int_\pi^{2\pi} \frac{\cancel{4}R^2\sin^2\theta}{\cancel{2}}\, d\theta =$$

$$= 2R^2\int_\pi^{2\pi} \sin\theta\sin\theta = 2R^2\left[-\cos\theta\sin\theta + \int_\pi^{2\pi}\cos\theta\cos\theta\, d\theta\right] = 2\left(-R^2\cos\theta\sin\theta + R^2\theta - R^2\int_\pi^{2\pi}\sin^2\theta\right)$$

$\int f'g = fg - \int g'f$ $\quad 2\int_\pi^{2\pi}\sin^2\theta = -\cos\theta\sin\theta + \theta\Big|_\pi^{2\pi}$ $\quad \left[-\frac{\cos\theta\sin\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right]_\pi^{2\pi}$

$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$= \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}}R^2 = \pi R^2$



- Cerchio con centro $(-R,0)$

$(x+R)^2+y^2 \le R^2$ $\quad x^2+\cancel{R^2}+2Rx+y^2 \le \cancel{R^2}$ $\quad x^2+y^2+2Rx \le 0$

$\rho^2+2R\rho\cos\theta \le 0$

$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$

$$\{(x,y): x^2+y^2+2Rx \le 0\} = \left\{(\rho,\theta): \begin{array}{l} \rho \ge 0 \\ \rho+2R\cos\theta \le 0 \\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3}{2}\pi \end{array}\right\}$$

Esercizio

$\gamma(t) = (t, t^2, t^3) \qquad 0 \le t \le 1$ CUBICA GOBBA

$F(x,y,z) = (z, y, 2x)$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$F(\gamma(t)) = (t^3, t^2, 2t) \qquad \gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^3, t^2, 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = t^3 + 2t^3 + 6t^3 = 9t^3$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^1 9t^3\, dt = \frac{9}{4} t^4 \Big|_0^1 = \frac{9}{4}$$

Esercizio

$\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, t^2) \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$F(x,y,z) = (2\sqrt{z}, x, y)$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \quad ⊛$$

$F(\gamma(t)) = (2t, -\sin t, \cos t) \qquad \gamma'(t) = (-\cos t, -\sin t, 2t)$

perchè lavoro con $t>0$, se no è $|t|$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (2t, -\sin t, \cos t)\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 2t \end{pmatrix} = -2t\cancel{\cos t} + \sin^2 t + 2t\cancel{\cos t}$$

$$⊛ = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = \frac{t - \sin t \cos t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio

$F(x,y,z) = (x^2, z, y)$

Γ $\downarrow$ sostegno $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (a) \\ z = 2y + 1 & (b) \\ x \ge 0 & (c) \end{cases}$ orientare in modo che la proiezione di Γ sul piano x, y sia orient. in senso antiorario

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 260

γ_1: $y = -x+1$ $\quad -\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} t=0 \\ t=1 \end{matrix}$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = -\int_{-\gamma_1} F \cdot dP \qquad -\gamma_1'(t) = (1, -1)$$

$$\int_{-\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^1 (\cos t, -t+1) \cdot (1, -1)\, dt = \int_0^1 (\cos t + t - 1)\, dt =$$

$$= \left(\sin t + \frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_0^1 = \sin 1 + \frac{1}{2} - 1 = \sin 1 - \frac{1}{2} = \int_{-\gamma_1} F \cdot dP$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \frac{1}{2} - \sin 1$$

γ_2 $\quad -\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = -\int_{-\gamma_2} F \cdot dP$$

$$\int_{-\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 (1, t) \cdot (0, 1)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = -\frac{1}{2}$$

γ_3 $\quad \gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \displaystyle\int_{\gamma_3} F \cdot dP = \int_0^1 (\cos t, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \cos t\, dt = \sin 1$

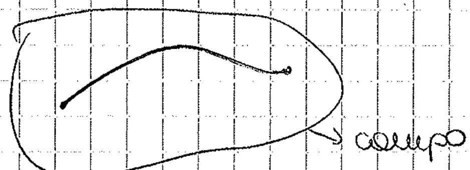
$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP = \frac{1}{2} - \sin 1 - \frac{1}{2} + \sin 1 = 0$$

N.B.

Il sostegno della curva dev'essere tutto contenuto nel campo

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$\gamma : [a, b] \to \Omega$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 260

$\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(u,v) \longmapsto \left.\begin{array}{l} x = \sigma_1(u,v) \\ y = \sigma_2(u,v) \\ z = \sigma_3(u,v) \end{array}\right\} = \sigma(u,v)$$

$\sigma(A)$ sostegno della superficie

$$\begin{cases} x = m_1 u + m_1 v = \sigma_1(u,v) \\ y = m_2 u + m_2 v = \sigma_2(u,v) \\ z = m_3 u + m_3 v = \sigma_3(u,v) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto \sigma(u,v)$ $\sigma(\mathbb{R}^2)$ piano generato da $\vec{n}$ e $\vec{m}$ passante per $(0,0,0)$

Se

① σ continua e iniettiva

$\Rightarrow \sigma(A)$ è una "superficie"

② $\cdot\ \sigma$ di classe C^1 su A (cioè che tutte le derivate siano continue $\forall (u,v) \in A$)

$\cdot\ J\sigma$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$J_\sigma = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} \nabla\sigma_1 \\ \nabla\sigma_2 \\ \nabla\sigma_3 \end{pmatrix}}$$

chiedo che abbia rango massimo (2) $\forall\, u,v \in A$

Se soddisfa queste due proprietà $\Rightarrow$ si dice che σ è <u>REGOLARE</u>

$$J\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

<u>Ha rango max $\Leftrightarrow$</u>
<u>i due vettori colonna sono</u>
<u>l.i.</u>

I 2 vettori sono

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \partial_u\sigma \quad \text{e} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \partial_v\sigma$$

La funzione prende un foglio e lo deforma con continuità

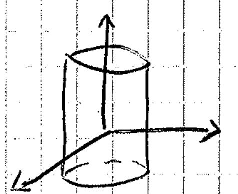
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 260

Mi basta verificare l'orientamento in 1 p.to per averlo in tutta la superficie

Esercizio

$\sigma: A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Sono le coord cilindriche

$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$ $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $x^2+y^2 = \cos^2 u + \sin^2 v = 1$



Verifico che è regolare

$$J_{\sigma(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(a) (b)

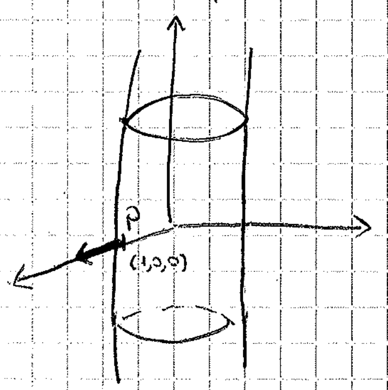
(a) e (b) sono l.i.

$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) =$

vettore normale

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cos u + \vec{j} \sin u = (\cos u, \sin u, 0)$$

La 3ª componente non c'è ⇒ Vettore orizzontale



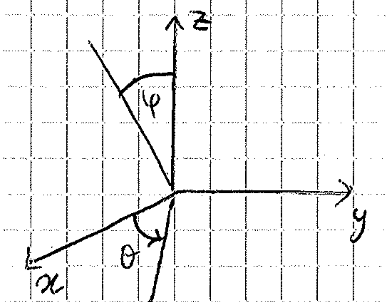
Scelgo il p.to con $u = 0$

$\Rightarrow P(1,0,0)$

Ho disegnato il vett. tg

Esercizio

$x^2+y^2+z^2 = 1$



$\begin{cases} x = \cos\theta \sin\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$

$0 \le \theta < 2\pi$ $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$

$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\sigma(\theta, \varphi)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} = \vec{k}\left(-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\right) + -\sin\varphi\left(\vec{i}\cos\theta\sin\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi\right)$$

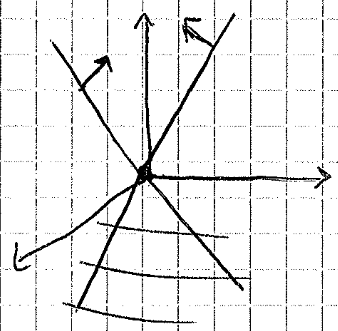
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 260

$x = f(y,z) \longrightarrow \vec{N} = (1, \dots)$ → viene fuori da J

$y = f(x,z) \longrightarrow \vec{N} = (\dots, 1, \dots)$

<u>Es</u>

$z = \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$



per $(x,y) \neq (0,0)$

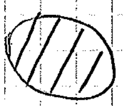
$$\vec{N} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Calotta superficiale regolare

È una funzione

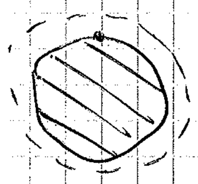
$\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- K compatto (chiuso e limitato)
- $\mathring{K} \neq \emptyset$
- K misurabile ($\Rightarrow |K| \neq 0$)



σ è <u>CALOTTA SUPERFICIALE REGOLARE</u> se ∃ un aperto A, <u>K ⊆ A e σ è definita su A</u> ed è <u>regolare</u> su A.

(sui p.ti sulla FRONTIERA ∂K non posso parlare di derivate ⇒ prendo un aperto + grande)



Si può dimostrare che è possibile calcolare l'area del sostegno di una calotta superficiale regolare.

$$\text{Area}(\sigma(K)) = \int_K \|N(u,v)\| \, du \, dv$$

Deformiamo K (piano) mediante σ ⇒ otteniamo 1 superficie in $\mathbb{R}^3$

In generale l'area cambia

Coordinate del baricentro

$$x_G = \frac{1}{M} \int_\sigma x \rho \, d\sigma \qquad y_G = \frac{1}{M} \int_\sigma \rho y \, d\sigma$$

L'integrale superficiale non dipende dalla parametrizzazione

Cambio di parametrizzazione

$A' \xrightarrow{\phi} A$

ϕ camb. di variabili in $\mathbb{R}^2$

$\phi \in C^1(A')$, $\det J\phi \neq 0$ su A

$\sigma: A \to \mathbb{R}^3$ superf regolare e $\delta: A' \to \mathbb{R}^3$ superf regolare

differiscono per un cambio di parametrizzazione se $\exists\ \phi: A' \to A$

camb. di variabili regolare t.c.

- biunivoca
- C^1
- $J_P\phi$ invertibile $\forall P \in A'$

$$\begin{tikzcd} \underset{A'}{(s,t)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\delta"'] & \underset{A}{(u,v)} \arrow[d, "\sigma"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$\delta(s,t) = \sigma(\alpha(s,t)) \qquad \forall (s,t) \in A'$

è vero che:

1. $\delta(A') = \sigma(A)$ stesso sostegno
2. σ è reg $\iff$ δ è regolare
3. σ è iniett $\iff$ δ è iniettiva (sup. semplici)

$\vec{N}_\delta(s,t) = \frac{\partial \delta}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \delta}{\partial t}(s,t)$

$$\left[\det J\phi(s,t)\right] \cdot N_\sigma(\phi(s,t)) = \left(\det J\phi(s,t)\right) \frac{\partial \sigma}{\partial u}\left(\phi(s,t)\right) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}\left(\phi(s,t)\right)$$

Se $\det J\phi(s,t) > 0$ in 1 p.to lo è sempre.

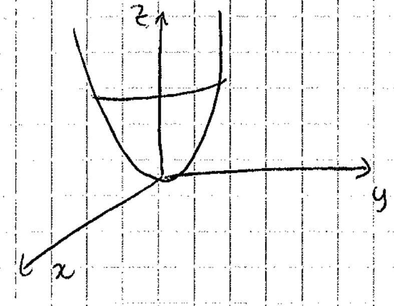
Se $\det J\phi(s,t) > 0 \quad \forall (s,t) \in A'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 260

$$= \sqrt{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(3\pi + 5\pi\right) = \frac{15\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot \cancel{8}^{2}\pi = 30\sqrt{2}\pi$$

Esercizio 2

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{1+4x^2+\frac{y^2}{4}}}\, d\sigma \qquad \Sigma = \begin{cases} z = x^2+\frac{y^2}{4} \\ z \leq 1/4 \end{cases} \quad e \quad x, y, z \geq 0$$



Paraboloide a sez. ellittica

$$z = x^2+\frac{y^2}{4} = f(x,y)$$

$$x^2+\frac{y^2}{4} \leq \frac{1}{4} \quad \text{con} \quad x,y \geq 0$$

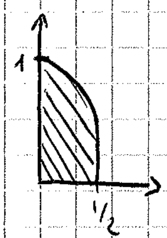
$$\Rightarrow 4x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2 \leq 1$$

$$\vec{N}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(-2x, -\frac{y}{2}, 1\right)$$

$$\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{4x^2+\frac{y^2}{4}+1}$$

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \iint_K \frac{x}{\cancel{\sqrt{1+4x^2+\frac{y^2}{4}}}} \cancel{\sqrt{4x^2+\frac{y^2}{4}+1}}\, dx\,dy = \iint_K x\, dx\,dy$$

$$\text{dove} \quad K = \begin{cases} \frac{x^2}{1/4}+y^2 \leq 1 \\ \text{con } x,y \geq 0 \end{cases}$$



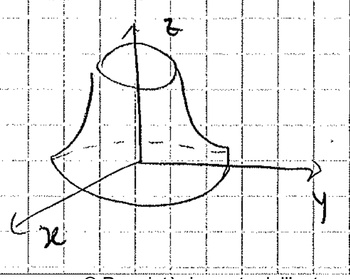
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{matrix}$$

il nuovo dominio è un rettangolo

$$\det J\phi = \frac{1}{2}\rho \qquad \Rightarrow \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\rho^2\cos\theta\, d\theta\, d\rho = \frac{1}{4}\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{12}$$

NOTA: In un ellisse ρ varia quasi sempre tra 0 e 1

AREA SUPERFICI DI ROTAZIONE



$$\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

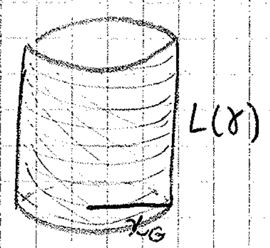
$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = 0 \\ z = \gamma_2(t) \end{cases} \qquad \gamma_1(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$$

$$x_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x\, ds \Rightarrow \int_\gamma x\, ds = L(\gamma) \cdot x_G$$

$$\Rightarrow \text{Area sup. rotazione} = 2\pi \int_\gamma x\, ds = 2\pi L(\gamma)\, x_G = 2\pi\, x_G\, L(\gamma)$$

$\parallel$

Superficie laterale del cilindro con $r = x_G$ e altezza $= L(\gamma)$

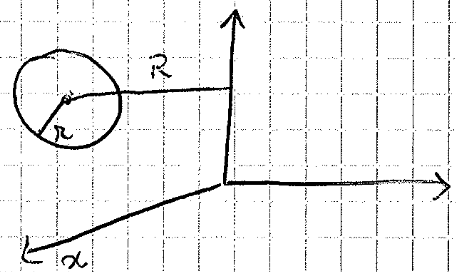


II° Teorema di Guldino

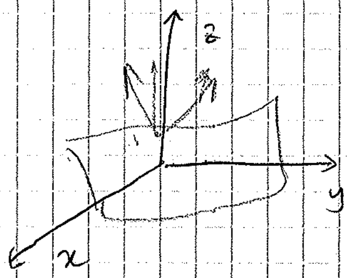
L'area della superficie generata dalla rotazione di una curva γ (contenuta nel semipiano x,z con $x \geq 0$) intorno all'asse z è uguale alla lunghezza di γ moltiplicata per la lunghezza della circf di raggio $= x_G$

Es

Calcolo l'area della superf torica



$$\text{Area (toro)} = 2\pi x_G \cdot L(\gamma) = (2\pi R)(2\pi r) =$$
$$= 4\pi^2 R r$$



$z = 2x + y = f(x,y)$

$\vec{N} = (-2, -1, 1)$ oppure $(2, 1, -1)$

angolo acuto tra 2 vettori $\Rightarrow$ prod. scal >0

$$(-2, -1, 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \quad \underline{\text{OK}}$$

Inoltre considero il 1° perchè $z>0$

$$K = \begin{Bmatrix} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{Bmatrix} \quad \text{RETTANGOLO}$$

$$\phi = \int_K F(x,y,z)\,\vec{N}\,dx\,dy = \left(x^2 - (2x+y)^2,\ y^2 + x^2,\ (2x+y)^2 - y^2\right)(-2,-1,1) =$$

$$= -2x^2 + 2(2x+y)^2 - y^2 + x^2 + \ldots$$

A questo punto la $\int$ in $dx\,dy$ su K

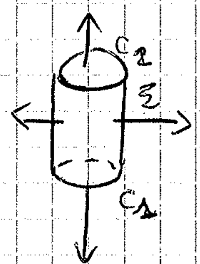
17

$$\Phi = \iint_K F(\sigma(\theta,t)) \cdot N(\theta,t)\, d\theta\, dt = \qquad \begin{array}{l} 1 \le t \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \cos^2\theta + t\sin^3\theta)\, d\theta\, dt = \left(\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta\right) \underbrace{\left(\int_1^2 dt\right)}_{1} +$$

$$+ \underbrace{\int_1^2 t\, dt}_{\frac{t^2}{2}\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \pi$$

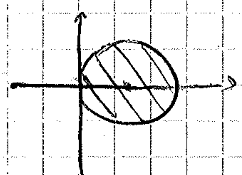
Calcolare l'integrale di flusso uscente dal bordo del solido $\{ (x-1)^2 + y^2 \le 1 ,\ 1 \le z \le 2 \}$ non è la stessa cosa, ci sono da aggiungere le 2 basi



$$\phi = \int_{\partial V} F \cdot \vec{N} = \int_\Sigma F \cdot \vec{N} + \int_{C_1} F \cdot \vec{N} + \int_{C_2} F \cdot \vec{N}$$

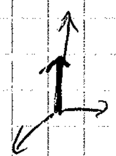
C_1 : $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ z = 1 \end{cases}$ intersezione. Trovo un cerchio nel piano $z=1$

$C_1 \begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad 0 \le \rho \le 1$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$



Calcolo $\vec{N}$, poi se è sbagliato lo inverto

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta)\,\vec{k} = \rho\vec{k}$$



Cambio verso $\underline{\vec{N} = -\rho\vec{k}}$

C_2 : $\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$ $\qquad \underline{\vec{N} = \rho\vec{k}}$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{N} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\ldots, \ldots, \rho\sin\theta)\underbrace{(0, 0, -\rho)}_{d\rho\, d\theta} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 101 di 260

N.B. Se $x = f(y,z)$ un vett. normale è $\left(1, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Superf. in forma stereografica

$$F \cdot \vec{N} = (\alpha, z, -y^3)\left(1, -6y, -2z\right) = \alpha - 6yz + 2y^3z$$

$$\phi = \iint_E (\alpha - 6yz + 2y^3 z)\, dy\, dz$$

Cambio variabili

$$\frac{1}{3} \leq y^2 + \frac{z^2}{3} \leq 1$$

$$\begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \sqrt{3}\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{1}{3} \leq \rho^2\cos^2\theta + \frac{\cancel{3}\rho^2\sin^2\theta}{\cancel{3}} \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq \rho^2 \leq 1$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \rho \leq 1}$$

$$\begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \sqrt{3}\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \rho \leq 1$$

$$\phi = \int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \left(\alpha - 6\rho\cos\theta\sqrt{3}\rho\sin\theta + 2\rho^3\cos^3\theta\sqrt{3}\rho\sin\theta\right) \underbrace{\sqrt{3}\,\rho}_{\text{Jacobiano}}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \left(\alpha\rho - 6\sqrt{3}\rho^3\cos\theta\sin\theta + 2\sqrt{3}\rho^5\cos^3\theta\sin\theta\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= \sqrt{3}\left[\alpha\, 2\pi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{1/\sqrt{3}}^{1} - 6\sqrt{3}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{1/\sqrt{3}}^{1} \text{-------}\right.$$

f periodica, periodo $2\pi \Rightarrow \int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f$

Se f è definito su Ω aperto $\Rightarrow$ $x_0 \longmapsto$ a.l. $d_{x_0} f$

In 1 variabile

$df(x_0)\, h = f'(x_0)\, h$

$df(x_0) = f'(x_0)\, dx \qquad dx(h) = h$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

ω è una ~~forma~~ 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^n$

$$\omega = f_1(x)\, dx_1 + \ldots + f_m(x)\, dx_m$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \text{A.l.} \\ f_1(x)\, dx_1 + \ldots + f_n(x) dx_n \end{cases}$$

$$F(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x) \right) \longleftrightarrow f_1\, dx_1 + \ldots + f_m\, dx_m$$

$dx_1 \ldots dx_n$ può essere base di campi vettoriali al posto di $e_1 \ldots e_n$

$$\gamma(t) = \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \vdots \\ x_m = \gamma_m(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx_1 = \gamma_1'(t)\, dt \\ \vdots \\ dx_m = \gamma_m'(t)\, dt \end{cases}$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int \left(F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \ldots + F_m(\gamma(t)) \cdot \gamma_m'(t) \right) dt =$$

$$= \int_\gamma F_1(\gamma(t))\, dx_1 + \ldots + F_m(\gamma(t))\, dx_m = \int_\gamma \omega$$

forma associata al campo

$$\underline{\omega = F_1\, dx_1 + \ldots + F_m\, dx_n}$$

$$\gamma = \left(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t) \right)$$

$\underline{dx_1 = \gamma_1'(t)\, dt}$

$\vdots$

$dx_m = \gamma_m'(t)\, dt$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\, dx_1 + \ldots + F_m\, dx_n$$

$$= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\, \gamma_1'(t)\, dt + \ldots \right)$$

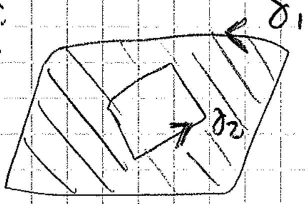
contiene $\overline{A}$ chiusura di A

$$\Rightarrow \int_{\partial A} F \cdot dP = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Int. di linea, dipende dall'orientam. delle curve (del bordo ∂A) $\Rightarrow$ bisogna specificarlo!!

L'int. di volume non ha nessun orientamento

es:

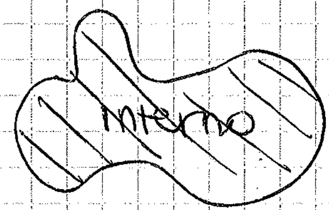


$$\int_{\partial A} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

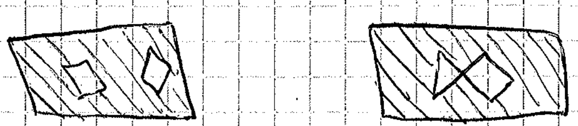
Teorema di Jordan (della curva chiusa) $\Rightarrow$ no dim

Nel piano ogni curva chiusa, semplice, divide il piano in due parti, una limitata e una illimitata

Curve di Jordan = curve chiuse e semplici

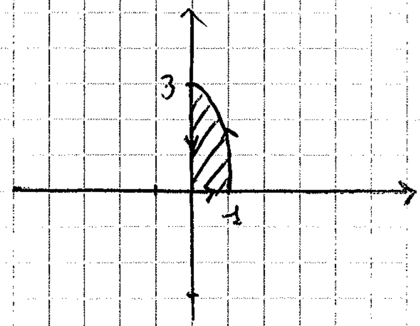


Sostegni disgiunti $\Rightarrow$ non abbiamo curve che si intrecciano (in realtà se avessero un p.to in comune va bene, ma non è importante)



Non dice di usare Green, ma lo capisco xchè integrale brutto e dou facile

$$A = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} \le 1 \quad \begin{matrix} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{matrix} \right\}$$



e^{x^2} non è integrabile analiticamente

$$(F_1, F_2)(x,y) = \left(e^{x^2} - y \ , \ \frac{x^4}{4} + e^y \right)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = x^3 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \qquad \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)(x,y) = x^3 + 1$$

$$\int_{\partial A = \gamma} F \cdot dP \underset{\text{Green}}{\overset{\uparrow}{=}} \iint_A (x^3+1)\, dx\, dy = \qquad A' \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{matrix}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\rho^3 \cos^3\theta + 1)\, 3\rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^1 3\rho^4 \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta + \int_0^1 3\rho \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= \cancel{3} \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 \cdot \frac{2}{\cancel{3}} + 3 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \,(1 - \sin^2\theta)\, d\theta = \int (1 - \sin^2\theta) \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{d(\sin\theta)} = \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{3}$$

<u>Esercizio</u>

$$F = (-3y, \ 2x) \qquad \int_\gamma F \cdot dP$$

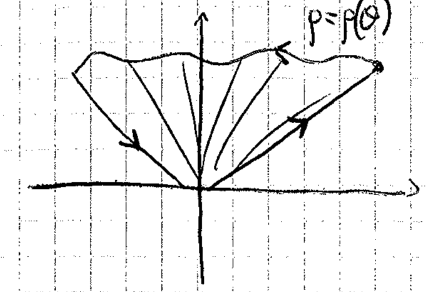
γ: curva chiusa, orientata in senso antiorario i cui 3 archi (non necessariamente in ordine) sono:

$\gamma_1 \quad y = 2e^{3x} \qquad -2 \le x \le 2 \qquad \gamma_4 : \ x + y = 2 + 2e^6$

$\gamma_2 \quad x = -2 \qquad 0 \le y \le 2e^{-6}$

$\gamma_3 \quad y = 0 \qquad -2 \le x \le 2e^6 + 2$

Esempio



$\rho = \rho(\theta)$

$\theta_1 \le \theta \le \theta_2$

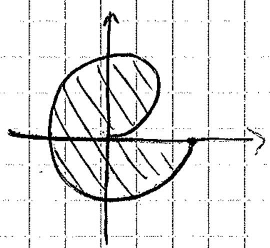
$0 \le \rho \le \rho(\theta)$

$F(x,y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$

$$m(A) = \iint_A dx\,dy = \int_{\partial A} F(x,y) \cdot dP = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta \qquad \rho = k \cdot \theta$$

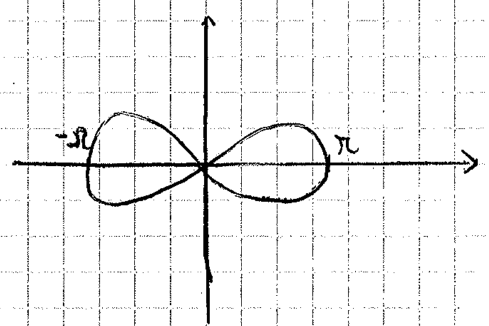
Esempio

$$m(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} k^2\theta^2\, d\theta$$



Esempio

Lemniscata di Bernoulli



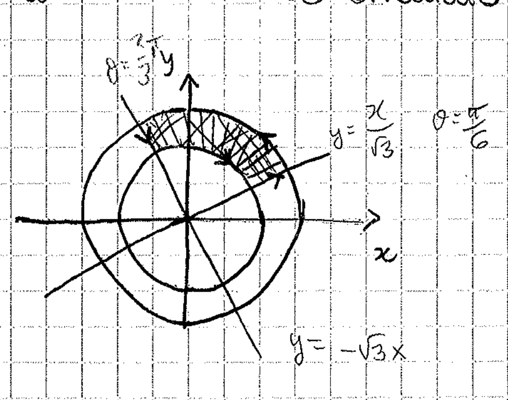
$(x^2+y^2)^2 = r\,(x^2-y^2)$

$\rho = r\sqrt{\cos 2\theta}$

Esercizio a casa

$F(x,y) = (x^2y - 2xy^2,\ xy^2)$

$\int_{\partial D} F \cdot dP$ = $\quad \partial D$ orientato pos. $\quad D = \left\{ 4 < x^2+y^2 < 9,\ y < -\sqrt{3}\,x,\ \sqrt{3}\,y > x \right\}$



Uso Green

sol: $\frac{65}{8}$

<u>Esercizio 2009</u> <u>A casa</u>

$A = \{ y \geq x^2, \; x - y + 1 \geq 0 \}$

$F(x,y) = \left(\sin y^2, \; 2xy \cos y^2 + 4xy \right)$

$\int_\gamma F \cdot dP \qquad \gamma = \partial A$ orientato in senso orario

def/ $\boxed{\text{ROTORE DI UN CAMPO}}$

<u>rot F</u> F di classe $C^1(\Omega)$ in inglese: curl

$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\text{rot} F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c} \\ \nabla \\ F \end{array} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$= \nabla \wedge F$ è un formalismo, non corretto

$x \to x_1$
$y \to x_2$
$z \to x_3$

$\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \vec{i}$ più facile da ricordare

$\uparrow$
1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 113 di 260

Teorema di Stokes

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto con bordo
$K = \bar{A}$ compatto
$\sigma : K \to \Omega$ calotta regolare
bordo di σ: restrizione di σ a ∂K

$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \Omega$ aperto $\neq \emptyset$

- $F \in C^1(\Omega)$
- $\sigma : K \to \Omega$ calotta sup. con bordo, orientata
- $\partial\sigma$ orientato positivamente (rispetto all' orientamento di σ)

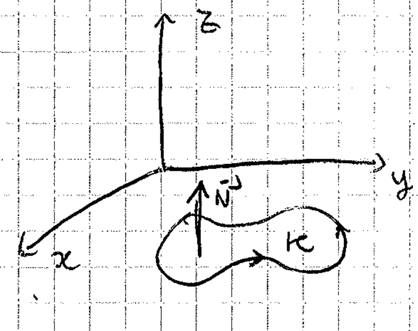
$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\partial\sigma} F \cdot dP}_{\text{lavoro}} = \underbrace{\int_{\sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}}_{\text{flusso del rotF attraverso } \sigma}$$

STOKES E GREEN:

Passaggio da un oggetto integrato su un insieme bidimensionale a un integrale lungo il bordo = $\cup$ di curve

Posso interpretare Green come Stokes nel caso in cui σ è una superficie con il sostegno $\subseteq$ piano xy

- $K \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto con bordo



$$\sigma \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$(x,y) \in K$

- $F(x,y) = \left(F_1(x,y),\ F_2(x,y),\ 0\right)$

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot} F \cdot \vec{n}$$

$\partial\sigma = \partial K$, perchè il bordo è mandato nel bordo, iniettività

Calcolo rotF
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1(x,y) & F_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{-\gamma_2} F \cdot dP$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{9} \sin^2\theta, \frac{1}{9} \cos^2\theta, 1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \sin\theta, \frac{1}{3} \cos\theta, 0 \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{27} \sin^3\theta + \frac{1}{27} \cos^3\theta \right) d\theta$$

$$\int_{-\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{8}{27} \sin^3\theta + \frac{8}{27} \cos^3\theta \right) d\theta$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{-\gamma_2} F \cdot dP = -\frac{7}{27} \int_0^{2\pi} \left(-\sin^3\theta + \cos^3\theta \right) d\theta$$

<u>Teorema utile</u>

Se f è periodica di periodo T

$f(x+T) = f(x) \quad \forall x$ ed è integrabile

$$\Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = \int_K^{K+T} f(x)\, dx$$

<u>allora</u>

$$\int_0^{2\pi} \left(-\sin^3\theta + \cos^3\theta \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\sin^3\theta + \cos^3\theta \right) d\theta = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left(-\sin^3\theta \right) d\theta}_{=0} +$$

$$+ \int_{-\pi}^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2\theta \right) \cos\theta \, d\theta =$$

PARI

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \sin^2\theta \right) \cos\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left(1 - \sin^2\theta \right) \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{d\sin\theta} = 2 \left[\sin\theta - \frac{1}{3} \sin^3\theta \right]_0^{\pi} = 0$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-3\cos^2\theta \sin\theta + \cos^3\theta \sin\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta \sin^2\theta \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} (\cos\theta \sin\theta)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{1}{8}\left(-\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$ $\qquad = \frac{1}{8} \; \frac{2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$

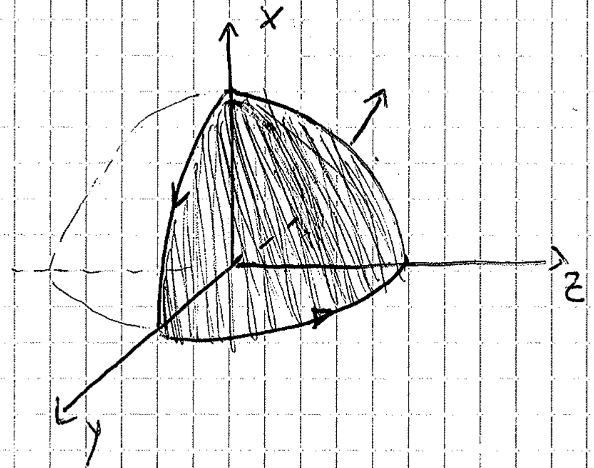
ESERCIZIO FINIRE A CASA

Calcolo flusso del rotF

$F = (xy^2z - 2, \; z^2 - y^2, \; xy - 2z^2)$

uscente da

$$\sigma: \begin{cases} x = 1 - (y^2 + z^2) \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$



~~x+y+z~~

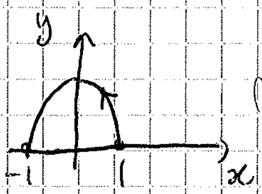
$x = 1 - y^2 - z^2$

PARABOLOIDE

$$\int_{\sigma} \text{rot}F \cdot \vec{n} = \int_{\partial\sigma} F \cdot dP$$

Se interseco $\begin{cases} x = 1 - (y^2 + z^2) \\ x = 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$ trovo $\gamma_1 \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$ cf nel piano (y, z)

$\begin{cases} \\ z = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_2 \begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$



no!

$$\gamma_1: \begin{cases} z = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

Divergenza di un campo

rot F: tipico di $\mathbb{R}^3$
Divergenza: $\mathbb{R}^n$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \left(F_1(x_1, \dots x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\right)(x_1, \dots, x_n)$$

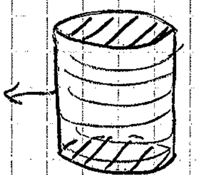
$\operatorname{div} F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(F_1, \dots, F_n)$$

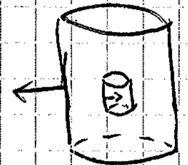
Def K aperto con bordo in $\mathbb{R}^3$?

- $\mathring{K} \neq \emptyset$
- K compatto, connesso
- ∂K (= frontiera topologica) è l'unione di un n° finito di calotte superficiali regolari il cui sostegno si interseca al + lungo un arco di curva

∂K è orientato in senso uscente al solido.



∂K = sup. laterale + le due cf



Intuitivamente vuol dire che il vettore normale, almeno all'inizio, non interseca il solido

TEOREMA DI GAUSS (o della divergenza)

- $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \Omega$ aperto $\neq \emptyset$

  $F \in C^1(\Omega)$ $\quad K \subseteq \Omega$, $\partial K \subseteq \Omega$
- $K \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto con bordo di $\mathbb{R}^3$, ∂K orientato positivamente

$$\Rightarrow \int_{\partial K} F \cdot \vec{n} = \iiint_K \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$

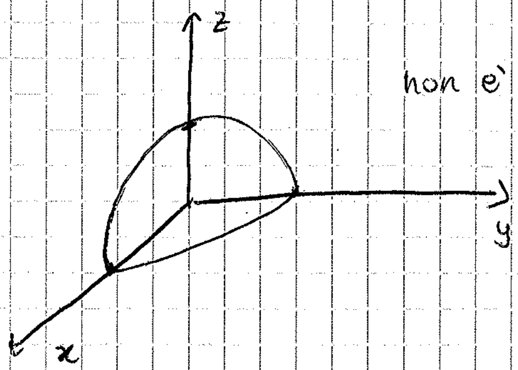
∂K superficie; K volume

FLUSSO DI F USCENTE DAL SOLIDO

T.E. 2010 N.B.

$F(x,y,z) = (xz, y, -2)$ calcolo flusso attraverso

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$$



non è pieno.

Se fosse stato

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{array} \right\} \qquad \partial K = \Sigma \cup \left\{ \frac{x^2+y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

avrei avuto un pezzo in +, anche ~~l'ellisse~~ il cerchio

Th Gauss non è esattamente la cosa che ho qui, perché comprende ~~l'ellisse~~ il cerchio

$$\int_{\partial K} F \cdot \vec{n} = \iiint_K \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_\Sigma F \cdot \vec{n} + \int_{C_{-\text{cerchio}}} F \cdot \vec{n}$$

$$\int_\Sigma F \cdot \vec{n} = \underbrace{\iiint_K \operatorname{div} F \, dx dy dz}_{*} - \int_C F \cdot \vec{n}$$

$\operatorname{div} F(x,y,z) = z+1$

Parametrizzo K $\quad 0 \leq z \leq 1$

$$K_z : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \leq 1 - z^2 \qquad x^2+y^2 \leq 4(1-z^2)$$

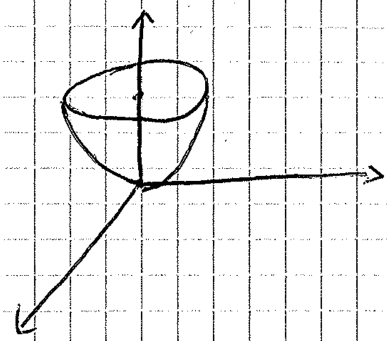
strato

$$* \int_0^1 \left(\iint_{K_z} (z+1) \, dx dy \right) dz = \int_0^1 (z+1) \underbrace{\iint_{K_z} dx dy}_{|K_z| = \pi \cdot 4 \cdot (1-z^2)} =$$

$$= 4\pi \int_0^1 (z+1-z^3-z^2) \, dz =$$

41

① $\int_{\partial K} F \cdot \vec{n} = \iiint_K \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$

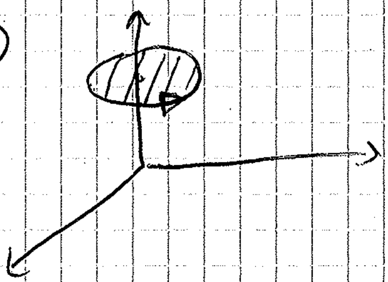


a casa   sol: $\pi\,[66+2e^2]$

② rot F

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 2x^3-10 & 2y^3 & e^{z/2} \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

③



$\int_\gamma F \cdot dP$ $C \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=4 \end{cases}$ senso antiorario

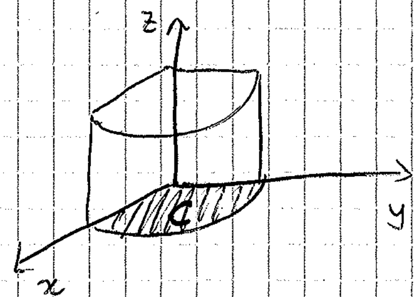
$\gamma = \partial C$

Stokes $\int_{\partial C} F \cdot dP = \int_C \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = \int_C 0 \cdot \vec{n} = 0$

Esercizio

$F(x,y,z) = (x, \ (x^2+2y)y, \ (y^2+2y)z)$ Calcolo $\int_{\partial A} F \cdot \vec{n}$

$A = \{(x,y,z): \ x \geq 0, \ y \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq xy\}$



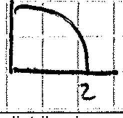
Questa va ancora intersecata con $z = xy$

le th. Gauss ci libera dalla necessità di parametrizzare la superf

$\iiint_A \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$ $\operatorname{div} F = 1 + x^2 - 4y + y^2 + 2y = x^2+y^2-2y+1$

$\iint_C \left(\int_0^{xy} (x^2+y^2-2y+1)\, dz \right) dx\,dy = \iint_C (1+x^2+y^2-2y)\,xy \, dx\,dy$

$0 \leq \rho \leq 2$
$0 \leq \theta \leq \pi/2$



$y = 3(x+1)$

$\rho\sin\theta = \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\rho\cos\theta \qquad \theta = \pi/4$

n.b. non è l'angolo delle coordinate polari!! Non lo ricavo dal coeff angolare della retta

$$D: \begin{cases} x-1 = \frac{1}{3}\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \left.\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}\right\} D'$$

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx = \iiint_{D'} 2\rho\sin\theta\, t \left(\frac{1}{3}\rho\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{3}\rho\, d\rho\, d\theta\, dt =$$

$$= \frac{2}{9}\iiint_{D'} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, t\, dt\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{9}\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\right)\cdot$$

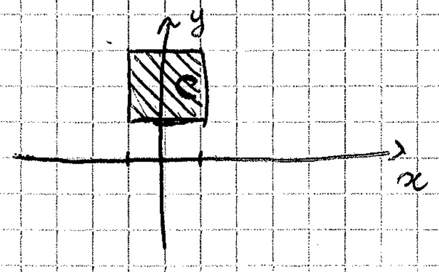
$$\int_0^1 t\,dt = \dots = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{16}$$

Esercizio

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Uscente dal solido di rotazione intorno all'asse x di

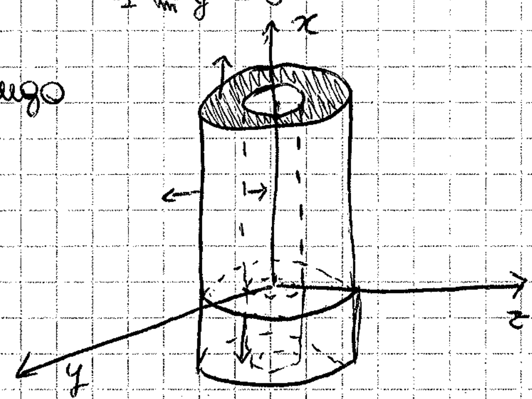
$C = \{ |x| < 1, \ |y-2| < 1, \ z = 0 \}$



$-1 < y-2 < 1$

$1 \le y < 3$

Ottengo



$$\left.\begin{cases} 1 \le y^2+z^2 \le 9 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}\right\} = K$$

$$\operatorname{div} F = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Prop

Se g è un potenziale di F su Ω $\Rightarrow$ $\forall K \in \mathbb{R}$, $g(x)+K$ è ancora un potenziale di F

dim

g è un pot. di F su Ω $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall i=1,\dots,n$

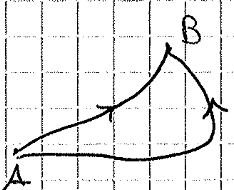
$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x)+K = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in \Omega$

Potenziale: analogo alle primitive delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma la differenza è che non tutti i campi sono conservativi

Proposizione

Ω aperto, $\neq \emptyset$, connesso

- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo su Ω
- $g: \Omega \to \mathbb{R}$ potenziale di F su Ω
- $\gamma: [a,b] \to \Omega$ regolare $\quad \gamma(a) = A \quad \gamma(b) = B$



$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = g(B) - g(A)$

- - - -

anche in 1 variabile

$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

- - - -

dim $\quad h(t) = g(\gamma(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ classe C^1 su (a,b)

$h'(t) = \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

Th. Torricelli - Barrow

$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b h'(t)\,dt = h(b) - h(a) =$

continua

$= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = g(B) - g(A)$

Dim con doppia inclusione?

Se il dom è connesso, trovato un potenziale li ho trovati tutti. Traslazioni. Se è sconnesso, riesco a farlo per ogni parte connessa.

TEOREMA

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, connesso, $\neq \emptyset$

$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo continuo su Ω

Sono equivalenti le seguenti proprietà:

① F conservativo su Ω

② $\int_\gamma F \cdot dP$ dipende solo dagli estremi di γ

($\gamma: [a,b] \to \Omega$ curva regolare, $\int_\gamma F \cdot dP$ dipende solo da $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$).

($\forall\ \gamma_1, \gamma_2$ curve regolari con il sostegno $\in \Omega$ che uniscono A e B $\Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$)

③ $\forall\ \gamma$ curva chiusa semplice (regolare o regolare a tratti) con il sostegno $\subseteq \Omega$ $\quad \int_\gamma F \cdot dP = 0 \quad = \quad \oint_\gamma F \cdot dP$

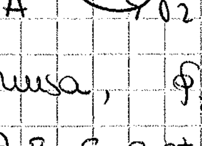
a volte si scrive $\oint F \cdot dP$ senza il pedice γ. Ha senso parlare di circuitazione solo per i campi conservativi.

dim

So già che $1 \Rightarrow 2$.
Se dimostro che $2 \Rightarrow 3$ e $3 \Rightarrow 2$ e $2 \Rightarrow 1$ allora sono a posto.

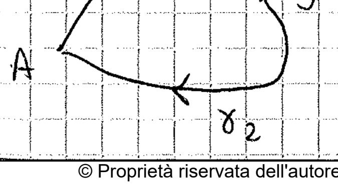
① $\Rightarrow$ ② ③

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ so che



$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

devo dim. che $\forall\ \gamma$ chiusa, $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

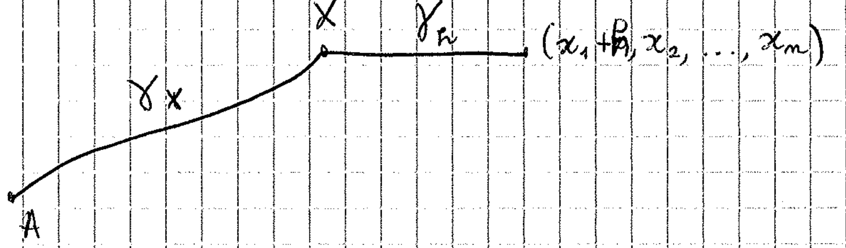


A, B $\in$ sost di γ

$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$

49

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n)}{h}$$ def. rapp incrementale



γ_h: segmento orizzontale che mi fa spostare in $(x_1+h, x_2, \dots, x_n)$

$$\gamma_h = (x_1+t, x_2, \dots, x_n) \qquad 0 \le t \le h$$

$$\frac{\int_{\gamma_X+\gamma_h} F\cdot dP - \int_{\gamma_X} F\cdot dP}{h} = \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_{\gamma_X} F\cdot dP} + \int_{\gamma_h} F\cdot dP - \cancel{\int_{\gamma_X} F\cdot dP}\right] =$$

$$= \frac{\int_{\gamma_h} F\cdot dP}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{F(x_1+t, x_2, \dots x_n)}_{(F_1, \dots, F_n)} \cdot \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{\text{derivata di } \gamma_h}\, dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{F_1(x_1+t, x_2, \dots, x_n)}_{} \, dt =$$

$x_1, x_2 \dots$ sono fisse, varia solo t, è una funz. di t: $\varphi(t)$ è continua

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)\, dt$$ media integrale di φ su $[0,h]$

<u>Th media integrale</u> $\exists c \in [0,h]$ t.c. $\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)\,dt = \underline{\varphi(c)}$

carabinieri?

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(c) = \lim_{c\to 0} \varphi(c) = \varphi(0) = F_1(x_1, \dots, x_n)$$

Esercizio

$$F(x,y,z) = -k\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(\quad)^{3/2}}, \frac{z}{(\quad)^{3/2}}\right)$$

Campo gravitazionale generato da una massa puntiforme nell'origine

$k>0$ def. su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 260

$g(x,y) = x^2 \log y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}$ è un potenziale

$g(0,1) = 0$ verifico:

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \log y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + y$

$\Rightarrow \nabla g(x,y) = F(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$

CAMPI CONSERVATIVI

Teorema

$F \in C^1(\Omega)$, Ω aperto $\neq \emptyset$ in $\mathbb{R}^n$, F è cons. su Ω

$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \qquad i,j = 1, \dots, n$

$F = (F_1, \dots, F_n)(x_1, \dots, x_n)$

In particolare, se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\text{rot}\, F(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} - \dots$$

$= 0$ su $\Omega \Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ su Ω $i,j = 1,2,3$

Solo in $\mathbb{R}^3$!

dim

Se F conservativo su $\Omega \Rightarrow \exists\, g$ potenziale di F su Ω, cioè $\exists\, g$ t.c.

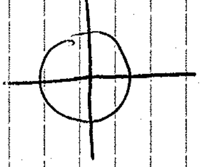
$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)(x) = (F_1(x), \dots F_n(x))$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^1(\Omega) \Rightarrow g \in C^2(\Omega)$
$\forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Vale il th. di Schwarz, cioè: $\to$ RIVEDERE

$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad \forall x \in \Omega$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 135 di 260



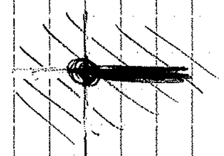
$x^2+y^2=1$ $\quad \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0\le\theta\le 2\pi$

$$\int_\gamma F\cdot dP = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin\theta}{1}, \frac{\cos\theta}{1}\right)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = 2\pi \neq 0$$ $\Rightarrow$ il campo F non è conservativo

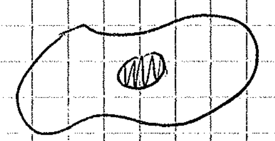
su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(cioè l'ostacolo è dato da come è fatto il dominio, non posso trovare un potenziale che valga sia sopra che sotto la semiretta.)



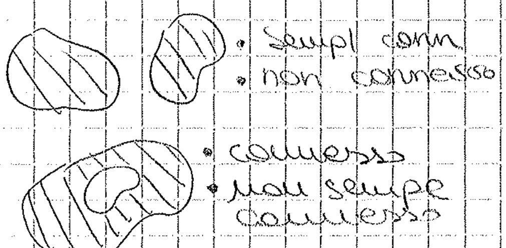
Def $\quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso se ogni curva chiusa (cappio) può essere ridotta senza uscire da Ω.

- Nel piano significa che non ci sono buchi
- In $\mathbb{R}^3$ dipende. Es: un toro implica che non riesco a sciogliere tutti i cappi.



In $\mathbb{R}^3$ un insieme è semplicem. connesso se ogni curva chiusa con il sostegno $\subseteq\Omega$ è il bordo di una calotta superficiale con il sostegno $\subseteq\Omega$

Teorema



$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto, $\neq\emptyset$

- semplicemente connesso
- connesso

$F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ di classe C^1 su Ω

Se $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)=\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ $\quad\forall\, i,j=1,\dots,n$ $\quad\forall\, x\in\Omega$

(F irrotaz.)

$\Rightarrow$ F è conservativo su Ω

(Stokes) $\Rightarrow \int_{\gamma=\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot}F \cdot \vec{n} = 0$, poichè $\text{rot}F = 0$

Es → determino se F conservativo e calcolo g potenziale

$F(x,y,z) = (2xy + yz - 2xz,\ x^2 + xz + z,\ xy - x^2 + y + z)$

$\text{dom}F = \mathbb{R}^3$ è semplic. connesso

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow$ Se F è irrot. su $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ è anche conservativo

$\frac{\partial F_1}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + z \Rightarrow$ sì, su tutto $\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial F_1}{\partial z} \overset{?}{=} \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} = y - 2x \Rightarrow$ sì, su tutto $\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial F_2}{\partial z} \overset{?}{=} \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = x + 1 \Rightarrow$ sì, su tutto $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ F è CONSERVATIVO su $\mathbb{R}^3$ semplic. connesso

g è un potenziale di F su Ω se — METODO CALCOLO POTENZIALE

$\nabla g = F$ su $\mathbb{R}^3$, cioè se:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) = 2xy + yz - 2xz \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z) = x^2 + xz + z \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z) = xy - x^2 + y + z \end{cases}$$

$$\int (2xy + yz - 2xz)\, dx = \cancel{2}y\frac{x^2}{\cancel{2}} + xyz - \cancel{2}z\frac{x^2}{\cancel{2}} + h(y,z) = yx^2 + xyz - x^2z + h(y,z) = g(x,y,z)$$

$h(y,z)$: costante rispetto a x

g derivabile $\Rightarrow$ anche h deve essere derivabile

Impongo $\frac{\partial g}{\partial y} = F_2$

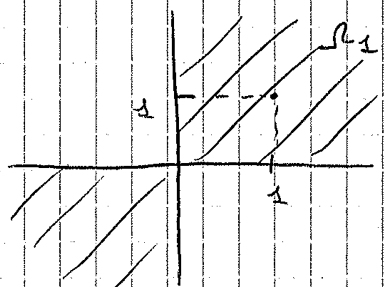
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + z = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = z$$

$\Rightarrow$ basta far vedere che F è irrotaz. per dim che è conservativo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1/y}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{1}{2y}\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

n.b. $\sqrt{\frac{y}{x}} \neq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$!!!!!

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ su Ω $\Rightarrow$ F è conservativo.



Cerco un potenziale definito su Ω_1, perchè tra Ω_1 e Ω_2 il potenziale cambia!

Cerco $g(x,y)$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2+\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1+\sqrt{\frac{X}{Y}}$

$g(1,1) = 4$

$$\int\left(2+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx = 2x + \int\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\,dx = 2x + \sqrt{y}\,\frac{\sqrt{x}}{+\frac{1}{2}} + K(y) =$$

$$= 2x + 2\sqrt{xy} + K(y)$$

Impongo $\frac{\partial g}{\partial y} = F_2$) derivo

$$\cancel{2}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{xy}} + K'(y) = 1+\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{x}{y}}} + K'(y) = 1 + \cancel{\sqrt{\frac{x}{y}}} \qquad K'(y) = 1 \qquad k(y) = y+k$$

$g(x,y) = 2x + 2\sqrt{xy} + y + k \qquad 2+2+1+k = 4 \quad k = -1$

$g(x,y) = 2x + 2\sqrt{xy} + y - 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 141 di 260

$A_2: \; x^2+y^2-1>0$

$g(x,y) = \log(x^2+y^2-1) - x + h, \quad h \in \mathbb{R}$

cambio nome alla costante! 2 componenti connesse $\neq$, A_1 e A_2

N.B. è potenziale su A_2, perchè i conti che ho fatto valgono sempre, ma volendo derivo e verifico

Dimostro che A_1 conservativo non con $\operatorname{rot} F \neq (0,0)$, ma con la ricerca del pot

Es 2

$$F(x,y) = \left(\frac{\varphi(y)}{x} + \cos y, \; 2y\log x - x\sin y\right)$$

1) Determinare una funz. $\varphi(y)$ t.c. $\varphi(1)=1$ che renda il campo conservativo

2) $g(x,y)$ t.c. $g\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0$

1) $\operatorname{dom} F_1 = \{(x,y) : x \neq 0\}$ $\quad \operatorname{dom} F_2 = \{(x,y) : x>0\}$

$\operatorname{dom} F = \{(x,y) : x>0\}$

connesso e semplicem. connesso e $F \in C^1 \Rightarrow$ se $\operatorname{rot} F = (0,0)$ è campo cons

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2y}{x} - \sin y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)}{x} - \sin y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \qquad \frac{2y}{\cancel{x}} - \cancel{\sin y} = \frac{\varphi'(y)}{\cancel{x}} - \cancel{\sin y} \qquad 2y = \varphi'(y) \quad \forall x>0$$

$$\begin{cases} \varphi'(y) = 2y \\ \varphi(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + K, \quad K \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

$1 + K = 1 \Rightarrow K = 0$

è t.c. il campo F è conservativo su $\{(x,y) : x>0\} = \operatorname{dom} F$

2) $$F(x,y) = \left(\frac{y^2}{x} + \cos y, \; 2y\log x - x\sin y\right)$$

$\nabla g(x,y) = F(x,y) \quad \forall (x,y) \in \operatorname{dom} F$

$$\int\left(\frac{y^2}{x} + \cos y\right) dx = y^2 \ln x + x\cos y + K(y) = g(x,y)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 260

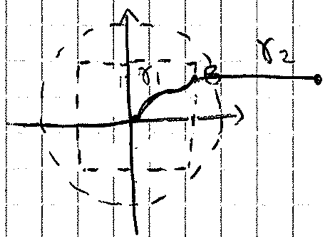
$F(x,y) = (4 - x^2 - y^2,\ y^2 - 2xy)$ su A_1

$g(x,y) = \int (4 - x^2 - y^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3} - xy^2 + k(y)$

$\frac{\partial g}{\partial y} = -\cancel{2xy} + k'(y) = y^2 - \cancel{2xy}$ $\qquad k(y) = \frac{1}{3}y^3 + K$

$g(x,y) = \{ 4x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + k,\ k \in \mathbb{R} \}$

potenziali di F su A_1

3) 

$\gamma_1(t) = (\sin^2 t, t^2) \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$0 \le \sin^2 t \le 1/2 < 2$

$0 \le t^2 \le \frac{\pi^2}{16} < 2$

Bisogna essere sicuri che la curva stia tutta dentro A_1, se no il risultato dell'integrale cambia a seconda della curva

Siccome $\gamma_1 \subseteq A_1 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dP = g(B) - g(0)$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi^2}{16}\right)$ si ha quando $t = \frac{\pi}{4}$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^3$$

$\gamma_2(t) = \left(t, \frac{\pi^2}{16}\right) \qquad \gamma_2'(t) = (1,0)$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int \left(|x^2 + y^2 - 4|, \dots\right) \cdot (\gamma'(t))\, dt$$

[...]

RIASSUNTO

Campo ≠ fuori e dentro la crf.

① Su A_1 rot$F$ è nullo. $F \in C^1(A_1)$, A_1 sempl. conn $\Rightarrow$ F cons. su A_1

② Su A_2 $\frac{\partial F_2}{\partial x} \neq \frac{\partial F_1}{\partial y} \Rightarrow$ F non è cons. su A_2

SUCCESSIONI

$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $a(n) = a_n$

oppure il dominio $= \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$

$\{a_n = (-1)^n\}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ esempio

NOTAZIONI:

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

es: $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1} = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$

Una successione soddisfa "definitivamente" una proprietà se $\exists\, n_0$
$\forall n \geq n_0$ la successione soddisfa quella proprietà

$\{n^2 - 4\}_{n \geq 0}$

$n = 2 \rightarrow 4 - 4 = 0$
$n = 3 \rightarrow 9 - 4 = 5 > 0$
$n \geq 3 \rightarrow n^2 - 4 > 0$

es: questa successione è definitivamente positiva.

- $+\infty$ è un $\boxed{\text{P.TO DI ACCUMULAZIONE}}$ di $\mathbb{N}$

intorno di $+\infty$ $\cap$ dominio

$\forall a,\ (a, +\infty) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$

I limiti si possono calcolare solo nei p.ti di accumulazione

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

Def LIMITE

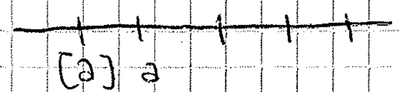
semiretta

- $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, B(+\infty) = (a, +\infty) \quad n > a \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

$\forall\, B(l)$

- $\forall\, B_\varepsilon(l) \quad \exists\, B(+\infty),\ n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(l)$

limite ① ②



$n > [a] = n_0$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se:

Def SOTTOSUCCESSIONE

$\{a_n\}$ successione

SOTTOSUCCESSIONE di $\{a_n\}$ la restrizione di a_n ad un dominio $M \subseteq \mathbb{N}$ illimitato

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

es: $\{2k\} = M$

$\{2k+1\} = M$

Si indica a_{n_k} $\{n_k, k \in \mathbb{N}\} = M$ es: a_{2k} $\{2k, k \in \mathbb{N}\} = M$

Teorema limite funzioni / limite success. $c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \iff \forall \{a_n\} \text{ t.c. } a_n \to c \quad \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \iff \forall \{a_{n_k}\} \text{ sottosuccessione, } \lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = l$$

Corollario

se $\exists \{a_{n_k}\}$, $\exists \{a_{n_h}\}$ sottosuccessioni di $\{a_n\}$ t.c.

$$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = l_1 \neq \lim_{h \to +\infty} a_{n_h} = l_2$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$$

In particolare: se $\lim_{k \to +\infty} a_{2k} = l_1 \neq \lim_{k \to +\infty} a_{2k+1} = l_2$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Es

$a_n = (-1)^n$ non ha limite, perché:

$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \longrightarrow 1$ per $k \to +\infty$

$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \longrightarrow -1$ per $k \to +\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 149 di 260

CRITERIO DEL RAPPORTO

- Sia $\{a_n\}$ una successione t.c. $a_n > 0$ $\forall n$
  ($a_n > 0$ definitivamente)
- $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \geq 0$ (perché sono termini positivi)

- Se $q < 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
- Se $q > 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$
- Se $q = 1 \Rightarrow$ il teorema non dà info

dim

(1) Suppongo $q < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon$

Scelgo $\varepsilon = 1 - q > 0$

$\exists n_0 : \quad -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon$

$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = q + 1 - q = 1$

$\forall n \geq n_0 \quad a_n > 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \longrightarrow a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow \{a_n\}$ è definitivamente decrescente

$\Rightarrow$ per il th. preced $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_n\} = l \qquad 0 \leq l \leq a_n \quad \forall n$

Se $l \neq 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{l}{l} = 1 \neq q$ (per ipotesi)

$\Rightarrow l$ non può essere $\neq 0 \Rightarrow l = 0$

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \Rightarrow n!$ e' un ∞ di ordine $<$ di n^n

- Riapplico il criterio del rapporto

$a_n = \frac{q^n}{n!}$ con $q > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{q^n}{n!}} = \frac{q^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{q^n} = \frac{\cancel{q^n} \cdot q}{n+1 \cdot \cancel{q^n}} = \frac{q}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ per il crit rapp $\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$

$\Rightarrow$ q^n e' infinito di ordine inf rispetto a $n!$

CRITERIO DELLA $\sqrt{}$

$\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ (definitivamente)

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

- Se $q < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
- Se $q > 1 \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$
- Se $q = 1$ il criterio non da' info

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\log n^{1/n}} = e^{\frac{1}{n} \log n} = e^{\frac{\log n}{n}}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

$\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$

Successione delle ridotte

$S_0 = a_0$
$S_1 = a_0 + a_1$
$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + a_2$
$\vdots$

$$S_n = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n}_{\text{RIDOTTA } n\text{-esima}} = S_{n-1} + a_n$$

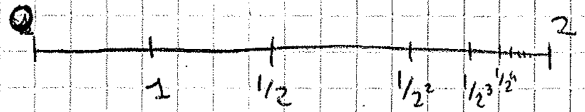
$\{S_n\}$ SUCCESSIONE DELLE RIDOTTE

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{la serie converge a } s \text{ e } s \text{ si chiama somma della serie} \\ +\infty \Rightarrow \text{diverge positivamente} \\ -\infty \Rightarrow \text{diverge negativamente} \\ \nexists \Rightarrow \text{la serie è indeterminata o oscillante} \end{cases}$$

Nomenclatura

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a_n: termine generale della serie

$S_n = a_0 + \dots + a_n$ ridotta n-esima



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

SERIE GEOMETRICA di RAGIONE q

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n} \qquad S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Prodotto notevole $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$

Se $q \neq 1$

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = S_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + q + \dots + q^n) = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$S_0 = (-1)^0 = 1$, $S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = S_1 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$

$S_3 = S_2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow S_0 = S_2 = \dots = S_{2k} = 1$, $S_1 + S_3 + \dots + S_{2k+1} = 0$

$\lim S_{2k} \neq \lim S_{2k+1} \Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$ la serie è indeterminata

OPPURE:

$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots$
$\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0$

$\underbrace{(a_0 + a_1 + a_2)}_{1} + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5)}_{-1}$

Trovo limiti diversi a seconda di come raggruppo gli elementi, oppure non trovo limite

Prop

Il comportamento della serie non cambia se si modificano un numero finito di termini della serie

Se la serie converge cambia il valore a cui converge, ma non il fatto che converga

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots$$

se $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0 \quad b_n = a_n$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$ e $\sum_{n \geq 0} b_n$ hanno lo stesso comportamento

dim

$S_n = \overbrace{a_0 + \dots + a_{n_0}}^{S_{n_0}} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$ ridotta di $\{a_n\}$

$t_n = \underbrace{b_0 + \dots + b_{n_0}}_{t_{n_0}} + b_{n_0+1} + \dots + b_n$ ridotta di $\{b_n\}$

2

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1)+B(n)}{n(n-1)} = \frac{(A+B)n - A}{n(n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=1 \\ A=-1 \end{cases}$$

$$S_2 = a_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_3 = a_2 + a_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1 \qquad \boxed{\sum \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)}$$

SERIE TELESCOPICA

(compaiono dei termini uguali con segno opposto, si cancellano. Si riesce a calcolare la ridotta)

Esercizio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n = a_n$$

$$S_1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = \cancel{\log 2} + \log 3 - \cancel{\log 2} = \log 3$$

$$S_3 = \underbrace{(\log 2 - \log 1)}_{a_1} + \underbrace{(\log 3 - \log 2)}_{a_2} + \underbrace{(\log 4 - \log 3)}_{a_3} = \log 4$$

$$S_n = \log(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$$

$$\sum_{n\geq 1} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{Diverge positivamente}$$

Corollario

Data $\sum_{n\geq 0} a_n$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ o $\nexists$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} a_n$ non converge

CRITERIO (NECESSARIO) DEL RESTO

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a s

Si chiama RESTO n-esimo della serie $r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

Se $\sum a_n$ converge a s

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} r_n = 0$

Dim

$r_n = s - s_n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s - s_n) = s - s = 0$

$\sum a_n \qquad \sum \lambda a_n$

Se ho un n° finito di termini:

$\lambda a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n = \lambda (a_0 + \ldots + a_n)$

Posso fare lo stesso raccoglimento con somme ∞ ?

Teorema $\boxed{\sum_{n\geq 0} \lambda a_n}$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e sia $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie.

① $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge a s $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ converge a λs

$$\sum_{n\geq 0} \lambda a_n = \lambda \left(\sum a_n\right)$$

② $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ diverge

$$\lambda \left(\sum a_n\right)$$

③ $\sum_{n\geq 0} a_n$ è indeterminata $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n$ è indeterminata

6

$\sum n = \sum a_n$ $\quad\quad$ $\sum(-n) = \sum(b_n)$

div. a $+\infty$ $\quad\quad$ $-\sum n$ div. a $+\infty$

$\sum (n-n) = \sum 0$ converge a 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) \quad\quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3^n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

serie geom di ragione $< 1 \Rightarrow$ CONVERGONO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2 \quad\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

N.B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) \quad\quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{la serie non converge}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\right) \quad \text{diverge a } -\infty$$

($\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge, ma $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge)

$$S_n = \underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{1} + \ldots + \underset{a_n}{1} = n+1 \longrightarrow +\infty$$

Serie a termini positivi

$$\sum_{n\geq 0} a_n \quad \text{con } a_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$$

Prop

Se $\sum a_n$ è una serie a termini ≥ 0, $\Longrightarrow$

$\sum a_n$ converge a $S \geq 0$ $\vee$ diverge positivamente

Dim

$S_0 = a_0 \geq 0$

$S_1 = a_0 + a_1 \geq 0$

Criterio del confronto

$\sum_{n\geq 0} a_n \qquad \sum_{n\geq 0} b_n$

$\forall n \quad 0 \leq a_n \leq b_n$

Allora:

1) Se $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge a $t \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ converge a $s \leq t$

2) Se $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge $(+\infty) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} b_n$ diverge

dim

$0 \leq s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq t_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

Poiché le serie sono a termini ≥ 0, $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} t_n$

1) Se $\lim_{n\to+\infty} t_n = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = s \leq t$

(per il I teorema del confronto sui limiti)

2) Sempre per i th. del confronto, se $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$

N.B. Il criterio del confronto ha bisogno di sapere in partenza che i limiti $\exists$. Qui lo so perché a_n e $b_n \geq 0$.

Es

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

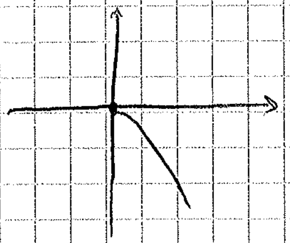
serie di Mengoli

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \dots$

$n^2 \geq n(n-1) \geq 0 \qquad \forall n \geq 2$

$n^2 = n\cdot n$

10



$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} < 0$$

$\forall x > 0 \Rightarrow f$ è strettam. crescente su $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) = \log(1+x) - x < 0 \quad \forall x > 0$

$\log(1+x) < x \quad \forall x > 0$

$x = \frac{1}{n} \qquad \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \forall n > 0, n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

- Se $0 < \alpha < 1 \qquad n^\alpha < n \quad \forall n > 1$

$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge perchè $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Esercizio

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n + 3}{n^2}$$

$-1 \leq \sin n \leq 1 \qquad -1+3 \leq \sin n + 3 \leq 1+3 \qquad 2 \leq \sin n + 3 \leq 4$

$\frac{2}{n^2} \leq \frac{\sin n + 3}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2} = 4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge a $S \leq 4 \cdot 2 = 8$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n + 3}{n^2}$ converge

a caso $\sum \frac{\sin(2n)+5}{n}$ DIVERGE

$\frac{-6}{n} \leq \frac{\sin 2n}{n} \leq \frac{-4}{n}$

$\sum\left(-\frac{6}{n}\right) = -6 \sum \frac{1}{n}$ diverge

Esercizio

$$\sum_{n \geq 0} e^{-n}$$

$e^{-n} \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

$e^{-n} > 0 \quad \forall n$

12

p = "la serie converge"

$\neg p$ = "la serie diverge" solo perché è $\geq 0 \Rightarrow$ non può essere indeterminata

---

es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+\sqrt{n}} = a_n$$

$$\frac{n+3}{n^2+2n+\sqrt{n}} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$$

$$\sum \frac{1}{n} \text{ div.} \Rightarrow \sum \frac{n+3}{n^2+2n+\sqrt{n}} \text{ div.}$$

---

es

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$\sin t \sim t$ per $t \to 0$, cioè $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

$\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge

es

$$\sum \underbrace{\left(1+e^{1/n}\right)}_{\to 1 \neq 0}$$

allora la serie non può che divergere, quel termine non tende a 0

$e^t - 1 = t + o(t)$ $\quad e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$

$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(e^{1/n} - 1\right)$ diverge

es

$$\sum \frac{3n + \sin n^2 + \sqrt{n}}{2n^3 - 3n\sqrt{n}}$$

$3n + \sin n^2 + \sqrt{n} = 3n + o(n)$

$\sin n^2$ è $o(n)$ perché $\frac{\sin(n^2)}{n} = \underbrace{\sin n^2}_{\text{lim.}} \cdot \frac{1}{n} \to 0$

$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ per $n \to +\infty$

141

dim

Ricordiamo che $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge $\iff q \in (-1,1)$

② Se $l > 1 \Rightarrow$ il criterio della radice sulle successioni

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ diverge (crit. necessario converg.)

① Se $l < 1$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $l+\varepsilon < 1$

Per def. di limite $\exists\, n_0 : n \geq n_0$

$l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon = q < 1$

elevo a n

$0 \leq a_n < (l+\varepsilon)^n = q^n$ con $q < 1$

$\Rightarrow \sum q^n$ converge

$\Rightarrow$ (crit. confronto) $\sum a_n$ converge

oss Se $\sqrt[n]{a_n} \to l = 1$ posso trovare serie sia conv. che div.

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1$ e la serie diverge

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow 1$ convergente

es

$\sum \frac{n}{3^n}$ $\quad a_n = \frac{n}{3^n}$ $\quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Ho info anche su $\frac{1}{3^n}$, perché $\frac{1}{3^n} < \frac{n}{3^n}$

Es

$\sum \frac{2^n}{n^n}$ $\quad \frac{2^n}{n^n} \to 0$

$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \frac{2}{n} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{2^n}{n^n}$ conv

Es

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

Crit. rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{(n+1)!} =$

$$= \frac{(n+2)\,n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum \frac{(n+1)!}{n!} \text{ converge}$$

$$= \Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\Big]^{-1}$$

[manca una lezione]

Es

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^{1/n}}$$

Converge o diverge?

1ª cosa: chiedersi se il termine generale $\to 0$

$$\frac{1}{(\log n)^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$$

$$\sqrt[n]{\log n} = e^{\log\left(\sqrt[n]{\log n}\right)} = e^{\log (\log n)^{1/n}} =$$

$$= \underbrace{e^{\frac{1}{n}\underbrace{\log(\log n)}_{\to 0}}}_{\to e^0 = 1} \to 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\log n)^{1/n}} \to 1 \neq 0$$

il termine generale $\not\to 0 \Rightarrow$ la serie non converge $\Rightarrow$ diverge

Es

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{3^n}$$

$\frac{n!}{3^n} \to +\infty$ per $n \to +\infty$

diverge, perché $a_n \geq 0$ e $a_n \to +\infty$

Es

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$$

1° $\left|(-1)^n \frac{n^2}{2^n}\right| = \frac{n^2}{2^n}$

chiedersi cosa fa il $|\ |$

$$\frac{1}{\log(n+1)-\log n} \qquad \log\frac{n+1}{n} \longrightarrow \log 1 = 0$$

$$\frac{1}{\log(n+1)-\log(n)} \to +\infty \quad \text{allora} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\log(n+1)-\log(n)} \quad \text{non converge}$$

perché il termine generale $\not\to 0$

Es

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^{n^2}}{[(n+1)!]^n}\cos(\pi n)$$

$\cos \pi n$ < n pari $\longrightarrow \cos\pi n = 1$; n dispari $\longrightarrow \cos\pi n = -1$ $\Rightarrow \cos\pi n = (-1)^n$ < 1 se n pari; -1 se dispari

$\cos\pi n = (-1)^n$

$$\sum (-1)^n \frac{3^{n^2}}{[(n+1)!]^n} \longrightarrow \text{conv. ass} \Rightarrow \text{conv}$$

① Studio la serie dei | |

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{[(n+1)!]^n}} = \frac{3^{\frac{n^2}{n}}}{(n+1)!} = \frac{3^n}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

per $n \to +\infty$

$\sqrt[n]{a_n} \to 0 < 1$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ per il crit radice, la serie $\sum \frac{3^{n^2}}{[(n+1)!]^n}$ conv

Es

$$(-2)^n = 2^n \cdot (-1)^n$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^{23}}{(-2)^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{n^{23}}{(-1)^n\, 2^n} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{n^{23}}{2^n}$$

$\sum \frac{n^{23}}{2^n}$ converge, perchè $\frac{n^{23}}{2^n}$ ha un ordine di infinitesimo $\alpha > 1$ rispetto a $\frac{1}{n}$, per $n \to +\infty$

19

③ Criterio Leibniz

1. $\sin \frac{\pi}{n+1} \geq 0$
2. $\sin \frac{\pi}{n+1} \to 0 \quad , \quad n \to +\infty$
3. è decrescente?

$\frac{\pi}{n+1}$ è decrescente

$\sin t$ è una f crescente per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $0 \leq \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ è decrescente

$\sum (-1)^n \sin \frac{\pi}{n+1}$ converge, ma non assolutamente

Es.

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$$

$(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$

① Serie data: a segni alterni

La serie data è somma di

$$\boxed{\underbrace{\sum (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{conv}}} + \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\text{conv}} \Rightarrow \text{converge}$$

②Conv. ass.?

$\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n^2} > 0 \quad \forall n > 1 \qquad \left(\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}\right)$

$$\left|(-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ converge? NO

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$ diverge. Infatti, per $n \to +\infty$ $\quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

o. d. inf. 1 rispetto a $\frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 177 di 260

$\sum (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$

- $\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \to 0 \quad , \quad n \to +\infty$
- $\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n$

$\frac{1}{n}$ decresc, $\operatorname{arctg} x$ cresc $\Rightarrow$ $\operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ è decresc

$\Rightarrow \sum (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ converge

$\Rightarrow -2 \sum (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ converge, non conv. ass.

- Es. è come difficile $\quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \quad$ conv, non conv ass

$-1-1=0 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 4$

Successioni di funzioni

$f_n(x) = x^n$ è una successione di funzioni

$x, x^2, x^3 \dots$

$f_n(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

Es:

$f_n(x) = x^n \qquad x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \nexists & x = -1 \quad x^n = (-1)^n \\ \nexists & x < -1 \quad x^n = (-1)^n |x|^n \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

(prime due righe:) $\lim \exists$ e $\in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

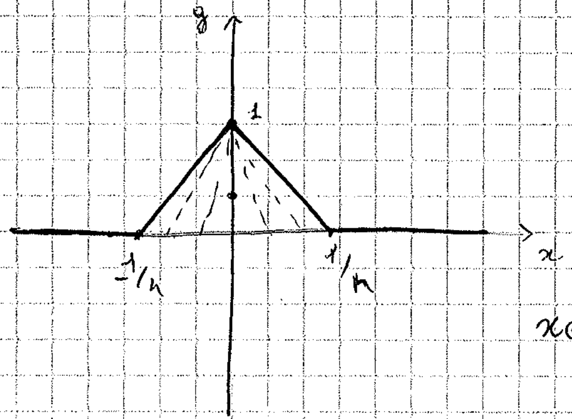
FUNZIONE LIMITE funzione a cui tende la successione per $n \to +\infty$

23

Es

$$g_n(x) = \begin{cases} 1+nx & x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right) \\ 1 & x = 0 \\ 1-nx & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{altrove} \quad x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

n è anche nel dominio!



$g_n(0) = 1 \to 1$ per $n \to +\infty$

$x \neq 0 \quad g_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$

$\forall x \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 :$

$n \geq n_0 \Rightarrow |g_n(x) - 0| < \varepsilon$

$x \in (-1, 1) \qquad g_n(x) \to 0 \quad \forall x \notin (-1, 1)$

$\exists n_0$ t.c. $\quad |x| > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq n_0$

$g_n(x) = 0 \quad \forall n \geq n_0$

$$g_n(x) \longrightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Es casa

$$g_n(x) = \begin{cases} \sin nx & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Es casa

- $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{2^n}{n^2 - 1}$
- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \log n^2}$
- $\sum_{n \geq 4} (-1)^n \frac{n + \sin n}{3n^3 - 1}$
- $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log n^3}$
- $\sum_{n \geq 4} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 2}{n^3 - 3}$
- $\sum \frac{1}{n \sqrt{n} \log n}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 260

$\Rightarrow \forall x \in I, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ unif. su I

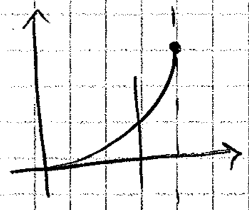
$(\Rightarrow)$ Se $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su I:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \quad n \geq n_0 \quad x \in I \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Esempio 1

$x^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ (già fatto)



- su $[0, a]$ con $a < 1$, $x^n \twoheadrightarrow 0$ unif. su $[0, a]$
- Su $[0, 1)$ non conv. unif. a 0

Infatti, cerco n t.c.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \quad n \geq n_0 \quad x \in I \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon; \quad x^n < \varepsilon$

$x^n < \varepsilon \qquad \log x^n < \log \varepsilon \qquad n \log x < \log \varepsilon$

- $0 < x < 1 \Rightarrow \log x < 0$
- Se $\varepsilon < 1$, $\log \varepsilon < 0$

$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} > 0$ se $\varepsilon < 1$ $\qquad$ Se $n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} \Rightarrow x^n < \varepsilon$

Lavoro su $[0, a] \subseteq [0, 1)$

$\log x$ crescente, allora $\log x \leq \log a \quad \forall x \leq a$

$\Rightarrow \frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{\log a} \qquad \frac{\log \varepsilon}{\log x} \leq \frac{\log \varepsilon}{\log a} \qquad \varepsilon \in (0,1)$?

Se $n > \frac{\log \varepsilon}{\log a} \geq \frac{\log \varepsilon}{\log x}$

$\forall \varepsilon > 0$, se $n > \frac{\log \varepsilon}{\log a} \Rightarrow x^n < \varepsilon \Rightarrow x^n$ converge uniformemente su $[0, a]$

Ma se $a \to 1$, $\log a \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\log a} \to -\infty$, $\frac{\log \varepsilon}{\log a} \to +\infty$ $\quad$ non posso mai trovare un valore comune a tutte le $x < 1$

27

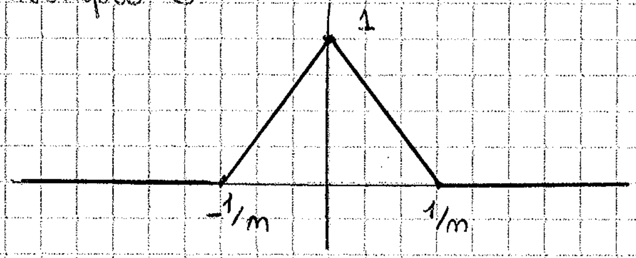
Prop

Se $f_n \rightrightarrows f$ su I $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ su ogni $J \subseteq I$

e quindi se f_n non conv. unif. a f su J $\Rightarrow$ non conv. unif. su ogni I t.c. $J \subseteq I$

$(A \Rightarrow B \;;\; \neg B \Rightarrow \neg A)$

Esempio 3



$$f_m(x) \to \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1+nx & x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right) \\ 1 & x = 0 \\ 1-nx & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

Le $f_m(x)$ non conv. unif. su $(0,+\infty)$. Infatti:

$$\sup_{x \in (0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} f_m(x) = 1 \not\to 0 \quad \text{per } m \to +\infty$$

Se considero $x \geq a > 0$ $\quad [a, +\infty)$ $\quad$ per esempio $a = \frac{1}{100}$

Dim che: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; n \geq n_0 \; x \geq \frac{1}{100} \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$

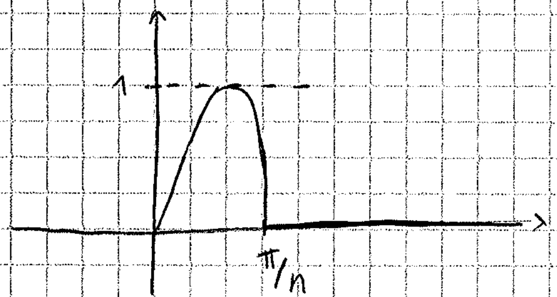
Se prendo $m_0 = 100$ $\quad f_{m_0}(x) = 0 \quad \forall x \geq \frac{1}{100}$

questa volta uso la definizione

$\forall m \geq 100 \Rightarrow f_m(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{100}, +\infty\right)$

Esempio 4

$$f_m(x) = \begin{cases} \sin mx & x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right] \\ 0 & x > \frac{\pi}{m} \end{cases}$$



$f_m(x) \to f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \geq 0 \quad \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow$

$|f_n(x) - f(0)| < \varepsilon$

Preso $x > 0$ $\exists n_0$ t.c. $x > \frac{\pi}{n_0} \geq \frac{\pi}{n} \quad \forall m \geq n_0$

$\Rightarrow \forall m \geq n_0 \quad f_m(t) = 0 \quad$ su $[x, +\infty)$

$\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su $[a,+\infty)$

Se prendo $(-\infty, a]$

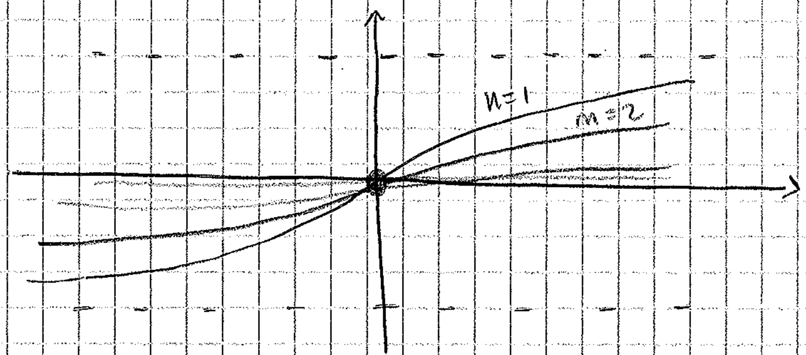
$\sup \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n+x) \right|$ è raggiunto con $x \to +\infty$

$= \pi \not\to 0$ per $n \to +\infty$

Anche se la funz. limite è continua non è detto che $\rightrightarrows$

Esempio 7

$f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$



Conv. unif. su $[-a,a]$ (su $[a,b]$)

$\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right| =$

PARI

$= \sup_{x\in[0,a]} \left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right| = \operatorname{arctg}\frac{a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Invece:

$\sup_{x\geq 0} \left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right| = \frac{\pi}{2}$ tengo anche le "code"

- $\rightrightarrows$ su $[-a,a]$
- non $\rightrightarrows$ su $[a,+\infty)$ (idem per $(-\infty,a]$)

Corollario

- Se $f_n(x)$ sono continue su I
- $f_n(x) \to f(x)$ su I
- $f(x)$ non è continua su I

$\Rightarrow$ $f_n(x)$ non conv. unif. a $f(x)$ su I

Teorema

$f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su I

x_0 p.to di accumulazione di I

$\forall n, \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$

$\exists \lim_{n \to +\infty} l_n = l$

$f(x)$ continua in x_0 per il th precedente ma allora $f_n(x)$ continue (?)

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right] = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right]}_{f(x)}$$

N.B. $f(x)$ continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\overbrace{\lim_{x \to x_0} f_n(x)}^{l_n} \right] \overset{?}{=} \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left[l_n \right] \overset{?}{=} \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]$$

mi riconduco al th di prima

sì, perchè $|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \leq 3\varepsilon \ldots$

Teorema di integrazione

f_n continue su $[a,b]$

$f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) dx$$

OSS.
- $f_n(x)$ continue su $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx$ è ben definito
- $f(x)$ continua su $[a,b]$ per il teo. preced. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ è ben def.

$$\sup_{x\in[0,\frac{\pi}{4}]} |\cos x^n - 1| = \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{4}]} (1-\cos x^n)$$

$1-\cos x^n$ è crescente su $[0,\frac{\pi}{4}]$

$$\sup_{x\in[0,\frac{\pi}{4}]} (1-\cos x^n) = 1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\right) = 1-1=0$$

$\Rightarrow \cos x^n \rightrightarrows f(x)=1$ per $n\to+\infty$ $x\in[0,\pi/4]$

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x^n)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/4} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Allora $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ n\geq n_0 \quad \left|\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4}\cos x^n\,dx\right| < \varepsilon$

Corollario

- $f_n(x)$ continue su I intervallo
- $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su I

Definisco: $x_0, x\in I$

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$\Rightarrow F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ su ogni $[a,b]\subseteq I$

(F converge uniformemente sui compatti)

dim

$$\left.\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x)-F(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n\to+\infty \right\} \text{devo dimostrarlo}$$

$$F_n(x)-F(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(f_n(t)-f(t)\right)dt$$

$$|F_n(x)-F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f_n(t)-f(t)\right)dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x}|f_n(t)-f(t)|\,dt\right| \leq \circledast$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 191 di 260

- So che $f_n(x_0) \to C$ per $n \to +\infty$
- Per il th. integrazione

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \longrightarrow\!\!\!\!> \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{sui compatti}$$

$$f_n(x) \longrightarrow z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = f(x) \quad \text{su } I \text{ ; convergenza puntuale}$$

Devo dire che vale anche $\to\!\!>$ sui compatti

$f(x)$ è derivabile

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = g(x) \quad \forall x \in I$$

Th fondam. calcolo integrale

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| = \left| z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| z - f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t)\big)\,dt \right| \leq \left| z - f_n(x_0) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \big(g(t) - f_n'(t)\big)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \left| z - f_n(x_0) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left| g(t) - f_n'(t) \right| dt \right| \leq \left| z - f_n(x_0) \right| + \int_{a}^{b} \left| g(t) - f_n'(t) \right| dt \leq \circledast$$

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| z - f_n(x_0) \right| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \quad n \geq n_1 \Rightarrow \left| g(t) - f_n'(t) \right| < \varepsilon$

$\bar{n} = \max\{n_0, n_1\}$ se $n \geq \bar{n}$

$< (?)$

$$\circledast \leq \varepsilon + \int_{a}^{b} \varepsilon\,dt = \varepsilon + (b-a)\,\varepsilon = (1 + b - a)\,\varepsilon$$

$f_n(x) \to\!\!> f(x)$ su $[a,b]$

$$r'_n(x) = \frac{(n+1)x^n(1-x) + x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1} - \cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2} = \frac{x^n}{(1-x)^2}(n+1-nx)$$

limitata

$r'_n(x) > 0 \iff n+1-nx > 0 \Rightarrow n+1 > nx \Rightarrow x < \frac{n+1}{n}$

$\frac{n+1}{n} > 1$

$\Rightarrow r'_n(x) > 0 \quad \forall\, x < 1 < \frac{n+1}{n} \Rightarrow r_n(x)$ è crescente

$\sup_{x\in(-1,1)} |r_n(x)| = \lim_{x\to 1} r_n(x) = +\infty$

$r_n(x) \to +\infty$ per $x \to 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow \sup_{x\in(-1,1)} |r_n(x)| \not\to 0 \Rightarrow \sum x^n$ non conv. unif. su $(-1,1)$

$x \in [-\alpha, \alpha] \subseteq (-1,1) \rightarrow$ dopo dimostro che in questi intervalli converge uniformemente

$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$

CRITERIO DI WEIERSTRASS

$f_n(x)$ def. su I

- $\forall n \ \exists M_n > 0 \quad \forall x\in I \quad |f_n(x)| \le M_n$
- $\sum_{n\ge 0} M_n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n\ge 0} f_n(x)$ converge assolutamente, uniformemente su I

$\left|\sum_{n\ge 0} f_n(x)\right| \le \sum_{n\ge 0} M_n \quad \forall x\in I$

dim.

$0 \le |f_n(x)| \le M_n$; $\sum M_n$ converge $\Rightarrow$ anche $\sum |f_n(x)|$ converge (crit. del confronto). Conv per il crit del confronto $\forall x\in I$

Devo dim che $\sup_{x\in I} |s(x) - s_n(x)| \to 0$ per $n \to +\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 195 di 260

$\sum \frac{1}{x^2+n^2} < 2$, perché so che $\sum \frac{1}{n^2} < 2$

Esempio 3

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^{4n}} \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$\| $$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{x^4}\right)^n$$ è una serie geom di ragione $\frac{1}{x^4}$; converge $\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x^4} < 1$

$\Leftrightarrow x^4 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \quad \begin{pmatrix} o\ x < -1, \text{ma} \\ \notin I \end{pmatrix}$ $\qquad$ sempre

la serie converge punt. su $(1, +\infty)$

la serie non converge su $(0, 1]$

Verificare che conv. unif. su $[2, +\infty)$

x^{4n} è crescente $\qquad x^{4n} \geq 2^{4n} = 16^n$

$$\frac{1}{x^{4n}} \leq \frac{1}{16^n} = \underbrace{\left(\frac{1}{16}\right)^n}_{M_n} \qquad \forall x \geq 2$$

$\sum \left(\frac{1}{16}\right)^n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^{4n}}$ converge unif su $[2, +\infty)$ $\qquad$ criterio di Weierstrass

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{x^4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{x^4}}} = \frac{x^4}{x^4-1} \qquad \forall x > 1$$

$\sum t^n$

OSS

Ci sono serie che conv. unif. ma non assolutamente

Esempio 4

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{|x|+n} \qquad 0 \leq \frac{1}{|x|+n} \text{ è definito } \forall x \in \mathbb{R}$$

Conv assolutam ?

$$\left|(-1)^n \frac{1}{|x|+n}\right| = \frac{1}{|x|+n} \sim \frac{1}{n}$$ diverge (serie a term. pos: o converge o diverge) $\Rightarrow \sum \frac{1}{|x|+n}$ diverge

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ la serie non converge assolutamente

$\cancel{\frac{1}{3+n}}$