NUMERO: 1292 ANNO: 2014

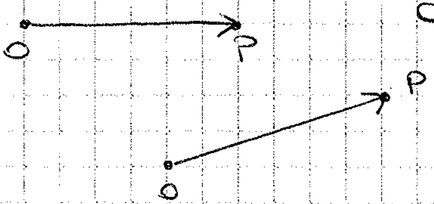
A P P U N T I

STUDENTE: Beltrame

MATERIA: Geometria + Eserc., Prof.Malaspina

I Vettori

- **VETTORI APPLICATI**: "Sia O un punto del piano, è chiamato **VETTORE APPLICATO** in O il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, dove P è un altro punto del piano diverso da O"



$\overrightarrow{OP}$ è individuato da
- → **MODULO** (= lunghezza del vettore)
- → **VERSO** (da O verso P)
- → **DIREZIONE** (= retta passante da O e da P)

↓

due vettori applicati in O sono uguali ⟺ hanno la stessa direzione, modulo e verso

↓

un **vettore** è definito **NULLO** ($\vec{0}$) se il suo modulo è pari a 0 ⇒ non ha direzione né verso (sono indeterminati)

- $\underbrace{\{\nearrow\} \cup \{\vec{0}\}}_{V_2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ → CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

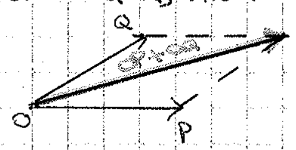
V_2 = INSIEME PRIMITIVO DI VETTORI

- **Somma tra vettori** → è un'operazione interna (= la somma tra due elementi di V_2 è un altro elemento di V_2)

→ $V_2 \times V_2 \longrightarrow V_2$

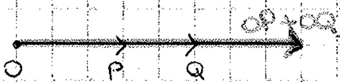
$\vec{v}, \vec{w} \longrightarrow \vec{v}+\vec{w}$

→ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ → hanno direzioni diverse



= REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

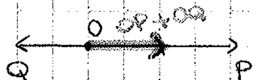
→ hanno stessa direzione e verso



→ $\overrightarrow{OP+OQ}$ ha la stessa direzione e verso di $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$

→ $\|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{OQ}\|$

→ hanno stessa direzione ma verso opposto



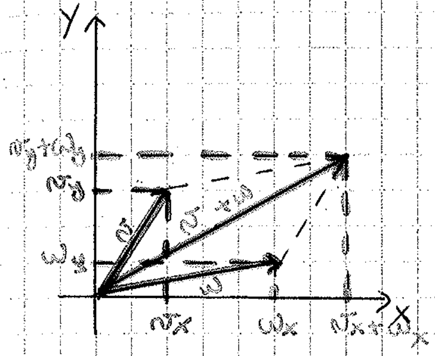
→ $\|\overrightarrow{OP}\| > \|\overrightarrow{OQ}\|$

→ $\|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP}\| - \|\overrightarrow{OQ}\|$

→ se $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OQ}\|$ allora $\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = \vec{0}$

somma in componenti: siano $\vec{v} = \vec{v_x} \cdot \hat{\imath} + \vec{v_y} \cdot \hat{\jmath}$ e $\vec{w} = \vec{w_x} \cdot \hat{\imath} + \vec{w_y} \cdot \hat{\jmath}$

allora $\vec{v} + \vec{w} = (\vec{v_x} + \vec{w_x})\hat{\imath} + (\vec{v_y} + \vec{w_y})\hat{\jmath}$



prodotto per un numero "a" reale: $a \cdot \vec{v} = (a \cdot \vec{v_x}) \cdot \hat{\imath} + (a \cdot \vec{v_y}) \cdot \hat{\jmath}$

• **VETTORI PARALLELI**: "due vettori $\vec{v}, \vec{w}$ sono PARALLELI $\Leftrightarrow$ hanno la stessa direzione"

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tale che } \vec{v} = t \cdot \vec{w}$$

in componenti: $\vec{v} = \vec{v_x} \cdot \hat{\imath} + \vec{v_y} \cdot \hat{\jmath}$, $\vec{w} = \vec{w_x} \cdot \hat{\imath} + \vec{w_y}\, \hat{\jmath}$

allora $(v_x, v_y) = t\,(w_x, w_y)$; $\begin{cases} v_x = t\, w_x \\ v_y = t\, w_y \end{cases}$; $\begin{cases} t = v_x / w_x \\ t = v_y / w_y \end{cases}$

$\Updownarrow$

in generale due vettori $\vec{v}, \vec{u}$ sono paralleli se e solo se $\vec{v} = t\,\vec{u}$ con $t \in \mathbb{R}$

$\leftarrow$ (1) CONDIZIONE DI PARALLELISMO $\vec{v_x} \cdot \vec{w_y} = \vec{v_y} \cdot \vec{w_x}$

• ESERCIZI

(1) Dati $\vec{u} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$, $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ si trovino: a) $\vec{u} - 2\vec{v}$

b) $4\vec{u} + \vec{v}$

(a) $(2\hat{\imath} - \hat{\jmath}) - 2 \cdot (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = \cancel{2\hat{\imath}} - \hat{\jmath} - \cancel{2\hat{\imath}} - 2\hat{\jmath} = -3\hat{\jmath}$

(b) $4(2\hat{\imath} - \hat{\jmath}) + (\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = 8\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + \hat{\imath} + \hat{\jmath} = 9\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$

(2) Dati $\vec{u} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ e $\vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ si trovino: a) i vettori $\parallel$ a $3\vec{u} + \vec{v}$ di modulo 5

b) i versori associati a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

(a) $3\vec{u} + \vec{v} = 3(-\hat{\imath} - \hat{\jmath}) + 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$

i vettori $\parallel -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ sono nella formula $h(t) = t\,(-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})$ con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

impongo $\|h(t)\| = 5 \longrightarrow \underbrace{\| -(t)\hat{\imath} - (2t)\hat{\jmath} \|} = 5$

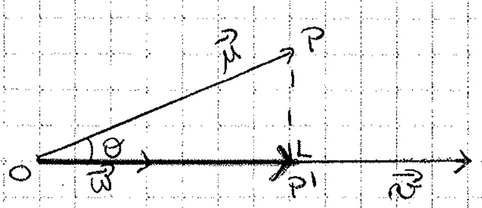
$= \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5} \cdot t = 5 \longrightarrow \cancel{5}t^2 = 25 \rightarrow t = \pm\sqrt{5}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x \cdot w_x) + (v_y \cdot w_y)$

- Preso $\|\vec{u}\|^2$ allora vale $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u_x})^2 + (\vec{u_y})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

il modulo di un vettore al quadrato è pari al prodotto scalare del vettore per se stesso

• Proiezione di un vettore $\vec{u}$ su un altro $\vec{v}$ $(\vec{u_v})$



$\to \|OP'\| = \|\vec{u}\| \cos(\hat{vu})$

sia $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, ovvero il versore associato a $\vec{v}$,

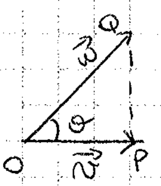
allora $\|\vec{OP'}\| = \vec{u} \cdot \vec{w}$ $\to$ OP' è pari al prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{w}$

il vettore proiezione $\vec{OP'}$ è pari a $\|OP'\| \cdot w = \underbrace{\underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{w})}_{\text{PRODOTTO SCALARE}} w}_{\text{PRODOTTO NUMERO} \times \text{VETTORE}} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|v\|}\right) \frac{v}{\|v\|} =$

$\|OP'\| = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) v$ $\to$ se $\hat{vu} > \pi/2$, allora posso usare la stessa formula in quanto questa tiene conto del segno

ESERCIZI

① - Calcolare $\vec{w} \cdot \vec{v}$, dove $\vec{v} = \vec{OP}$, $\vec{w} = \vec{OQ}$, $\theta = \pi/4$ e $\|\vec{OP}\| = 2$



(modo 1) sapendo che $\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$

$\Rightarrow \|\vec{w}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$?

quindi $\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 \cdot \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 4$

O è l'origine

(modo 2) introduco gli assi cartesiani $\to$ P(2,0) $\to$ Q(2,2)

da cui: $\vec{v} = 2\hat{\imath}$ e $\vec{w} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

quindi $\vec{w} \cdot \vec{v} = 4$.

② - Dati $\vec{v} = \hat{\imath} + t\,\hat{\jmath}$ e $\vec{w} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$, si trovino i valori di t reali tali che

a) $\vec{v} \perp \vec{w}$ b) $\vec{v} \parallel \vec{w}$

ⓐ $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = (1 \cdot 2) + (-3 \cdot t) = 0$

$-2 + 3t = 0 \to t = 2/3$

(5) - Dati $\vec{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ e $\vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, trovare

a) il loro angolo;
b) un vettore // alla bisettrice;
c) il vettore in proiezione di $\vec{u}$ su $\vec{v}$
d) il vettore // $\vec{v}$ la cui proiezione su $\vec{u}$ ha modulo 2

(a)
$$\cos(\hat{uv}) = \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{(2\cdot 1)+(1\cdot 1)-(1\cdot 1) = 2} \left(\frac{1}{\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=\sqrt{1+1+1}}\,\underbrace{\|\vec{v}\|}_{=\sqrt{4+1+1}}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

(b) considero i versori associati ai due vettori (di cui conosco il modulo) e li sommo con la regola del parallelogramma

↓

il vettore somma sta sicuramente sulla bisettrice

↓

$$\underbrace{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}_{\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k})} + \underbrace{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}_{\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})} \text{ è sulla bisettrice}$$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right]\hat{\imath} + \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right]\hat{\jmath} + \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right]\hat{k} =$$

(c)
$$\vec{u}_v = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) v = \left(\frac{\cancel{6}}{{}_3\cancel{6}}\right)(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) = \frac{2}{3}\hat{\imath} + \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

(d) devo trovare un vettore $//\vec{v}$ dipendente da t e proiettarlo su $\vec{u}$

↓

$$\vec{h}(t) = t\cdot\vec{v} = (2t)\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + t\hat{k} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} / \{0\}$$

↓

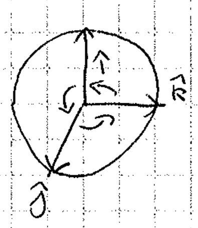
proietto $\vec{h}$ su $\vec{u}$ → $\vec{h}_u = \underbrace{(\vec{h}\cdot\vec{u})}_{(1\cdot 2t)+(\cancel{1\cdot t})-(\cancel{t})} \left(\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}\right) u = \frac{2t}{3}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k})$

↓

impongo $\|\vec{h}\| = 2$ → $\left\|\frac{2}{3}t\hat{\imath} + \frac{2}{3}t\hat{\jmath} - \frac{2}{3}t\hat{k}\right\| = 2$

↳ la direzione di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è ortogonale al piano formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO: se $\vec{v} \parallel \vec{w}$ (oppure uno dei due vettori $=0$) $\Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$

↳ 

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}; \quad \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}; \quad \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$

↳ PROPRIETÀ: 1) ANTICOMMUTATIVA → $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$

per questa proprietà non vale quella associativa, infatti:

$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} \neq \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u})$ → Es: $\hat{i} \wedge (\hat{j} \wedge \hat{j}) = 0$ ma ↳ $\hat{j} \parallel \hat{j}$

$(\hat{i} \wedge \hat{j}) \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{j} = -\hat{i}$

2) DISTRIBUTIVA → $\forall a \in \mathbb{R}$, $a(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (a\vec{v}) \wedge (a\vec{w})$

$\vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{u})$

ESERCIZIO - Trovare il prodotto vettoriale di $\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \wedge (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) =$$

$$= \underbrace{\cancel{\hat{i} \wedge \hat{i}}}_{=0} + \hat{i} \wedge \hat{j} + \hat{i} \wedge \hat{k} + 2(\hat{j} \wedge \hat{i}) + 2\underbrace{\cancel{(\hat{j} \wedge \hat{j})}}_{=0} + 2(\hat{j} \wedge \hat{k}) - (\hat{k} \wedge \hat{i}) - (\hat{k} \wedge \hat{j}) - \underbrace{\cancel{(\hat{k} \wedge \hat{k})}}_{=0}$$

$$= \hat{k} - \hat{j} + 2(-\hat{k}) + 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{i} = \hat{k} - \hat{j} - 2\hat{k} + 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{i} =$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

• REGOLA DI CALCOLO (DETERMINANTE MATRICI)

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

componenti di $\vec{v}$

componenti di $\vec{w}$

considerando gli elementi della 1^ riga, moltiplico quello considerato per gli elementi che restano dall'eliminazione della riga e della colonna dell'elemento considerato

regola di calcolo

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

d1, d2

→ diagonale 1 − diagonale 2

$$= \hat{i}\left[(2 \cdot 1) - (-1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 1) - (-1 \cdot 1)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot 1) - (2 \cdot 1)\right] =$$

$$= \hat{i}(2+1) - \hat{j}(1+1) + \hat{k}(1-2) = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

(c) $\vec{u} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \|\vec{u} \cdot \vec{v}'\| = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\cos t + 4\sin t + \cancel{1} \cdot 0 = 0$

$\cancel{2}\cos t + \cancel{4}\sin t = 0 \qquad \cos t + 2\sin t = 0 \qquad tg\, t = -1/2$

(d) $\vec{u} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}'\| = 0$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & / \\ 2\cos t & 2\sin t & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 2 & / \\ 2\sin t & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & / \\ 2\cos t & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2\cos t & 2\sin t \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}\left[(2 \cdot 1) - (0 \cdot 2\sin t)\right] - \hat{\jmath}\left[(1 \cdot 1) - (0 \cdot 2\cos t)\right] + \hat{k}\left[(1 \cdot 2\sin t) - (2 \cdot 2\cos t)\right] =$$

$= 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \left[(2\sin t) - 4\cos t\right]\hat{k} \neq 0 \Rightarrow$ le componenti di $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sono sempre costanti, quindi non possono annullarsi

$\Downarrow$

$\vec{u}$ e $\vec{v}'$ <u>non</u> possono essere $\parallel$!

(2) - Calcolare il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$, sapendo che $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = 1$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \underline{\sin(\widehat{uv})} =$

$\hookrightarrow$ sapendo che $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{uv})$

allora $\cos(\widehat{uv}) = \dfrac{\|\vec{u} \cdot \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{uv} = \pi/3$

$$= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\left(\pi/3\right) = 1 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

(3) - Calcolare l'angolo $\widehat{uv}$ sapendo che $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{u} - 2\vec{v}\| = a$ con $a \in \mathbb{R}$ - Discutere al variare di a -

$\cos(\widehat{uv}) = \dfrac{\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v}}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} =$

$\triangleright$ sapendo che $\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$ allora posso dire

$a^2 = (\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) =$

$= (\vec{u} \cdot \vec{u}) - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 2(\vec{v} \cdot \vec{u}) + 4\,\vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= \|\vec{u}\|^2 - 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 4\|\vec{v}\|^2 =$

$= 1 - 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 4(9) = -4(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 37$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{37 - a^2}{4}$

(modo 2) • $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & / \\ 1 & / & 1 \end{vmatrix} =$

$= \hat{i} \begin{vmatrix} -1 & / \\ / & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & / \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & / \end{vmatrix} =$

$= \hat{i}\left[(-1 \cdot 1)\right] - \hat{j}\left[(1 \cdot 1)\right] + \hat{k}\left[-(-1 \cdot 1)\right] = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

• $\vec{v} \wedge \vec{v}' = \vec{n}' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & / & -1 \end{vmatrix} =$

$= \hat{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ / & -1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & / \end{vmatrix} =$

$= \hat{i}\left[-1 \cdot 1\right] - \hat{j}\left[(-1 \cdot 1) - (1 \cdot 1)\right] + \hat{k}\left[-1 \cdot 1\right] =$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

• $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \hat{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= \hat{i}(-1-2) - \cancel{\hat{j}(-1+1)} + \hat{k}(-2-1) = -3\hat{i} - 3\hat{k}$

• **Prodotto misto** → "Prodotto scalare tra un vettore e il prodotto vettoriale di altri due"

$\rightarrow \underset{(\vec{v} \wedge \vec{w})}{V_3} \times \underset{(\vec{u})}{V_3} \longrightarrow \underset{(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u}}{\mathbb{R}}$

$\rightarrow \vec{u} \cdot \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{w})}_{} \in \mathbb{R}$

$\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$

$= \hat{i}\underbrace{(v_2 w_3 - w_2 v_3)}_{=t_1} - \hat{j}\underbrace{(v_1 w_3 - w_1 v_3)}_{=t_2} + \hat{k}\underbrace{(v_1 w_2 - w_1 v_2)}_{=t_3}$

$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{t} = u_1(v_2 w_3 - w_2 v_3) - u_2(v_1 w_3 - w_1 v_3) + u_3(v_1 w_2 - w_1 v_2)$

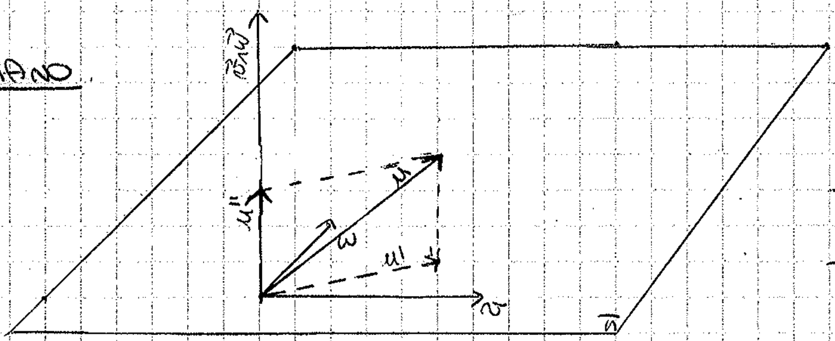
→ per PROIEZIONE ORTOGONALE si intende il vettore identificato da $\vec{OH}$ di cui conosco lunghezza, direzione e verso

$$\vec{OH} = a \cdot \text{versore di } \vec{v} = \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\vec{u} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

la componente di $\vec{u}$ su $\vec{v}$

ha direzione e verso di $\vec{OH}$

PIANO



→ $\vec{u}'$ è la proiezione di $\vec{u}$ sul piano vw

→ $\vec{u}''$ è la proiezione di $\vec{u}$ su $\vec{v} \wedge \vec{w}$

→ $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ (regola del parallelogramma)

QUINDI $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{w}}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2}$

$= (\vec{u} \cdot \text{versore } \vec{v} \wedge \vec{w}) \text{ vers. } \vec{v} \wedge \vec{w}$

ESERCIZI

1 - Trovare la proiezione di $\vec{v} = -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ su un piano ortogonale a $\vec{u} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

la proiezione (P) di v sul piano $\pi = \vec{P} = \vec{v} - \vec{v}''$

$\vec{v}''$ è il vettore proiezione ortogonale su $\vec{u}$

$$\vec{v}'' = (\vec{v} \cdot \text{versore } \vec{u}) \text{ versore } \vec{u} =$$

$$\text{versore } \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}}(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

$$= \vec{v}'' = \left[(-2, 1, 3) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right]\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - 2\right)\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) =$$

$$= -\frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right) = -\frac{10}{3}\hat{i} + \frac{20}{9}\hat{j} + \frac{20}{9}\hat{k}$$

$$\vec{P} = \vec{v} - \vec{v}'' = (-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) - \left(-\frac{10}{9}\hat{i} + \frac{20}{9}\hat{j} + \frac{20}{9}\hat{k}\right) =$$

$$= -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} + \frac{10}{9}\hat{i} - \frac{20}{9}\hat{j} - \frac{20}{9}\hat{k} = -\frac{8}{9}\hat{i} - \frac{11}{9}\hat{j} + \frac{7}{9}\hat{k}$$

Strutture algebriche

· **CAMPO** (corpo commutativo): "Sia $\mathbb{K}$ un insieme (di numeri) con due operazioni interne binarie (1) che soddisfano le seguenti proprietà $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$

S1) $(a+b)+c = a+(b+c)$
S2) $a+b = b+a$
S3) $\exists\, u \in \mathbb{K}$ t.c. $a+u=a$ ($\Rightarrow u$ è lo zero!)
S4) $\forall a \in \mathbb{K}\ \exists\, a'$ t.c. $a+a'=u$ ($\Rightarrow a'$ è l'opposto!)

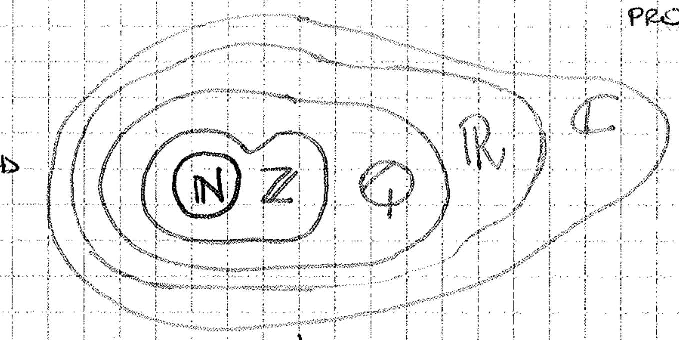
P1) $a(bc) = (ab)c$
P2) $ab = ba$
P3) $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ t.c. $a \cdot 1 = a$
P4) $\forall a \in \mathbb{K}\ \exists\, a^{-1} \in \mathbb{K}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = 1$

D) $a(b+c) = (ab)+(ac)$"

↳ (1) operazioni binarie = ad ogni coppia di numeri ne associano un terzo

↓

in questo caso sono SOMMA $\oplus$ $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$
PRODOTTO $\odot$ $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$

↳ 

↓

$\mathbb{N}$ non è un campo → non ha S_4 né P_4

$\mathbb{Z}$ non è un campo → non ha P_4 → $\mathbb{Z}$ è detto ANELLO COMMUTATIVO CON UNITÀ

$\mathbb{Q}$ è un campo
$\mathbb{R}$ è un campo
$\mathbb{C}$ è un campo
} sono campi INFINITI (= hanno infiniti elementi)

↳ $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ è un campo?

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

→ Tutte le proprietà sono soddisfatte

↓

$\mathbb{Z}_2$ è un campo FINITO

6) funzioni a valori reali $\mathbb{F}(I) \to \mathbb{R}$; $\mathbb{F}(I) = \{ f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$$+ \quad \mathbb{F}(I) \times \mathbb{F}(I) \longrightarrow \mathbb{F}(I)$$
$$f \quad g \quad \to \quad f+g \text{ dove } f+g : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) + g(x)$$

somma sull'immagine

$$\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{F}(I) \longrightarrow \mathbb{F}(I)$$
$$\lambda \quad f \quad \to \quad \lambda f \text{ dove } \lambda f : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \lambda f(x)$$

7) Lo spazio $\mathbb{R}^{m,n}$ delle matrici è spazio vettoriale

def: "Una **matrice** a coefficienti in $\mathbb{R}$ è una tabella così definita:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{..} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ con } a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}^n$$

ogni elemento a_{ij} ha due indici i = riga, j = colonna

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme di tutte le matrici a m righe e n colonne

A si dice **QUADRATA** $\Leftrightarrow n = m \Rightarrow$ il numero di righe e colonne coincide

gli elementi a_{ii} formano la DIAGONALE

$$+ \quad \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$$
$$\lambda \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$0_{\mathbb{R}^{m,n}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$ l'opposto di (a_{ij}) è $-(a_{ij})$

· <u>SOTTOSPAZI VETTORIALI</u>: "Sia $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e sia W un sottoinsieme di V ($W \subseteq V$); W si dice sottospazio vettoriale se $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è ancora spazio vettoriale su $\mathbb{K}$"

W è sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$ valgono:
1) $\forall b_1, b_2 \in W$, $b_1 + b_2 \in W$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall v \in W$, $\lambda v \in W$
3) $0_V \in W$

sono tutte condizioni necessarie e sufficienti!!

(a) • $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ non costituiscono un sottospazio vettoriale in quanto non contengono lo 0 e $\vec{u}+\vec{v} \notin \{\vec{u}, \vec{v}\}$

• W = più piccolo sottospazio che li contiene

3) $\vec{0} \in W$

2) devo prendere tutti i vettori // sia a $\vec{u}$ sia a $\vec{v}$ $\to \lambda\vec{u}$, $\gamma\vec{v}$

1) devo prendere tutte le somme possibili $\vec{u}+\vec{v}$

$\Rightarrow W = \{\lambda\vec{u} + \gamma\vec{v} \mid \lambda, \gamma \in \mathbb{R}\}$ = insieme delle combinazioni lineari di $\vec{u}, \vec{v}$

W è sottospazio? $\to$ siano $\lambda_1\vec{u} + \gamma_1\vec{v}, \lambda_2\vec{u} + \gamma_2\vec{v} \in W \Rightarrow (\lambda_1\vec{u} + \gamma_1\vec{v}) + (\lambda_2\vec{u} + \gamma_2\vec{v}) = \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{=\mathbb{R}}\vec{u} + \underbrace{(\gamma_1+\gamma_2)}_{=\mathbb{R}}\vec{v} \in W$

coincide con il piano xy

sono proprio TUTTE le comb. lineari

In generale per due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ il più piccolo sottospazio che li contiene è formato dal piano generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$

(b) 3) $\vec{0} \in W$

1) $a_1\vec{u} + a_2\vec{u} = (a_1+a_2)\vec{u} \in W$? $\to a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \Rightarrow a_1+a_2 \geq 0$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} \in W$? NO! $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda\vec{u} \notin W$ $\to$ considero tutto $\mathbb{R}$ e non solo $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$\Rightarrow W$ non è sottospazio vettoriale

il più piccolo sottospazio è $W' = \{a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$

I sottospazi di V_3 sono $\{\vec{0}\}$, le rette per l'origine, i piani per l'origine

(c) $W_1 = \{a\vec{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{b\vec{v} \mid b \in \mathbb{R}\}$ con $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$

$W_1 \cup W_2 = \{a\vec{u}, b\vec{v} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

1) $\vec{u}+\vec{v} \notin W_1 \cup W_2$ $\to$ $W_1 \cup W_2$ non è sottospazio

(5) Siano definite le seguenti operazioni in $\mathbb{R}^2$:

$+ \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \quad (x',y') \to (x+x', y+y')$

$\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$a \quad (x,y) \Rightarrow (|a|x, |a|y)$ — allora $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ è sottospazio?

3) $0_V = \underbrace{0_W + 0_Z} \in W+Z$

se W e Z sono sottospazi allora hanno anche lo 0 tra i loro elementi

- Def.: "La **somma** si dice **DIRETTA** ($W \oplus Z$) se ogni elemento b e $W+Z$ si può scrivere in modo unico nella forma $w+z$ con $w \in W$ e $z \in Z$"

$\forall v \in W+Z \quad \exists!\, w \in W,\ z \in Z \quad$ t.c. $\ v = w+z$

ESEMPIO: sia $Z \setminus \{0\} \subseteq W$, in questo caso si ha $W+Z = W$ e la somma non è diretta: infatti sia $z \in Z$ con $z \neq 0$, allora $\underset{W+Z}{z} = \underset{W}{0} + \underset{Z}{z} = \underset{Z}{z} + \underset{W}{0}$

- La somma $W+Z$ è diretta $\Leftrightarrow W \cap Z = \{0_V\}$ (è un sottospazio BANALE)

DIM: - sia $W+Z$ diretta, se $v \in W \cap Z$ allora

$v = \underset{Z}{0} + \underset{W}{v} = \underset{W}{v} + \underset{Z}{0} \rightarrow$ ho scritto v in due modi, ma per l'unicità della scrittura devo avere $v=0$, quindi $v+0 = 0+v$; $2v=0$; $\underline{v=0}$

- sia $W \cap Z = \{0_V\}$ e sia $v \in W+Z$, supponiamo $v = x+y = x'+y'$ con $x, x' \in W$ e $y, y' \in Z$, allora

$v = \underbrace{x-x'}_{\in W} = \underbrace{y-y'}_{\in Z} \Rightarrow x-x' \in W \cap Z = \{0\}$, $y-y' \in W \cap Z = \{0\}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-x'=0 \rightarrow x=x' \\ y'-y \rightarrow y=y' \end{array}\right\}$ la somma è diretta

MATRICI

- Def." Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si definisce **TRASPOSTA** di A ($= {}^tA$) come la matrice in $\mathbb{R}^{n,m}$ che ha per righe le colonne di A e per colonne le righe di A"

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

PROPRIETA' $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $\forall a \in \mathbb{R}$:
1) ${}^t({}^tA) = A$
2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
3) ${}^t(aA) = {}^tA \cdot a$

- Def" Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ si dice **SIMMETRICA** se $A = {}^tA$"

se $A = (a_{ij})$ allora ${}^tA = (a_{ji})$ ma A è simmetrica $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i,j = 1 \dots m$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica rispetto alla diagonale

$$A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\in W}$$

$\in S \Rightarrow {}^tA = A$ $\qquad$ $\in W \Rightarrow {}^tA = A$

$$\frac{1}{2}\,{}^t\left(A + {}^tA\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA + {}^t({}^tA)\right) = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) \in S_{OR}$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^t\left(A - {}^tA\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA - {}^t({}^tA)\right) = \frac{1}{2}\left(-A + {}^tA\right) = \frac{{}^tA - A}{2} = -\frac{A - {}^tA}{2} \in W_{OR}$$

• **Prodotto di matrici righe x colonne**: "Data $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,p}$ si può fare:

$$A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,p}"$$

$\Downarrow$

ogni elemento c_{ij} si ottiene facendo il prodotto scalare tra i-ma riga di A $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ e la j-ma colonna di B $(b_{1j}, \dots, b_{nj}) \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \Rightarrow c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

$\Downarrow$

questa operazione si può fare solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda

$$\mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{n,p} \longrightarrow \mathbb{R}^{m,p}$$

$\Downarrow$

<u>PROPRIETÀ</u>: A, B, C matrici, $\forall a \in \mathbb{R}$:
1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
2) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
3) $a(A \times B) = (aA) \times B = A \times (aB)$
4) ${}^t(A \times B) = ({}^tB) \times ({}^tA)$
5) $A \times B \neq B \times A$
6) $\exists$ DIVISORI DELLO ZERO (= matrici non nulle il cui prodotto è $= 0$)

$$\exists\, A, B \neq 0 \text{ t.c. } A \times B = 0$$

$\Downarrow$

<u>ES.</u> 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2)1 & 1 \cdot 2 + (-2)1 \\ 1 \cdot 2 + (-2)1 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Def**: " Sia $W \subseteq V$ uno spazio vettoriale e siano $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$, si dice che $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ **GENERANO** W (o che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori di W) se
$$W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)"$$

↓

1) $\{0_V\}$ è generato da $\emptyset$ (dall'insieme vuoto)

2) una retta è generata da <u>UN</u> vettore

3) un piano è generato da <u>DUE</u> vettori

↓

<u>ES.</u> 1) $V_2 = \mathcal{L}(\hat{\imath}, \hat{\jmath}) \Rightarrow \hat{\imath}, \hat{\jmath}$ generano $V_2 \to$ su V_2 si ha anche:
$V_2 = \mathcal{L}(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\imath}+\hat{\jmath}, \hat{\imath}-\hat{\jmath})$ anche se $\hat{\imath}+\hat{\jmath}$ e $\hat{\imath}-\hat{\jmath}$ sono già combinazione lineare di $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ quindi basterebbero

2) In $\mathbb{R}^3$ ogni elemento (a,b,c) si può scrivere nella forma però
$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \Leftrightarrow \mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\big((1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)\big)$$

- <u>Def</u>: " $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in V$ si dicono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** se
$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_n = \dots = 0$ " $\to$ altrimenti sono detti LINEARMENTE DIPENDENTI

↓

se $v_1, \dots, v_m$ sono **linearmente dipendenti** se per $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ c'è $a_i \neq 0$ per qualche indice $i = 1, \dots, n$

↓

suppongo $i = 1$ ($\Rightarrow a_1 \neq 0$), quindi divido tutto per a_1:

$$\frac{a_1}{a_1} v_1 + \dots + \frac{a_n}{a_1} v_n = 0 \to v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m$$

sono riuscita a scrivere v_1 come combinazione lineare degli altri

↓

<u>Def</u>: " $v_1, \dots, v_m$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se posso scrivere v_i come combinazione lineare degli altri "

↓

ES. $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\imath}+\hat{\jmath}, \hat{\imath}-\hat{\jmath}$ sono linearmente dipendenti $\to \hat{\imath}-\hat{\jmath} \in \mathcal{L}(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$

↓

- $v_1, \dots, v_m$ generano $V_3 \Leftrightarrow \forall v \in V_3 \; \exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tali che
$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ ($\to$ = se i vettori sono linearmente dipendenti allora generano uno spazio vettoriale)

ESERCIZI

(1) - Dire se i seguenti sottoinsiemi W di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

a) $W = \{(y+z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid \underline{x = y+z}\}$ ↳ è il piano passante per l'origine!

3) $y = z = 0 \Rightarrow 0_W \in W \quad (0 = 0+0)$ ok

1) $w_1 = (y_1+z_1, y_1, z_1)$; $w_2 = (y_2+z_2, y_2, z_2)$ allora

$w_1 + w_2 = ((y_1+z_1)+(y_2+z_2),\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) = ((y_1+y_2)+(z_1+z_2), y_1+y_2, z_1+z_2) \in W$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $w = (y+z, y, z) \Rightarrow \lambda w = (\lambda(y+z), +\lambda y, \lambda z) \in W$

$\Rightarrow W$ è sottospazio

b) $W = \{(t, -t, 2t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

3) se $t = 0 \Rightarrow (0, -0, 20)$ ok $\Rightarrow 0 \in W$

1) $w_1 = \{(t_1, -t_1, 2t_1)\}$, $w_2 = \{(t_2, -t_2, 2t_2)\}$ allora

$w_1 + w_2 = \{(t_1+t_2, -t_1-t_2, 2t_1+2t_2)\} = ((t_1+t_2), -(t_1+t_2), 2(t_1+t_2))$ ok

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $w = \{(t, -t, 2t)\}$ allora $\lambda w = \{(\lambda t, -\lambda t, 2\lambda t)\}$ ok

$\Rightarrow W$ è sottospazio

c) $W = \{(t, t+1, t+2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

3) se $t = 0 \Rightarrow (0, 1, 2) \Rightarrow 0_W \notin W$

$\Rightarrow W$ non è sottospazio

d) $W = \{(x, y, 5) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

3) $x = y = 0 \Rightarrow (0, 0, 5) \Rightarrow 0_W \notin W$

$\Rightarrow W$ non è sottospazio

e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 1,\ x, y, \in \mathbb{R}\}$

3) se $x = y = z = 0$ allora $xy \neq 1 \Rightarrow 0_W \notin W$

$\Rightarrow W$ non è sottospazio

f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

3) se $x = y = z = 0 \Rightarrow a_1 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0$ ok $\Rightarrow 0_W \in W$

1) $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ allora

$w_1 + w_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ tali che

$a(x_1+x_2) + b(y_1+y_2) + c(z_1+z_2) = 0$ ok

$a(\hat{\imath}+2\hat{\jmath})+b(\hat{\imath}+\hat{k})+c(2\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})+d\hat{\jmath}=0$

$\hat{\imath}(a+b+2c)+\hat{\jmath}(2a+c+d)+\hat{k}(b+c)=0$

$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ 2a+c+d=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-c \\ -2c+c+d=0 \\ b=-c \end{cases}$ $\begin{cases} a=-c \\ d=c \\ b=-c \end{cases}$ $\to c\in\mathbb{R}$ ed è libero

ci sono ∞ soluzioni non nulle

$v_1,\dots,v_4$ non sono lin. indipendenti

b) sono una base di V_3?

$v_1,\dots,v_4$ non sono una base di V_3 in quanto non sono lin. indipendenti

c) generano V_3?

$\to$ in generale $v_1,\dots,v_4$ generano $V_3 \Leftrightarrow$ sono linearmente dipendenti

considero $v(\lambda,\mu,\gamma)$ con $\lambda,\mu,\gamma\in\mathbb{R}$ e noti; allora

$(\lambda,\mu,\gamma)=a(\hat{\imath}+2\hat{\jmath})+b(\hat{\imath}+\hat{k})+c(2\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})+d\hat{\jmath}$

$\lambda\hat{\imath}+\mu\hat{\jmath}+\gamma\hat{k}=(a+b+2c)\hat{\imath}+(2a+c+d)\hat{\jmath}+(b+c)\hat{k}$

$\begin{cases} a+b+2c=\lambda \\ 2a+c+d=\mu \\ b+c=\gamma \end{cases}$ $\begin{cases} a+\gamma+c=\lambda \\ 2a+c+d=\mu \\ b=\gamma-c \end{cases}$ $\begin{cases} a=\lambda-\gamma-c \\ d=\mu-2\lambda+\gamma 2+c \\ b=\gamma-c \end{cases}$

3 equazioni
4 incognite (a,b,c,d)
3 termini noti (λ,μ,γ)

c è libero $\to$ posso trovare ∞ a, b, d che verificano il sistema

$v_1,\dots,v_4$ sono generatori di V_3

- **Metodo degli scarti successivi**: sia $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ e siano $w_1,\dots,w_5$ dei generatori di V; è possibile scartare alcuni w_i in modo da trovare una base:
  1) si scartano i w_i nulli;
  2) si scarta il primo w_i che è combinazione lineare dei precedenti;
  3) si ripetono 1) e 2) finché è possibile

ES. - Trovare una base di $W=\mathcal{L}(w_1,\dots,w_6)\subseteq\mathbb{R}^3$ tale che

$w_1=(0,0,0)$; $w_2=(1,0,1)$; $w_3=(2,0,2)$; $w_4=(1,1,1)$;

$w_5=(0,1,0)$; $w_6=(0,2,1)$

$\to$ scarto w_1 perché è nullo;
$\to$ scarto $w_3 \longrightarrow w_3=2w_2$;
$\to$ scarto $w_5 \longrightarrow w_5=w_4-w_2$;

$\to w_2, w_4, w_6$ sono linearmente indipendenti?

ES. $w_1=(0,0,0)$; $w_2=(1,0,1)$; $w_3=(2,0,2)$; $w_4=(1,1,1)$;
$w_5=(0,1,0)$; $w_6=(0,2,1)$

$$\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ \boxed{1}&0&1\\ 2&0&2\\ 1&1&1\\ 0&1&0\\ 0&2&1\end{pmatrix}$$

→ riga nulla!
→ scelgo un elemento "speciale" sotto il quale devo far venire tutti 0

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix} \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ \boxed{1}&0&1\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ 1&1&1\\ 0&1&0\\ 0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4-R_2}\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&1\\ 0&0&0\\ 0&\boxed{1}&0\\ 0&1&0\\ 0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_5-R_4}\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&1\\ 0&0&0\\ 0&\boxed{1}&0\\ 0&0&0\\ 0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_6\to R_6-2R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&1\\ 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$ → $\{(1,0,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathcal{L}(w_1,\dots,w_6)$

- LEMMA DI STEINIZ (1): "Sia $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ uno spazio vettoriale; siano $x_1,\dots,x_n\in V$ un insieme di generatori di V e siano $y_1,\dots,y_m\in V$ linearmente indipendenti; allora $n\geq m$" → se $x_1,\dots,x_n$ e $y_1\dots y_m$ sono linearmente dipendenti, allora $m\geq n$

- TEOREMA: "Sia $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ uno spazio vettoriale, sia $E=(e_1,\dots,e_n)$ una base ⟹ ogni altra base è formata da n elementi"

DIM: sia $F=(f_1,\dots,f_m)$ un'altra base di V → per il lemma di Steiniz $f_1,\dots,f_m$ sono linearmente indipendenti ⟹ $n\geq m$

$e_1,\dots,e_n$ sono generatori ⟹ $m\geq n$

$m=n$

- LEMMA DI STEINIZ (2) → "dati n generatori e m elementi linearmente indipendenti ⟹ numero di generatori ≥ numero di elementi lin. indipendenti"

- Def.: "Si dice che $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ ha **DIMENSIONE** n se ogni sua base è formata da n elementi" → se si hanno più di 2 vettori, allora dim è ALMENO 1 se tutti i vettori sono non nulli

ES. 1) $\dim V_2=2$ → $\mathcal{B}_c=\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$

2) $\dim\mathbb{R}^3=3$ → $\mathcal{B}_c=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

3) $\dim\mathbb{R}^n=n$

→ se considero $\mathbb{C}^2$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ gli elementi devono essere reali

$(\alpha, \beta) = (a + ib,\ c + id)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $= a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i)$

$((1,0),(i,0),(0,1)(0,i))$ forma una base di $(\mathbb{C}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ← è una combinazione lineare a coefficienti reali di elementi di $\mathbb{C}^2$

$\mathcal{B} = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ → su $\mathbb{R}$ sono linearmente indipendenti? sì

(3) - In $\mathbb{C}^3$ sia $W = \mathcal{L}(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ con $\overline{v}_1 = (1, i, -1)$ e $\overline{v}_2 = (i, i^2, i^3)$; calcolare la dimensione di W come $\mathbb{C}$-spazio vett. e $\mathbb{R}$-spazio vett.

↳ su $\mathbb{C}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & i^2 & i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & -1 \\ i & -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - iR_1]{} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{v}_2 = i\overline{v}_1$ ← $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_1$ sono linearm. dipendenti!

$\mathcal{B}_W = \{(1, i, -1)\}$; $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$

↳ su $\mathbb{R}$ (modo 1)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & i^2 & i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

→ su $\mathbb{R}$ non si può trovare un numero reale che annulli la i

la matrice non è riducibile → devo verificare manualmente se sono lin. indipendenti su $\mathbb{R}$

$$a(1, i, -1) + b(i, -1, -i) = (0,0,0) \rightarrow \begin{cases} a + ib = 0 \\ ai - b = 0 \\ -a - ib = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -ib \\ -i^2 b - b = 0 \\ ib - ib = 0 \end{cases}$$

questo tipo di sistema ha almeno una soluzione cioè quella banale

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow a = 0 = b, \rightarrow \overline{v}_1 \text{ e } \overline{v}_2 \text{ sono linearmente indipendenti}$$

$\dim_{\mathbb{R}} W = 2$

→ in generale se prendo due vettori linearmente dipendenti su $\mathbb{R}$ allora $\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{C}} W$

(modo 2) → considero la base canonica di $\mathbb{C}^3$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (i,0,0), (0,1,0), (0,i,0), (0,0,1), (0,0,i)\}$$

scrivo $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$ secondo le componenti della base canonica:

$\overline{v}_1 = (1, 0, 0, 1, -1, 0)$; $\overline{v}_2 = (0, 1, -1, 0, 0, -1)$ → costruisco la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ matrice a coefficienti reali riducibile
→ matrice già ridotta → 2 righe non nulle

$\dim_{\mathbb{R}} W = 2$

• **FORMULA DI GRASSMANN**: "Siano W, Z sottospazi di $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$; allora

$$\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)"$$

• **TEOREMA SULLE SOMME DIRETTE** (DIMENSIONI E BASI DI UNA SOMMA DIRETTA): "Siano $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ spazio vettoriale, $V_1, \dots, V_s$ sottospazi, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) la somma $V_1 + \dots + V_s$ è diretta
2) l'unione delle basi $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s$ è una base della somma di $V_1, \dots V_s$
3) $\dim(V_1 + \dots + V_s) = \dim(V_1) + \dots + \dim(V_s)$

RANGO DI UNA MATRICE

• "Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$; se indico con $R_1, \dots, R_m$ le righe di A pensate in $\mathbb{R}^n$ e se indico con $C_1, \dots, C_n$ le colonne di A pensate in $\mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ il sottospazio vettoriale $R_A = \mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto **SPAZIO DELLE RIGHE** di A

$\Rightarrow$ il sottospazio vettoriale $C_A = \mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \subseteq \mathbb{R}^m$ è detto **SPAZIO DELLE COLONNE** di A"

→ R_A, C_A sono due sottospazi diversi ma con medesima dimensione

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C_1 & & C_n \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ \\ R_m \end{array} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \in \mathbb{R}^n \\ \\ \in \mathbb{R}^n \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} \in \mathbb{R}^m & & \in \mathbb{R}^m \end{array} \end{array}$$

TEOREMA DEL RANGO: "Data una qualsiasi matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ allora

$$\dim R_A = \dim C_A"$$

DIM: pongo $A = (a_{ij})$, $r = \dim R_A \Rightarrow R_A$ è generato da r n-ple (ovvero $v_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n}), \dots, v_r = (c_{r1}, \dots, c_{rn})$) $\Rightarrow$ ogni riga è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_r$

$$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) = p_{11} v_1 + \dots + p_{1r} v_r = p_{11}(c_{11}, \dots, c_{1n}) + \dots + p_{1r}(c_{r1}, \dots, c_{rn})$$
$$\vdots$$
$$R_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}) = p_{m1} v_1 + \dots + p_{mr} v_r = p_{m1}(c_{11}, \dots, c_{1n}) + \dots + p_{mr}(c_{r1}, \dots, c_{rn})$$

↳ analogamente pongo $w_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix}, \dots, w_r = \begin{pmatrix} p_{1r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{pmatrix}$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix} = c_{11} w_1 + \dots + c_{r1} w_r = c_{11} \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix} + \dots + c_{r1} \begin{pmatrix} p_{1r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = c_{1n} w_1 + \dots + c_{rn} w_r = c_{1n} \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix} + \dots + c_{rn} \begin{pmatrix} p_{1r} \\ \vdots \\ p_{mr} \end{pmatrix}$$

→ per tutte le colonne cambiano i coefficienti in c, ma le w rimangono le stesse

- TEOREMA ROUCHÉ-CAPELLI: "Sia $AX = B$ un sistema lineare; sia $(A|B)$ la matrice completa del sistema; allora
  1) il sistema è risolubile $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|B)$
  2) se $p = \rho(A) = \rho(A|B)$ allora il sistema ammette $n-p$ incognite libere ($=$ ci sono ∞^{n-p} soluzioni)"

- DIM: 1) posso scrivere il sistema nella forma $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne in A $\longrightarrow$ il sistema è risolubile $\Leftrightarrow \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ t.c. $c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

questo significa che la matrice $(A|B)$ è combinazione lineare delle colonne di A $\longrightarrow$ il numero di colonne linearmente indipendenti ($=$ rango) di $(A|B)$ è uguale a quello di A $\longrightarrow$ lo spazio delle colonne di $(A|B)$ è generato dalle colonne di A, quindi $\rho(A) = \rho(A|B)$

2) Sia $AX = B$ risolubile. Fisso $p = \rho(A) = \rho(A|B)$; in A ci sono p colonne libere (suppongo che siano le prime) allora vale:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - x_{p+1} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} - \dots - x_n \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$$

posso determinare $x_1, \dots, x_p$ in modo unico al variare delle restanti variabili $x_{p+1}, \dots, x_n$

se $n = p \Rightarrow$ non ci sono incognite libere $\Rightarrow \exists!$ soluzione

se $n > p \Rightarrow$ si hanno ∞ soluzioni che dipendono da $n-p$ parametri indipendenti

- ESEMPI: 1
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
$\to$ geometricamente è l'intersezione di due rette non parallele tra loro $\longrightarrow$ so che il risultato è unico

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
devo ridurla in modo che anche la matrice A sia ridotta
$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$p = \rho(A) = 2$; $\rho(A|B) = 2$; $n = 2 \Rightarrow \exists!$ soluzione!

2
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \to n = 2$$
$\to$ geometricamente sono due rette parallele tra loro $\to \nexists$ soluzione

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$\to \rho(A) = 1$
$\to \rho(A|B) = 2$
$\to \nexists$ solu.

3
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$
$n = 2$

$\to$ geometricamente sono due rette coincidenti $\to$ ci sono ∞ soluzioni $\longrightarrow$ inoltre per Rouché Capelli dovrei trovare un'incognita in funzione dell'altra

ESERCIZI - 1 - Ridurre: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \boxed{5} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{4} & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - R_1}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & +1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \boxed{4} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{-3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_A = \mathcal{L}(R_1, R_2, R_4)$; $\mathcal{B}_{R_A} = (R_1, R_2, R_4) \leftarrow R_3 = R_2 + R_1 \leftarrow$ la matrice è ridotta

2 - Dato $\mathcal{L} = \{(1,-2,3,0), (2,-1,-1,2), (0,5,3,1)\}$

a) verificare che $\mathcal{L}$ è un insieme libero; b) completare $\mathcal{L}$ a una base di $\mathbb{R}^4$

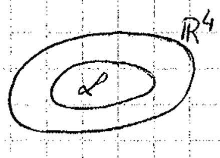
c) scrivere $(1,1,1,1)$ come comb. lineare degli elementi di $\mathcal{B}$

a) un insieme è libero $\Leftrightarrow$ gli elementi sono lin. indipendenti $\Leftrightarrow$ il rango è uguale al numero di righe della matrice di partenza

$$\mathcal{L} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ v_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & \boxed{2} \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - R_2}$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ 2v_3 - v_2 + 2v_1 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{7} & 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(\mathcal{L}) = 3 \Rightarrow \mathcal{L} \text{ è libero}$$

b) $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathcal{L}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^4 \to$



se inserisco un vettore $v \notin \mathcal{L}$ trovo $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$

$$\mathcal{L} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ e_1 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{7} & 13 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ ho aggiunto e_1 = riga non nulla
$\to \mathcal{L}$ continua a essere ridotta
$\to \rho(\mathcal{L}) = 4 \Rightarrow \mathcal{L}$ è ancora libero

$\Rightarrow \mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, e_1)$

c) $\vec{w} = (1,1,1,1) = a v_1 + b v_2 + c v_3 + d e_1$ $\to$ lavorando con le matrici aggiungo la riga $\vec{w}$ e riduco in modo da trovare la riga di w nulla

$$\mathcal{L} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ 2v_3 - v_2 + 2v_1 \\ e_1 \\ w \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{7} & 13 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ t \\ e_1 \\ \underbrace{7(2w - v_2) - 3t}_{= t_2} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{7} & 13 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} z - \cancel{t} + y + z + \cancel{t} = 0 \\ x = 2 - t \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2z \\ x = 2 - t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{(2-t, -2z, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z, t \in \mathbb{R}\} \to \mathcal{B}_0 = \{(1,-2,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

- TEOREMA: "Sia y_0 una soluzione di un sistema $AX=B$, allora ogni altra soluzione è nella forma $y - y_0$ dove y è soluzione del sistema omogeneo associato $AX=0$"

- TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI GENERALIZZATO: a) $AX=B$ è risolubile $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A|B)$

b) se $\rho(A) = \rho(A|B) = P$ allora si possono assumere $n-P$ righe di X libere

<u>COROLLARIO</u>: se $A, X, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $\rho(B)=n$ allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
a) $AX = B$ è risolubile
b) $AX = B$ ha una sola soluzione
c) $\rho(A) = n$

ESEMPIO: Risolvere l'eq. $AX=B$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ($\Rightarrow X = ?$)

$\to \rho(A) = 2$; X avrà 2 righe e 2 colonne $\to X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$

$\to \rho(A|B) = 2$? $\to (A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ $\rho(A|B) = 2$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 2 \to$ il sistema è risolubile e avrà un'unica soluzione

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = (1,2) \\ X_1 = (2,-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} (2,-1) + X_2 = (1,2) \\ X_1 = (2,-1) \end{cases}$$

$\to$ moltiplico righe x colonne

$$\begin{cases} X_2 = (-1,3) \\ X_1 = (2,-1) \end{cases}$$ ok!

MATRICI INVERTIBILI:

"Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice **INVERTIBILE** se $\exists B \in \mathbb{R}^{n,n}$ t.c. $AB = I_n$ (= mat. identica)"

<u>PROPRIETÀ</u>: 1) se c'è l'inversa, questa è unica
2) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
3) A è invertibile $\Leftrightarrow \rho(A) = n$ cioè se $\rho(A)$ è max

per trovare l'inversa è necessario risolvere il sistema $AX = I$

ESEMPIO: Calcolare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2}$$

(c) $\rho(A) \neq \rho(A|B)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \\ z+t=1 \\ z+t=1 \\ z+t=1 \end{cases}$$

matrice non ridotta! $\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → A è ridotta, → (A|B) non è ridotta

non ci sono soluzioni $\Leftarrow \rho(A) \neq \rho(A|B) \Leftarrow \rho(A)=2; \quad \rho(A|B)=3$

(d) $n-\rho(A)=4 \Rightarrow \rho(A)=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

(e) $n-\rho(A)=5 \Rightarrow$ impossibile!

(3) - Discutere al variare di $m \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+4z=1 \\ x+3y+6z=m \end{cases} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & m \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right)$$

→ se $m=1 \Rightarrow \rho(A)=\rho(A|B)=2 \Rightarrow$ il sistema è risolubile e ha ∞^1 soluzioni

→ se $m \neq 1 \Rightarrow \rho(A)=2 \neq \rho(A|B)=3 \Rightarrow$ il sistema non è risolubile

(4) - Trovare una base di S, con S = spazio delle soluzioni di:

$$\begin{cases} x-y-2z+t=0 \\ x+\lambda y-2z-\lambda t=0 \\ \lambda(x+y)+2\lambda z-\lambda t=0 \end{cases}$$

→ sistema omogeneo a 3 equazioni e 4 incognite → mi aspetto almeno una soluzione

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda & -2 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & +2\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-\lambda R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 2\lambda & 4\lambda & -2\lambda \end{pmatrix} \overset{R_2}{\underset{R_3}{\longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2\lambda & 4\lambda & -2\lambda \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}$$ → è ridotta!

↳ se $\lambda \neq 0$, $\lambda=-1 \Rightarrow \rho(A)=2$; dim $S = n-\rho(A)=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x-y-2z+t=0 \\ -2y-4z+2t=0 \\ 0=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=y+2z-t=t-2z+2z-t=0 \\ y=t-2z \end{cases}$$

$$S_{(-1)}=\{(0,t-2z,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid z,t\in\mathbb{R}\} \to \mathcal{B}_{S_{-1}}=\{(0,-2,1,0),(0,1,0,1)\}$$

↳ PROPRIETÀ: 1) Sia B la matrice ottenuta da A riducendola usando E_1, allora il determinante non cambia $\Rightarrow \det A = \det B$

2) Sia B la matrice A ridotta usando E_2 $(R_i \leftrightarrow R_j)$, allora $\det B = -\det A$

3) Sia B la matrice ottenuta riducendo A con E_3 $(R_i \to \lambda R_j)$, allora $\det B = \lambda \det A$

4) $\det A = \det {}^tA$

5) se A ha 2 righe (o colonne) uguali $\Rightarrow \det A = 0$

6) FORMULA DI BINET = "il prodotto dei determinanti è il determinante dei prodotti" $\Rightarrow$ **$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$**

↳ se A è una matrice triangolare (con tutti zeri sotto la diagonale) allora il determinante è pari al prodotto degli elementi sulla diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

• TEOREMA: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ allora sono verificate le seguenti condizioni:
1) $AX = 0$ ha soluzioni non nulle
2) $\rho(A) < n$
3) $\det A = 0$

• TEOREMA: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora 1) $\det A \neq 0 \iff$ A è invertibile

2) $\det(A^{-1}) = (\det(A^{-1}))^{-1}$ se A è invertibile

DIM (1): $(\Rightarrow)$ se $\det A \neq 0$ si ha: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ji})$

è la matrice dei complementi algebrici della trasposta

$(\Leftarrow)$ se A è invertibile allora $\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che

$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$

uso la formula di Binet $\rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\det A \neq 0$, QUINDI

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \rightarrow$ dimostrato anche il punto (2)

• TEOREMA DI KRONECKER: Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ allora sono verificate: 1) $\rho(A) = P$ con $P =$ ordine dei minori

2) A ha un minore di ordine P non nullo e tutti i minori di ordine P+1 che lo contengono nulli

il rango è l'ordine massimo dei minori non nulli

• REGOLA DI CRAMER: "Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, invertibile, allora $AX = B$ è equivalente a $X = A^{-1} \cdot B$"

in particolare il vettore $(x_1, \dots, x_n)$ è dato da: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$ con

$\Delta_i =$ determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la i-ma colonna con B

1) $D(f+g) = D(f) + D(g)$

2) $D(\lambda f) = \lambda D(f)$

$\Rightarrow$ D è applicazione lineare

(4) $\int_a^b : C^0_f([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longrightarrow \int_a^b f\, dx$ $\Leftrightarrow$ le funzioni integrabili sono applicazione lineare?

1) $\int_a^b f+g\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx$

2) $\lambda \int_a^b f\, dx = \int_a^b \lambda f\, dx$

$\Rightarrow$ è app. lineare

(5) $f: V \rightarrow W$, $x \rightarrow 0_W$ $\Rightarrow$ se un elemento associa lo zero, allora la funzione è applicazione lineare

(6) $f: V \rightarrow V$, $x \rightarrow x$ $\Rightarrow$ se un elemento associa se stesso, allora la funzione è applicazione lineare

$\Downarrow$

• Def: " Un'applicazione lineare è detta **ENDOMORFISMO** se lo spazio vettoriale di partenza è uguale a quello di arrivo "

(7) $\mu_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1,..x_n) \longrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ moltiplicazione per una matrice è app. lineare?

1) siano $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $A(x+y) = A(x) + A(y)$
$\mu_A(x+y) = \mu_A(x) + \mu_A(y)$

2) sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\mu_A(\lambda x) = \mu_A \lambda (x)$
$A(\lambda x) = A\lambda(x)$

• Sia $E = (e_1, ..., e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e siano $c_1,..,c_n$ le colonne di A (con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$) allora

$\mu_A(e_1) = c_1; ... ; \mu_A(e_n) = c_n$ $\Rightarrow$ le immagini della base canonica sono sulle colonne della matrice

$\Downarrow$

<u>ESEMPIO</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mu_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \rightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\mu_A(e_1) = \mu_A(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mu_A(e_2) = \mu_A(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu_A(e_3) = \mu_A(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• **<u>PROPRIETÀ</u>** delle applica. lineari: 1) Sia $f: V \rightarrow W$ app. lineare $\Rightarrow$ $f(0_V) = 0_W$

<u>DIM</u>: $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} \cdot 0_V) \underset{\uparrow}{=} 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$

posso farlo x la prop. del prodotto delle app. lineari

• **TEOREMA**: "Fissati $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ e le basi $E=(e_1, \dots, e_n)$, $F=(f_1, \dots, f_m)$, le definizioni precedenti danno questa corrispondenza biunivoca: $\mathbb{R}^{m,n} \longleftrightarrow L(V, W)$"

$\Downarrow$

DIM: $\phi : \mathbb{R}^{m,n} \to L(V,W)$, $A \to \varphi_A^{E,F}$

$\psi : L(V,W) \to \mathbb{R}^{m,n}$, $\varphi \to M_\varphi^{E,F}$

sono una l'inversa dell'altra

$\Downarrow$

a ogni applicazione lineare è associabile una base

$\Downarrow$

ES. ① $id : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x,y)$ — ? $M_{id}^{C,C}$ rispetto alle basi canoniche C, C di $\mathbb{R}^2$

$id(1,0) = (1,0) = 1e_1 + 0e_2$ → coincidono con le componenti della base canonica

$id(0,1) = (0,1) = 0e_1 + 1e_2$

$$\Rightarrow M_{id}^{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ed è la matrice identica

② $id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x,y)$ — ? $M_{id}^{C,F}$ rispetto a C = base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $F = \{\underbrace{(0,1)}_{=f_1}, \underbrace{(-1,1)}_{=f_2}\}$

$id(1,0) = (1,0) = f_2 - f_1$ ⇒ ha componenti $(-1,+1)$ rispetto ad F

$id(0,1) = (0,1) = f_1 + 0f_2$ ⇒ " " $(1,0)$ " " "

$$\Rightarrow M_{id}^{C,F} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{id(1,0)}$ $\underbrace{\quad}_{id(0,1)}$

• Al variare delle basi E, F si hanno differenti corrispondenze biunivoche tra $\mathbb{R}^{m,n}$ e $L(V,W)$

$\Downarrow$

cambiando la base, cambia l'applicazione stessa!

$\Downarrow$

$M_\varphi^{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con C = base canonica e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x+y, x)$

• Siano $\varphi : V \to W$ e $\psi : V \to W$ app. lineari, ⇒ $M_{\varphi+\psi}^{E,F} = M_\varphi^{E,F} + M_\psi^{E,F}$

• Siano $\varphi : V \to W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ ⇒ $M_{\lambda\varphi}^{E,F} = \lambda M_\varphi^{E,F}$

• Siano V, W, Z spazi vettoriali con basi E, F, G e siano $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ app. lineari allora:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ\psi"'] & W \arrow[r, "\psi"] & Z \end{tikzcd}$$

↳ in oltre $M_{\varphi\circ\psi}^{E,G} = M_\varphi^{E,F} \cdot M_\psi^{F,G}$ = moltiplicazione tra matrici

• **NUCLEO DI UN'APP. LINEARE**: "Sia $f : V \to W$ app. lineare, si definisce nucleo:

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \}$" → è l'insieme che comprende tutti gli elementi di f tali che la loro immagine sia lo zero di W

ⓒ $\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 4x + 2y + z = b \end{cases}$ $m=3$; $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2-a & 0 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 & b-3 \end{array}\right)$$

↳ se $a = 0 \Rightarrow \rho(A) = 2$; → se $b \neq 3 \Rightarrow \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni

→ se $b = 3 \Rightarrow \rho(A|B) = 2 \Rightarrow$ ci sono ∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} 3x + \quad + z = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} z = 1 - 3x \\ y = \frac{1}{2}(2-x) \end{cases}$$

↳ se $a \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3$; $\rho(A|B) = 3 \ \forall b \Rightarrow$ c'è un'unica soluzione: $\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ -ay = b - 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} z = 1 - 3x - ay \\ x = 2 - 2y \\ y = +\frac{1}{a}(3-b) \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1 - 6 + \frac{6}{a}(3-b) - (3-b) \\ x = 2 - \frac{2}{a}(3-b) \\ y = \text{〃} \end{cases}$$

ⓓ $\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ 3x + y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

→ SISTEMA OMOGENEO ⇒ se $m < n \Rightarrow \rho(A) \leq m < n \Rightarrow$ ci sono soluzioni NON banali

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rho(A) = 2;\ \infty^2 \text{ soluzioni}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2z + y - z + t = 0 \\ x = -z \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - t \\ x = -z \end{cases}$$

$S = \{(-z, 3z-t, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z, t \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 2$ = coincide con le incognite libere

$\mathcal{B}_S$ = base di $S = \{\underset{z=1,\, t=0}{(-1, 3, 1, 0)}, \underset{z=0,\, t=1}{(0, -1, 0, 1)}\}$

è definito SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO il sistema che ha per matrice A la stessa matrice A' di un sistema omogeneo e per matrice B una matrice non nulla

__TEOREMA:__ l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$ si può ottenere aggiungendo alle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$ una qualunque soluzione del sistema $AX = B$

se aggiungo $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ al sistema di prima e sapendo che $S = \{(1, -2, 0, 1)\}$, allora

$$S = \{(1, -2, 0, 1) + (-z, 3z-t, z, t)\} = \{(1-z, 3z-t-2, z, t+1)\}$$

ⓔ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = (1, 2) \\ 2x_1 + x_2 = (0, 1) \end{cases} \Leftrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right)$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ c'è un'unica soluzione

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = (1, 2) \\ -3x_2 = (-2, -3) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (1, 2) - 2\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \\ x_2 = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

ⓕ $XA = B$ t.c. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$XA = B \Leftrightarrow {}^t(XA) = {}^tB \Leftrightarrow {}^tA\, {}^tX = {}^tB \Rightarrow {}^tX$ è l'incognita

• Un'applicazione lineare INIETTIVA si dice MONOMORFISMO
SURIETTIVA si dice EPIMORFISMO
INIETTIVA E SURIETTIVA si dice ISOMORFISMO $\Rightarrow f$ è isomorfismo $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_V\}$, $\mathrm{Im} f = W$

• TEOREMA (IMMAGINI DI SOTTOSPAZI): "Sia $f: V \to W$ app. lineare e Z sottospazio vett. di V; allora
a) $f(Z)$ è sottospazio di W
b) l'app. $g: Z \to f(Z)$ indotta da f è lineare
c) $\mathrm{Im} f$ è sottospazio vett. di W"

DIM (a) considero Z e la sua immagine 1) siano $y_1, y_2 \in f(Z) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in Z$ t.c. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = \underbrace{f(\underbrace{x_1 + x_2}_{\in Z})}_{\in f(Z)} \text{ ok!}$$

2) siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in f(Z) \Rightarrow \exists\, x \in Z$ t.c. $f(x) = y$

$$\lambda y_1 = \lambda f(x_1) = \underbrace{f(\underbrace{\lambda x_1}_{\in Z})}_{\in f(Z)} \text{ ok!}$$

3) $0_V \in Z$ in quanto Z è sottospazio $\Rightarrow f(0_V) = 0_W \in f(Z)$

(b) è vero se considero il sottospazio
(c) è dimostrabile come il punto (a) ma considerando $Z = W \Rightarrow f(V) = \mathrm{Im} f$

• Sia $\varphi: V \to W$ app. lineare, $E = (e_1, \dots, e_n)$ base di V, $F = (f_1, \dots, f_m)$ base di W; allora

$\mathrm{Im} f = \{ y \in W \mid \exists\, x \in V \text{ t.c. } f(x) = y \} = \{ y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m \in W \mid \exists\, x = x_1 e_1 + \dots + e_m x_m \mid M_\varphi^{EF} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \}$

QUINDI $\Rightarrow y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m \in \mathrm{Im} f$ se $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle colonne di M_φ^{EF}

$\Rightarrow$ rango di M_φ^{EF} (completa) = rango $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = C_A$ (= spazio delle colonne di A, con $A = M_\varphi^{E,F}$)

• TEOREMA: "Siano $\varphi: V \to W$ app. lineare, E base di V, F base di W, allora:
a) $\mathrm{Im} f$ è generato dai vettori aventi per componenti rispetto a F le colonne di A
b) $\mathrm{Im} f$ è isomorfo allo spazio delle colonne di A
c) $\dim \mathrm{Im} f = \rho(A)$"

• **Metodo per trovare una base di $\mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Ker} f$**: 1) costruisco la matrice A

2a) per trovare $\mathrm{Ker} f$, risolvo $AX = 0 \Rightarrow$ riduco A per righe $\Rightarrow$ base $\mathrm{Ker} f$
2b) per trovare $\mathrm{Im} f$, riduco A per COLONNE $\Rightarrow$ base $\mathrm{Im} f$

da Rouché-Capelli: $\dim \mathrm{Im} f = \rho(A)$
$\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \rho(A)$

• TEOREMA DELLA DIMENSIONE: "$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$"

ESERCIZI - (1) Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, data da $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$. Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e di $\mathrm{Im} f$

$\Rightarrow$ da A posso ricavare $f \Rightarrow$ moltiplico righe x colonne tra A e (x, y, z), elementi qualunque di f

$$f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y + 3 \cdot z \\ 3 \cdot x + 1 y + 4 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x + y + 3z \\ 3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ è iniettiva; $\quad B_{Im f} = \{(1,0,1,1), (-2,1,-1,2), (0,-1,1,2)\}$

c) non essendo suriettiva non sono sicuro di trovare una controimmagine $\to$ impongo $AX = B$ dato che $f^{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,1,1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid M_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$$(M_f \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(M_f \mid B) = 4 \neq \rho(M_f) = 3 \Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni $\Rightarrow f^{-1}(1,1,1,1)$ non ha controimmagini

4) Data $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \to (x+y-mz, x+y+mz)$

a) $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(m)$ è iniettiva?
b) base di $\ker f$

a) f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = 0 \Rightarrow 3 - \underbrace{\rho(M_f)}_{\max = 2 \ (\mathbb{R}^2)} = \quad \Rightarrow = 1$ se f suriettiva
$= 3$ se $\dim Im f = 0$
$= 2$ se $\dim Im f = 1$

$\hookrightarrow$ costruisco $M_f \Rightarrow$
$f(1,0,0) = (1,1)$
$f(0,1,0) = (1,1)$
$f(0,0,1) = (-m, m)$

$$M_f = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$\to$ se $m = 0 \Rightarrow \rho(M_f) = 2 \Rightarrow \dim \ker f = 3 - 2 = 1 \to f$ è suriettiva
se $m \neq 0 \Rightarrow \rho(M_f) = 1 \Rightarrow \dim \ker f = 3 - 1 = 0$

$\Rightarrow f$ non è mai iniettiva

b) sia $m \neq 0$, devo risolvere $MX = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ -2mz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \{(-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$

$B_{\ker f} = \{(-1, 1, 0)\}$

sia $m = 0$, allora $x + y = \quad ; \quad x = -y \Rightarrow \ker f = \{(-y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$
$B_{\ker f} = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

5) Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $f: V \to V$
$v \to x^2 \frac{d^2 v}{(dx)^2} - x \frac{dv}{dx}$

a) calcolare $f(2 - 2x - 4x^2 + x^3)$
b) Trovare $\ker f$ e $Im f$
c) Trovare $f^{-1}(2x + 3x^3)$

a) $v = 2 - 2x - 4x^2 + x^3, \quad \frac{dv}{dx} = -2 - 4(2)x + 3x^2, \quad \frac{d^2 v}{(dx)^2} = -8 + 6x$

$\Rightarrow f(v) = x^2(-8 + 6x) - x(-2 - 8x + 3x^2) = \cancel{-8x^2} + 6x^3 + 2x + \cancel{8x^2} - 3x^3 = 2x + 3x^3$

b) $E = (1, x, x^2, x^3) =$ base di $V \Rightarrow f(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = 0$
$f(x) = 0 \cdot 1 - 1x + 0x^2 + 0x^3 = -x$
$f(x^2) = x^2(2) - x(2x) = 2x^2 - 2x^2 = 0$
$f(x^3) = x^2(6x) - x(3x^2) = 6x^3 - 3x^3 = 3x^3$

$$M_f^{E,E} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{array} \end{array} \Rightarrow \rho(M_f^{E,E}) = 2 \Rightarrow \dim \ker f = \underbrace{4}_{\text{= numero di elementi della base}} - 2 = 2$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$B_{\ker f} = \{(1,0,0,0), (0,0,1,0)\} = \{1, x^2\} = B$

• TEOREMA SULLE MATRICI DI PASSAGGIO: "Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$, siano E, F due basi e sia P la matrice di passaggio da E in F, allora P è invertibile e la matrice P^{-1} è quella di passaggio da F a E"

$\Downarrow$

DIM: considerando $P = M_\varphi^{E,E}$, t.c. $\varphi: V \to V$ app. lineare t.c. $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n \Rightarrow \varphi$ è automorfismo perché $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \rho(M_\varphi^{E,E})$ è max $= \rho(P) = n \iff \det(P) \neq 0 \Rightarrow P$ è invertibile

$\Downarrow$

inoltre $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)P \Rightarrow P$ è la matrice tra E e F, ma se P è invertibile allora posso moltiplicare tutto per $P^{-1} \Rightarrow$

$$P^{-1}(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n) \underbrace{\boxed{P \cdot P^{-1}}}_{= id}$$

$\Downarrow$

P è la matrice tra F e E

• TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI BASE: "Sia $f: V \to W$ app. lineare, siano E, E' basi di V e F, F' basi di W, sia P la matrice tra E ed E' e Q quella da F a F', se poniamo $A = M_f^{E,F}$ e $A' = M_f^{E',F'}$, allora

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P"$$

$\Downarrow$

DIM:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] & W \arrow[d, shift left, "Q^{-1}"] \\ V \arrow[u, "P = M_f^{E,E'}"] \arrow[r, "A'"] & W \arrow[u, shift left, "Q = M_{id_W}^{F,F'}"] \end{tikzcd}$$

$\Downarrow$

COROLLARI: 1) Siano P, Q invertibili e sia A una matrice t.c. $A' = Q^{-1}AP$ abbia senso; allora
$\rho(A) = \rho(A')$
- $\Rightarrow$ vale anche se P e Q non hanno lo stesso ordine
- $\Rightarrow$ posso vedere A, A' come matrici associate alla stessa app. lineare
- $\Rightarrow$ il rango di una matrice non cambia se moltiplico a destra o a sinistra per una matrice invertibile

2) Siano $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$, E, F basi, P matrice di passaggio tra E ed F, $f: V \to V$ app. lineare, allora
$$M_f^{F,F} = P^{-1} \cdot M_f^{E,E} \cdot P$$

• Def: "$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dicono SIMILI se $\exists P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$" $\Rightarrow \rho(A) = \rho(B)$
$\Rightarrow \det A = \det B$

• ESEMPIO: Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \to (x+y, y-z)$
e siano: E = base canonica di $\mathbb{R}^3$
$E' = (f_1, f_2, f_3)$ con $f_1 = e_1 - e_2$; $f_2 = e_1 - e_3$; $f_3 = e_2 + e_3$
F = base canonica di $\mathbb{R}^2$
$F' = (f'_1, f'_2)$ con $f'_1 = (1,1)$ e $f'_2 = (0,1)$

$$\Rightarrow A = M_f^{E,F} = M_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ed è la più semplice possibile

(modo 1) $A' = M_f^{E',F'} \Rightarrow$ devo mettere sulle colonne le immagini f_1, f_2, f_3 rispetto alla base F' (= devo trovare le componenti di $f(f_1), f(f_2), f(f_3)$)

$\Downarrow$

$f(f_1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -(0,1) = -f'_2 \Rightarrow$ ha componenti $(0, -1)$

$f(f_2) = e_1 - e_3 = f(1, 0, -1) = (1, 1) = f'_1 \Rightarrow$ ha componenti $(1, 0)$

$f(f_3) = f(0, 1, 1) = (1, 0) = (1, 1) - (0, 1) \Rightarrow$ ha componenti $(1, -1)$

$$\Rightarrow A' = M_f^{E',F'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

componenti di $f(f_1)$

$\ker f$ = soluzioni del sistema: $\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x \\ z=-x \end{cases} \Rightarrow \ker f = \{(x,-x,-x)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x\in\mathbb{R}\}$

$B_{\ker f} = \{(1,-1,-1)\}$

c) (modo 1) su A → le COLONNE rappresentano le immagini della base canonica
→ le RIGHE sono i coefficienti di x, y, z per trovare il vettore immagine

righe: $f(x,y,z) = (x+y,\ x+z,\ y-z,\ y-z) \Rightarrow f(1,-2,0) = (-1,\ 1,\ -2,\ -2)$

(modo 2) $f(1,-2,0) \Leftrightarrow A\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ dà l'immagine! →

$f(v) \Leftrightarrow A(v)$
$f(v)=0 \Leftrightarrow A(v)=0$
$f(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \underset{4\times3}{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}}\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1-2+0\\1+0+0\\0+(-2)+0\\0-2+0\end{pmatrix} = \underset{4\times1}{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-2\end{pmatrix}}$$

d) $f^{-1}(w) \Leftrightarrow Ax = w$ = risolvere il sistema lineare non omogeneo, ma

$f^{-1}(w) = \ker f + v_0 \Rightarrow \forall v_0\ \ f(v_0)=w \Rightarrow$ conoscendo una qualunque controimmagine ed a essa aggiungo il nucleo, allora trovo TUTTE le controimmagini (→ inoltre perché w abbia controimmagini deve valere $w \in \operatorname{Im} f$)

↳ dal punto c si sa che $f\underbrace{(1,-2,0)}_{=v_0} = \underbrace{(-1,1,-2,-2)}_{w}$ e dal punto b si ha che
$\ker f = \mathcal{L}(1,-1,-1)$

QUINDI $f^{-1}(w) = \ker f + v_0 \Rightarrow f^{-1}(-1,1,-2,-2) = \{a(1,-1,-1)+(1,-2,0)\} =$
$= \{(1+a,\ -2-a,\ -a)\ \forall a\in\mathbb{R}\}$

e) ? trovare che $f^{-1}(1,0,0$ è l'insieme vuoto

(modo 1) $Ax = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ non ha soluzioni! ⇒ non ci sono controimmagini

(modo 2) $\underbrace{(1,0,0,0)}_{=E_1} \notin \operatorname{Im} f = \mathcal{L}(C_2, C_4) \to$

$$\begin{array}{ccc} C_2 & C_4 & E_1 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix}0&1&\boxed{1}\\\boxed{1}&0&0\\-1&\boxed{1}&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$
la matrice è ridotta x colonne
↓
tutte le colonne sono lin. indip.

④ Sia $f: V_3 \to \mathbb{R}_3[x]$ app. lineare tale che
$f(\hat{i}) = 1+x$
$f(\hat{j}) = 1+x^2+x^3$
$f(\hat{k}) = x-x^2-x^3$
≈ es. 3

a) $A = M_f^{c,c} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ → è come la matrice dell'es. 3! ⇒ non è né iniettiva, né suriettiva

b) $\dim \operatorname{Im} f = 2 \Rightarrow B_{\operatorname{Im} f} = \{(1+x^2+x^3,\ x-x^2-x^3)\}$

$\dim \ker f = 1 \Rightarrow B_{\ker f} = \{(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})\}$

$f(e_3) = -\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0\\-3&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0\\-4&2\end{pmatrix} = -2e_1 - 4e_3 + 2e_4$

$f(e_4) = \begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2\\0&-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix} = -2e_2 - 2e_3$

$\Rightarrow M_f^{CC} = \begin{pmatrix}0&-2&-2&0\\2&4&0&-2\\2&0&-4&-2\\0&2&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix}\boxed{2}&4&0&-2\\0&-2&-2&0\\2&0&-4&-2\\0&2&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix}\boxed{2}&4&0&-2\\0&\boxed{-2}&-2&0\\0&-4&-4&0\\0&2&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 + 2R_2}$

$\begin{pmatrix}2&4&0&-2\\0&-2&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \rho(M_f^{CC}) = 2 \to \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 2x + 4y - 2t = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t - 2y = t + 2z \\ y = -z \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix}t+2z & -z\\ z & t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid z,t \in \mathbb{R} \right\}$; $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix} \right\}$

b) $M \in \operatorname{Ker} f = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\} \iff \exists\, a,b \in \mathbb{R}$ t.c. $a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2b&-b\\b&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a+2b&-b\\b&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \to \begin{cases} a+2b=1 \\ -b=1 \\ b=1 \\ a=1 \end{cases}$ contraddizione! $\to M \notin \operatorname{Ker} f$

c) $N \in \operatorname{Im} f \iff \exists \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ t.c. $f\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = N \iff \exists \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ t.c. $M_f \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

(<u>modo 1</u>) $\left(M_f \,\middle|\, \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}0&\boxed{-2}&-2&0\\2&4&0&-2\\2&0&-4&-2\\0&2&2&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{matrix}0&\boxed{-2}&-2&0\\2&0&-4&-2\\2&0&-4&-2\\0&0&0&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\2\\0\\2\end{matrix}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$

$\left(\begin{matrix}0&-2&-2&0\\2&0&-4&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\2\\-2\\2\end{matrix}\right) \xrightarrow{R_3 + R_4} \left(\begin{matrix}0&-2&-2&0\\2&0&-4&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\2\\-2\\0\end{matrix}\right)$ $\rho(M) = 2 \neq \rho(M|\,) = 3 \to N \notin \operatorname{Im} f$

(<u>modo 2</u>) Prendo $f\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2y-2z & 2x+4y-2t\\ 2x-4z-2t & 2y+2z\end{pmatrix}$

se $M \in \operatorname{Ker} f$ sostituisco M in (x,y,z,t) e il risultato dovrà essere $(0,0,0,0)$

se $N \in \operatorname{Im} f$ eguaglio i 4 termini e risolvo il sistema

(M) Data $A = \begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\end{pmatrix}$ allora

a) sia $f \in \operatorname{endo}(\mathbb{R}^3)$ t.c. $A = M_f^{CC} \Rightarrow$? $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$

b) sia $f \in \operatorname{endo}(\mathbb{R}^3)$ t.c. $A = M_f^{EF}$ con $E = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ e $F = \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\} \Rightarrow$? $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$

a) $A = \begin{pmatrix}\boxed{1}&1&2\\2&1&3\\3&1&4\end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - 2C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0\\2&\boxed{-1}&-1\\3&-2&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{(1,2,3),(0,-1,-2)\}$

b) gli elementi di $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ trovati rispetto alla base canonica sono le componenti rispetto a F:

se $g_1 = (1,2,3)$ e $g_2 = (0,-1,-2)$, allora

- → non posso usare le matrici perché il campo ha $\dim V = \infty$, quindi devo cercare un'altra strada

- → risolvendo la differenziale trovo come soluzioni $f(x) = C e^{\lambda x}$ $\forall \lambda$ trovo un autovettore non nullo → $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore ⇒ $\forall \lambda$ $V_\lambda = \{ C e^{\lambda x} \in V \text{ t.c. } C \in \mathbb{R} \}$
  $\dim V_\lambda = 1$ perché ho un solo parametro mobile

- TEOREMA: "Siano V spazio vettoriale, E, F due basi, $\varphi: V \to V$ endomorfismo; siano $A = M_\varphi^{E,E}$ e $B = M_\varphi^{F,F}$; allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico"
  ↳ è invariabile rispetto alle basi

- TEO (AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI): "Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalori DISTINTI di un endomorfismo $\varphi: V \to V$ e siano $v_1 \in V_{\lambda_1}, \dots v_m \in V_{\lambda_m}$ autovettori non nulli, allora sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI**"

  DIM: supponiamo che $v_1, \dots, v_i$ siano linearmente dipendenti, allora
  $v_{i+1} = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i$ → applico φ a tutti i membri, quindi
  $\varphi(v_{i+1}) = \varphi(a_1 v_1 + \dots + a_i v_i)$ ⇒ $\lambda_{i+1} v_{i+1} = a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_i \lambda_i v_i$ ma sapendo che $v_{i+1} = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i$ ⇒ $\lambda_{1+i}(a_1 v_1 + \dots + a_i v_i) = \lambda_1 a_1 v_1 + \dots + \lambda_i a_i v_i$
  ⇒ $a_1(\lambda_{i+1} - \lambda_1) v_1 + \dots + a_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i) v_i = 0_V$

  $\lambda_1, \dots, \lambda_{1+i}$ sono distinti e non nulli per hp ⇒ solo le a possono essere nulle
  ⇓
  $a_1 = \dots = a_i = 0_V$ → $v_{i+1} = 0$ → mai vero

- Def: "Un endomorfismo si dice **SEMPLICE** se ammette una base formata solo da autovettori"
  ⇓
  ovvero $\exists$ E = base tale che $M_f^{E,E}$ è diagonale → gli autovalori sono sulla diagonale principale di $M_f^{E,E}$
  $$M_f^{E,E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \to f(e_1) = \lambda_1 e_1; \dots; f(e_n) = \lambda_n e_n$$

- Se $f: V \to V$ con $\dim V = n$, e se ha n autovalori distinti, allora si hanno n autovettori linearmente indipendenti che formano una base (⇔ il polinomio dà n radici distinte)

- ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ ∃? λ; autovettori
  $(x,y) \to (x+y, y)$
  $$M_E^{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A; \quad \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0; \quad (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

  ↳ per trovare gli autovettori calcolo l'autospazio → $V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) - \lambda I = 0 \} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) - I = 0 \}$
  è l'insieme di $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ ↵
  ⇓
  $$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}$$
  → $\dim V_1 = 1$
  → gli autovettori sono tutti multipli di 1

- Def: "Sia $\varphi: V \to V$ endomorfismo e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore; diciamo che λ ha **MOLTEPLICITÀ** m_λ se è una radice del polinomio caratteristico di molteplicità algebrica m_λ"

3) posso vedere A come la matrice associata a un'app. lineare: $A = M_f^{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (y,x)$;

$\Rightarrow$ cerco l'autospazio di λ_1: $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$ $\to$ dim $V_1 = 1$

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A-I) = 1 \longrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}; \quad \mathcal{B}_{V_1} = \{(1,1)\}$$

$\Rightarrow$ cerco l'autospazio di λ_2: $V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$ $\to$ dim $V_{-1} = 1$

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 1 \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{-1} = \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{B}_{V_{-1}} = \{(1,-1)\}$$

4) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\to$ ha sulla diagonale gli autovalori

• PROP: " Siano $f: V \to V$ endomorfismo, λ un autovalore, V_λ l'autospazio associato; allora λ^2 è autovalore di $f^2 = f \circ f$ e $V_\lambda \leq W_{\lambda^2}$ "

DIM: sia $v \in V \Rightarrow f(v) = \lambda v \Rightarrow f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v \Rightarrow v \in W_{\lambda^2}$
e λ^2 è autovettore di f^2

ESEMPIO: Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ con autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -1$;
gli autovalori di $A^3 = A \cdot A \cdot A$ sono: $\lambda_1 = 1^3$; $\lambda_2 = 0^3$, $\lambda_3 = 2^3$; $\lambda_4 = -1^3$

ESERCIZI: (1) Dati $\vec{u} = (1,-1,0,-1)$ e $\vec{v} = (2,0,-3,1)$ e $p(x) = 1 - x$ e $q(x) = 3 + x - x^2$
a) Trovare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ app. lineare t.c. Ker$f = \mathcal{L}(u,v)$ e Im$f = \mathcal{L}(p(x), q(x))$
b) Trovare $M_f^{\mathcal{B},S}$ con $S = \{(1, x, x^2)\}$

a) Ker$f = \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow f(\vec{v}) = f(\vec{u}) = 0 \Rightarrow$ devo completare $\vec{u}, \vec{v}$ a base di $\mathbb{R}^4$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ e_3 \\ e_1 \end{array}$$

$\to$ devo trovare altri vettori lin. indipendenti da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e che diano forme alla matrice ridotta $\to$ ho ∞ possibilità di scelta $\Rightarrow \mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, e_3, e_1\}$

$\hookrightarrow$ definisco f su $\mathcal{B}$: $\left.\begin{array}{l} f(\vec{u}) = 0 \\ f(\vec{v}) = 0 \end{array}\right\}$ Ker$f = \mathcal{L}(u, v)$
$\left.\begin{array}{l} f(e_3) = p(x) \\ f(e_1) = q(x) \end{array}\right\}$ Im$f = \mathcal{L}(p(x), q(x)) \Rightarrow$ Im$f = \{(0, 0, p(x), q(x)\} = \{(p(x), q(x))\}$ OK!

b) $M_f \in \mathbb{R}^{3,4} \Rightarrow M_f^{\mathcal{B},S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

1) A è simmetrica $\Rightarrow$ è diagonalizzabile
2) $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0;$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] - 1\left[(\cancel{1}-\lambda) - \cancel{1}\right] + 1\left[\cancel{1} - (\cancel{1}-\lambda)\right] = 0;$$

- se $\boxed{a=1}$ $\lambda_1 = 1$ $m_1 = 4$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A-I) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \neq 0 \Rightarrow A \text{ non è diagonalizzabile} \\ 0 & \text{se } b = 0 \rightarrow A \text{ è diagonalizzabile} \end{cases}$$

$V_1 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathcal{B}_{V_1} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{se } a=1 \text{ e } b=0 \Rightarrow A = Id_{\mathbb{R}^4}$$

Spazi vettoriali con prodotto scalare

"Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale; un'applicazione lineare $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $v, w \rightarrow v \cdot w$ si dice **SCALARE** se soddisfa:
1) $v \cdot w = w \cdot v$
2) $(av) \cdot w = a(v \cdot w) = v \cdot (wa)$
3) $(v+w) \cdot z = (v \cdot z) + (w \cdot z)$
4) $v \cdot v \geq 0$; 5) $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$"

ESEMPI:
1) V_2 è spazio vettoriale con prodotto scalare $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\widehat{vw})$
2) $\mathbb{R}^n$ è spazio vettoriale con prodotto scalare $\Rightarrow (a_1 \dots a_n) \cdot (v_1 \dots v_n) = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$
3) $V = C^0([a,b])$ = funzioni continue su $[a,b] \Rightarrow V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \;\; g \rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$
4) Sia V un qualunque spazio vettoriale ed $E = (e_1, \dots, e_n)$ una base; allora vale $x \cdot y = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \cdot (y_1 e_1 + \dots + y_n e_n)$ $\rightarrow$ in ogni spazio vettoriale ho prodotti scalari diversi rispetto alla base scelta

- Def. "Se $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale con prodotto scalare, allora si definisce **NORMA** di $v \in V$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{v \cdot v}$"

- Def. "Un insieme di elementi $v_1, \dots, v_n \in V$ si dice **ORTONORMALE** se $v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$"

i vettori ortonormali sono tutti $\perp$ tra loro e tutti di norma $= 1$

ESEMPIO: in $\mathbb{R}^2$ $(\hat{i}, \hat{j})$ formano una BASE ORTONORMALE $\rightarrow$ altri vettori ortonormali sono tutti quelli che stanno sulla circonferenza di raggio $= 1$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$ un'altra base ortonormale

- Def. "Ogni insieme ortonormale è libero"

DIM: sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormale $\rightarrow$ supponiamo che $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$, allora $\forall i = 1, \dots, n$ si ha: $0 = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \cdot v_i$ ma per la definizione di ortonormalità si ha $a_i \underbrace{(v_i \cdot v_i)}_{=1} = 0 \Rightarrow a_i = 0$

- TEOREMA: "Ogni spazio vettoriale con prodotto scalare ammette una base ortonormale"

Normalizzazione di Gram-Schmidt: sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, allora
1) normalizzo i vettori dividendoli per la loro norma
2) trovo i vettori $\perp$ a quelli trovati precedentemente

$e_1 = \text{norm}(v_1)$

$e_2 = \text{norm}(v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1)$

....

$e_n = \text{norm}(v_n - [(v_n \cdot e_1)e_1 + \dots + (v_n \cdot e_{n-1})e_{n-1}])$

• Se $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonale $\Rightarrow {}^tP\,P = I \Rightarrow \det({}^tP\,P) = \det(I) = 1 \Leftrightarrow \det {}^tP \cdot \det P = 1$, ma $\det {}^tP = \det P \Rightarrow (\det P)^2 = 1 \Rightarrow \det P = \pm 1$

"Se $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonale e **$\det P = 1$**, allora P è detta **SPECIALE**; inoltre se le colonne formano una base ortonormale P è detta **ORTONORMALE SPECIALE**"

ESEMPIO: $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \det P = 1 \to P$ è speciale
$\Rightarrow (1,0)\cdot(3,1) = 3 \to$ le colonne non formano una base ortonormale

Endomorfismi autoaggiunti

"Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale con prodotto scalare; un endomorfismo $f: V \to V$ si dice **AUTOAGGIUNTO** se $\forall v, w \in V$ si ha $f(v)\cdot w = v \cdot f(w)$"

ESEMPI: 1) $i_V : V \to V$ l'identità di V è autoaggiunto: $\forall v, w \in i_V \Rightarrow i(v)\cdot w = v \cdot i(w)$
$v \cdot w = v \cdot w$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (y,-x)$
non è autoaggiunto: $f(1,0)\cdot(0,1) = (0,-1)\cdot(0,1) = -1$
$(1,0)\cdot f(0,1) = (1,0)\cdot(1,0) = 1$

• CRITERIO DEGLI ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI: "Sia $f: V \to V$ app. lineare, $E = (e_1, \dots, e_n)$ = base di V, allora f è autoaggiunto $\Leftrightarrow \forall (i,j)$ si ha $f(e_i)\cdot(e_j) = (e_i)\cdot f(e_j)$"

DIM: Sia $\vec{v} \in V$ t.c. $\vec{v} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, $\forall i = 1, \dots, n$ allora si ha
$v \cdot e_i = (a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)\cdot e_i = a_i \Rightarrow v = (v\cdot e_1)e_1 + \dots + (v \cdot e_n)e_n$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(e_1) = (f(e_1)\cdot e_1)e_1 + \dots + (f(e_1)\cdot e_n)e_n \\ \dots \\ f(e_n) = (f(e_n)\cdot e_1)e_1 + \dots + (f(e_n)\cdot e_n)e_n \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} f(e_1)\cdot e_1 & \dots & f(e_n)\cdot e_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ f(e_1)\cdot e_n & \dots & f(e_n)\cdot e_n \end{pmatrix}$$

A deve essere simmetrica, ma per il criterio degli endomorfismi A è simmetrica $\Leftrightarrow$ vale $f(e_i)\cdot e_j = f(e_j)\cdot e_i \;\forall i,j \Leftrightarrow f$ è autoaggiunto

ESEMPI: 1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$? f è autoaggiunto
$(x,y) \to (x+y, x)$

$M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\Rightarrow f$ è autoaggiunto

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$? f è autoaggiunto
$(x,y) \to (y,-x)$

$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $-1 \neq 1 \Rightarrow$ non è simmetrica $\Rightarrow f$ non è autoaggiunto

• DEF.: "Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ uno spazio vett. con prod. scalare, siano W, Z sottospazi di V, allora si dice che W, Z sono **ORTOGONALI** ($W \perp Z$) se $\forall w \in W$, $\forall z \in Z$ allora $w \cdot z = 0$"

se $\{w_1, \dots, w_s\}$ è una base di W e $\{z_1, \dots, z_\ell\}$ è una base di Z allora $W \perp Z \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, s$ $\forall j = 1, \dots, \ell$ si ha $w_i \cdot z_j = 0$

• TEO. SUGLI ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI: "Sia $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ spazio vett. con prodotto scalare, $f: V \to V$ app. lineare; allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
1) f è autoaggiunto;
2) f è semplice e gli autospazi sono a due a due ortogonali;
3) $\exists$ una base ortonormale di autovettori"

$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases}$ $\Rightarrow V_4 = \{(y, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$; $\mathcal{B}_4 = \{(1,1,1)\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ = base formata da autovettori di $f = (a_1, a_2, a_3)$ t.c. $a_1 = (1, 0, -1)$, $a_2 = (0, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$

c) avendo trovato la base formata da autovettori posso diagonalizzare A

↳ $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice A diagonalizzata e ha sulla diagonale gli autovalori ripetuti con la loro molteplicità

↳ $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha sulle colonne i valori di $\mathcal{Q}$ = base di autovettori di f

$\Rightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta$? sì perché: $P^{-1} \cdot \underset{M_f^{E,E}}{A} \cdot \underset{\text{mat. passaggio base da } E \to \mathcal{Q}}{P} = \Delta \Rightarrow M_f^{\mathcal{Q},\mathcal{Q}}$

b) se la matrice A è simmetrica $\Rightarrow$ gli <u>autospazi</u> sono tra loro ortogonali

se hanno dim = 1, si prende un vettore per ogni V_λ, questo è ortonormale $\Rightarrow$ nel nostro caso, però, a_1 e a_2 non sono ortogonali tra loro $\Rightarrow$ a partire dalla base di a_1, a_2 posso trovare una base c_1, c_2 $\Rightarrow$ sono ancora 3 vettori linearmente indipendenti e ortogonali tra loro $\Rightarrow$ ⊛

d) diagonalizzare ortogonalmente A $\Rightarrow$ trovare Δ diagonale e Q ortogonale t.c.
$\Delta = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = {}^tQ \cdot A \cdot Q$
⇓
trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f

↳ parto da (a_1, a_2) = base di V_1 $\Rightarrow$ trovo (c_1, c_2) = base ortonormale di V_1

$$c_1 = \text{vers } a_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$c_2 = \text{vers } a_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot c_1)c_1}{\|a_2 - (a_2 \cdot c_1)c_1\|} = \frac{(-1, 0, 1) - \left[(-1, 0, 1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\| \quad // \quad \|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$\Rightarrow$ base ortonormale di $V_4 = c_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

⊛ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $f = C = (c_1, c_2, c_3)$

$\Delta = M_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(c_1) = 1 \cdot c_1 \\ f(c_2) = 1 \cdot c_2 \\ f(c_3) = 4 \cdot c_3 \end{array}$

inoltre

$M_f^{\mathcal{Q},\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = M_f^{C,C} = \Delta = Q^{-1} \cdot M_f^{E,E}$ dove Q è la matrice di passaggio $E \to C$

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ è ortogonale!

ESERCIZI (1) Data $q(x,y) = 4x^2 - 6xy + 4y^2$ a) ? Trovare la forma canonica
b) ? Trovare il cambio segno

a) $A_q = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \to \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (4-\lambda)^2 - 9 = 0;\ (4-\lambda)^2 = 9$

$\begin{cases} 4-\lambda = 3 \to +\lambda = -3+4 = 1 & \lambda_1 = 1,\ m_1 = 1 \\ 4-\lambda = -3 \to +\lambda = +3+4 = 7 & \lambda_2 = 7,\ m_7 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow C_1 = X^2 + 7Y^2$ oppure $C_2 = 7X^2 + Y^2$

b) devo trovare il cambiamento di variabili da $(x,y) \to (X,Y)$, ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
$\to$ devo trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A

$V_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(1,1)\}$; $O_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$V_7 = \{(-y,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R}\}$; $B = \{(-1,1)\}$; $O_7 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{2}\,X - 1/\sqrt{2}\,Y \\ y = 1/\sqrt{2}\,X + 1/\sqrt{2}\,Y \end{cases}$

$\to$ sostituisco i valori trovati di (x,y) in $q(x,y)$:

$$q(X,Y) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - XY\right) - 6\left(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + XY\right) =$$

$$= 2X^2 + 2Y^2 - \cancel{4XY} - 3X^2 + 3Y^2 + 2X^2 + 2Y^2 + \cancel{4XY} = X^2 + 7Y^2$$

$\to$ abbiamo verificato che $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ci produce il cambiamento di variabili per trovare una forma canonica formata dagli autovalori del polinomio di partenza
$\to$ bisogna fare in modo che i coefficienti della forma canonica siano $= 1$:
$\hookrightarrow$ le forme CANONICHE NORMALI sono quelle con coeff. pari a $(0,1)$, quindi

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow X + ((\sqrt{7})Y)^2 \Rightarrow \begin{cases} x' = X \\ y' = \sqrt{7}\,Y \end{cases} \to P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sqrt{7})^{-1} \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ le altre forme canoniche si possono trovare facendo il completamento del quadrato

$q(x,y) = (2x - \frac{3}{2}y)^2 + \frac{7}{4}y^2 \to \begin{cases} x'' = 2x - \frac{3}{2}y \\ y'' = y \end{cases} \to P = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $q(x,y,z) = x^2 - 2xz + 2yz$? segno

$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$ cerco $\det(A - \lambda I) = 0 \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0;$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda) = 0;\quad (1-\lambda)(\lambda^2-1) + \lambda = 0,\ \lambda^2 - 1 - \lambda^3 + \lambda + \lambda = 0$

$-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \to$ non ci sono radici nulle
$\to$ ci sono due variazioni di segno $\Rightarrow$ 2 radici > 0, 1 radice < 0

il segno della forma quadratica non è definito

una forma canonica normale è $m(x', y', z') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2$

una forma canonica qualunque è $u(x', y'', z') = 108(x'')^2 - (73)(y'')^2 + 95(z'')^2$

posso mettere qualunque coefficiente, basta che si mantengano i segni degli autovalori

- Matrici di rotazione : "Ogni matrice ortogonale speciale è la matrice di un cambiamento di basi ortonormali antiorarie, quindi corrisponde a una rotazione antioraria del sistema di riferimento."

se $P \in \mathbb{R}^{2,2} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

• **ESEMPI:** 1) asse x: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ → passa per (1,0)

2) r: $3x - 2y - 1 = 0$ → passa per $(1,1)$
$\perp (3,-2)$
$/\!/ (2,3)$ ⇒ $r = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

→ per trovare l'equazione cartesiana da quella parametrica bisogna ricavare t e sostituire:

$$r: \begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ y = 1 + \frac{3}{2}(x-1) \end{cases} \rightarrow 2y = 2 + 3x - 3 \rightarrow -2y + 3x - 1 = 0$$

• **RETTA PER DUE PUNTI:** "Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ due punti distinti, la retta per P_0, P_1 passa per P_0 ed è $/\!/ (P_1 - P_0)$"

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}} \text{ EQ. PARAMETRICA} \rightarrow \text{da cui } \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ t = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \end{cases} \text{ ma } t = t$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}} \text{ EQ. CARTESIANA}$$

↳ Inoltre la retta per (P_0, P_1) si può ottenere: 1) $\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

2) $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0$

↳ **ESEMPIO** $P_0 = (0,0)$, $P_1(-1,1)$, $P_2 = (3,-3)$

(modo 1) prima costruisco la retta per due punti, poi controllo se il terzo vi appartiene

(modo 2) metto i vettori nella matrice e ne calcolo il determinante: se è 0 appartengono alla retta

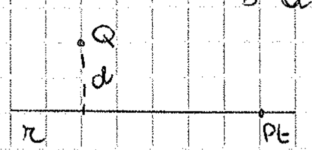
$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 1\ (3 - 3) = 0 \text{ OK!}$$ → tutti i punti appartengono alla retta ⇒ sono allineati

• **INTERSEZIONE TRA RETTE** → in forma cartesiana corrisponde al sistema lineare a due equazioni e due incognite
→ in forma parametrica:

$$r_1 = \begin{cases} x = x_0 + l t_1 \\ y = y_0 + m t_1 \end{cases}; \quad r_2 = \begin{cases} x = x_0' + l' t_2 \\ y = y_0' + m' t_2 \end{cases}$$ → $t_1 \neq t_2$ SEMPRE → le due rette devono essere libere di muoversi

$$\boxed{r_1 \cap r_2 = \begin{cases} x_0 + l t_1 = x_0' + l' t_2 \\ y_0 + m t_1 = y_0' + m' t_2 \end{cases}}$$ → risolto il sistema, trovo i punti sostituendo i risultati nelle equazioni di r_1 e r_2

↳ ESEMPIO: $Q=(1,1)$; $r: y=2x$; ? $d(Q,r)$



(modo 1): $d = \left\| \frac{2-1}{\sqrt{4+1}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(modo 2): $r: \begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases} \rightarrow P_t=(t,2t)$ la distanza $d(Q,r)=d(Q,\hat{Q}t)$ con $\hat{t}$ = minimo di $d=(Q,P_t)$

$\rightarrow d(Q,P_t)=\sqrt{(1-t)^2+(1-2t)^2}=\sqrt{2+5t^2-6t}=f(t)$

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{2+5t^2-6t}}(10t-6)=\frac{5t-3}{\sqrt{2+5t^2-6t}} \rightarrow f'(t)=0 \iff t=\frac{3}{5}$

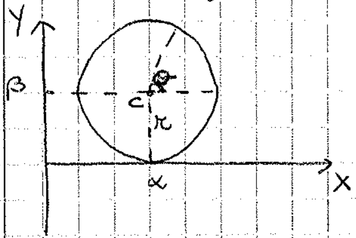
$\Rightarrow t=\frac{3}{5}$ è il minimo di $f(t) \Rightarrow P\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$

$\Rightarrow d(Q,r)=d(Q,P_{3/5})=\sqrt{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2+\left(1-\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

CIRCONFERENZE NEL PIANO

• DEF: "Sia $C=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $r\geq 0$; una circonferenza di raggio r e centro C è il luogo dei punti che distano r da C"

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow$ $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ EQ. CARTESIANA con $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ e $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$



$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+r\cos\theta \\ y=\beta+r\sin\theta \end{cases}$ EQ. PARAMETRICA

• ESEMPIO: 1) $r=2x^2+2y^2-4x-2y-6=0 \rightarrow x^2+y^2-2x-y-3=0$

$C=\left(1,\frac{1}{2}\right)$; $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+9/4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

2) $x^2+y^2=-2 \rightarrow$ è una circonferenza immaginaria $\rightarrow r<0$!

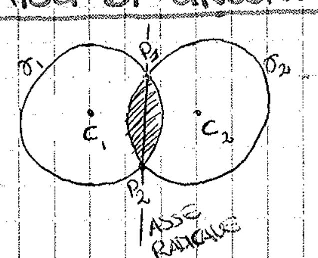
• RETTA TANGENTE: "Sia $\gamma: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ e sia $P_0=(x_0,y_0)$, la retta s passante per P_0 è $\perp$ a γ tale che:

$C-P_0=(\alpha-x_0,\beta-y_0)$

$\Rightarrow \boxed{s=(\alpha-x_0)(x-x_0)+(\beta-y_0)(y-y_0)=0}$

• FASCI DI CIRCONFERENZE: "Siano $\gamma_1: f_1(x_1,y_1)=0$ e $\gamma_2: f_2(x_2,y_2)=0$ circonferenze e supponiamo che $\gamma_1\cap\gamma_2=P_1\cup P_2$; allora l'insieme delle circonferenze per P_1, P_2 è dato da:

$\boxed{\lambda f_1+\mu f_2=0}$ con $\lambda,\mu\neq 0,0$ "



→ se $\gamma \neq 0$ → $\alpha, \beta > 0$ oppure $\alpha, \beta < 0$ ⇒ f è un' ELLISSE con $\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$

→ $\alpha > 0$, $\beta < 0$ oppure $\alpha < 0, \beta > 0$ ⇒ f è un' IPERBOLE con $\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$

$\boxed{\text{CASI } 2+3}$ ⇒ $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → $\det A = 0$ SEMPRE

se $\gamma = 0$ ⇒ $\alpha \bar{x}^2 = 0$ la conica è degenere → si ha una RETTA DOPPIA ($\det B = 0$)

se $\gamma \neq 0$ ⇒ $\alpha \bar{x}^2 = 2\gamma \bar{y}$ ⇒ f è una PARABOLA → $\det B = \alpha - (\gamma)^2$ → $\gamma = \pm \frac{\sqrt{\det(B)}}{\alpha}$

• una conica può essere trasformata in forma canonica con una ROTOTRASLAZIONE

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dove $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ è la matrice che ← si ruotano gli assi e trasla l'origine

ha sulle colonne una base ortonormale di autovettori di A (= spariscono i termini in xy)

• "Nel caso di ellisse e iperbole, è definito CENTRO il punto d'incontro degli assi di simmetria" e si ottiene risolvendo il sistema lineare dato dalle prime righe di B:

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} = 0 \\ a_{12} x + a_{22} y + a_{23} = 0 \end{cases}$$ → a è simmetrica

• Nel caso della parabola, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sono le coordinate del vertice → $\begin{cases} x = P_{11} \bar{x} + P_{12} \bar{y} + a \\ y = P_{21} \bar{x} + P_{22} \bar{y} + b \end{cases}$

P non è simmetrica, ma ortogonale speciale

se pongo $Q = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & a \\ P_{21} & P_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è equivalente a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}$

inoltre $\det Q = \det P = 1$

⇒ $f(x,y) = (x \ \ y \ \ 1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (\bar{x} \ \ \bar{y} \ \ 1)\, {}^tQ \cdot B \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = g(\bar{x}, \bar{y})$ → è una conica che ha come matrici associate

$B' = {}^tQ \cdot B \cdot Q$ e

$A' = {}^tP \cdot A \cdot P$

• TEOREMA: " a) $B' = {}^tQ \cdot B \cdot Q$, $\quad A' = {}^tP \cdot A \cdot P$

b) $\det B = \det B'$ $\quad \det A = \det A'$

c) $\rho(B) = \rho(B')$ $\quad \rho(A) = \rho(A')$

d) $f(x,y)$ è trasformabile in forma canonica, con α, β autovalori di A "

• CLASSIFICAZIONE:

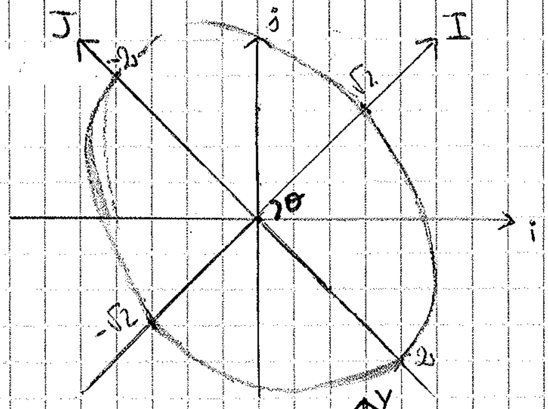
$\det B \neq 0$	$\det A > 0$	ELLISSE
$\det B \neq 0$	$\det A < 0$	IPERBOLE
$\det B \neq 0$	$\det A = 0$	PARABOLA
$\det B = 0$	$\forall \det A$	DEGENERE

$\hat{J} \to \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = J$

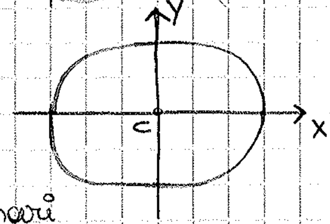
$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

CENTRO = ↵



• **ELLISSE**: $\boxed{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1}$

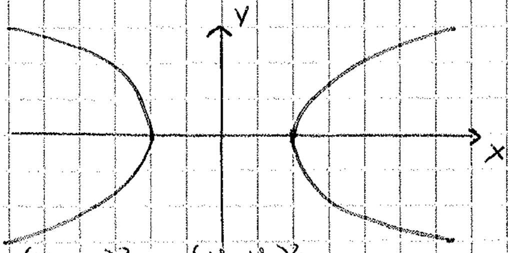


→ $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = -1$ = a punti immaginari

→ se $a = b$ è la circonferenza di centro O e raggio 1

→ se $C = (x_0, y_0) \Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$

• **IPERBOLE**: $\boxed{\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1}$



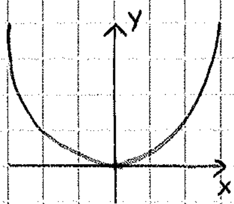
→ $y = \pm \frac{b}{a} x$ sono gli ASINTOTI

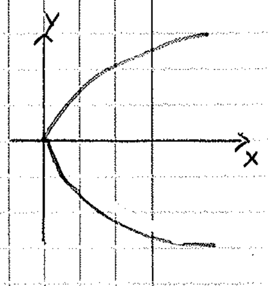
→ se $C = (x_0, y_0) \Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a} - \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$

→ se $a = b$ l'iperbole è EQUILATERA e gli asintoti coincidono con le bisettrici

↳ è equilatera $\Leftrightarrow Tr(A) = 0$

• **PARABOLA**: $\boxed{\beta y^2 = 2\gamma x \quad \text{oppure} \quad \alpha x^2 = 2\gamma y}$





→ se $V = (x_0, y_0)$ allora

$\beta(y-y_0)^2 = 2\gamma(x-x_0)$; $\quad \alpha(x-x_0)^2 = 2\gamma(y-y_0)$

• Ellisse e iperbole sono dette CONICHE A CENTRO

PIANO NELLO SPAZIO

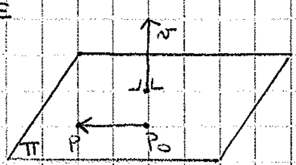
Un piano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ può essere individuato nei seguenti modi:

1) Un punto $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e un vettore $\bar{v} = (a, b, c) \in V_3 - \{0\} \Rightarrow$ IL PIANO PASSA PER IL PUNTO ED E' ORTOGONALE AL VETTORE

↓

$P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (P - P_0) \perp \bar{v} \Leftrightarrow (P - P_0) \cdot \bar{v} = 0$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$

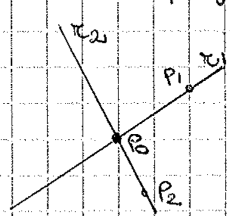


• **FASCI DI PIANI**: il fascio di piani per r è l'insieme di tutti i piani che si intersecano in r ed è dato da: $\lambda f(x,y) + \mu g(x,y) = 0$ con $\mu, \lambda \neq (0,0)$

• Def: "Due rette r_1, r_2 sono **COMPLANARI** se $\exists \pi$ tale che $r_1 \in \pi$, $r_2 \in \pi$"
$\Downarrow$
r_1, r_2 sono complanari $\iff r_1 \parallel r_2$

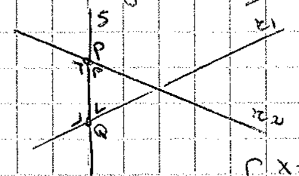
$\vec{v} \parallel \vec{w}$; il piano $\pi \parallel \vec{v}, \vec{u}$, passa per P_0 e contiene entrambe le rette

$\iff r_1 \cap r_2 = \{P_t\}$ → due rette si incontrano in un punto qualsiasi



→ se considero su ogni retta un punto e il punto di intersezione ottengo tre punti non allineati → forma il piano π

• Def: "Due rette r_1, r_2 sono **SGHEMBE** se non sono complanari"
$\Downarrow$
r_1, r_2 sono sghembe $\iff r_1 \not\parallel r_2$ E $r_1 \cap r_2 = \{\emptyset\}$ = insieme vuoto
$\Downarrow$
se r_1, r_2 sono sghembe $\Rightarrow \exists!\, s$ t.c. $s \perp r_1$ e $s \perp r_2$ → la distanza minima tra r_1, r_2 è:



$d(r_1 \cap s, r_2 \cap s) = \overline{PQ}$

ESEMPIO: siano $r_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = t_1 \\ z = t_1 \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$

1) $r_1 \parallel v_1 = (1,1,1)$; $r_2 \parallel v_2 = (0,2,1) \Rightarrow r_1 \not\parallel r_2$

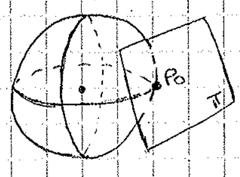
2) $r_1 \cap r_2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_1 = 2t_2 \\ t_1 = t_2 \end{cases}$ $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1/2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$ → CONTRADDIZIONE! $\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow r_1, r_2$ sono sghembe
$\Downarrow$
$P_{t_1} = (t_1, t_1, t_1) \in r_1$, $Q_{t_2} = (1, 2t_2, t_2) \in r_2$ punti qualunque di r_1 e r_2
→ $P_{t_1} - Q_{t_2}$ sono tutti i vettori che partono da r_2 e arrivano in r_1 → tra tutti bisogna trovare quello ortogonale a v_1 e a v_2
$\Downarrow$
$\begin{cases} (P_{t_1} - Q_{t_2}) \perp v_1 \\ (P_{t_1} - Q_{t_2}) \perp v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (t_1 - 1, t_1 - 2t_2, t_1 - t_2) \cdot (1,1,1) = 0 \\ (t_1 - 1, t_1 - 2t_2, t_1 - t_2) \cdot (0,2,1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t_1 - 1 + t_1 - 2t_2 + t_1 - t_2 = 0 \\ 2t_1 - 4t_2 + t_1 - t_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t_1 = 1/2 \\ t_2 = 5/6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = (1/2, 1/2, 1/2) \\ Q = \left(1, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}\right) \end{cases}$

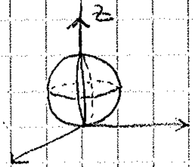
$\Rightarrow d(r_1, r_2) = d(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\boxed{\text{CASO 2} \to d(C,\pi)=R}$ $\to \pi \cap S$ è un punto $\to$ π è il piano tangente a S in P_0 e ogni retta di π e passante per P_0 è una retta tangente



ESEMPIO: $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ è l'intersezione di una sfera di raggio $R=1$ con il piano Oxy

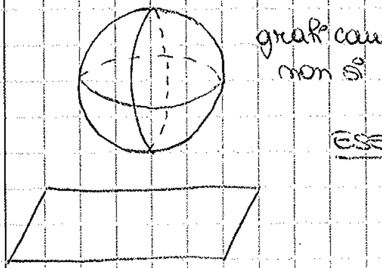
$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+1=1 \end{cases} \to x^2+y^2=0 \to (x+iy)(x-iy)=0$$



$\to$ il piano tangente a una sfera S in un punto P_0 passa per P_0 ed è $\perp$ a $(C-P_0)$ $\to$ $C-P_0=(\alpha-x_0,\ \beta-y_0,\ \gamma-z_0)$, quindi

π: $(\alpha-x_0)(x-x_0)+(\beta-y_0)(y-y_0)+(\gamma-z_0)(z-z_0)=0$ è l'equazione del piano tangente a una sfera

$\boxed{\text{CASO 3} \to d(C,\pi)>R}$ $\to \pi \cap S$ è una circonferenza immaginaria



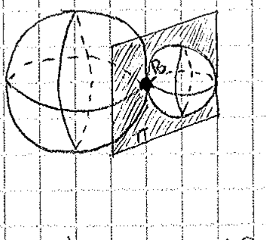
graficamente piano e sfera non si incontrano mai

ESEMPIO: $\begin{cases} z=-1 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z=-1 \\ x^2+y^2=-3 \end{cases}$

- FASCIO DI SFERE: Date due sfere S_1, S_2, allora $S_1 \cap S_2$ distingue 3 casi:

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\to S_1 \cap S_2 = \{\emptyset\} \Leftrightarrow$ le due sfere non si incontrano

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $\to S_1 \cap S_2 = P_0 \Rightarrow$ le sfere sono tangenti

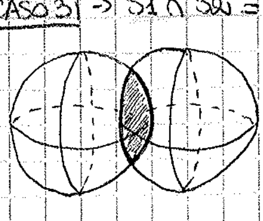


siano S_1: $f_1(x,y,z)=0$ e S_2: $f_2(x,y,z)=0$, allora si definisce il fascio di tutte le sfere tangenti a S_1 e S_2 in P_0 (= punto di intersezione):
$\lambda f_1+\mu f_2=0$ con $\lambda,\mu \neq 0,0$ $\to$ se $\lambda=-\mu$ il piano trovato è detto PIANO RADICALE

π: $h(x,y,z)=0$ è il piano tangente a tutte le sfere in P_0

l'equazione del fascio può essere data da: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda h=0$

$\boxed{\text{CASO 3}}$ $\to S_1 \cap S_2 =$ circonferenza $\Rightarrow$ le sfere sono secanti



si può definire l'equazione del fascio delle secanti nella circonferenza $\Gamma = S_1 \cap S_2$ data da $\lambda f_1+\mu f_2=0$ con $\mu,\lambda \neq 0,0$ $\to$ se $\mu=-\lambda$ si ottiene il piano radicale π:
$h(x,y,z)=0$ e l'eq. del fascio diventa
$f_1+h\lambda=0$

→ per trovare h: $t \cap P$ ha due soluzioni coincidenti: $\begin{cases} x-y+h=0 \\ (x+y)^2+3y-x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=y-h \\ (y+y-h)^2-y+h+3y=0 \end{cases}$; $4y^2+h^2-4yh+2y+h=0$; $4y^2+y(2-4h)+h^2+h=0$

impongo $\Delta=0$ → $\Delta = (2-h4)^2-4\cdot(h^2+h)4=0$

$4+\cancel{16h^2}-16h-\cancel{16h^2}-16h=0$; $32h=4$; $h=\frac{1}{8}$

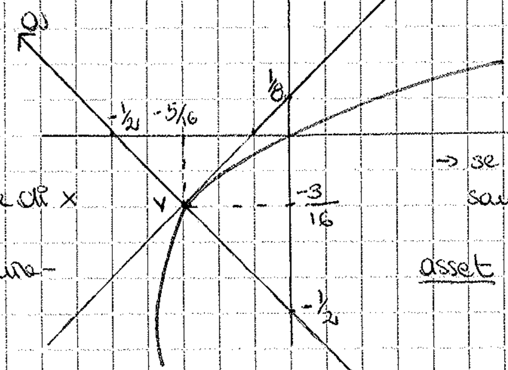
⇒ $x=y-\frac{1}{8}$ → $t \cap P$ dà il vertice → $\begin{cases} x=y-\frac{1}{8} \\ (x+y)^2-x+3y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} {''} \\ \left(2y-\frac{1}{8}\right)^2+2y+\frac{1}{8}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\frac{5}{16} \\ y=-\frac{3}{16} \end{cases} = V$

→ per trovare k impongo che l'asse passi per V ⇒ $x+y+k=0$ → $-\frac{5}{16}-\frac{3}{16}+k=0$; $k=\frac{1}{2}$

⇒ ASSE: $x+y+\frac{1}{2}=0$

TANGENTE: $x-y+\frac{1}{8}=0$



→ se scelgo $Y^2=\sqrt{2}X$ il vertice sarebbe dalla parte positiva

asse a // $\hat{i}' = \frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}$ = versore di X

il segno − è dovuto all'orientamento dell'asse

asse t // $\hat{j}' = \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$ = versore Y

→ il cambio base ortonormale è il passaggio da $\hat{i}, \hat{j}$ → $\hat{i}', \hat{j}'$ e la matrice P (ortogonale speciale) del cambio base è data da:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

→ il cambiamento di variabili necessario da $(x+y)^2-x+3y=0$ → $Y^2=-\sqrt{2}X$ è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/16 \\ -3/16 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = (1/\sqrt{2})X + (1/\sqrt{2})Y - 5/16 \\ y = (-1/\sqrt{2})X + (1/\sqrt{2})Y - 3/16 \end{cases}$$

(3) L'angolo tra due rette sghembe: a) non esiste; b) non può essere nullo; c) vale π; d) può essere qualunque

b) GIUSTA! se fosse nullo le rette sarebbero //

(4) Per la retta r: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t \\ z=3-t \end{cases}$ e il punto $P=(1,0,3)$

a) passa un unico piano; b) passano solo 2 piani; c) passano ∞ piani; d) non passano piani

→ se $P \in r$ → passano ∞ piani → tutti i piani che passano per la retta passano anche per P

se $P \notin r$ → passa 1 solo piano ⇒ un punto e una retta individuano un solo piano

→ $\begin{cases} 1=t+1 \\ 0=2t \\ 3=3-t \end{cases}$ $\begin{cases} 1=1 \\ t=0 \text{, ok!} \\ 3=3 \end{cases}$ → $P \in r$ ⇒ ∞ piani

ESERCIZI ① piano per r: $\pi \begin{cases} x-3y+z-1=0 \\ 2x-3z-4=0 \end{cases} \pi'$; // retta s: $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2t \\ z=5t-2 \end{cases}$

$$r_{/\!/} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9,5,6) \not\parallel \bar{s}$$

$\bar{s} = (-3,2,5)$ t.c. $\exists!$ piano $\alpha /\!/ \bar{s}$

1) $\pi /\!/ s$? $\quad \bar{n}_\pi \cdot \bar{s} = (1,-3,1)\cdot(-3,2,5) = 4 \neq 0 \rightarrow$ NO
$\pi' /\!/ s$? $\quad \bar{n}_{\pi'} \cdot \bar{s} = (2,0,-3)\cdot(-3,2,5) = -14 \neq 0 \rightarrow$ NO

2) ϕ^{*}_{r} : $x-3y+z-1+k(2x-3z-4)=0 \Rightarrow x(1+2k)-3y+z(1-3k)-1-4k=0$

impongo che $\phi^{*}_{r} /\!/ \bar{s} \Rightarrow \bar{n}_\phi \cdot s=0 \rightarrow (1+2k,-3,1-3k)\cdot(-3,2,5)=0$

$-3(1+2k)-6+5(1-3k)=0; \quad -3-6k-6+5-15k=0 \quad ; \quad k=\frac{-4}{21}$

$\Rightarrow \phi = x-3y+z-1+\frac{(-4)}{21}(2x-3z-4)=0$

② - Date r: $\begin{cases} x-2z-1=0 \\ y=2 \end{cases}$ $\quad s$: $\begin{cases} x=t \\ y=2t+3 \\ z=1 \end{cases}$ come sono tra loro?

$$r_{/\!/} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,0,1) \qquad s_{/\!/} = (1,2,1)$$

$r \not\parallel s \Rightarrow$ o sono incidenti o sono sghembe

(modo 1) $\rightarrow$ sostituisco una nell'altra e risolvo il sistema int

$s \rightarrow r \begin{cases} t-2-1=0 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=3 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow$ se sostituissi $y=2t+3$ con $t=3$, troverei un punto P_0 t.c. $P_0=(3,9,1) \rightarrow y(P_0) \neq 2 \Rightarrow P_0 \notin r$

(modo 2)

$r \rightarrow s \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ trovo $A=\left(-\frac{3}{2},2,1\right) \in \bar{s}$ ma $\notin \bar{r}$ (non si verifica l'uguaglianza)

(modo 3)

r parametrica $\begin{cases} x=2u+1 \\ y=2 \\ z=u \end{cases} \rightarrow r \cap s = \begin{cases} 2u+1=t \\ 2=2t+3 \\ u=1 \end{cases}$ $\begin{cases} t=3 \\ 2\neq 9 \rightarrow \text{contraddizione} \\ u=1 \end{cases}$ $r \cap s = \{\emptyset\} \Rightarrow$ sono sghembe

DISTANZA TRA DUE RETTE $\rightarrow$ se sono incidenti varia da 0 a ∞
$\rightarrow$ se sono sghembe allora ci sono 2 punti appartenenti alle due rette la cui distanza rappresenta la minima distanza tra due rette sghembe

③ - Date r: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2 \end{cases}$; s: $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+3 \\ z=1 \end{cases}$ $P_0=(0,0,2)$? distanza minima tra $\bar{r}, \bar{s}$ $= d(P_0, s)$

sono rette // perché i coefficienti di x,y sono uguali, mentre quelli di z cambiano ($\rightarrow$ non sono complanari)

$\Rightarrow \overline{HR}$ è la componente ortogonale di $\overline{R_0S_0}$ sulla direzione $\overline{n}$

$$d(\overline{HR}) = \overline{R_0S_0} \cdot (\text{versore } \overline{n}) = (-2,1,1) \cdot \frac{(-2,1,4)}{\sqrt{21}} = \frac{9}{\sqrt{21}}$$

(modo 3 - analitico) $\to$ considero un generico $R_0 \in r$ e $S_0 \in s$ t.c. $R_0 = (2t+1,\ 2,\ t)$
$S_0 = (u-1,\ 2u+3,\ 1)$

$\Rightarrow \overline{RS} = (u-1-2t-1,\ 2u+3-2,\ 1-t) \to$ impongo $\overline{RS} \perp r$ e $\overline{RS} \perp s$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{RS} \cdot r = 0 \\ \overline{RS} \cdot s = 0 \end{cases}$ è un sistema in $t, u \to$ trovo $H, K \to d(\overline{HK}) = d(r,s)$

(4) - Date $r: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+3 \\ z = 1 \end{cases}$

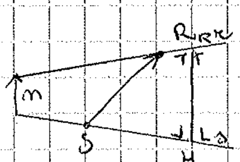
a) hanno distanza minima 9
b) $\exists$ un punto $A \in r$ e $B \in s$ t.c. $d(A,B) < 1$
c) $\exists$ un punto $A \in r$ e $B \in s$ t.c. $d(A,B) > 2$
d) formano un angolo di $\pi/3$ (*)

1) $r_{//} = (2,0,1)$, $s_{//} = (1,2,0) \Rightarrow r \not\parallel s \to$ non sono paralleli

2) $\begin{cases} 2t+1 = u-1 \\ 2 = 2u+3 \\ t = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2+1+1 = u = 4 \\ 2 = 11 \to \text{contraddizione} \Rightarrow \text{non sono incidenti} \\ t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ sono sghembe

3) $\overline{n} = \overline{r_{//}} \wedge \overline{s_{//}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,1,4)$



$\overline{R_0S_0} = (-2,1,1)$

$\overline{n} = d(r,s) = \| \overline{R_0S_0} \cdot \text{vers}(\overline{n}) \| = (-2,1,1) \cdot \frac{(-2,1,4)}{\sqrt{21}} = \frac{9}{\sqrt{21}} \simeq 2 \to$ C GIUSTA

$\frac{9}{\sqrt{21}}$ è la distanza minima!

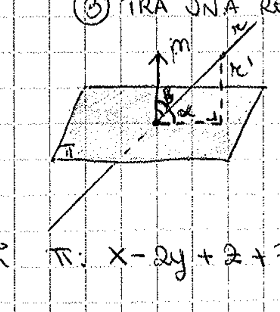
(*) ANGOLI (1) TRA DUE RETTE ($\to$ = tra due vettori // rette)

$$\cos(u \hat{} v) = \pm \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\|\overline{u}\| \|\overline{v}\|}$$

$\to$ sono angoli supplementari $\to$ x trovare $\alpha \to$ $\alpha = -(u \hat{} v) + \pi$

(2) TRA DUE PIANI $\to$ siano α, β piani $\Rightarrow (\alpha \hat{} \beta) = (n_\alpha \hat{} n_\beta) \to$ (1)

(3) TRA UNA RETTA E UN PIANO



$(r \hat{} \pi) = (r \hat{} r') \to \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ dove $\beta = (\hat{r}, \overline{n}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\Rightarrow \cos\beta = \pm \frac{\overline{r} \cdot \overline{n}}{\|\overline{r}\| \|\overline{n}\|} = \pm \sin\alpha$$

(5) - Dati $\pi: x - 2y + z + 7 = 0$ e $r: \begin{cases} x = t \\ y = t-1 \\ z = 2t \end{cases}$? α

1) Trovo la posizione di r rispetto a π — non sono ortogonali né paralleli

$\overline{n} = (1,-2,2)$; $\overline{r} = (1,1,2) \to \overline{n} \cdot \overline{r} = (1,-2,2) \cdot (1,1,2) = 3 \neq 0$

2) devo trovare P_0 t.c. $r \cap \pi = P_0$ ($\to$ metto r in π, trovo t e sostituisco in r)