NUMERO: 1293

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Villois

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc., Prof.Adami

CORSO DI ANALISI 1

Prof. Riccardo Adami riccardo.adami@polito.it

- Lezioni [illegible]
- Esercitazioni [illegible]
- Tutorato
- Portale della didattica
- Testi

- Tabacco e Conuto : Analisi matematica I
- Nicola

Esercizi
- Galligani, Loganà, Mazzone — pochi es con ragionamento
- Demidovič — molti es

Marcellini / Sbordone : esercizi di analisi I 23
Giusti : esercizi

LOGICA

PROPOSIZIONI : affermazioni non ambigue e oggettive

P := Roma è la capitale dell'Italia

Q := Il leone è un pesce

R := La vita è bella (non è una proposizione logica)

- Valore di verità

Assegnarlo significa dire se una prop è vera o falsa

P: Vera
Q: Falsa

- Connettivi logici

TAVOLE DI VERITÀ

1) E

P	Q	P e Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

"E" è simmetrico (P e Q = Q e P)

2) O VEL

P	Q	P o Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Due proposizioni in cui ci sono connettivi logici sono equivalenti se le loro tavole di verità sono uguali

es: P e Q = Q e P

Tutte le proposizioni hanno un valore di verità?

Es: G := G è falsa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 318

$\neg Q \Rightarrow \neg P$: Controinominale di una proposizione

5) Doppia implicazione o equivalenza

$P \Leftrightarrow Q$

Esercizi:

- Trovare un'espressione logica composta da due proposizioni P, Q e connettivi che sia vera quando una e una sola tra P e Q è VERA ("AUT") "o esclusivo"
- Trovare un'espressione logica composta da tre proposizioni P, Q, R e connettivi che sia vera quando almeno 2 proposizioni tra P, Q, R sono vere.
- (Proprietà distributiva)

P o (Q e R) = (P o Q) e (P o R) la "E" sta distribuendo la "O"

PREDICATI

P(x) = "x è la capitale del Guatemala"

↳ proposizione il cui valore di verità non è stato specificato, perchè c'è una variabile

x = variabile

Predicato = proposizione che contiene variabili

$\exists$: quantificatore esistenziale

$\exists!$ x t.c. P(x) è vera

esiste una sola x tale che P(x) è vera

Q(x) = "x+1 è più grande di x"

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall$: quantificatore universale

Osservazione $\underbrace{\neg \forall x}_{\text{non per ogni } x}\ R(x) = \underbrace{\exists\, x}_{\text{esiste almeno una } x},\ \neg R(x)$

[Per negare che tutti soddisfino una proprietà è sufficiente che ce ne sia uno che non la soddisfa]

Osservazione $\neg \exists x\ R(x) = \forall x, \neg R(x)$

N.B. La negazione scambia i quantificatori (esistenziale con universale)

1) $\forall$ n naturale, $\exists$ m naturale m > n VERA

2) $\exists$ m naturale, $\forall$ n naturale m > n FALSA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 318

l'ordine con cui si elencano gli elementi non è importante. È un elenco, non un elenco ordinato.

OSSERVAZIONE

A e B sono uguali se possiedono gli stessi elementi

DEFINIZIONE

A è un sottoinsieme di B
($A \subset B$) se $x \in A \Rightarrow x \in B$

CASO PARTICOLARE: $A \subset A$

Per dire che $A \subset B$ e ci sono elem. di B che $\notin A$ si dice che A è sottoinsieme stretto di B

$B = \{n \in \mathbb{N},\ n$ è divisore di $4\}$

$B \subsetneq A$

Es: confrontare gli insiemi degli x reali / $\operatorname{sen} x = 1$

$A = \{x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen} x = 1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen} x + \cos x = 1\}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 \Rightarrow$
$2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \lor \cos x = 0 \Rightarrow$
$\cos x = \pm 1 \qquad \operatorname{sen} x = \pm 1$

$A \subset B$

- Insieme vuoto $\emptyset$

$x \in \emptyset$ è FALSA $\forall x$.

Naturalmente, $\forall$ insieme A

$\emptyset \subset A$

perché da una premessa FALSA l'implicazione è sempre VERA
($x \in \emptyset$) ($x \in A$)

INSIEME DELLE PARTI

Sia A un insieme

$P(A) = \{B,\ B \subseteq A\}$

un insieme può essere elemento di un altro insieme

Es di insieme?

$X = \{A,\ A \notin A\}$ Domanda: $X \in X$?

esempio di B. Russel

ESERCIZIO $\in$ oppure $\subset$?

$a \in \{a\}$

$\{a\} \subset \{a, b\}$

$\{a\}$ $\in$ / $\subset$ $\{a, \{a\}, b\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 318

Notazioni

$f: A \to B$ insiemi

$x \mapsto f(x)$ elementi

- A: dominio
- B: codominio

Dato $x \in A$, $f(x) \in B$ si dice immagine di x

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}_f A = f(A) = \{ y \in B,\ \exists x \in A,\ f(x) = y \}$

es: $\underbrace{\mathrm{Im} f}$ n° interi compresi tra 32 e 52

↳ insieme degli elementi che sono effettivamente raggiunti dalla funzione
sottoinsieme del codominio

INIETTIVITÀ

$f: A \to B$ è detta iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

condizione necessaria che due punti abbiano la stessa immagine è che siano lo stesso punto

SURIETTIVITÀ

$f: A \to B$ è detta suriettiva se $B = \mathrm{Im} f$

es: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

non è SURIETTIVA, è INIETTIVA

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

è SURIETTIVA e INIETTIVA

BIIETTIVITÀ

$f: A \to B$ è detta biiettiva se è iniettiva e suriettiva

Composizione di funzioni

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

DEF. $g \circ f : A \to C$

$x \mapsto g[f(x)] = ((g \circ f)(x))$

- OSS $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$ e $g \circ f = \mathrm{Id}$ $x \mapsto y \mapsto x$

ossia $(g \circ f)(x) = x$

Allora g si dice INVERSA SINISTRA

Se $B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ e $(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in B$

allora g si dice INVERSA DESTRA di f

Se g è sia inversa destra che inversa sinistra di f, si dice INVERSA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 318

b)

f è suriettiva

Th) f invertibile $\Rightarrow (f \circ g) = Id_B$

Hp) Sia $y \in B \Rightarrow g(y) \in A$

$$f[g(y)] = (f \circ g)(y) = y$$

$\Rightarrow \underbrace{y}_{\text{codominio}} \in Im f$ y: elemento generico di b

$\Rightarrow B \underbrace{\subset}_{\text{contenuto}} Im f$

Ma per definizione

$Im f \subset B$

$\Rightarrow B = Im f \Rightarrow f$ SURIETTIVA

Quindi f è BIIETTIVA

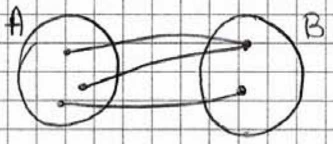
Esercizio

Motivare tramite i diagrammi di Euler-Venn che

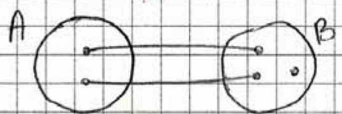
1) f non iniettiva $\Rightarrow$ f non invertibile

2) f non suriettiva $\Rightarrow$ f non invertibile

1)



2)



PRODOTTO DI INSIEMI (o CARTESIANO)

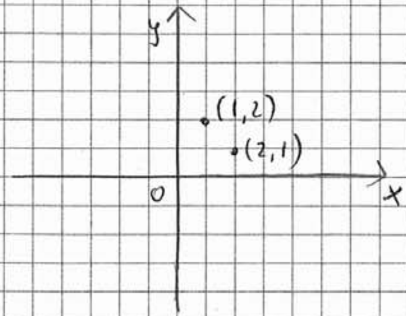
A, B due insiemi

Il "prodotto di insiemi" $A \times B = \{(x,y),\ x \in A,\ y \in B\}$

Es: $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} =$ ______

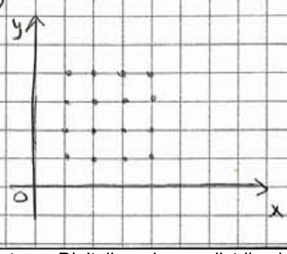
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$



L'ordine è importante,
altrimenti si cambia elemento

Es: Disegnare gli insiemi

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 318

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

1) È definita la SOMMA

proprietà: ASSOCIATIVA $(l+m)+n = l+(m+n)$

COMMUTATIVA $m+n = n+m$

$\exists$ l'elemento neutro della somma: $m+0=m$

$\nexists$ l'inverso rispetto alla somma se $n \neq 0$, ossia $\nexists\, m \in \mathbb{N}$, $n+m=0$

2) È definito il PRODOTTO

$\underbrace{\text{È definito}}$ cioè si può fare l'operazione e il risultato $\in \mathbb{N}$

proprietà: ASSOCIATIVA $(lm)n = l(mn)$

COMMUTATIVA $lm = ml$

$\exists$ l'elemento neutro $l \cdot 1 = l$

$\nexists$ l'inverso se $n \neq 1$, non esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $nm = 1$

3) Proprietà DISTRIBUTIVA

$l(m+n) = ln + lm$

4) $\mathbb{N}$ è totalmente ordinato

$\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, allora $m \leq n$ oppure $m \geq n$ (tutti gli elementi sono confrontabili)

Inoltre, se $m \leq n$ e $n \leq m \Rightarrow n = m$

5) Principio di induzione

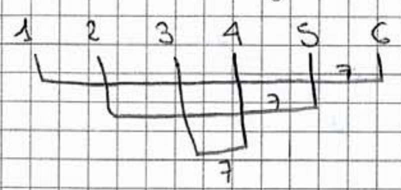
Sia $T \subseteq \mathbb{N}$ tale che:

a) $0 \in T$
b) se $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$

Allora $T = \mathbb{N}$

PROPOSIZIONE

$$1+2+\dots+n = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$



$7 = 6+1 = n+1$

$3 = \frac{6}{2} = \frac{n}{2}$

Dim:

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

a) $0 \in T$
b) Supponiamo che la formula valga per n, ossia che $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
Allora, per la somma dei primi $n+1$ interi, si ha:

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

11

• $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

È l'unico insieme:
1) con somma e prodotto con le stesse proprietà di $\mathbb{Q}$
2) totalmente ordinato e l'ordinamento ha le seguenti proprietà:

a) $\forall x, y, z$, $z \geq 0$

$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$

b) $\forall x, y, z$, $z \leq 0$

$x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$

3) completo

$\sqrt{2} = 1,4142135...$

Definisco $A_- = \{1; 1,4; 1,41; 1,414...\}$

$A_+ = \{2; 1,5; 1,42; 1,415...\}$

$\forall x \in A_-$, $\forall y \in A_+$ $x < \sqrt{2} < y$

Inoltre, A_- e $A_+ \subset \mathbb{Q}$

N.B. $\nexists z \in \mathbb{Q}$ t.c. $\forall x \in A_-$, $\forall y \in A_+$, $x \leq z \leq y$

Se ci fosse un tale $z \in \mathbb{Q}$ allora $z = 1,41...$ avrebbe un espansione decimale ed esso dovrebbe essere $\neq \sqrt{2}$

$\Rightarrow \exists$ una prima cifra da sinistra diversa dalla corrispondente cifra nello sviluppo di $\sqrt{2}$

Supponiamo che tale cifra sia la 5ª decimale

$z = 1,41420...$

(nell'Hp che la 5ª cifra sia < 1)

$A_- = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421...\}$
$\hookrightarrow > z$

$\Rightarrow z$ non è superiore a tutti gli elementi di A_-

Invece nei reali ciò non succede mai.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA o DI SEPARABILITÀ o DI ESISTENZA DELL'ELEMENTO SEPARATORE

$E, F \subset \mathbb{R}$, t.c. $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, $x \leq y$

Allora $\exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E$, $y \in F$ $x \leq z \leq y$

L'elemento separatore può anche e uno dei due sottoinsiemi

Si dimostra che solo $\mathbb{R}$ ha queste proprietà.

Al contrario di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ NON È NUMERABILE

$\mathbb{R}$: potenza del continuo. $\mathbb{R}$ non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

TEOREMA

$E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente

F è l'insieme dei suoi maggioranti

Dim

$\forall x \in E, \ \forall y \in F$

$x \leq y \Rightarrow$ (completezza) $\exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in E, \forall x \in F$ $\underbrace{x \leq z}_{\Downarrow} \leq y$

z è un MAGGIORANTE di E

$\Rightarrow z \in F$

$\left.\begin{array}{l} z \leq y \quad \forall y \in F \\ e \ z \in F \end{array}\right\} z = \min F$

DEF $E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Il minimo z dei maggioranti di E si dice ESTREMO SUPERIORE di E

Per definizione, se $E \subset \mathbb{R}$ non limitato superiormente, l'estremo superiore di E è $+\infty$

Si indica $\sup E$, $\sup x$ con $x \in E$

Densità dei razionali

I razionali sono densi nei reali

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y$

$\exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q < y$

Riassunto

$E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente

F = maggioranti di E

$\exists \min F =: \sup E$

Sup e Max

1) $\max E \in E$
Sup E può non appartenere a E

ES $[0,1) = E$

$\sup E = 1$ Max E non esiste

2) Non tutti gli insiemi limitati superiormente hanno max, ma tutti hanno sup.

3) $E = [0,1]$ $\quad \underset{\sup E}{\overset{\max E = 1}{\shortparallel}}$

$\exists \max E \Rightarrow \max E = \sup E$

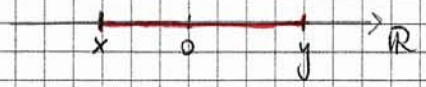
Es $E = \left\{ x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Osserviamo $n < n+1 \iff \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ 1 è un maggiorante

$\Rightarrow$ E è limitato superiormente

modulo: distanza di x da 0

$|x-y|$ = "distanza tra i punti x e y della retta reale"



Proprietà del modulo

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (o "di Minkowski")

- $|x+y| \le |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

triangolare perché se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono vettori, questa disuguaglianza vale per le vettore somma

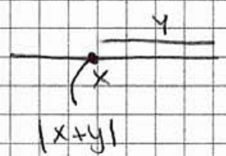
Dim $-|x| \le x \le |x|$ e $-|y| \le y \le |y|$

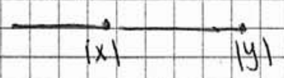
$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$

$|x+y| \le |x|+|y|$

c.v.d.

Es: $x>0$





- $|x-y| \le |x| + |y|$

$\quad \Vert$

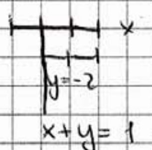
$|x+(-y)| \le |x| + |-y| =$

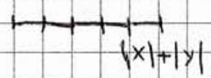
$= |x| + |y|$

Es $x=3 \quad y=-2$

$x+y=1$

$|x|+|y| = |3|+|-2| = 3+2 = 5$





- $|xy| = |x||y| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$|-x| = |-1||x| = |x|$

- $\big||x|-|y|\big| \le |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Dim $|x| = |y+(x-y)| \le |y| + |x-y| \Rightarrow$ perché $|x-y| = |-1(y-x)| = |y-x|$

$|x|-|y| \le |x-y|$

$|y| = |x+(y-x)| \le |x| + |y-x| = |x| + |x-y| \Rightarrow |y|-|x| \le |x-y|$

$|x|-|y| \ge -|x-y|$

allora $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 318

Scegliamo $\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

$n > \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$

ES: dimostrare che la successione $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ converge a ?

ES: Trovare un $x_0 \in (0,1)$ tale che la successione di Bernoulli costruita a partire da x_0 converga a un qualche ℓ

Def:

Una successione $\{x_n\}$ si dice CONVERGENTE se $\exists\ \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\{x_n\}$ converge a ℓ

Notazione

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$

oppure $x_n \to \ell$

ℓ si dice limite della successione $\{x_n\}$

Si scrive

$\ell = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim x_n$ (nelle successioni è sottointeso che è per $n \to \infty$)

TEOREMA Unicità del limite

Il limite di una successione convergente è unico

LEMMA

$x \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon$ allora $x = 0$

Dim: Supponiamo che $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$ scelgo $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$

Quindi $|x| < \varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0 \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ ASSURDO

Dim (unicità del limite): supponiamo che ci siano 2 limiti

Siano ℓ, ℓ' t.c.

$\lim x_n = \ell$
$\lim x_n = \ell'$

Sia $\varepsilon > 0$

$\exists\ n_1$ t.c. $n > n_1 \Rightarrow |x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\ n_2$ t.c. $n > n_2 \Rightarrow |x_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sia $n > \bar{n} = \max(n_1, n_2)$

Allora,

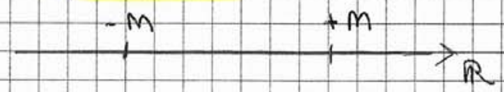
$$|\ell - \ell'| = |\ell - x_n + x_n - \ell'| \leq |\ell - x_n| + |x_n - \ell'| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}_{= \varepsilon}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 318

DEF

Una successione $\{x_n\}$ si dice LIMITATA se

$\exists M>0$ t.c. $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$



OSS. • $\{x_n\}$ limitata $\not\Rightarrow$ $\{x_n\}$ convergente

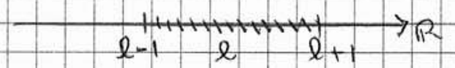
es: $x_n = (-1)^n$

• x_n convergente $\Rightarrow$ x_n limitata → teorema della limitatezza

DIM

scelto $\varepsilon = 1$

x_n convergente $\Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \ell| < 1$



← da $\bar{n}$ in poi

(gli elementi prima $\notin (|\ell-1|, |\ell+1|)$, ma gli elementi prima sono finiti e allora limitati

Se $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n| \leq \max(|\ell-1|, |\ell+1|)$

Se $n \leq \bar{n} \Rightarrow |x_n| \leq \max\limits_{0 \leq n \leq \bar{n}} |x_n|$

Tale massimo esiste perchè $\{|x_0|, \dots, |x_{\bar{n}}|\}$ è FINITO

Quindi, definito
$$M := \max\{|x_0|, \dots, |x_{\bar{n}}|, |\ell-1|, |\ell+1|\}$$

si ha $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M$

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI o del confronto

3 successioni x_n, y_n, z_n t.c.

$y_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$z_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$y_n \leq x_n \leq z_n$ definitivamente

ogni elem. di y_n è maggiorato da ciascun elem. corrispondente di x_n

Allora, $x_n \to \ell \quad (\ell \in \mathbb{R} \vee \ell = \pm\infty)$

DIM. sia $\varepsilon > 0$ arbitrario

$y_n \to \ell \Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow \ell - \varepsilon < y_n < \ell + \varepsilon$

$z_n \to \ell \Rightarrow \exists \bar{m}$ t.c. $n > \bar{m} \Rightarrow \ell - \varepsilon < z_n < \ell + \varepsilon$

$n > \nu := \max(\bar{n}, \bar{m})$ → mi

$\ell - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x - \ell| < \varepsilon \Rightarrow x_n \to \ell$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 318

$-\varepsilon < \ell < \varepsilon$ $\quad$ ε è un qualunque numero $>0 \in \mathbb{R}$, allora $\ell = 0$

PROPOSIZIONE 3

$x_n \to \ell \neq 0$, $x_n \neq 0 \ \forall n$

$\Rightarrow z_n = \dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{\ell}$

Dim.

x_n convergente $\Rightarrow$ x_n limitata

$\Rightarrow \exists\, M > 0$ t.c. $|x_n| \leq M$

$\Rightarrow |z_n| \geq \dfrac{1}{M}$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario

$\exists\, \nu$ t.c. $n > \nu \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon'(\varepsilon) > 0$

dove ε' è da determinare

$n > \nu \Rightarrow \left| z_n - \dfrac{1}{\ell} \right| = \left| \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{\ell} \right| = \left| \dfrac{x_n - \ell}{\ell x_n} \right| = \dfrac{1}{|\ell|} \cdot \dfrac{|x_n - \ell|}{|x_n|}$

Compito: $\dfrac{1}{|x_n|} \leq m$ $\quad$ un qualche m

$< \dfrac{m}{|\ell|} \varepsilon'(\varepsilon) < \varepsilon$

Scegliendo $\varepsilon'(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon |\ell|}{2m}$

PROPOSIZIONE 4

$y_n \to k$, $\quad x_n \to \ell \neq 0$, $\quad x_n \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{y_n}{x_n} \to \dfrac{k}{\ell}$

Dim esercizio

Sia $\varepsilon > 0$

$\exists\, \bar{n}_1$ t.c. $n > \bar{n}_1 \Rightarrow |y_n - k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists\, \bar{n}_2$ t.c. $n > \bar{n}_2 \Rightarrow |x_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$n > \nu := \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$

[illegible]

- $x_n \to \pm\infty$

  $\frac{1}{x_n} \to 0$ Dimostro

  Scelto $\varepsilon > 0$, allora per $n > \bar{n}$ $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$

  $\varepsilon = \frac{1}{x_n - 1}$ allora $-\frac{1}{x_n - 1} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{x_n - 1}$

- $x_n \to +\infty$ y_n limitata

  $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$ dim

- $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ dim

  $x_n + y_n \to ?$

  Es $\underset{+\infty}{\sqrt{n+1}} - \underset{-\infty}{\sqrt{n}}$

CASI DI INDETERMINAZIONE

$0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}

SUCCESSIONI MONOTONE → ammettono SEMPRE il limite

DEF.
- Una successione x_n si dice monotona crescente se $x_{n+1} \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Una successione x_n si dice monotona strettamente crescente se $x_{n+1} > x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- monotona decrescente $x_{n+1} \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- monotona strettamente decrescente se $x_{n+1} < x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

TEOREMA

- x_n è monotona crescente $\Rightarrow \lim x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$

In altre parole,

x_n limitata $\Rightarrow \lim x_n = \sup x_n < \infty$

x_n illimitata $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

DIM. ① Supponiamo x_n illimitata

Sia $M > 0 \Rightarrow \exists\, \bar{n}$ t.c. $x_{\bar{n}} > M$ (poiché è illimitata)

Essendo x_n monotona crescente, $n > \bar{n}$

$x_n \geq x_{\bar{n}} > M \Rightarrow x_n \to +\infty$ x_n diverge positivamente

② Supponiamo x_n limitata

$\Rightarrow \sup \{x_n\} = \bar{x} < \infty$

Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di sup, $\exists\, \bar{n}$ t.c. $x_{\bar{n}} > \bar{x} - \varepsilon$ perché $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti

$n > \bar{n} \Rightarrow \underset{\bar{x} \geq}{x_n} > x_{\bar{n}} > \bar{x} - \varepsilon$ $\Rightarrow |\bar{x} - x_n| < \varepsilon \Rightarrow x_n \to \bar{x}^{+}$

$$< \frac{12+3+1}{6} + \underbrace{\sum_{j=4}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}} = \frac{8}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{8}{3} + \frac{1}{2}^{4} \cdot 2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} = 2{,}7916 < \infty$$

$$1 - \frac{k}{n} \leq 1$$

PROGRESSIONE GEOMETRICA

x_n è MONOTONA CRESCENTE e limitata $\Rightarrow$ è convergente e $\lim x_n = e$

OSS: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

PROPOSIZIONE o TEOREMA DI SOSTITUZIONE

$x_n \to l$

$f(x_n) \to f(l)$ se f è continua in l

Es

$x_n = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$ — successione y_n che converge a 0

applico teorema $x_n \to 2^{\lim\left(\frac{1}{n}\right)} = 2^0 = 1$

CONFRONTO TRA INFINITI

x_n, y_n t.c. $y_n \to +\infty$

$y_n \leq x_n$

$\Downarrow$

$x_n \to +\infty$

Es:

- confronto le seguenti successioni positivamente divergenti

$\log n,\ n,\ e^n,\ n!,\ n^n$

$\lim \frac{n^n}{n!} =$

minoro $\frac{n}{2}$ con 1

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \geq n \cdot 1 \cdot 1 = n$$

per il teorema del confronto tra infiniti $\frac{n^n}{n!} \to +\infty$

$$\lim \frac{n!}{e^n} = \frac{\boxed{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{\boxed{e \cdot e} \cdot e \cdot e \ldots e} = \frac{2}{e^2} \cdot \frac{3}{e} \cdot \frac{4}{e} \cdots \frac{n}{e} \geq \frac{2}{e^2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots \frac{n}{e} = \frac{2}{e^3} n \to \infty$$

l'ordine è $\log n,\ n,\ e^n,\ n!,\ n^n$

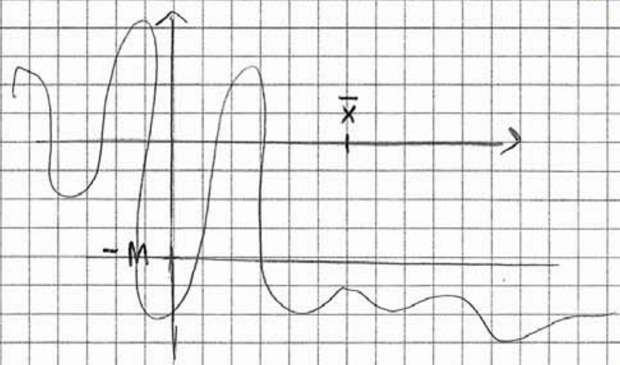
poiché $\frac{n}{\log n} \to \infty \quad \frac{e^n}{n} \to \infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 318

DEF "f negativamente divergente a $+\infty$"

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$\forall M > 0 \quad \exists \bar{x}$ t.c. $x \geq \bar{x} \Rightarrow f(x) < -M$

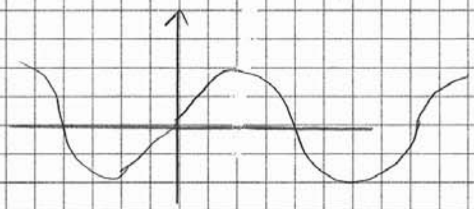


Es: Scrivere le definizioni corrispondenti a

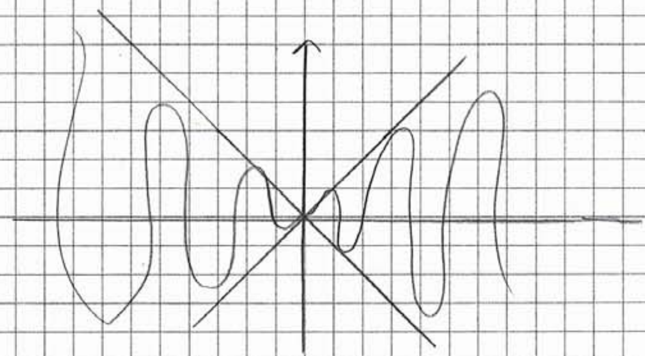
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \bar{x} \ / \ x < \bar{x} \Rightarrow f(x) > M$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists \bar{x} \ / \ x < \bar{x} \Rightarrow f(x) < -M$

Altri comportamenti: <u>OSCILLANTE</u>

$f(x) = \sin x$



$f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$



Limite può essere
- studio di un comportamento asintotico
- studio di un comportamento locale (nel finito)

$x_0 \in \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0 \notin E$

$f: E \to \mathbb{R}$

Hp $\forall \delta > 0$ ⊛

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

In ogni intorno di x_0 cade almeno un punto del dominio meno x_0

se $x_0 \in E$, ma non è necessario

DEF $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$

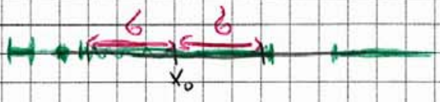
$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è detto INTORNO SFERICO (o "PALLA") di centro x_0 e raggio δ
o SIMMETRICO

DEF **Intorno**:

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno del punto x_0 un qualsiasi insieme che contenga un intorno sferico di centro x_0
$I_\delta(x_0)$, per qualche $\delta > 0$

Notazione

$I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



intorno sferico
intorno
(anche se $\to +\infty$)

Utilizzando la nozione di intorno,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. — "palla bucata" nel centro

$x \in (I_\delta(x_0) \setminus \{0\}) \cap E$

$\Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$ intorno sferico di raggio ε centrato in ℓ

TEOREMA

Confronto tra SUCCESSIONI e FUNZIONI

1. **Teorema della limitatezza**

$x_n \to \ell \Rightarrow x_n$ limitata

$f(x) \to \ell, \quad x \to x_0 \quad (x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ $\Rightarrow$ f limitata? NO, ma è LOCALMENTE LIMITATA, ossia

$\exists M > 0, \delta > 0$ t.c. $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow |f(x)| < M$

Es $f(x) \to 0, \quad x \to +\infty$

f non limitata

$\forall M > 0 \quad \exists \tilde{x}$ t.c. $|f(\tilde{x})| > M$

es: $f(x) = \frac{1}{x}$

Dim caso $x_0 \in \mathbb{R}$

$\exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| < 1$

$\forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1$

Es: $x_0 = +\infty$ a casa. Dimostrare che è definitivam. limitata

Altra def. di limite

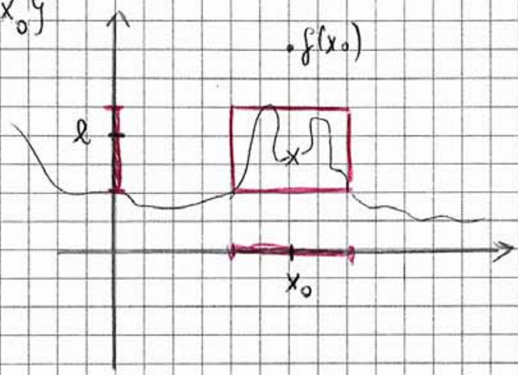
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$\iff$

$\forall$ V intorno di ℓ $\exists$ U intorno di x_0

t.c. $f(x) \in V$

$\forall x \in [U \cap E] \setminus \{x_0\}$



Intorno di $+\infty$

$I_M(+\infty) = (M, +\infty)$, $M > 0$

U si dice intorno del "punto $+\infty$" se contiene $I_M(+\infty)$ per qualche $M>0$

Tutti i punti a dx di M sono parte dell'intorno, magari ce ne sono anche a sx di M

Intorno di $-\infty$

U si dice intorno di $-\infty$ se

$U \supset (-\infty, -M)$ per qualche $M>0$

contiene

basta che ce ne sia uno

Proprietà degli intorni

1) L'unione di un numero arbitrario di intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0

Dim.

$\{U_\alpha\}_\alpha$ una famiglia di intorni di x_0

$U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ U = l'unione su α di tutti gli α

$\to U \supset U_{\bar\alpha}$ con $\bar\alpha$ fissato, ma a sua volta $U_{\bar\alpha} \supset I_\delta(x_0)$ per qualche δ

$\to U \supset I_\delta(x_0) \Rightarrow$ U è un intorno

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 318

LIMITE DESTRO e LIMITE SINISTRO

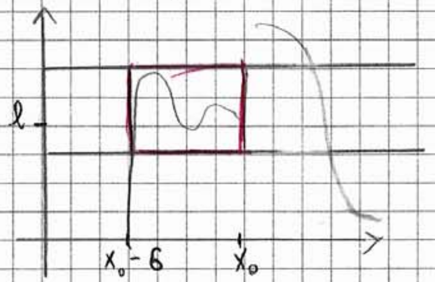
Def

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

x tende a x_0 da sx

dove $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\forall V$ intorno di l, $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in E$, $x_0 - \delta < x < x_0$



Def

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

$\forall V$ intorno di l $\exists\, \delta > 0$ / $f(x) \in V$, $x_0 < x < x_0 + \delta$

TEOREMA con $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff l = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Dim.

1. Implicazione diretta ($\Rightarrow$)

hp) Sia V un intorno di l

$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in E$, $0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ oppure $x_0 < x < x_0 + \delta$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

2. Implicazione inversa ($\Leftarrow$)

hp) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

Sia V un intorno di l

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Rightarrow \exists\, \delta^- > 0$ t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in E$ / $x_0 - \delta^- < x < x_0$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Rightarrow \exists\, \delta^+ > 0$ t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in E$ / $x_0 < x < x_0 + \delta^+$

δ: min (δ^-, δ^+)

$x_n \to x_0 \Rightarrow \exists\ \bar{m}$ t.c.

$n > \bar{n} \Rightarrow$ ~~$|x_n - x_0|$~~

$0 < |x_n - x_0| < \delta$ perchè per Hp $x_n \neq x_0$

$\Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{= y_n} \in V$

2) Implicazione inversa

Dim. per assurdo $(F_1 \to F_2)$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ è falso

$\exists\ \bar{\varepsilon} > 0 \ / \ \forall \delta > 0 \quad \exists x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta \ / \ |f(x) - l| \geq \bar{\varepsilon}$

In particolare

$\exists x_n \in E \ / \ 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{m}$ e $|f(x_n) - l| \geq \bar{\varepsilon}$

Considero la successione $\{x_m\}$

1) x_n converge a x_0

$x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$

Sia $\eta > 0$, $\bar{n} = \left[\frac{1}{\eta}\right] + 1$

se $n > \bar{n} \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{\bar{m}} < \eta$ ho dimostrato che $x_n \to x_0$

2) $f(x_n) \not\to l$

Infatti, $|f(x_n) - l| \geq \bar{\varepsilon} \quad \forall n$

quindi non può convergere c.v.d.

Es

$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = ?$ non esiste nè $\lim_{sx}$ nè $\lim_{dx}$

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow \sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi) = 0$

$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \Rightarrow \sin \frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

allora il limite $\nexists$

Funzione monotona

$f: E \to \mathbb{R}$

1) Si dice monotona crescente se $\forall x, y \in E,\ x \leq y$ si ha $f(x) \leq f(y)$

2) monotona strettamente crescente se $\forall x, y \in E,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 318

TEOREMA DEL CONFRONTO (al finito) — sottocaso del teorema dei due carabinieri, c'è un solo carabiniere

Sia V un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$

$f, g := V \to \mathbb{R}$

$\forall x \in V,\ f(x) \leq g(x)$

$f(x) \to l$ per $x \to x_0$

$g(x) \to m,\ x \to x_0$

$\Rightarrow l \leq m$

OSS $f(x) \leq g(x)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$l \leq m$

$f(x) < g(x)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$l \leq m$

es $f(x) = \frac{1}{2x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ con $x > 0$

$f(x) = \frac{1}{2} g(x) < g(x)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad 0$

TEOREMA DEL CONFRONTO (all'infinito) — x_0 può essere finito, il limite è infinito

$\forall x \in V \quad f(x) \leq g(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Algebra dei limiti

$E \subseteq \mathbb{R} \quad f, g: E \to \mathbb{R}$

x_0 punto di accumulazione per E

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\quad$ l e k non sono infiniti

$\lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$

Allora, $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + k$

DIM

Sia $\varepsilon > 0$

$f(x) \to l$ per $x \to x_0 \Rightarrow$

$\exists\, \delta > 0 \,/\, |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in E \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta$

$$x_n' = \frac{2}{(4n+3)\pi} > 0$$

$$\sin \frac{1}{x_n'} = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right) = -1$$

$$\frac{e^{x_n'}}{x_n' \sin \frac{1}{x_n'}} \to -\infty$$

2 successioni entrambe convergenti a 0 ma una $\to +\infty$, l'altra a $-\infty$ e stanno tutte due a dx

il limite $\nexists$

- $\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$

TEOREMA limitata · $\sigma = \sigma$ infinitesima infinitesima

$f: E \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di E (non è detto che $x_0 \in E$)

$f: E \to \mathbb{R}$

limitato in un intorno V di x_0 (non è detto che abbia limite)

cioè $\forall x \in V \cap E$, $|f(x)| \leq M$

$\exists M > 0$, $\to$? se $M < 0$?

$g: E \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$\Downarrow$

Th) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

Dim

$\forall x \in (V \cap E) \setminus \{x_0\}$

$$-M g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M g(x)$$

$\downarrow$ 0 $\quad \downarrow$ 0 $\quad \downarrow$ 0

Funzione infinitesima = che tende a 0

- $tg x \in C^0(\mathbb{R}) \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$
- $cotg x$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in C^0(\mathbb{R})$
  iperbolica
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \in C^0(\mathbb{R})$
- $tgh = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in C^0(\mathbb{R})$

TEOREMA DI SOSTITUZIONE o COMPOSIZIONE (4.15)

anche sotto composizione di 2 funzioni il limite fa quello che ci si aspetta

$E \subset \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per E

$f: E \to \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$, $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$g: V \to \mathbb{R}$ dove V è un intorno di l

g è continua in l se $l \in \mathbb{R}$

Allora, $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(l)$

Dim.

Sia W un intorno di $g(l)$

g continua in $l \Rightarrow \exists\, V'$ un intorno di l / $g(y) \in W \quad \forall y \in V'$

ma $f(x) \to l$, $x \to x_0$ — def di limite

$\exists$ un intorno U di x_0 /

$f(x) \in V' \quad \forall x \in (U \cap E) \setminus \{x_0\}$

Quindi,

$x \in (U \cap E) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V' \Rightarrow (g \circ f)(x) \in W$

Per ogni intorno ne trovo uno che mi porta nell'intorno di partenza

Es:

$h(x) = e^{x^2} \quad \lim_{x \to 0} h(x) = \lim (g \circ f)(x) = \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} e^y = 1$

$f(x) := x^2$

$g(y) := e^y$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 318

Dim $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$

Possiamo restringerci a $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (se no dovrebbe essere $x \neq \pi$)

$$\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}} = \Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\Big)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Es $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

intervallo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} \cdot \frac{x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{1+\cos x}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

3) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Sia $x_n \to +\infty$ una successione

$x_n = [x_n] + \alpha_n$ mantissa $\quad 0 \leq \alpha_n < 1$

Quindi $[x_n] \leq x_n < [x_n]+1$

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)^{[x_n]+\alpha_n}$$

Inoltre, $[x_n] \to +\infty$

Infatti

$$\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x_n - 1} < \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{[x_n]} \leq \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x_n}$$

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)^{[x_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)^{\alpha_n} =$$

Ora,

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e^{\log\left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)^{\alpha_n}} = e^{\overbrace{\alpha_n}^{\text{limitata}} \cdot \overbrace{\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)}_{\to 0}}^{\text{infinitesimo}}} \to e^0 = 1$$

limitata · infinitesimo = infinitesimo

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+\alpha_n}\right)^{[x_n]} \leq \boxed{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}} \ (*)$$

l'elevamento per un n° naturale conserva l'ordinamento

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \log_e e = 1$ fare $\frac{a^x - 1}{x}$

$e^x = 1 + y$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{\alpha e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} \cdot \frac{y}{e^y - 1} = \alpha$

1

$1 + x = e^y$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{\log a}} = \log a$

$y = a^x + 1$

FUNZIONI CONTINUE SU INTERVALLI

1) $f: E\ (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in E$, f continua in x_0 se

$\forall V$ intorno di $f(x_0)$
$\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap E$

equivalentemente:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ / \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in E$ t.c. $0 \leq |x - x_0| < \delta$

le successioni sono funzioni continue? **Sì**

Es $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

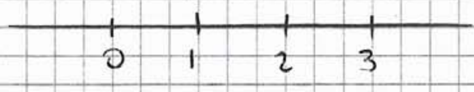
$n \mapsto x_n = \frac{n}{n+1}$

Domanda: f è continua in 1?

Sia $\varepsilon > 0$. Prendiamo $\delta = \frac{1}{2}$ → non dipende da ε

$x \in \mathbb{N}$ t.c. $|x - 1| < \frac{1}{2}$

$|x - 1| < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$



$\{x \in \mathbb{N} \ / \ |x-1| < \frac{1}{2}\} = \{1\}$

$|f(1) - f(1)| < \varepsilon \qquad 0 < \varepsilon$ ok

la funzione è continua in 1

poi scelgo d, punto medio di $\overline{cb}$ e così via

avendo sempre per ogni intervallo f(estremo sx) < 0 e f(estremo dx) > 0

Dim

$x_0 := a$, $y_0 := b$

$f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ il teorema è dimostrato $\bar{x} = \frac{x_0+y_0}{2}$

$f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) > 0 \Rightarrow$ definisco $x_1 = a \ (= x_0)$ e $y_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$

Quindi, $f(x_1) < 0$, $f(y_1) > 0$

$f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ definisco $x_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$ e $y_1 = y_0 = b$

Quindi, $f(x_1) < 0$, $f(y_1) > 0$

N.B.

$$\underbrace{x_0 \leq x_1}_{\substack{f(x_0)<0 \\ f(x_1)<0}} < \underbrace{y_1 \leq y_0}_{\substack{f(y_1)>0 \\ f(y_0)>0}}$$

DIM per INDUZIONE:

supponiamo di avere definito

$$\underbrace{x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n}_{f(x_i)<0 \ \forall i} < y_n \leq y_{n-1} \leq \ldots \leq y_0 \qquad f(y_i) > 0 \ \forall i$$

Consideriamo

$\frac{x_n+y_n}{2}$

$f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x_n+y_n}{2}$

$f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$

$f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) < 0 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, \quad y_{n+1} = y_n$

In ogni caso,

$f(x_{n+1}) < 0$

$f(y_{n+1}) > 0$

$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 318

COROLLARIO 1

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$

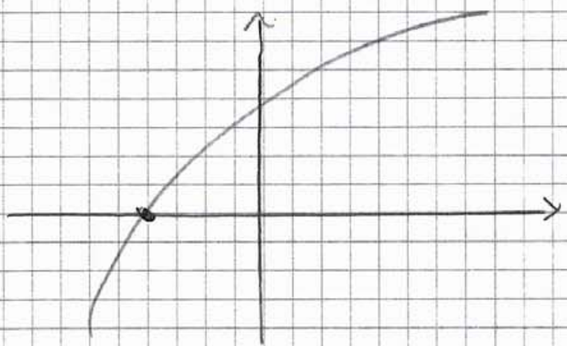
continua

$\lim_{x \to a^+} f(x) < 0$ può anche essere $-\infty$

$\lim_{x \to b^-} f(x) > 0$ può anche essere $+\infty$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b) \ / \ f(\bar{x}) = 0$

Es:



Dim: Teorema permanenza del segno

OSS vale anche per $a = -\infty$ oppure $b = +\infty$,

oppure $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ oppure $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

COROLLARIO 2

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$f(a) > 0, \quad f(b) < 0$

$\exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$

COROLLARIO 3

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

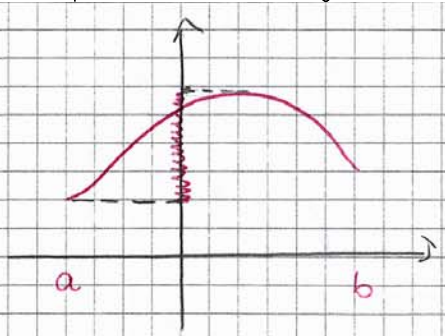
$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$f(a) > g(a)$

$f(b) < g(b)$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \ / \ f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 318



Es $f: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ — aperto

$x \mapsto \sin x$

$Im f = [-1, 1]$ — chiuso

$g: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ — aperto

$x \mapsto \cos x$

$Im g = [-1; 1)$ — semiaperto

$h: (0, \pi) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$

$Im h = (-1, 1)$

Se l'intervallo di partenza è aperto, non so se l'intervallo di Imf è aperto, chiuso e semiaperto

Teorema di Weierstrass

$f: \underbrace{[a, b]}_{\text{chiuso e limitato}} \to \mathbb{R}$

chiuso e limitato = compatto

$\Rightarrow Im f = [\min f, \max f]$

Sol: $(p \setminus q) \cup (q \setminus p)$

$(p \cap \bar{q}) \cup (q \cap \bar{p})$

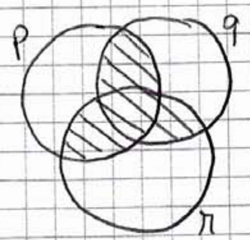
complementare di q

notazione logica: $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P$ e $Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

2) p: insieme di verità di P
q: insieme di verità di Q
r: insieme di verità di R



$(p \cap q) \cup (q \cap r) \cup (p \cap r)$

Sol: $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \wedge R$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

- Quantificatori:

$\forall$ "per ogni"
$\exists$ "esiste almeno un"

$(\forall \exists,\ p(x))$

P: "Tutti i multipli di 2 sono pari"

($\forall x \in \mathbb{N}$, se x è un multiplo di 2 allora è pari

"Qualche numero è primo"

($\exists x$: x è primo)

1) $(\forall x, p(x)) \rightarrow$ negazione $\neg(\forall x, p(x))$

$\Updownarrow$

$(\exists x, \neg p(x))$

p(x) = "indossare la cravatta alla festa"

Non per ogni uomo presente alla festa, p(x)

Esiste almeno un uomo che, $\neg P(x)$

2) $(\exists x, p(x)) \rightarrow$ negazione $\neg(\exists x, p(x))$

$\Updownarrow$

$(\forall x, \neg P(x))$

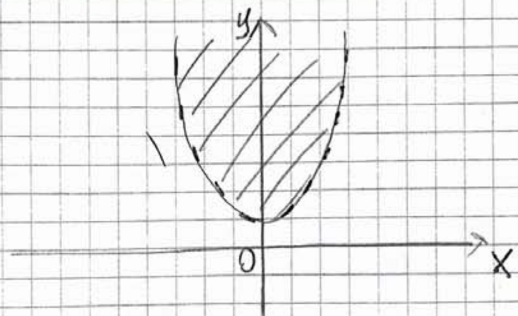
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 318

4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 1\}$

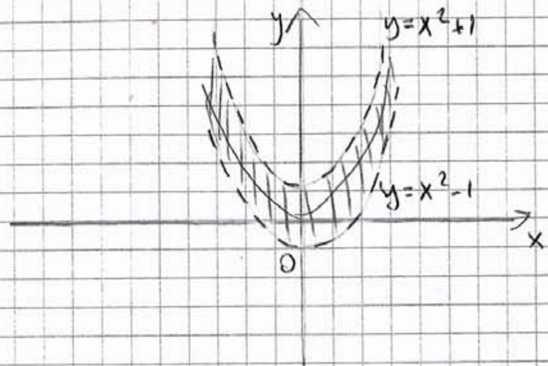
$y - x^2 > 1$

$y > x^2 + 1$

$y = x^2 + 1$



5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x^2| \cancel{<} 1\}$



$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ y - x^2 \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y - x^2 < 0 \\ -y + x^2 \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ y < x^2 + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y - x^2 < 0 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} y > x^2 - 1 \\ y < x^2 + 1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} y \geq x^2 \\ y < x^2 \end{matrix} \vee \}$

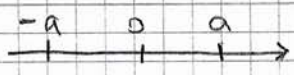
$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$. per convenzione l'= è con >

$|f(x)| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>es</u>

$|x| \leq a \quad a > 0$

$\begin{cases} x \leq a & x \geq 0 \quad \cup \\ x > -a & x \cancel{<} 0 \end{cases} \Rightarrow$



$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

<u>es</u>: $f(x) = |x+1| - |x-1|$

$f(x) = \begin{cases} x+1-(x-1) & \text{se } x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \\ x+1+(x-1) & \text{se } x+1 \geq 0 \wedge x-1 < 0 \\ -(x+1)-(x-1) & \text{se } x+1 < 0 \wedge x-1 \geq 0 \\ -(x+1)+(x-1) & \text{se } x+1 < 0 \wedge x-1 < 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -2x & \nexists x \in \mathbb{R} \\ -2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} -1 \le x < 1 \\ 1-x+1 \le |1-x-1| \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 1 \\ 2-x \le |x| \end{cases}$ $\begin{cases} |x|+x \ge 2 \end{cases}$

(B₁) $\begin{cases} -1 \le x < 1 \\ x \ge 0 \\ 2x \ge 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 1 \\ x \ge 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$ $\emptyset$

(B₂) $\begin{cases} -1 \le x < 1 \\ x < 0 \\ -x+x \ge 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 1 \\ x < 0 \\ 0 \ge 2 \end{cases}$ imposs $\emptyset$

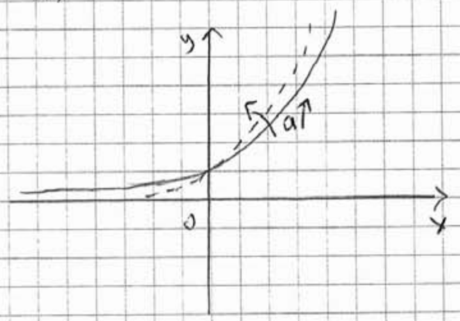
(C) $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le |x| \end{cases} \Rightarrow x \ge 1$

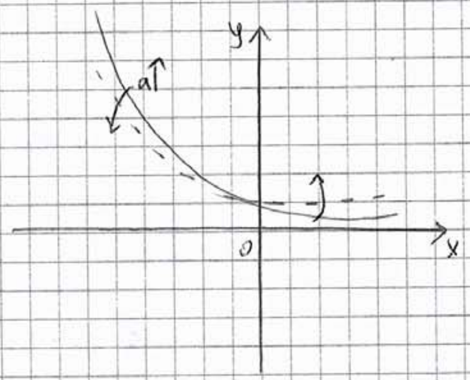
Sol: $x \ge 1$

ESPONENZIALE

$f(x) = a^x$

$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$





PROPRIETÀ POTENZE

$a, b > 0$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$(a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

LOGARITMO

$f(x) = \log_a x \qquad a > 0,\ a \ne 1,\ x > 0$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

- $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 318

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log \sqrt[n]{n^b}} = \lim_{n\to+\infty} e^{b\underbrace{\left(\frac{\log n}{n}\right)}_{\to 0}} = e^0 = 1 \qquad \forall b \in \mathbb{R}$$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad \forall b>0$

Es

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\left(3-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 3$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2}{(n+2)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2}{n^2+4+4n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n}\right)} = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\cancel{\frac{(-1)^n}{n}}\right)}{\cancel{n}\left(1-\cancel{\frac{(-1)^n}{n}}\right)} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10^{10}+(-1)^n}{10^{10}-(-1)^n} = \nexists \quad \text{la funzione oscilla}$$

DIMOSTRARE PER INDUZIONE

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

- Dimostro che sia vera per $n_0 = 1$

$$\frac{1}{1} \leq \frac{1}{1} \quad \text{Vero}$$

- $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{(n+1)}\,n!}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} = \frac{n!}{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n} = \frac{n!}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

la successione $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettam. crescente e $2 \leq x_n < 3$

allora $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \quad \forall n \geq 1$

perché per Hp $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\frac{n!}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n!}{2\,n^n} \leq \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2^n}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 318

$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^m = \lim_{n\to+\infty} e^m = +\infty$ per il teorema di sostituzione

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}-3}{3^n+1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

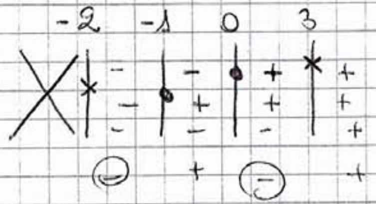
$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\cdot 2-3}{3^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\left(2-\cancel{\frac{3}{2^n}}\right)}{3^n\left(1+\cancel{\frac{1}{3^n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

QUIZ

1) $\frac{x\log(x+2)}{x-3} \leq 0$

$$\begin{cases} x \neq 3 \\ x+2>0 \\ \frac{x\log(x+2)}{x-3} \leq 0 \end{cases}$$

$\log(x+2) \geq 0 \Rightarrow x+2 \geq 1 \Rightarrow x \geq -1$



3.2) $P(P(P(\emptyset)))$

$P(\emptyset) = \underbrace{\{\emptyset\}}_{A_1}$

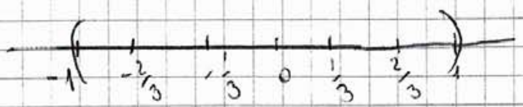
$P(A_1) = \{\emptyset, A_1\} = \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{A_2}$

$P(A_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{A_2}\}$

5.2) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \left[-1+\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right]$

$A_n = \left[-1+\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right] \quad m \geq 1$

$A_1 = [0] \quad A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad A_3 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$



Sol: $(-1; 1)$

N.B.

$\lim_{n\to+\infty} 1^m = 1$ perché non c'è qualcosa che tende a 1, ma c'è 1

$\lim_{n\to+\infty} (a_m)^n = ?$ perché $a_m \to 1$
$m \to +\infty$

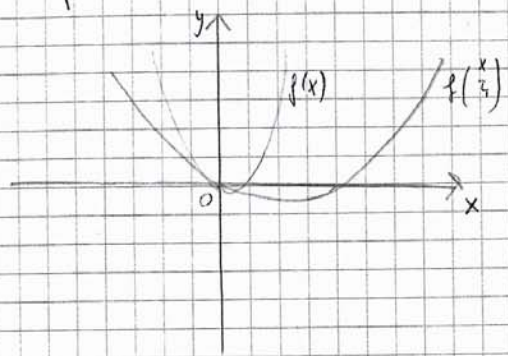
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 318

$f\left(\frac{x}{4}\right)$ $\quad x=4 \to z=1$

$z=\frac{x}{4} \quad f(z)$

Divido per $k>1 \Rightarrow$ dilatazione
Moltiplico per $k>1 \Rightarrow$ contrazione

$f\left(\frac{x}{4}\right)$

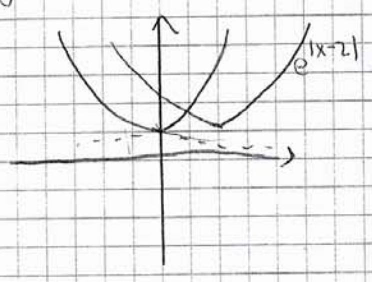


Determino $\text{dom} f$, $\text{im} f$, Γf

$f(x)=e^{|x-2|}$ $\quad f(x)=\begin{cases} e^{x-2} & x-2\geq 0 \\ e^{2-x} & x-2<0 \end{cases}$

$\text{dom} f=\mathbb{R}$

$y=x-2 \quad e^{|y|}$



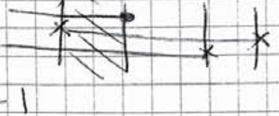
$\text{im} f=[1;+\infty)$

- $f(x)=\log(2-|x|)$

determino $f^{-1}([0,-\infty))$
controimmagine

$\begin{cases}\log(2-|x|)\leq 0 \\ 2-|x|>0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\log(2-x)\leq 0 \\ |x|>2 \\ x\geq 0\end{cases} \vee \begin{cases}\log(2+x)\leq 0 \\ -2<x<2 \\ x<0\end{cases}$

$\begin{cases}2-x\leq 1 \\ -2<x<2 \\ x\geq 0\end{cases} \vee \begin{cases}2+x\leq 1 \\ -2<x<2 \\ x<0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x\geq 1 \\ -2<x<2 \\ x\geq 0\end{cases} \vee \begin{cases}x\leq -1 \\ -2<x<2 \\ x<0\end{cases}$



$1\leq x<2 \vee -2<x\leq -1$

Sol: $x\in(-2,-1]\cup[1,2)$

$f(x)=\begin{cases}\log(2-x) & x\geq 0 \\ \log(x+2 & x<0\end{cases}$

$f(x) = \sqrt{|2-x| + |x-3| - 1}$

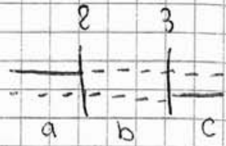
$f^{-1}([0,2])$ controimmagine

$0 \le \sqrt{|2-x| + |x-3| - 1} \le 2$

$\begin{cases} |2-x| + |x-3| - 1 \ge 0 \\ \sqrt{|2-x| + |x-3| - 1} \le 2 \end{cases}$ essendo ≥ 0

$2-x \ge 0 \quad x \le 2$

$x-3 \ge 0 \quad x \ge 3$



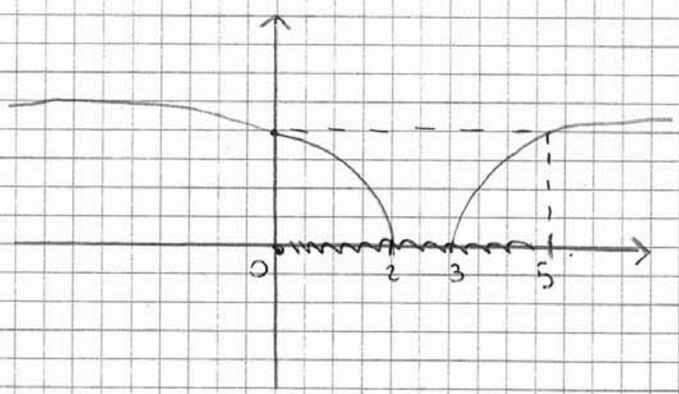
a $\begin{cases} x \le 2 \\ \sqrt{2-x-x+3-1} \ge 0 \\ \sqrt{2-x-x+3-1} \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2 \\ \sqrt{4-2x} \ge 0 \\ \sqrt{4-2x} \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2 \\ 4-2x \ge 0 \\ 4-2x \le 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2 \\ x \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$ $0 \le x \le 2$

b $\begin{cases} 2 < x \le 3 \\ \sqrt{x-2-x+3-1} \ge 0 \quad \text{Vero} \\ \sqrt{0} \le 2 \quad \text{Vero} \end{cases}$ $2 < x \le 3$

c $\begin{cases} x > 3 \\ \sqrt{x-2+x-3-1} \ge 0 \\ \sqrt{2x-6} \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ 2x-6 \ge 0 \\ 2x-6 \le 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x \ge 3 \\ x \le 5 \end{cases}$ $3 < x \le 5$

Sol: $x \in [0,5]$ controimmagine dell'intervallo $[0,2]$ attraverso la funzione

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-2x} & x \le 2 \\ 0 & 2 < x \le 3 \\ \sqrt{2x-6} & x > 3 \end{cases}$



$f^{-1}([0,2]) = [0,5]$

Sia $A \subset \text{dom} f$

$A \subseteq \underbrace{f^{-1}(f(A))}_{\text{potenzialmente è} > A}$

es: $f(x) = \sqrt{|2-x| + |x-3| - 1}$

$A = [0,2] \subset X$

$f(A) = B = [0,2] \subset Y$

$f^{-1}(B) = f^{-1}([0,2]) = [0,5]$ $\quad A \subset [0,5]$

PROPRIETÀ COMPOSIZIONE di FUNZIONI

- $f \circ g \neq g \circ f$
- f, g monotone concordi $\Rightarrow$ $g \circ f$ monotona crescente
- f, g monotone discordi $\Rightarrow$ $g \circ f$ monotona decrescente
- f, g iniettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ iniettiva
- f pari, g dispari $\quad f \circ g$ PARI $\quad g \circ f$ PARI

DIMOSTRAZIONE

$f \circ g = f(g(x))$

$f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) \Rightarrow$ PARI

$g \circ f = g(f(x))$

$g(f(x)) = g(f(-x)) \Rightarrow$ PARI

ES

$f(x) = x^2 + x - 2 \qquad g(y) = \log(1-2y)$

dom $g \circ f$
im $g \circ f$

dom $f(x) = \mathbb{R} \qquad$ im $f(x) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

V parabola $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

dom $g = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \qquad$ im $g = \mathbb{R}$

im $f \cap$ dom $g = \left[-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$

dom $g \circ f = f^{-1}\left[-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$ controimmagine attraverso f

$-\frac{9}{4} < x^2 + x - 2 < \frac{1}{2}$ ma $x^2 + x - 2 > -\frac{9}{4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora risolvo solo:

$x^2 + x - 2 < \frac{1}{2} \qquad x^2 + x - \frac{5}{2} < 0 \qquad 2x^2 + 2x - 5 < 0$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+10}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-1-\sqrt{11}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Es

- $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1} = [0 \cdot \infty]$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{1/3}} = \lim \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^{1/3}} = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+5x+6} - x = [\infty - \infty]$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+6} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+5x+6}+x}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+5x+6-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \frac{5}{2}$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right) \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2+x}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} =$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2-4x^2-x}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{2x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}} =$

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)} = -\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{2x - x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(2-\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

- $\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$

$y = \frac{1}{x} \rightarrow f(x)$

sen y : continua nel suo dominio
0 ∈ dominio
→ posso applicare sostituz

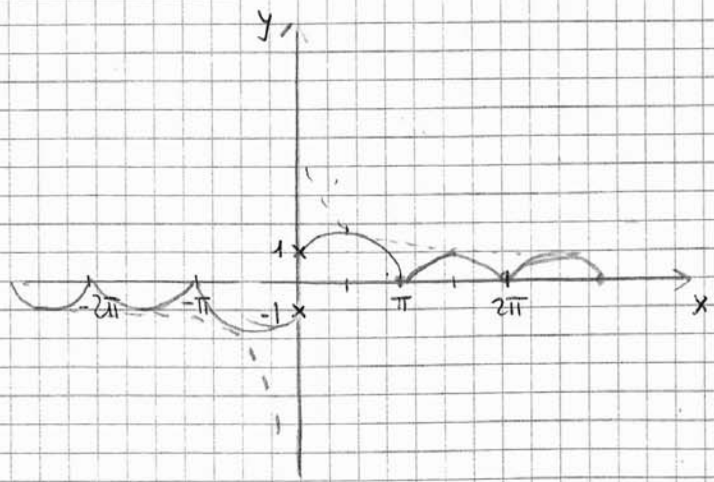
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{2x}{2x} \cdot \frac{3x}{3x} = \frac{3}{2}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 2$

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-1}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{\pi}{2} - x$

$f(x) = \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$



dom $f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$|\operatorname{sen} x| \leq 1$

se $x > 0$

$\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

$0 \leq \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ — carabinieri

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

se $x < 0$

$|\operatorname{sen} x| \leq 1$

$\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x} \geq \dfrac{1}{x}$

se $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$|\operatorname{sen} x| = 1 \qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \operatorname{sen} x \geq 0 \\ -\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \operatorname{sen} x < 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(\cos x)}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\log(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1}}_{①} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{②}$$

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1} = 1$

$z = \cos x - 1 \qquad\qquad \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\log(1+z)}{z} = 1$

se $x \to 0 \qquad z \to 0$

② $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1-\cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

allora $\lim\limits_{x \to 0}$ ①·② $= -\dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(x+x^2)}{\log x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(x(1+x))}{\log x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{\log x} + \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(1+x)}{\log x} \cdot \dfrac{x}{x}$ $\to 0$

$= 1$

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}x - \operatorname{tg}x}{\cos x} & x\geq 0 \end{cases}$$

ma funziona anche per $Ke^{\frac{1}{x}}$ con $x<0$ $\forall K \in \mathbb{R}$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{tg}x}{\cos x} =$

Dimostro che $\nexists$ limite

$a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$b_k = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} f(a_k) = \frac{1-\infty}{0^+} = -\infty$ per $\frac{\pi}{2}^-$

per $\frac{\pi}{2}^+$: $\frac{1+\infty}{0^-} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} f(b_k) = \frac{-1+\infty}{0^+} = +\infty$ per $\frac{3}{2}\pi^+$

per il teorema di unicità del limite, siccome lim non è unico, allora $\nexists$ lim

- $$f(x) = \begin{cases} \log(x+\beta^2) & x>0 \\ \dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} & x<0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / $f(x)$ sia continua

dom $f(x) = \mathbb{R}$

per verificare la continuità studio lo 0

$\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 1$

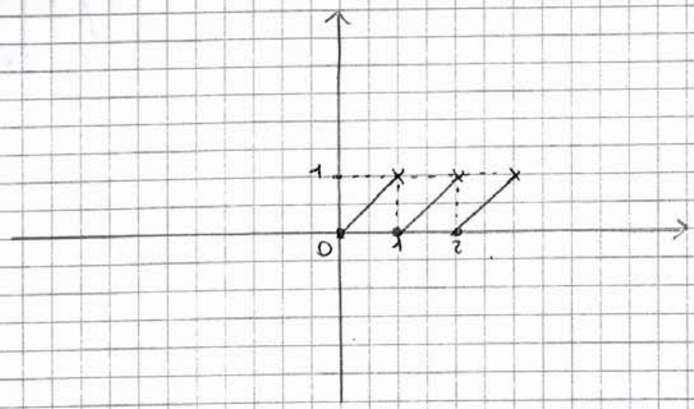
$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \log(x+\beta^2) = \log(\beta^2)$

$\log\beta^2 = 1 \qquad \beta^2 = e \quad |\beta| = \sqrt{e} \qquad \beta = \pm\sqrt{e}$

$\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos(\alpha x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} = \lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos(\alpha x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} \cdot \frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha^2}{2}$

$y = \operatorname{arctg}x^2$

$\displaystyle\lim_{y\to0} \frac{\operatorname{tg}y}{y} = 1$



$f(x) = M(x)$

es $M(-2,7) = 0,3 = x - [x] = x - (-3) = 0,3$

$M(1,7) = 0,7$

dom $(M(x))$

im $(\cos x) = [-1,1]$

dom $f(x) = \mathbb{R}$ controimmagine di $[-1,1]$ attraverso $f = \cos x$

im $f(x) = [0,1)$ immagine dell'intersezione dom $(M(x))$ e im $(\cos x)$ attraverso la funzione + esterna

N.B.

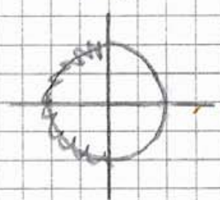
|| la composizione con una funzione periodica dà sempre una funzione periodica

$$f(x) = \cos x - [\cos x] = \begin{cases} \cos x + 1 & -1 \leq \cos x < 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ \cos x & 0 \leq \cos x < 1 & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi \\ 0 & \cos x = 1 & x = 0 \end{cases}$$

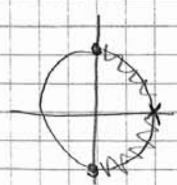
Siccome $f(x)$ è periodica, mi limito all'intervallo $[0, 2\pi]$

1) $-1 \leq \cos x < 0$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$



2) $0 \leq \cos x < 1$



$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi \leq x < 0$

3) $\cos x = 1$ $x = 0$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x + 1 = 1$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} \cos x + 1 = 1$ $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^+} \cos x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} \cos x = 1$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^+} \cos x = 1$

INFINITESIMI e INFINITI

127 - 141

SIMBOLI DI LANDAU

o "o piccolo"

O "o grande"

$\sim$ "equivalenza"

$\asymp$ "equigrandezza"

Simboli per lo studio locale di una funzione (valore del limite nell'intorno di un punto, oppure comportam. di successioni...)

Simboli per confrontare due funzioni

$f, g : E \to \mathbb{R}$

x_0 è punto di accumulazione di E

Confronto del comportamento locale (= in un intorno di x_0) delle funzioni f e g si esprime

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(nell'hp che $g(x) \neq 0$ in $V \cap E$ dove V è un qualche intorno di x_0)

N.B.: $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

il confronto si può fare anche per x_0^- o x_0^+

Quattro possibilità:

1) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

1) $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili

2) $f(x)$ è o di $g(x)$ $\left(f = o(g)\right)$ per $x \to x_0$

3) $f \asymp g$ $x \to x_0$ "f è equigrande a g"

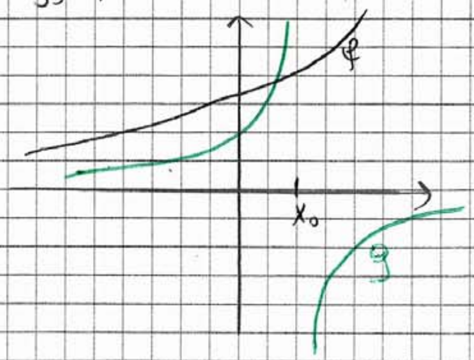
4) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \iff \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

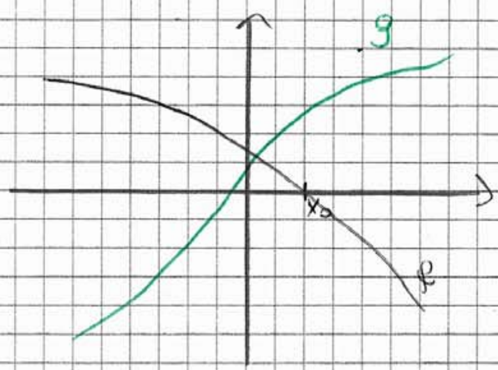
$g = o(f)$ $x \to x_0$

• Nel caso 3, se $l = 1$ si dice $f \sim g$ "f è equivalente a g"

Alcuni grafici

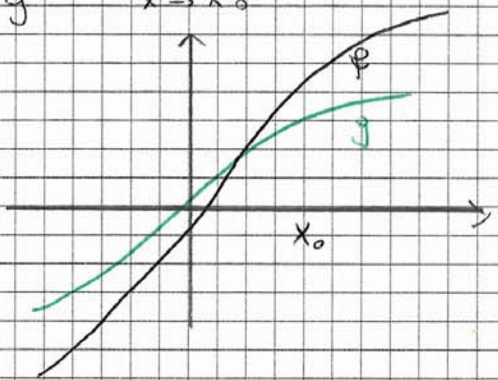
1) $f = o(g) \quad x \to x_0$



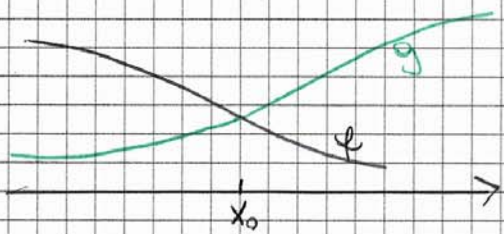


o la g diverge in x_0 o la f va a 0 in x_0 o tutte 2 a 0, ma f più rapidamente, o tutte due a ∞, ma g più rapidamente

2) $f \asymp g \qquad x \to x_0$



3) $f \sim g$



INFINITESIMI

Def: $f: E \to \mathbb{R}$

x_0 pto di accumulazione per E

f si dice un INFINITESIMO per $x \to x_0$

se $f = o(1) \quad x \to x_0$

ossia, $f(x) \to 0, \quad x \to x_0$

Es:

$f(x) = x^{\alpha} \qquad \alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = \begin{cases} 0 & \alpha > \beta \\ 1 & \alpha = \beta \\ +\infty & \alpha < \beta \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 318

$$\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x} \to 0, \quad x \to 0$$

$\sin x = O(x) \qquad -\operatorname{tg} x = O(x)$

$\sin x - \operatorname{tg} x = o(x)$

può succedere che $O(x) + O(x) = o(x)$

ES $\quad \sin x - \operatorname{tg} x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \left(\cos x - 1 \right)$

$\operatorname{tg} x \sim x$

$\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2} x^2$

$\Rightarrow \sin x - \operatorname{tg} x \sim x \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) = -\frac{1}{2} x^3$

allora $\sin x - \operatorname{tg} x \overset{\cup}{\cap} x^3$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITESIMI (nel calcolo dei limiti)

$f, g, F, G = o(1), \quad x \to x_0$

$f = o(F), \quad g = o(G), \quad x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F+f}{G+g} = \lim_{x \to x_0} \frac{F}{G}$$

se questo limite $\exists$

OSS il teorema afferma $\dfrac{f + o(\cancel{f})}{g + o(\cancel{g})}$

Dim: $\dfrac{F+f}{G+g} = \dfrac{F}{G} \left(\dfrac{1 + \frac{f}{F}}{1 + \frac{g}{G}} \right) \to 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F+f}{G+g} = \lim_{x \to x_0} \frac{F}{G}$$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER IL PRODOTTO DI INFINITESIMI

$$\lim_{x \to x_0} (F+f)(G+g) = \lim_{x \to x_0} F \cdot G$$

cancello gli infinitesimi di ordine superiore

Infatti,

$$(F+f)(G+g) = FG\Big(1 + \underbrace{\tfrac{f}{F}}_{\to 0}\Big)\Big(1 + \underbrace{\tfrac{g}{G}}_{\to 0}\Big)$$

PARTE PRINCIPALE rispetto a un INFINITESIMO CAMPIONE

Sia $f = o(1)$ per $x \to x_0 \qquad f(x) \to 0$

$\varphi = o(1)$ per $x \to x_0$

es: Trovare l'ordine e la parte principale dell'infinito $f(x) = tg^2 x$ $x \to \frac{\pi}{2}$ rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$

$$\frac{f(x)}{\varphi^{\alpha}(x)} = \frac{tg^2 x}{\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^{\alpha}}} = \frac{\overset{\to 1}{\sin^2 x}}{\underset{\to 0}{\cos^2 x}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha} = \sin^2 x \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \sin^2 x \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \cdot \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2}}$$

$$= \sin^2 x \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}_{\to 1} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-2}$$

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-2} \begin{cases} 0 & \alpha > 2 \\ 1 & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha < 2 \end{cases}$$

$\alpha = 2$ è L'ORDINE di $tg^2 x$ rispetto a $\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$

$\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdot 1$ è la PARTE PRINCIPALE di $tg^2 x$ rispetto a $\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$

es: ordine e parte principale dell'infinito $f(x) = x$ $x \to +\infty$ rispetto all'inf campione $\varphi(x) = \log x$

$$\frac{x}{\log^{\alpha} x} \longrightarrow +\infty \implies$$

φ non è un buon infinito campione per f. Non è possibile esprimere x come $\log^{\alpha} x + o(\log^{\alpha} x)$

TERMINOLOGIA N.B.

- f, g due infinitesimi
  $f = o(g) \implies f$ è infinitesimo di ORDINE SUPERIORE rispetto a g
- f, g due infiniti
  $f = o(g) \implies g$ è un infinito di ORDINE SUPERIORE rispetto a f

La retta tg ha un contatto bipunto (è la più vicina di tutte le rette)

DERIVATA

DEF $f: E \to \mathbb{R}$ $\quad x_0, x \in E$

$$F(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si dice RAPPORTO INCREMENTALE di f tra i punti x e x_0

DEF x_0 p.to di accumulazione di E.

Se $\exists \lim_{x \to x_0} F(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$

allora $f(x)$ si dice DERIVABILE o DIFFERENZIABILE nel punto x_0

e si usa la notazione $\lim_{x \to x_0} F(x, x_0) = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df_{(x_0)}$

Leibniz

$\frac{df}{dx}(x_0)$ non è un rapporto

OSS

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

perché $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$

allora la derivata è l'unico coefficiente angolare ~~che approssima meglio~~ della retta che approssima meglio (= tutto il resto è un o della parte lineare) una funzione

$f'(x_0)(x - x_0)$: DIFFERENZIALE di f in x_0

DEF $F \subseteq E$

f si dice differenziabile in G se f è differenziabile in ogni punto di G

DERIVABILITÀ e CONTINUITÀ

PROPOSIZIONE

- f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

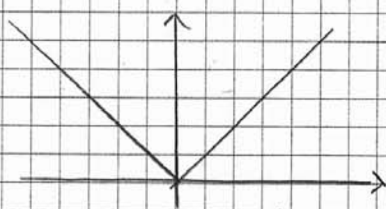
DIM

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = f(x_0) + o(1)$$

OSS

- f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0

Es: $f(x) = |x|$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 318

$\varphi = \frac{1}{|x-1|}$

$\varphi(x) \to +\infty \quad x \to 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} \cdot (|x-1|)^\alpha$

per avere $l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ devo scegliere $\alpha = 2$ (ordine di ∞)

$P(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$

- $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x \to +\infty \quad \alpha = 2$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- $f(x) = 1 - \cos x \quad x \to 0$

$f(x) = o(1)$ infinitesimo

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}$ per $\alpha = 2 \qquad P(x) = \frac{1}{2}x^2$

- $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3} \quad x \to \pm\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3} = 0$

$\varphi(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}\cdot x^\alpha = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad \frac{1}{3} + \alpha = 3 \qquad \alpha = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}\cdot x^{\frac{8}{3}} = 1 \qquad P(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{8}{3}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \frac{1}{x^{\frac{8}{3}}}\cdot\frac{1}{x^4} = 0$

- $f(x) = \mathrm{tg}\, x\sqrt{\sin x}, \quad x \to 0^+$

$f(x) = o(1)$ infinitesimo

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{tg}x\sqrt{\sin x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\sqrt{x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}})}{x^\alpha} \qquad \alpha = \frac{3}{2}$

$P(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad f(x) = x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}})$

- $f(x) = \log(1+x)^x \qquad x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \log(1+x)^x = \lim_{x\to 0} x\cdot\log(x+1) = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot[\overbrace{\log(1+x)}^{x+o(x)}]}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^\alpha}$

allora $\alpha = 2 \qquad P(x) = x^2$

64

$$\frac{x \cdot \log x^6 + \sqrt{|x|} \cdot \log^4 |x|}{(x^{\cdot} \log|x|)^{\alpha}}$$

$\log|x| = y \qquad |x| = e^y \qquad x = -e^y \qquad y \to +\infty$

$-6e^y \cdot y + \sqrt{e^y} \cdot y^4 = -6e^y \cdot o(e^y) + e^{\frac{y}{2}} \cdot o\left(e^{\frac{y}{2}}\right) = e^y\left(-6 + \frac{1}{e^{\frac{y}{2}}}\right) = -\infty$

Denominatore 2° modo

$6x \cdot \log|x| + \sqrt{|x|} \cdot \log^4 x = x \cdot \log|x| \left(6 - \frac{1}{\sqrt{|x|}} \log^3|x|\right)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\log^3|x|}{\sqrt{|x|}} \qquad y = |x| \quad$ se $x \to -\infty$ allora $y \to +\infty$

$\lim_{y \to +\infty} \frac{\log^3 y}{\sqrt{y}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{o(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = 0$

allora

$\lim_{x \to -\infty} x \cdot \log|x| \left(6 - \frac{1}{\sqrt{|x|}} \log^3|x|\right) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{0}{-\infty} = 0^-$

<u>Num</u> $\qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{\log|x|}}{x \cancel{\log|x|}} = 0 \qquad \log|x| = o(x \log|x|) \quad x \to -\infty$

$x \cdot \log(x^4 + x^2) = x \cdot \log\left(x^4\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = x \cdot \left(\log(x^4) + \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(4 \log|x| + \overbrace{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}\right)}{\cancel{x} \cdot \log|x|} = 4$

$x \log(x^4 + x^2) = 4 \cdot x \log|x| + o(x \cdot \log|x|) \qquad x \to -\infty \qquad$ poichè $\ell \varphi^\alpha + o(\varphi^\alpha)$

$NUM = 4x \cdot \log|x| - x \log|x| + o(x \cdot \log|x|) = 3x \log|x| + o(x \cdot \log|x|)$

<u>Den</u> $\qquad \log x = o(|x|^\alpha) \qquad x \to \pm\infty \qquad \forall \alpha > 0$

$\log^\beta x = o(|x|^\alpha) \qquad \forall \alpha, \beta > 0$

$[\log|x|]^\beta = \left[o\left(|x|^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\right]^\beta$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{|x|} \log^4|x|}{x \cdot \log x^6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{\sqrt{|x|}} \log^{\cancel{4}\,3}|x|}{6\cancel{x} \cancel{\log|x|}} = 0$

$\sqrt{|x|}$

Den: $\quad x \cdot \log x^6 + o(x \cdot \log x^6) \qquad x \to -\infty$

$\lim \frac{Num}{Den} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x \log|x|}{6x \cdot \log|x|} = \frac{1}{2}$

$\boxed{66}$

Quindi $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

5) $f(x) = \sin x$

$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x_0) + \sin x - \sin x_0 =$ formule prostaferesi

$= f(x_0) + 2 \underbrace{\sin \frac{x-x_0}{2}}_{\frac{x-x_0}{2} + o(x-x_0)} \underbrace{\cos \frac{x+x_0}{2}}_{\cos x_0 + o(1)}$

$\sin x = \sin x_0 + 2\left(\frac{x-x_0}{2} + o(x-x_0)\right) \cdot (\cos x_0 + o(1))$

$= \sin x_0 + (x-x_0)\cos x_0 + o(x-x_0)$ → il prodotto è ancora + piccolo di $o(x-x_0)$

$\frac{x-x_0}{2} \cdot o(1)$ $\quad o(x-x_0) \cdot \cos x_0$ $\quad o(x-x_0) \cdot o(1) = o(x-x_0)$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ → la derivata è il coeff della parte lineare

6) $f(x) = \cos x$

$\cos x = \cos x_0 + \overbrace{\cos x - \cos x_0}^{\text{incremento}} = \cos x_0 - 2\sin\frac{x-x_0}{2} \sin\frac{x+x_0}{2} =$

$= \cos x_0 - (x-x_0)\sin(x_0) + o(x-x_0)$

$2 \quad 2\sin\frac{x-x_0}{2}$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

7) $f(x) = a^x \quad a > 0$

$a^x = a^{x_0} + a^x - a^{x_0} = a^{x_0} + a^{x_0}\underbrace{\left(a^{x-x_0} - 1\right)}_{\log a (x-x_0) + o(x-x_0)} =$

$= a^{x_0} + (a^{x_0} \log a)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$

Conseguenza:

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 318

ESERCIZIO

$f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad f'(x) = \sinh x$

$f(x)$ e y sono equivalenti? SI

RIASSUNTO

$x^\alpha \xrightarrow{D} \alpha x^{\alpha-1}$

$\sin x \xrightarrow{D} \cos x$

$\cos x \xrightarrow{D} -\sin x$

$a^x \xrightarrow{D} a^x \log a$

$e^x \xrightarrow{D} e^x$

$\sinh x \xrightarrow{D} \cosh x$

$\cosh x \xrightarrow{D} \sinh x$

COMBINAZIONE LINEARE

$\lambda f + \mu g$ $\qquad$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$

OSS Deriv. notevole $\boxed{4}$

$\dfrac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ $\qquad x \neq 0$

In $x_0 = 0$?

- $\alpha > 1$ $\qquad f(x) - f(0) = x^\alpha = o(x) = o(x-0) = \boxed{0}(x-0) + o(x-0)$

$\Downarrow$

$\dfrac{d}{dx} x^\alpha = 0$

- $\alpha = 1$ $\qquad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $\alpha < 1$ $\qquad f(x) - f(x_0) = f(x) = x^\alpha$

ma $\forall k \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$

$x^\alpha \neq kx + o(x)$, $\quad x \to 0$

perché kx è $o(x^\alpha)$, infatti $\quad \dfrac{kx}{x^\alpha} = kx^{1-\alpha} \to 0 \quad x \to 0$

anche $o(x)$ è $o(x^\alpha)$

e $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

e $x^\alpha \neq o(x^\alpha)$ sempre

Quindi $\alpha < 1 \Rightarrow x^\alpha$ <u>non</u> è derivabile in $x = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 318