



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1291

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Borgognone

MATERIA: Scienza delle Costruzioni, Prof.Valente

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

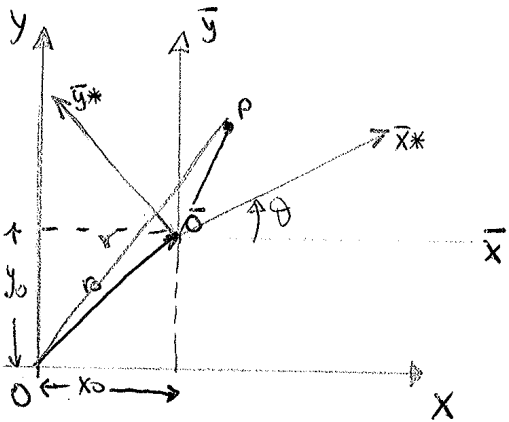
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

CAP. 2 - LA GEOMETRIA DELLE AREE

①

Quando si opera con travi è necessario considerare le proprietà geometriche delle stesse. L'AREA è una quantità vettoriale, la posizione del BARICENTRO una quantità TENSORIALE formata dalle DIREZIONI e dai MOMENTI CENTRALI D'INERZIA

2.2 LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL VETTORE DI POSIZIONE



LEGGI DI TRASFORMAZIONE:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}$$

(x_0 e y_0) coordinate dell'origine \bar{o} traslata

In forma vettoriale tali leggi si esprimono

$$\{\bar{r}\} = \{r\} - \{r_0\}$$

$\{r\}$ vettore di posiz. di P nel sistema $[x, y]$

$\{\bar{r}\}$ " " di P " " $[\bar{x}, \bar{y}]$

$\{r_0\}$ vettore posizione dell'origine \bar{o} (x_0, y_0) rispetto agli assi x, y .

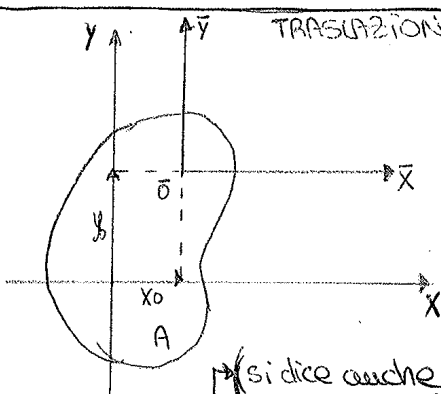
Il sistema \bar{x}, \bar{y} può anche essere ruotato e si ottiene \bar{x}^*, \bar{y}^* , le coordinate di \bar{x}^* e \bar{y}^* si esprimono così:

$$\begin{cases} \bar{x}^* = \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta \\ \bar{y}^* = -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}$$

in forma matriciale: $\{\bar{r}^*\} = [N] \{\bar{r}\}$ dove $[N] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

è detta $[N]$ = matrice di rotazione.

2.3 LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL VETTORE DEI MOMENTI STATICI



TRASLAZIONI DEL SIST. DI RIFERIMENTO

Si considera l'area A del seguente elemento nel sistema di riferimento xy . Si definisce "vettore dei momenti statici", relativo a tale area e determinato secondo il sistema di riferimento xy , il seguente vettore:

$$\{S\} = \begin{bmatrix} S_y \\ S_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A x \, dA \\ \int_A y \, dA \end{bmatrix} = \int_A \{r\} \, dA$$

dove S_y è il MOMENTO STATICO rispetto a y e S_x MOM. STATICO rispetto a x

IL MOMENTO STATICO è una proprietà geometrica relativa a un'area piana definita dall'integrale del prodotto tra l'area e la sua distanza da un certo asse. Tale proprietà rappresenta la distribuzione della forma dell'area presa in considerazione in relazione a un certo asse.

Il vettore dei momenti statici calcolato rispetto al sistema di riferimento

$$\{\bar{S}\} \text{ si può scrivere così: } \{\bar{S}\} = \begin{bmatrix} \bar{S}_y \\ \bar{S}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \bar{x} \, dA \\ \int_A \bar{y} \, dA \end{bmatrix} = \int_A \{\bar{r}\} \, dA$$

Se applico la legge di trasformazione del vettore posizione (vista sopra)

$$\text{ottergo: } \{\bar{S}\} = \int_A \{r\} \, dA - \{r_0\} \int_A dA$$

2.4 LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE DEI MOMENTI DI INERZIA

(3)

IL MOMENTO D'INERZIA misura l'inerzia del corpo a ruotare la sua velocità rotazionale, è una grandezza fisica utile per descrivere il comportamento dinamico di un corpo in rotazione attorno a un ~~asse~~ asse. Tale momento è definito come il secondo momento della massa rispetto alla posizione.

→ Si consideri il seguente prodotto matriciale, detto "prodotto diadico"

$$\{r\}\{r\}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{bmatrix}$$

Si definisce "tensore dei momenti d'inerzia" relativo all'area A (figura precedente) e calcolato nel sistema di riferimento xy, il seguente tensore simmetrico:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A x^2 dA & \int_A xy dA \\ \int_A yx dA & \int_A y^2 dA \end{bmatrix}$$

N.B. | In matematica la nozione di "tensore" generalizza tutte le strutture definite usualmente in algebra lineare (es. vettori, endomorfismi ecc.)

Si può esprimere nella seguente forma compatta: $[I] = \int_A \{r\}\{r\}^T dA$

Il tensore dei momenti d'inerzia calcolato nel sist. traslato $\bar{x}\bar{y}$ è:

$$[\bar{I}] = \int_A \{\bar{r}\}\{\bar{r}\}^T dA$$

Sapendo che $\{\bar{r}\} = \{r\} - \{r_0\}$ (legge di trasformazione dei vettori) si ha:

$$[\bar{I}] = \int_A (\{r\} - \{r_0\})(\{r\}^T - \{r_0\}^T) dA = \int_A \{r\}\{r\}^T dA - \int_A \{r\} dA \{r_0\}^T - \{r_0\} \int_A \{r\}^T dA + \{r_0\}\{r_0\}^T \int_A dA$$

($\{r_0\}$ fuori dall'integrale perché costante)

quindi rimane (sapendo che $\int_A \{r\}\{r\}^T dA = [I]$ e $\int_A \{r\} dA = \{S\}^T$ e $\int_A \{r\}^T dA = \{S\}$):

$$[\bar{I}] = [I] + A\{r_0\}\{r_0\}^T - \{r_0\}\{S\}^T - \{S\}\{r_0\}^T$$

Tale relazione può essere espressa così:

$$\begin{cases} I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + Ay_0^2 - 2y_0 S_x \\ I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + Ax_0^2 - 2x_0 S_y \\ I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{yx} = I_{xy} + Ax_0 y_0 - x_0 S_x - y_0 S_y \end{cases}$$

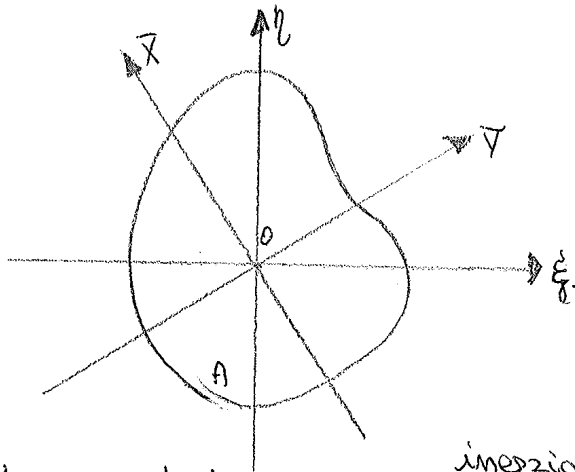
Molte trattazioni principalmente il caso in cui l'origine del riferimento primitivo coincide con il baricentro G dell'area A, in tal caso i momenti statici si annullano ($S_x = 0, S_y = 0$) e si ritrovano così le LEGGI DI HUYGENS-STEINER o TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI:

$$\begin{cases} I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xaxa} + Ay_0^2 \\ I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yaya} + Ax_0^2 \\ I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xaya} + Ax_0 y_0 \end{cases}$$

Tramite le prime due relazioni si può notare come il "momento d'inerzia baricentrico" sia minimo tra tutti quelli possibili. Il punto di minimo si ha quando il momento d'inerzia passa per il baricentro.

MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA sono l'uno il minimo e l'altro il massimo (6)
 tra tutti i momenti di inerzia $I_{x^*x^*}$ e $I_{y^*y^*}$ che si hanno al variare dell'angolo di rotazione θ . Ruotando gli assi, oltre che principali sono anche baricentrici, i MOMENTI DI INERZIA si dicono anche CENTRALI.
 → vedi 2.5 ASSI E MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA pag. 32 (PER ESERCIZI!!!)

2.6 CIRCOLO DI MOHR



Per introdurre il METODO GRAFICO DI MOHR, il quale darà i stessi risultati analitici (visti nel paragrafo 2.6), si deve ragionare sul problema inverso, data un'area A, ed essendo noti a priori i suoi assi principali di inerzia ξ, η e i relativi momenti principali I_ξ, I_η , ci si propone di esprimere i momenti di inerzia rispetto a un sist. di riferimento principale, in senso antiorario rispetto al sist. di riferimento principale. Per ipotesi si assume il centro fugo $I_{\xi\eta} = 0$ (tensore diagonale)

to ruotato di un angolo θ , im senso antiorario rispetto al sist. di riferimento principale. Per ipotesi si assume il centro fugo $I_{\xi\eta} = 0$ (tensore diagonale)

$$[\bar{I}] = [N][I^*][N]^T$$

$$\begin{vmatrix} I_{\bar{y}\bar{y}} & I_{\bar{x}\bar{y}} \\ I_{\bar{x}\bar{y}} & I_{\bar{x}\bar{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_\eta & 0 \\ 0 & I_\xi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_\eta \cos^2\theta & -I_\eta \sin\theta \cos\theta \\ I_\xi \sin\theta \cos\theta & I_\xi \cos^2\theta \end{vmatrix} =$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_\eta \cos^2\theta + I_\xi \sin^2\theta$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{x}} = -I_\eta \sin\theta \cos\theta + I_\xi \sin\theta \cos\theta$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_\eta \sin^2\theta + I_\xi \cos^2\theta$$

Sapendo che $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ e $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ sostituendo otteniamo

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} + \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \cos 2\theta \rightarrow \text{EQUAZ. PARAMETRICA DI UNA CIRCONFERENZA}$$

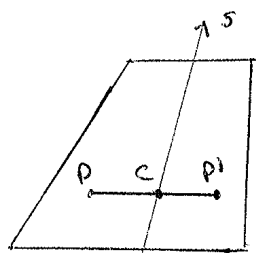
$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} - \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \cos 2\theta$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \sin 2\theta$$

→ EQUAZ. PARAMETRICA DI UNA CIRCONFERENZA.

La prima e ultima relazione costituiscono le equazioni parametriche di una circonferenza di centro $C\left(\frac{I_\xi + I_\eta}{2}, 0\right)$ e raggio $R = \frac{I_\xi - I_\eta}{2}$. Nel piano di Mohr $(I_{\bar{x}\bar{x}}, I_{\bar{x}\bar{y}})$, tale circonferenza rappresenta tutte le coppie $(I_{\bar{x}\bar{x}}, I_{\bar{x}\bar{y}})$ che si succedono al variare dell'angolo θ .

2.7 AREE PROVUISTE DI SIMMETRIA



Si dice che un'AREA presenta SIMMETRIA ASSIALE OBLIQUA, quando esiste una retta s , che taglia in due parti l'area e una direz. s' congiunta a questa retta, tali che, se si considera un generico punto P dell'area e la retta $Pc \parallel a s'$, e si riporta su tale retta il segmento $\overline{CP'} = \overline{PC}$ dalla parte opposta a P rispetto a s , il punto P' appartiene ancora all'area.

N.B. se $\alpha = 90^\circ \rightarrow$ allora si ha la SIMMETRIA ASSIALE RETTA.

Il baricentro giace sull'asse di simmetria. Se l'area e' a simmetria netta ($\alpha = 90^\circ$), l'asse di SIMMETRIA e' anche un asse CENTRALE DI INERZIA, infatti esso e' BARICENTRALE e rispetto a esso si annulla il momento centrifugo $I_{ss'}$.

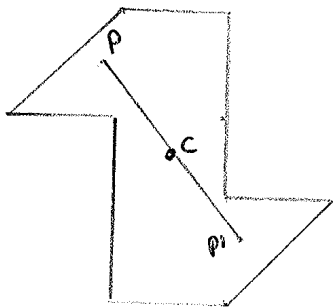
Se si hanno una DOPPIA SIMMETRIA RETTA gli assi di SIMMETRIA sono PURE CENTRALI D'INERZIA



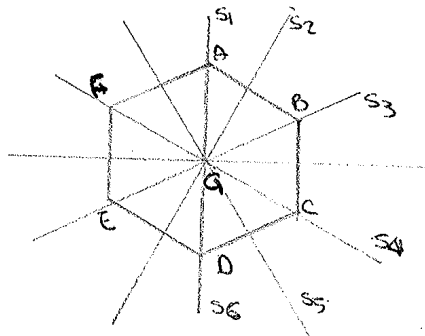
Se si hanno due o piu' assi di simmetria il baricentro dovra' appartenere a ciascun asse, quindi coincidera' con l'incrocio (es. triangolo)



\rightarrow SIMMETRIA POLARE: si ha simmetria polare, quando esiste un punto C tale che, se si considera un generico punto P appartenente all'area e la congiungente Pc , e si riporta su tale retta il segmento $\overline{CP'} = \overline{PC}$ dalla parte opposta a P rispetto a C , il punto P' appartiene ancora all'area.



\rightarrow ESERCIZIO: si puo' sfruttare sia la simmetria polare che assiale



2.8 AREE A GEOMETRIA ELEMENTARE

Se su un piano xy si hanno n aree A_1, A_2, \dots, A_n , allora vale la seguente proprieta' per i momenti statici e di inerzia:

$$S\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n S(A_i) \quad I\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n I(A_i)$$

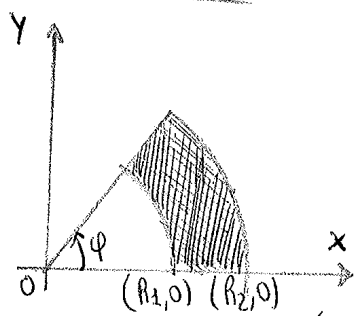
Le tali proprieta' esprimono che il momento statico e il momento d'inerzia di un'area e pari alla somma dei momenti statici e di inerzia delle singole aree rispettivamente, delle singole aree

→ MOM. CENTRIFUGO $I_{xy} = \int_0^b \int_0^{h(b-x)/b} xy \, dx \, dy = \int_0^b \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^{h(b-x)/b} dx = \frac{h^2}{2b^2} \int_0^b (b-x)^2 dx$
 $= \frac{h^2}{2b^2} \left(b^2 \frac{x^2}{2} - 2b \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^b = \frac{h^2}{2b^2} \left(\frac{b^4}{2} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{4} \right) = \frac{h^2 b^2}{24} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{h^2 b^2}{24} \left(\frac{2}{4} - \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{h^2 b^2}{24} \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{b^2 h^2}{24}$

→ MOM. CENTRIFUGO RISPETTO AL BARRICENTRO

$I_{xy} = I_{xyG} + Ax_G y_G \Rightarrow I_{xyG} = I_{xy} - Ax_G y_G = -\frac{b^2 h^2}{24} - \left(b - \frac{b}{2} \right) \left(-\frac{b}{3} \right) \left(\frac{h}{3} \right) = -\frac{b^2 h^2}{24} + \frac{b^2 h^2}{18} = \frac{b^2 h^2}{72}$

-CORONA CIRCOLARE



$R_1 =$ raggio interno $R_2 =$ raggio esterno.

MOM. SCA = πr^2

$$\begin{cases} S_x = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{3} (1 - \cos \varphi) (R_2^3 - R_1^3) \\ S_y = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (r \cos \varphi) r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{3} \sin \varphi (R_2^3 - R_1^3) \end{cases}$$

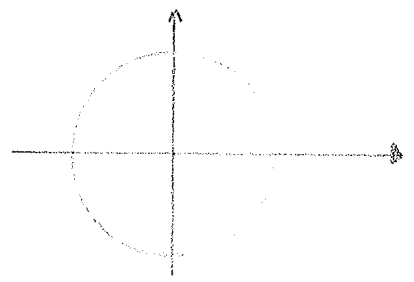
MOMENTI DI INERZIA (li calcolo grazie alla definizione)

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (r \sin \varphi)^2 r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{8} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) (R_2^4 - R_1^4) \\ I_{yy} = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (r \cos \varphi)^2 r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{8} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) (R_2^4 - R_1^4) \\ I_{xy} = \int_0^\varphi \int_{R_1}^{R_2} (r \sin \varphi)(r \cos \varphi) r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{16} (1 - \cos 2\varphi) (R_2^4 - R_1^4) \end{cases}$$

N.B. $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi \cos \varphi)$
 $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \sin \varphi \cos \varphi)$

→ caso particolare del CERCHIO di raggio R

$R_1 = 0 \quad R_2 = R \quad \varphi = 2\pi$



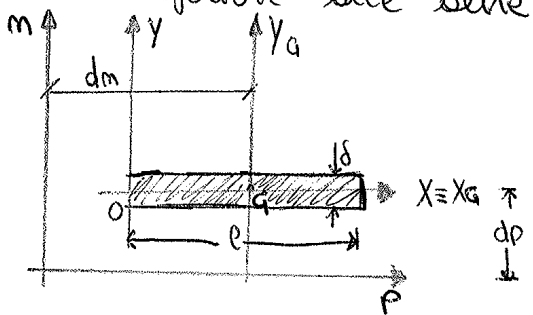
- $S_x = S_y = 0$
- $I_{xx} = \frac{\pi}{4} R^4 = I_{yy}$
- $I_{xy} = 0$

Sfruttando la simmetria polare.

$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_{yy} + I_{xx} = \frac{\pi}{2} R^4$

2.9 SEZIONI SOTTILI

Una sezione si dice sottile quando una delle sue dimensioni (lo spessore δ) è nettamente inferiore alle altre. - ipotesi: $\delta \ll l \rightarrow$ sottile



$I_{xyG} = \frac{\rho \delta^3}{12} = I_{xx}$

CINEMATICA e STATICA DEI SISTEMI DI TRAVI

1

CAP. 3-4

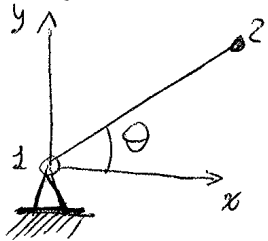
3.1 GRADI DI LIBERTA' DI UN SISTEMA MECCANICO

I GRADI DI LIBERTA' di un sistema meccanico rappresentano il numero di coordinate generalizzate necessarie e sufficienti a descrivere la configurazione. Un sistema a g gradi di liberta' puo' dunque disporsi in inf differenti configurazioni.

Un punto nel piano ha due gradi di liberta' (trasl. orizzontale o verticale)

Immagino ora di avere due punti nel piano quindi 4 GdL, ma li collego tramite un'asta inestensibile che introduce 1 grado di vincolo (GdV), il numero di gradi liberta' residui sara' quindi **3** ($4-1=3$)

Supponiamo di introdurre una cerniera che porta quindi 2 GdV:



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_{12}^2$$

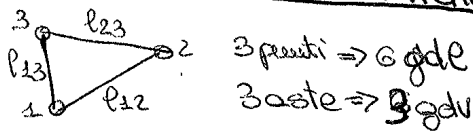
pongo $x_1=0$ e $y_1=0$ ottengo:

$$x_2^2 + y_2^2 = l_{12}^2 \text{ questo e' il vincolo dovuto al fatto che l'asta e' inestensibile.}$$

→ CERNIERA → ASTA

$$4 \text{ GdL} - 2 \text{ GdV} - 1 \text{ GdV} = 1 \text{ GdL residuo}$$

CONSIDERAZIONI CINEMATICHE



3 punti \Rightarrow 6 GdL

3 aste \Rightarrow 3 GdV

$$6 - 3 = 3 \text{ GdL residui.}$$

Se aggiungo un quarto punto devo aggiungere due aste che lo colleghino f. quindi di introdurrei 2 GdL e 2 GdV che si compensano, posso iterare questo processo per n punti e arrivo alla conclusione che:

- UN CORPO RIGIDO NEL PIANO HA 3 GRADI DI LIBERTA' (1)rotaz. (2)trasl. vert. (3)trasl. orizz.

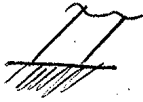
La stessa analisi avrei potuto farla nello spazio e sarei giunto alla conclusione che:

- UN CORPO RIGIDO NELLO SPAZIO HA 6 GRADI DI LIBERTA'

3.2 DEFINIZIONE CINEMATICA DEI VINCOLI PIANI

Il vincolo ha il compito di impedire un movimento. I vincoli che legano il corpo rigido piano al sistema di riferimento fisso si dicono VINCOLI ESTERNI. Essi sono classificati in base ai movimenti elementari del punto vincolato P che vengono impediti. I movimenti sono le due traslazioni U_P e V_P e la rotaz. elementare φ_P .

- INCASTRO



L'incastro è il unico vincolo triplo di tipo puntuale, esso per definizione blocca tutti e tre i movimenti (non esiste quindi alcun centro di rotazione)

→ Nella pratica costruttiva i vincoli vengono disposti in diversi punti dell'elemento strutturale, così da impedire i movimenti. Quando i vincoli sono insufficienti a bloccare nel pieno la posizione del corpo rigido, il vincolo è detto labile.

- STRUTTURA LABILE = condizioni non sufficienti di vincolamento
- " ISOSTATICA = " sufficienti per il "
- " IPERSTATICA = " sovrabbondanti " "

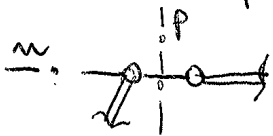
Inoltre se i vincoli sono disposti in maniera non adeguata, essi possono perdere la loro efficacia, ecco che così facendo corpi apparentemente isostatici e perfino iperstatici possono poi diventare labili. (VEDI FIGURE 3.16 PAG. 68)

VINCOLI INTERNI

I vincoli INTERNI impongono condizioni ai movimenti elementari relativi di punti appartenenti a corpi rigidi diversi.

- BIELLA INTERNA: essa impedisce la discontinuità di spostamento nella direzione del suo asse m :

$$\{dS_A - dS_B\}^T \{m\} = 0$$

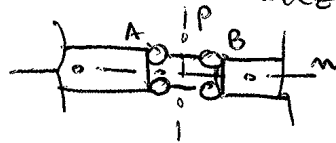


mentre permette la discontinuità di spostamento lungo p , così come permette la rotazione:

$$\{dS_A - dS_B\}^T \{p\} \neq 0 \quad \varphi_A - \varphi_B \neq 0$$

- DOPIO PENNACOLO INTERNO: impedisce lo spostamento relativo in direzione m oltre che la rotazione relativa -

$$\{dS_A - dS_B\}^T \{m\} = 0$$



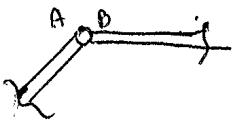
consente lo spost. lungo p :

$$\varphi_A - \varphi_B = 0$$

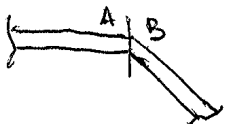
$$\{dS_A - dS_B\}^T \{p\} \neq 0$$

- CERNIERA INTERNA: la cerniera interna elimina ogni spostamento relativo dei due punti che collega, mentre permette la rotazione relativa.

$$\{dS_A - dS_B\} = 0 \quad \varphi_A - \varphi_B \neq 0$$



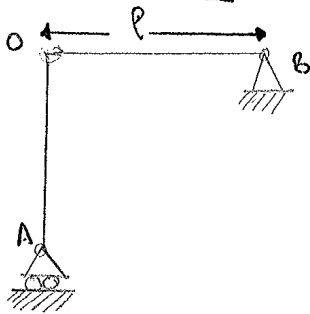
- INCASTRO INTERNO: l'incastro interno rende completamente solida una porzione del corpo rispetto all'altra ed è un vincolo triplo. Non si è quindi nessuna sconnessione interna.



N.B. Se il determinante della matrice antisimmetrica è diverso da zero, il vincolo è EFFICACE, se è uguale a zero è INEFFICACE. (vedi es. sul quadrato) ⑤

3.3 STUDIO ALGEBRICO DELLA CINEMATICA DEI SISTEMI DI TRAVI

- Trave a forma di L.



INCOSNITE = V_0, U_0, φ_0 ? dove O = polo o centro di riduzioni

VINCAI:
 $V_A = 0$
 $U_B = 0$
 $V_B = 0$

dove U = spostamento lungo x
 V = " " " y

Dalla legge delle distribuz. delle velocità:

$$\begin{cases} V_A = V_0 + (x_A - x_0)\varphi = 0 \\ U_B = U_0 - (y_B - y_0)\varphi = 0 \\ V_B = V_0 + (x_B - x_0)\varphi = 0 \end{cases}$$

l p ↘

In forma matriciale posso scrivere:

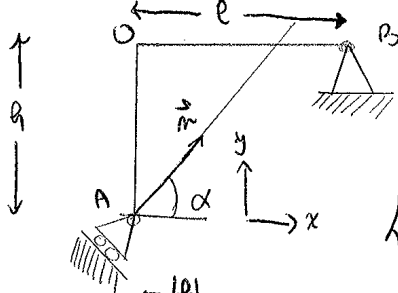
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ricostruisco le tre equazioni della legge delle distribuz. delle velocità

Si può osservare che il sistema è omogeneo e il determinante è $-l$
 $D = -l$. Se il $\det D \neq 0$ il vincolo è EFFICACE, se il $\det D = 0$ esiste la soluzione non banale, il vincolo è INEFFICACE e il sistema diviene labile (oscilla attorno ad O)



- Trave a forma di L, con cernello inclinato



LEGGI DISTRIB. VELOCITA' : $\begin{cases} U_P - U_0 = -\varphi(y_P - y_0) \\ V_P - V_0 = \varphi(x_P - x_0) \end{cases}$ avanzamento visto.

$\{dSA\}^T \{n\} = 0$ cioè $U_A \cos \alpha + V_A \sin \alpha = 0$

$$\begin{cases} U_A - U_0 = -\varphi(h - y_0) \\ V_A - V_0 = \varphi(x_A - x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = U_0 - \varphi(-h) \\ V_A = V_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = U_0 + \varphi h \\ V_A = V_0 \end{cases}$$

sostituisco in $U_A \cos \alpha + V_A \sin \alpha = 0$

$(U_0 + h\varphi) \cos \alpha + V_0 \sin \alpha = 0$. Riscrivendo in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & h \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalle equaz. $\begin{cases} (U_0 + h\varphi) \cos \alpha + V_0 \sin \alpha = 0 \\ U_B = U_0 = 0 \\ V_B = V_0 + \varphi l \end{cases}$

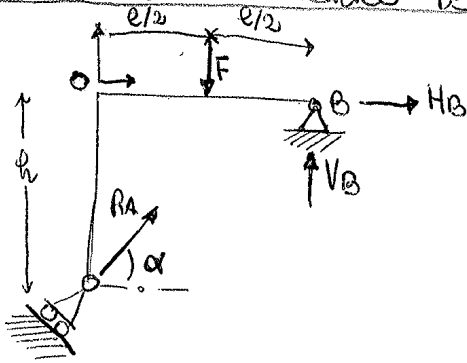
$\det D = -(l \sin \alpha - h \cos \alpha)$, può esserci il caso in cui $\alpha = 0$ $h = 0$ quindi $D = 0 \Rightarrow$ vincolo INEFFICACE



Quando un sistema soddisfa le equazioni cardinali della statica si dice (17)
 "EQUILIBRATO E EQUIVALENTE A ZERO."

→ vedi DEFINIZIONE STATICA DEI VINCOLI PIANI (da pag. 80 a 81)

3.7 STUDIO ALGEBRICO DELLA STATICA DEI SISTEMI DI TRAVI



REAZIONI VINCOLARI: R_A, V_B, H_B

Scelgo O come polo statico

EQUAZIONI STATICHE:

$$\rightarrow) R_A \cos \alpha + H_B = 0$$

$$\uparrow) R_A \sin \alpha - F + V_B = 0$$

$$\curvearrowright) R_A \cos \alpha \cdot h - F \cdot \frac{l}{2} + V_B \cdot l = 0$$

Posso ottenere la versione matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 1 \\ h \cos \alpha & 0 & l \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} R_A \\ H_B \\ V_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ -F \cdot \frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

N.B. La matrice $[A]$ è esattamente la trasposta della matrice vista nello studio algebrico dei sistemi di trave del punto di

vista cinematico. Questa è una proprietà del tutto generale, nota come DUALITÀ STATICO-CINEMATICA DEI SISTEMI DI CORPI RIGIDI.

Tale sistema non è più un sistema omogeneo, perché la matrice dei termini noti ha elementi non nulli, per discutere la risolubilità del sistema dobbiamo appellarci al Teorema di Kronecker-Capelli:

"Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di m equazioni lineari con n incognite ammetta soluzione, è che la matrice dei coefficienti e la matrice formata dai coefficienti e dai termini noti, la cosiddetta matrice alata, abbiano la stessa caratteristica". (cioè dato il sistema lineare $AX=B$, esso è compatibile se e solo se si ha $\rho(A) = \rho(A|B)$).

Essendo tale matrice la trasposta di quella vista in ambito cinematico, posso fare gli stessi ragionamenti fatti in precedenza sul determinante, siccome il determinante di una matrice è uguale a quello della sua trasposta.

- $\det \neq 0 \Rightarrow 1$ soluzione i vincoli sono ben disposti

- $\det = 0 \Rightarrow$ vincoli inefficaci.

- $\rho(A) < \rho(A|B)$ cioè una riga è combinazione lineare delle precedenti, in base al teorema di Kronecker-Capelli, il sistema non ammette ~~soluzione~~ nessuna soluzione. Ciò significa che è impossibile il calcolo delle reazioni vincolari.

CAP. 4 LA DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI

1

METODI PER LA DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI

1) METODI ALGEBRICI

1) METODO GENERALE: è valido sempre, ma risulta essere scomodo, solo quando la struttura è semplice. Tale metodo ~~for~~ richiede $3 \cdot m$ EQUAZ. in $3 \cdot m$ INCOGNITE.

2) METODO DELLE EQUAZIONI AUSILIARIE: uso l'equaz. della statica per l'equilibrio globale della struttura, poi la esplodo e uso ad analizzare l'equilibrio per le varie componenti.

-) eq. globale della struttura

-) num. di scissioni della struttura

$(3+s)$ equaz. in $(3+s)$ incognite con $s =$ scissioni.

2) METODO SEMIGRAFICO

è basato sul PLV (principio lavori virtuali, più le catene cinematiche).

4.1 EQUAZIONI AUSILIARIE

In tale metodo occorre considerare le tre equazioni di equilibrio globale, cioè dell'intera struttura, con l'aggiunta di s equazioni ausiliarie di equilibrio parziale, dove s è il numero di scissioni della struttura. Si hanno quindi:

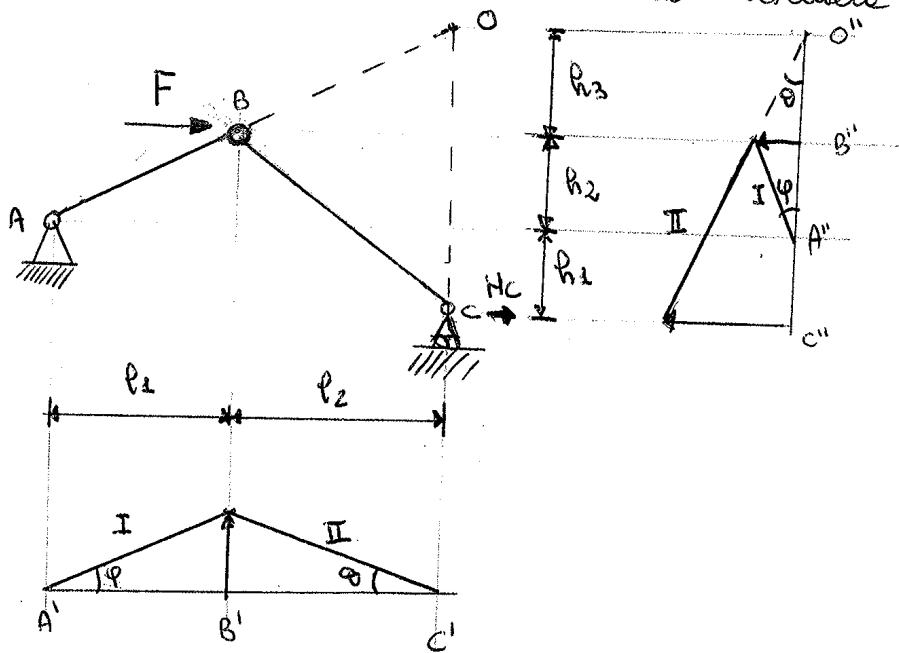
$(3+s)$ EQUAZ. DI EQUILIBRIO in $(3+s)$ REAZIONI ESTERNE INCOGNITE. Le s equazioni ausiliarie si scelgono in modo tale da non far intervenire le reazioni interne nel sistema risolvibile.

Vedi es. sul q. esercizi soloz e es. da pag. 95 e 103

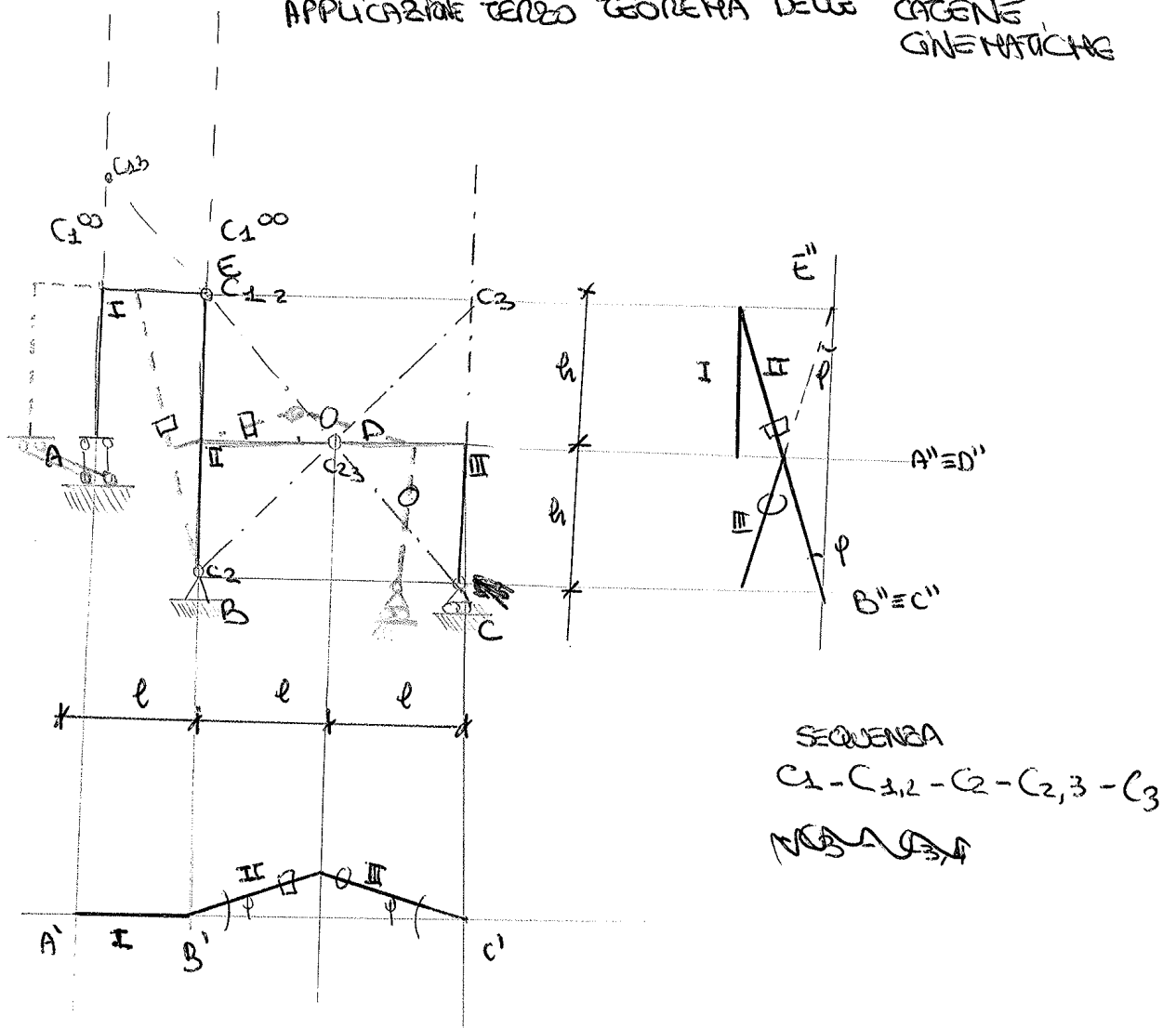
4.2 PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (metodo semi grafico)

Il metodo semi-grafico è basato sul PLV (principio lavori virtuali) e sulla teoria delle catene cinematiche, che è in grado peraltro di fornire una singola reaz. elementare per volta.

es.) si vuole definire la reaz. orizzontale H_C esercitata dalla cerniera C



APPLICAZIONE TERZO TEOREMA DELLE CATENE CINEMATICHE



Il corpo I è allineato con il corpo II all'infinito, i tre centri $C_1 - C_{1,2}$ e C_2 sono allineati.

Per risolvere tale struttura, applico il primo teorema delle catene cinematiche al corpo I-II e poi al corpo II-III. Per essere sicuro che il sistema sia labile occorre che $C_{1,2} - C_{1,3} - C_{2,3}$ siano allineati. Per verificare la posiz. di $C_{1,3}$, faccio il ragionamento del 1° TEOREMA delle CATENE CINEMATICHE al corpo I-III

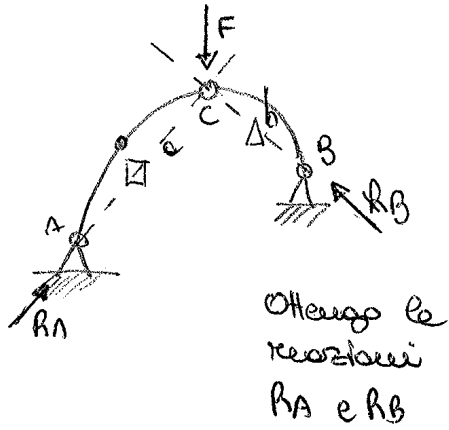
DEFORAMATA.

Il carrello scende a sinistra di una quantità $2\phi h$, come la CERNIERA INTERNA superiore.

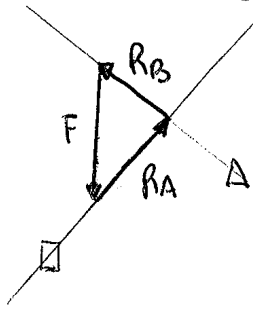
L'altra CERNIERA INTERNA traslo verso sinistra e ~~verso~~ l'alto di una quantità ϕh .

es. ARCO A TRE CERNIERE ZOPPO CON CERNIERA CARICA

(4)



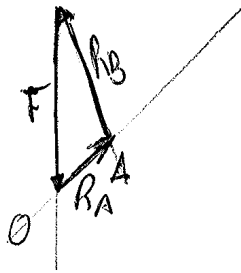
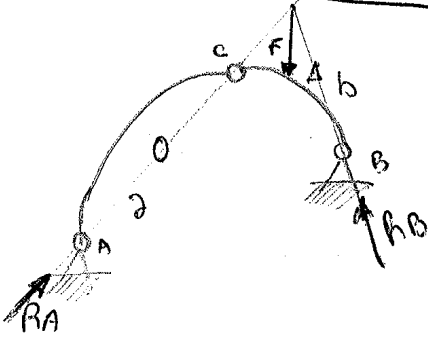
DEF. BIELLA: qualsiasi elemento che è collegato al mondo esterno attraverso due cerniere.



TRATTO	C.D.P
AC	retta a
BC	retta b

Il punto evidenziato in rosso rappresenta la sezione più sollecitata perché più distante dalla retta d'azione.

ARCO A TRE CERNIERE ZOPPO CON CERNIERA SCARICA

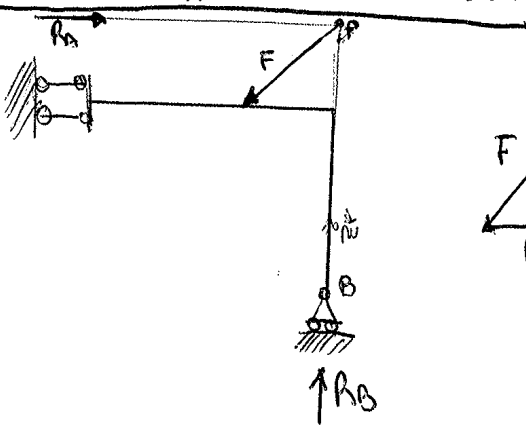


se la forza esterna agisce su BC, il tratto AC funziona come una biella

TRATTO	C.D.P
AC	retta a
BC	retta b

Nel caso in cui negli archi compare un doppio pendolo, ci si basa sull'interpretazione del doppio pendolo come cerniera ideale e sull'equilibrio parziale del tratto non caricato esternamente

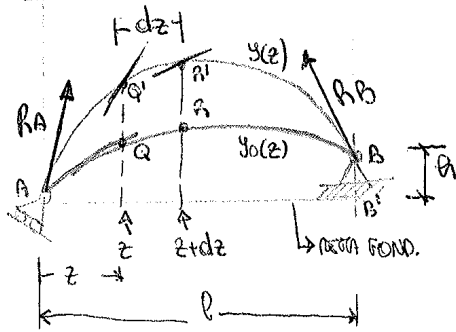
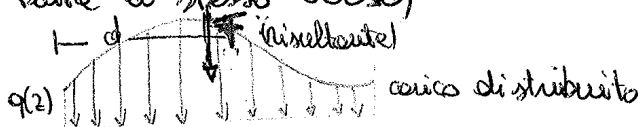
- PORTALE CON DOPPIO PENDOLO E CARRELLI



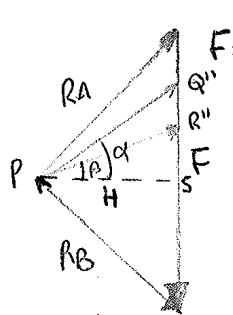
Il polo P è dato dall'intersezione della retta d'azione di F con la normale al piano di scorrimento del carrello. Il doppio pendolo quindi ~~non~~ reggerà con una forza orizzontale passante per P.

-CURVA DELLE PRESSIONI CON CARICO RIPARTITO

Qui si esamina il caso di un sistema continuo di forze equiverse $q(z)$ (tutte tutte lo stesso verso)



La risultante, si può ricavare per integrazione:



$$F = \int_0^l q(z) dz$$

con il suo braccio di:

$$F \cdot d = \int_0^l q(z) z dz$$

Una volta trovata la risultante potrà determinare le reazioni vincolari R_A e R_B mediante il poligono delle forze.

Si assume di conoscere o più o meno la curva delle pressioni e da essa si descrive analiticamente dalla funzione $y(z)$. Ipotizziamo che Q e R siano due punti infinitamente vicini dell'arco, di ascisse rispettivamente z e $z+dz$. Le risultanti parziali saranno orientate come le rispettive tangenti alla curva delle pressioni. Esse sono definiti dai vettori \vec{P}_Q e \vec{P}_R sul poligono delle forze, α e β saranno i loro angoli di orientazione. Il segmento $Q''R''$ rappresenta l'incremento di carico distribuito

$$q''r'' = q(z) dz$$

dalla geometria so che: $Q''R'' = Q''S - R''S = H(\tan \alpha - \tan \beta) = -H[y'(R) - y'(Q)]$

ove H = modulo della componente orizzontale di R_A e R_B mentre l'apice ' indica derivazione rispetto alle coord. z .

$$\text{Ecco che: } q(z) dz = -H dy'$$

Ecco che da tale relazione riesco a ricavare l'equazione differenziale della curva delle pressioni per carichi distribuiti equiversi: $\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}$

Quando il carico distribuito q è costante, la curva funicolare risulta parabolica. È interessante osservare che la c.d.p., di equazione $y(z)$, rappresenta l'andamento del momento flettente.

Il momento della reazione interna \vec{P}_Q è pari alla somma dei momenti di P_S e SQ'' . Il primo è uguale a $H \times Q''Q'$ il secondo è nullo perché ha braccio nullo.

In definitiva: $M = H(y - y_0)$

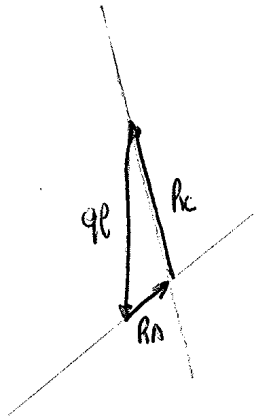
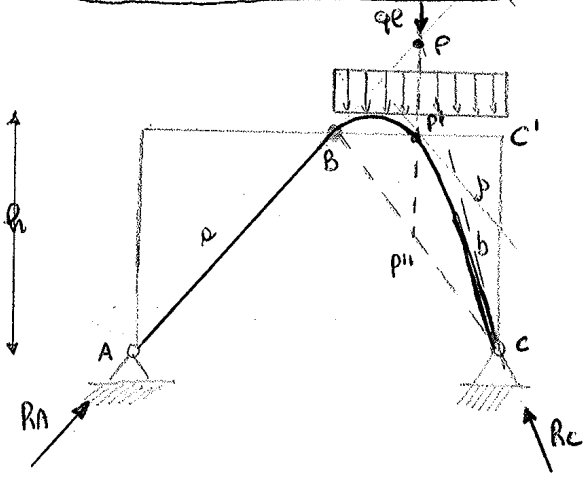
ove: M = momento flettente;

H = proiezione delle reazioni esterne R_A e R_B sulla normale alla direz. delle forze esterne

y = distanza della curva delle pressioni dalla retta fondo, AB'

y_0 = distanza dell'asse dell'arco ancora da tale fondamentale.

ESEMPI DI CURVA DELLE PRESSIONI -- PORTALI CON CARICHI DISTRIBUITI

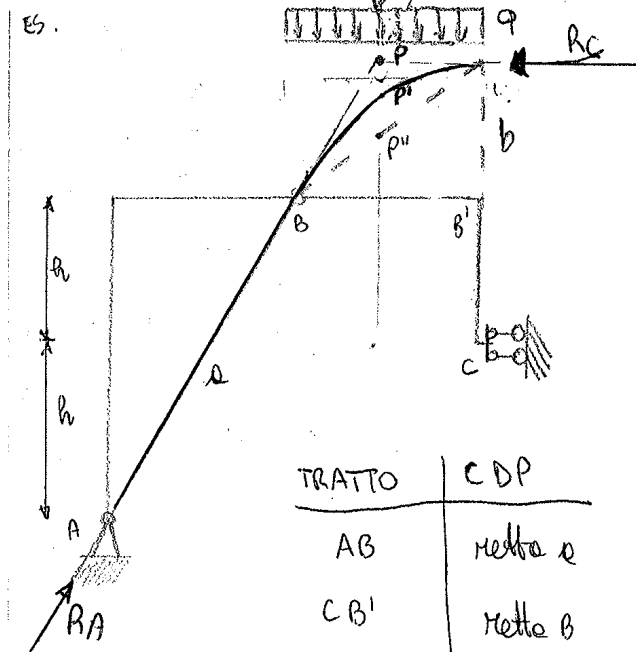
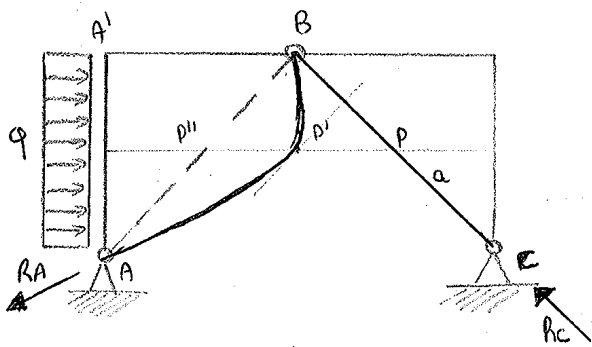


TRATTO	C. D. P.
AB	retta a
CC'	retta b
BP'	parabola

La parabola è compressa perché risulta essere compressa dalle forze RA e Rc.

Costruzione: la reaz. esterna RA ha come retta d'azione la congiungente AB la quale interseca la retta d'azione della risultante qe nel polo P. la seconda reaz. Rc ha retta d'azione che passa per P e C (che si può ricavare dal triangolo delle forze). La CDP per il tratto di sinistra sarà ancora la congiungente AB, ~~per~~ (retta a) mentre per il tratto BC' essa è formata da un'infinità di rette che hanno per inviluppo una parabola ad asse verticale. Tale parabola passa per B e C e si appoggia in quei punti come tangenti le rette d'azione delle reazioni RA e Rc. Per facilitare la costruz. grafica si individua un terzo punto con la relativa tangente. Indico con P'' l'intersez. della verticale per P con la congiungente ai punti estremi B e C e con P' il pto. medio del segmento PP''. Per P' traccio una retta parallela alla congiungente BC che chiamo p, esse è la tangente nel punto P'. Noti i tre punti rappresento la parabola.

ES. CARICO LATERALE



TRATTO	CDP
BC	retta a
BA'	retta s (c'è solo Rc che spinge) e questo da dx.
AA'	parabola

TRATTO	CDP
AB	retta a
CB'	retta b
BB'	parabola.

⊖ A SINISTRA DEL CONCIO

H ↑ positivo

T ↑ positivo

← N positivo

In generale:

②

N.B. Il momento si disegnerà dalla parte delle fibre tese.

1) N SFORZO NORMALE È ASSUNTO POSITIVO QUANDO È DI TRAZIONE.

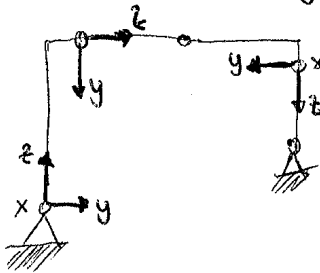
2) T SFORZO DI TAGLIO È ASSUNTO POSITIVO QUANDO TENDE A FARE RUOTARE IL TRONCO DI TRAVE SU CUI AGISCE IN SENDO ORARIO.

3) H MOMENTO FLETTENTE È ASSUNTO POSITIVO QUANDO TENDE LE FIBRE INFERIORI E COMPRIME LE SUPERIORI DELLA TRAVE.

2) CONVENZIONE CHE SEGUE L'ASSE DELLA STRUTTURA

⊙ z = asse lungo la trave; ⊙ y = asse ↓, contenuto nel piano della struttura

⊙ x = asse uscente dal foglio

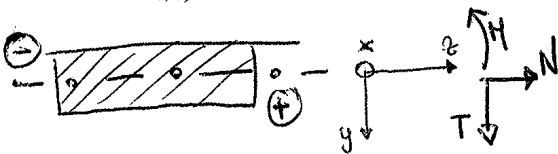


Questo metodo è sconsigliato perché gli assi sono rotazionali e quindi occorre metterli sempre lungo la struttura. Con tale metodo le convenzioni sono:

- N > 0 se di trazione

- T > 0 se y è diretto come T sulla faccia positiva ⊕
T < 0 " " " " opposto a "y" sulla faccia negat. ⊖

- H > 0 se tende le fibre per y > 0



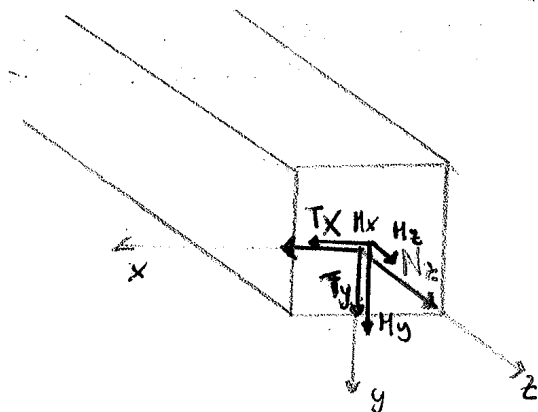
CONDIZ. PER I DIAGRAMMI

- N INDIFFERENTE (può disegnarsi sopra o sotto al corpo rigido, ^{occorre} ~~basta~~ mettere il segno però)

- T INDIFFERENTE (se uso la prima convenzione, occorre mettere il segno però)
T > 0 dalla parte delle y negative (se uso la 2ª convenzione)

- H > 0 FIBRE TESE (se uso la prima convenzione)
> 0 se tende le fibre per y > 0 (se uso la 2ª convenzione)

SOLLECITAZIONE NELLO SPAZIO



Nz: normale lungo l'asse della trave
Tx e Ty: sforzo di taglio lungo x e y

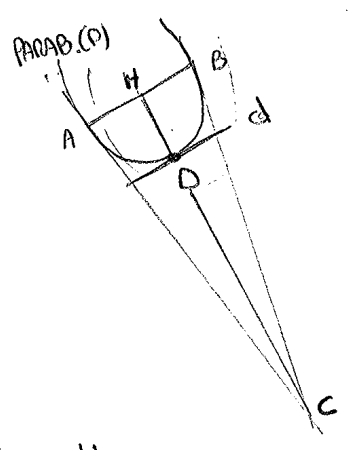
Hx } MOMENTI
Hy } FLETTENTI

Ht = MOMENTO TORCENTE

Nel caso quindi della trave nello spazio a tre dimensioni, le caratteristiche delle sollecitazioni sono sei: lo sforzo normale, due sforzi di taglio, due M flettenti, un M torcente.

7) C (COPPIA CONCENTRATA) \Rightarrow "M" DISCONTINUO

8) LA CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P.) È PROPORZIONALE AL MOMENTO "M"
COME SI DISEGNA IL DIAGRAMMA DEL MOMENTO



Q DISTRIBUITO \rightarrow costruz. grafica della parabola

A, B e P $A \rightarrow B = \overline{AB}$

H = punto medio di AB

1) Traccio la tangente della parabola per A e B e all'incrocio trovo C

2) Unisco H con C \rightarrow HC e trovo il punto D

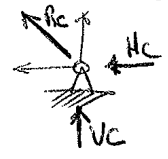
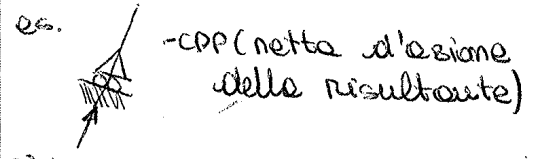
$\overline{HD} = \overline{DC}$ (anche se il disegno non lo rappresenta D è HC ed è il vertice della parabola.

Le rette d'azione delle reazioni vincolari, saranno le tangenti, la mediana e dove viene esercitato il carico distribuito e deve passare per il vertice della parabola.

CURVA DELLE PRESSIONI PER LE STRUTTURE ISOSTATICHE

1) LA CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P.) È UN ANDAMENTO DELLA RISULTANTE DI N, T SU TUTTA LA STRUTTURA;

2) LA CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P.) È TANGENTE ALLE REAZIONI VINCOLARI AUE ESTREMITA';



3) LA CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P.) INTERSECA LA STRUTTURA DOVE IL MOMENTO È NULLO (M=0);

4) SE IL CARICO È NULLO (q=0) \Rightarrow LA CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P.) È UNA RETTA;

5) SE IL CARICO È DIVERSO DA ZERO, MA È COSTANTE (q \neq 0, q = cost.) E LO SFORZO NORMALE NON È NULLO (N \neq 0) \Rightarrow LA CURVA DELLE PRESSIONI È UNA PARABOLA;

6) SE IL CARICO È DIVERSO DA ZERO, MA È COSTANTE (q \neq 0, q = cost.) E LO SFORZO NORMALE È NULLO (N=0) \Rightarrow C.D.P. È UN FASCIO DI RETTE PARALLELE;

7) LA CURVA DELLE PRESSIONI (C.D.P.) HA UN PUNTO ANGOLOSO DOVE "F" È CONCENTRATA;

8) " " " " " " È DISCONTINUA SE C'È UNA COPPIA "C" CONCENTRATA;

9) SE ~~N~~ N=T=M=0 \Rightarrow LA CURVA DELLE PRESSIONI NON È DEFINITA

10) SE N=T=0, ma H \neq 0 \Rightarrow " " " " È UNA RETTA IMPROPRIA ALL' ∞

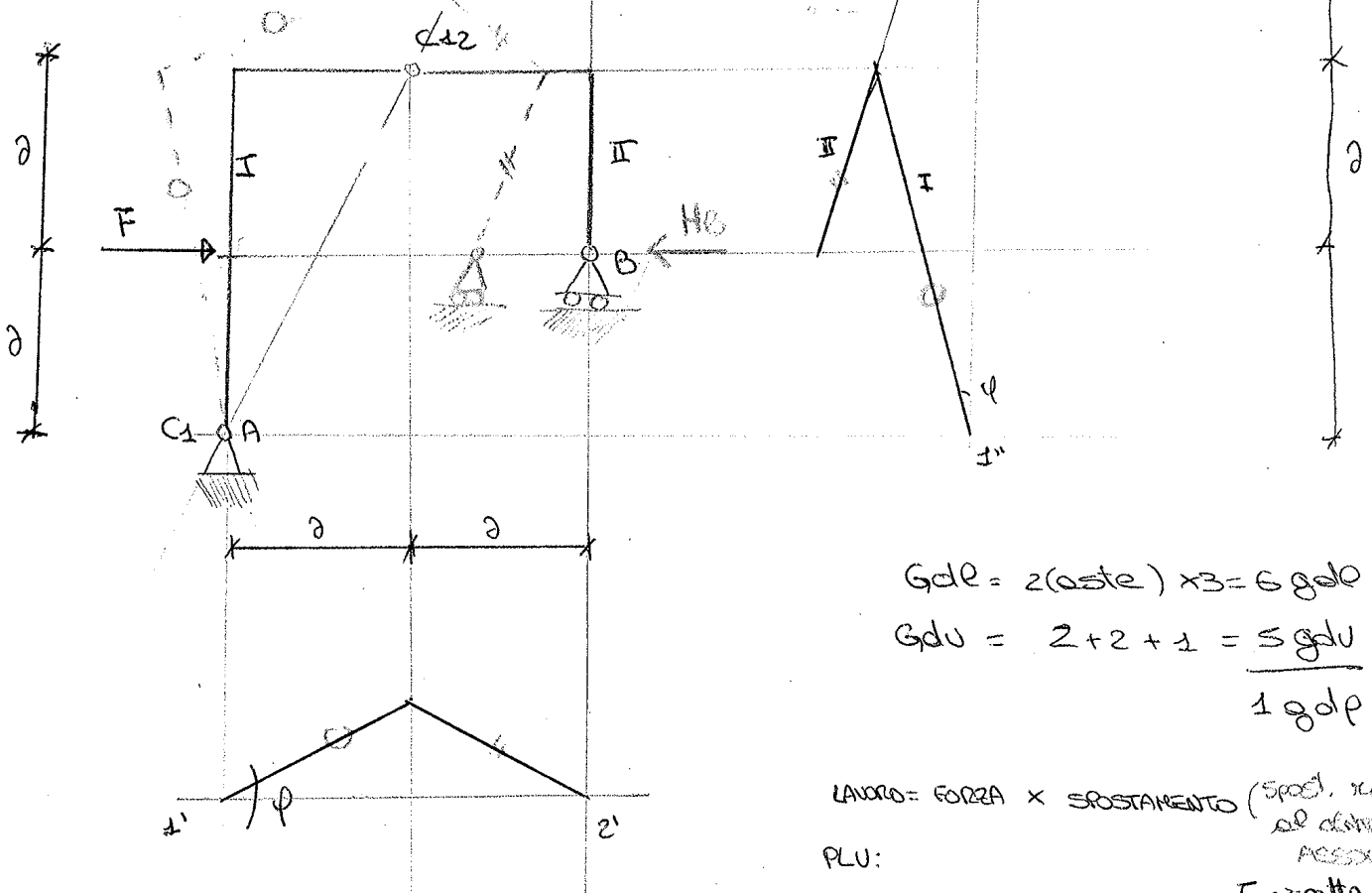
11) LA DISTANZA TRA LA C.D.P. E L'ASSE DELLA STRUTTURA È PROPORZIONALE A H.

trovò lo spost. verticale della biella I. Dell'asta II si conosce la proiezione del centro assoluto C_2 e anche lo spostamento verticale dell'estremo imbracciato alla biella I (cioè lo spost. verticale della cerniera interna che chiameremo con φ vedi di seguito) noto quest'ultimo, posso unire il centro C_2 con questo punto e trovo così lo spost. verticale dell'asta II, che è rappresentato da un segmento ruotato di un angolo θ in senso orario.

→ DIAGRAMMA SPST. ORIZZONTALI: traccio un segmento ruotato dell'angolo φ rotatorio attorno alla posiz. di C_1 . Unisco il punto di proiezione del centro assoluto con l'estremo del segmento ruotato dell'angolo φ ottengo così gli spostamenti orizzontali dell'asta II. Dove non c'è materiale strutturale tratteggio. Si può notare che anche qui si forma un angolo θ e ~~regionale~~ regionale C_2 anche nella similitudine dei triangoli tratteggiati.

⇒ ESEMPIO DI CALCOLO DELLE REAZIONI:

Tutte le volte che un vincolo viene impedito, nasce una REAZIONE, la REAZIONE può essere una forza per esempio.



$$G_dL = 2(\text{aste}) \times 3 = 6 \text{ gdl}$$

$$G_dU = 2 + 2 + 1 = 5 \text{ gdl}$$

$$1 \text{ gdl}$$

LAVORO = FORZA x SPOSTAMENTO (spost. rispetto al centro assoluto)

PLU:

$$H_B(3a\varphi) - F(a\varphi) = 0$$

F rispetto a C_1
 H_B " " C_2

$$H_B(3a\varphi) = F(a\varphi)$$

$$H_B = \frac{F}{3}$$

Questo è un metodo per usare ~~quantità~~ qualitativamente le catene cinematiche. Il vero trucco di usare le catene cinematiche con il PLU è quello di determinare una reaz. indipendentemente da un'altro

②

CAP. 7 ANALISI DELLA DEFORMAZIONE ① E DELLA TENSIONE

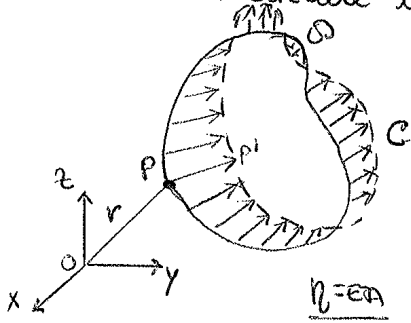
(lettere e capitali fanno riferimento alle domande svolte)

2 ANALISI DELLA DEFORMAZIONE (dal par. 7.1 al par. 7.5)

a) DEFINIZIONE ANALITICA DEL TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

Fino ad adesso avevamo considerato solo corpi rigidi, cioè corpi indeformabili, la cui distanza tra ciascuna coppia di punti non varia, anche quando essi sono sottoposti a sollecitazione da forze esterne. Nella realtà però il corpo rigido non esiste, ovvero tutti i corpi sono soggetti a deformazione.

Iniziamo ad analizzare un oggetto con una forma qualsiasi:



f = FUNZIONE SPOSTAMENTO: è quella funzione che associa a ogni vettore di posiz. $\{r\}$ dei punti del corpo in posiz. iniziale e indeformati, il vettore $\{\eta\}$ (vett. spostamento) che tali punti subiscono passando il corpo in posizione finale e in configurazione

deformata.

$$f: D \rightarrow L \quad f: P \rightarrow P' \quad f: \{r\} \rightarrow \{\eta\}$$

D = dominio della funz. ed è formato da tutti i punti del materiale allo stato iniziale

L = codominio ed è il volume occupato dal corpo nello stato finale.

Il vettore spostamento $\{\eta\}$ è dato da tre componenti:

$$\{\eta\} = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k}$$

Per ciò si fa un'ipotesi di f regolare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, siccome non si considerano fratture e compenetrazioni. Inoltre la funzione f , e la sua inversa f^{-1} devono risultare continue e biettive (omniunoche). (OMEOMORFISMO)

Si va ad analizzare un punto P all'interno del corpo deformabile, e un punto Q nel suo intorno infinitesimo tale che:

$$\vec{P-Q} = \{dr\} = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j} + (z_Q - z_P)\vec{k}$$



Essendo f regolare e continua si può sviluppare in serie di Taylor (al 1° ordine):

$$\begin{cases} u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P + \dots \\ v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_P + \dots \\ w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P + \dots \end{cases}$$

N.B. ... indicano gli altri ordini dello svilup. po in serie di Taylor.

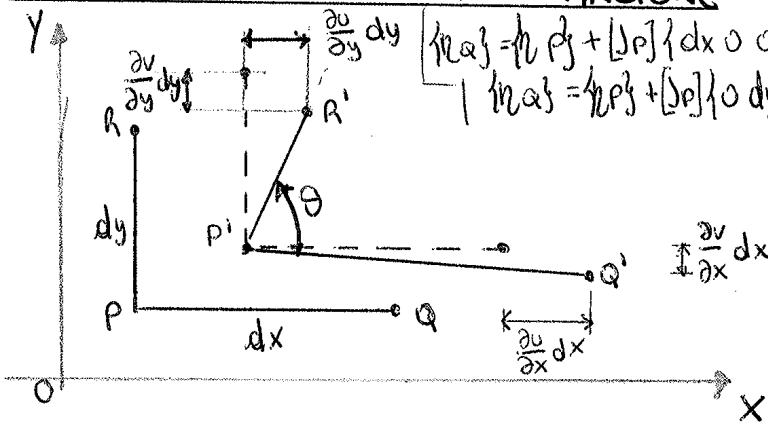
gli ingegneri tendono a usare questa forma:

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Essa chiaramente risulta essere simmetrica $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Le ϵ rappresentano le derivate parziali delle componenti del vettore spostamento nelle relative direzioni, γ invece rappresentano le somme delle derivate parziali incrociate. Abbiamo comunque lavorato nell'ambito delle ipotesi di piccoli spostamenti e di regolarità della funzione ϕ , $\epsilon, \gamma \ll 1$.

b) SIGNIFICATO FISICO DI DEFORMAZIONE (MOTO RIGIDO + DEFORMAZIONE)



Considero due segmenti ortogonali PQ e PR di lunghezza infinitesime dx e dy . Si sceglie una terna di riferimento x, y, z , di modo che gli assi x e y risultino paralleli a PQ e PR . La configuraz. iniziale è quella appena descritta, mentre quella finale (configurazio-

ne deformata) è quella rappresentata dai segmenti $P'Q'$ e $P'R'$ dove i segmenti oltre aver subito una rototraslazione appaiono anche di lunghezza diversa e con un angolo θ non più retto.

Applicando le eq. per il punto Q e R ottengo:

$$\begin{cases} U_Q = U_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx \\ V_Q = V_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx \\ W_Q = W_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P dx \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{spostamenti} \\ \text{Upunto rigido} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx \text{ deform.} \end{array} \right) \quad \begin{cases} U_R = U_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy \\ V_R = V_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy \\ W_R = W_P + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P dy \end{cases}$$

Il significato fisico ovvero la DILATAZIONE SPECIFICA lungo l'asse x vale:

$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \quad \frac{\text{lunghezza finale} - \text{lungh. iniziale}}{\text{lungh. iniziale}}$$

e quindi coincide proprio con il primo termine della diagonale della matrice delle deformazioni. Im modo analogo posso effettuare lo stesso procedimento per y e z e trovare ϵ_y e ϵ_z .

Oltre alla dilatazione specifica si possono anche valutare le variazioni angolari:

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \gamma_{xy}$$

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ sono detti appunto scorrimenti angolari e rappresentano le diminuzioni che gli angoli retti, $\frac{\pi}{2}$ subiscono dopo la deformazione. Questa teoria sulle deformazioni vale per spostamenti infinitesimi γ e $\epsilon \ll 1$, al fine delle costruzioni è sufficiente lavorare con esse.

$$\begin{aligned} \eta_{mm} = \eta_{mm} = & \epsilon_x m_x m_x + \epsilon_y m_y m_y + \epsilon_z m_z m_z + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (m_x m_y + m_y m_x) + \frac{1}{2} \gamma_{xz} (m_x m_z + m_z m_x) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{yz} (m_y m_z + m_z m_y) \end{aligned} \quad \text{FORMA BILINEARE} \quad (5)$$

ove m_x, m_y, m_z sono i coseni direttori di m e m_x, m_y, m_z i coseni direttori di m . Tale uguaglianza esprime la legge di reciprocità per il vettore spostamento.

(es. a due direz.) $\rightarrow \eta_{mm} = \begin{vmatrix} m_x & m_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_x \\ m_y \end{vmatrix} = m_x \epsilon_x m_x + m_x m_y \frac{\gamma_{yx}}{2} + m_y m_x \frac{\gamma_{xy}}{2} + m_y \epsilon_y m_y$

\downarrow

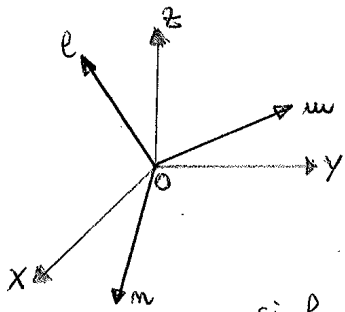
$$\eta_{mm} = \begin{vmatrix} m_x & m_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_x \\ m_y \end{vmatrix} = m_x \epsilon_x m_x + m_x \frac{\gamma_{yx}}{2} m_y + \frac{\gamma_{xy}}{2} m_y m_x + \epsilon_y m_y m_y$$

ecco che $\eta_{mm} = \eta_{mm}$.

La proiezione η_{mm} rappresenta anche la dilataz. specifica lungo m quindi: $\epsilon_m = \{m\}^T [E] \{m\}$

CASO $m \perp m$ (caso in cui le direzioni siano ortogonali)

η_{mm} : nuovo sistema di riferimento



Se le direzioni m e m introdotte (non quelle del sistema di riferimento) si suppongono ortogonali, si può ottenere lo scorrimento angolare ad esse relativi:

IPOTESI: $\gamma_{mm} = \gamma_{mm} = \eta_{mm} + \eta_{mm} \Leftrightarrow m \perp m$

ma per la legge della reciprocità ($\eta_{mm} = \eta_{mm}$) allora si ha: $\gamma_{mm} = \gamma_{mm} = 2\eta_{mm} = 2\eta_{mm}$

Sapendo che $\eta_{mm} = \{m\}^T [E] \{m\}$ sostituendo con γ_{mm} si può ottenere:

$$\frac{1}{2} \gamma_{mm} = \frac{1}{2} \gamma_{mm} = \{m\}^T [E] \{m\} = \{m\}^T [E] \{m\}$$

Considerando un nuovo sistema di riferimento con tre direzioni mutuamente ortogonali (m, m, e) ruotate rispetto a quelle iniziali di riferimento x, y, z , si può ora esprimere la legge di trasformazione delle matrici delle deformazioni per rotaz. del sist. di riferimento. Tale matrice nel sist. di riferimento m, m, e viene indicata con $[E^*]$, ove l'asterisco * sottintende rotazione.

$$[E^*] = \begin{bmatrix} \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{mm} & \frac{1}{2} \gamma_{em} \\ \frac{1}{2} \gamma_{mm} & \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{em} \\ \frac{1}{2} \gamma_{me} & \frac{1}{2} \gamma_{me} & \epsilon_e \end{bmatrix}$$

Sostituendo all'interno di tale matrice le relazioni:

$$\rightarrow \epsilon_m = \{m\}^T [E] \{m\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{mm} = \{m\}^T [E] \{m\} \text{ ottengo:}$$

$$[E^*] = \begin{vmatrix} \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{e\} \\ \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{e\} \\ \{e\}^T [E] \{m\} & \{e\}^T [E] \{m\} & \{e\}^T [E] \{e\} \end{vmatrix} = \text{in forma più compatta} = \begin{bmatrix} \{m\}^T \\ \{m\}^T \\ \{e\}^T \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} \{m\} \\ \{m\} \\ \{e\} \end{bmatrix}$$

devono obbedire alla relazione di normalità: $m^2x + m^2y + m^2z = 1$ (7)

Se si calcola il determinante della matrice dei coefficienti e lo si pone uguale a zero, si trova una soluzione diversa dalla nulla che rappresenta una "direzione principale". Troviamo un'equazione algebrica di terzo grado nell'incognita ϵ_m : $\epsilon_m^3 - J_I \epsilon_m^2 - J_{II} \epsilon_m - J_{III} = 0$ (*)

I coefficienti J_I, J_{II}, J_{III} sono detti INVARIANTI SCALARI DELLA DEFORMAZIONE, si dicono invarianti siccome sono costanti al variare della terna di riferimento (e spost. e rotazione con n)

- $J_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ (il primo invariante si dice "traccia" del tensore ed è pari alla somma degli elementi della diagonale principale di $[\epsilon]$)

- $J_{II} = - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \epsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$ (il secondo invariante è pari alla somma degli opposti dei determinanti dei minori principali di ϵ)

- $J_{III} = \det [\epsilon]$ (determinante di ϵ)

L'equazione che si ottiene (*) di terzo grado, ammette tre radici che sono $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ e sono dette AUTOVALORI del problema. Quindi il sistema matriciale ammette tre diverse soluzioni $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$ dette AUTOVETTORI. Gli autovalori sono reali, essendo $[\epsilon]$ simmetrico, essi rappresentano le dilatazioni principali e ne forniscono l'intensità della deformazione. Gli autovettori, se $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$, sono mutuamente ortogonali e rappresentano le tre "direzioni principali" della deformazione.

Se si considerano le due direz. principali i e j , la legge di reciprocità ci fornisce: $\epsilon_i \cos \theta_{ij} = \epsilon_j \cos \theta_{ji}$

dove θ_{ij} = angolo compreso tra le due direzioni

$$(\epsilon_i - \epsilon_j) \cos \theta_{ij} < \begin{cases} \theta_{ij} = \pi/2 & \epsilon_i \neq \epsilon_j \\ \epsilon_i = \epsilon_j \end{cases}$$

Si possono presentare tre casi con gli autovalori:

- 1) $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$: le tre direz. principali sono mutuamente ortogonali;
- 2) $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$: la direz. $\{m_3\}$ è principale assieme alle ∞^2 direzioni ed essa è ortogonale;
- 3) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ le ∞^2 direz. sono tutte principali

→ Il tensore delle deformazioni nel sistema di riferimento principale $123 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

è diagonale: $\begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}$
essendo tutti nulli gli scorrimenti
ti angolari

$$J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

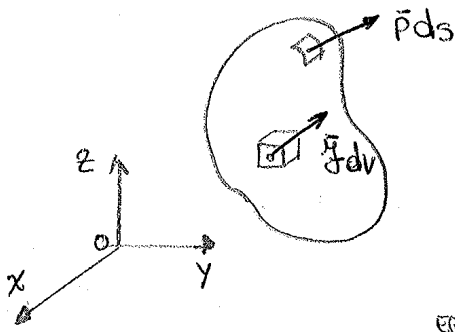
$$J_{II} = -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3)$$

$$J_{III} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$$

In tal caso gli invarianti si semplificano notevolmente.

3 ANALISI DELLA TENSIONE (dal par. 7.6 al 7.9) ⑨

2) DEFINIZIONE DEL TENSORE DELLE TENSIONI $\{\sigma\}$



si considera un corpo in equilibrio, sotto l'azione di forze distribuite sull'unità di superficie esterna $\{p\}$ e nell'unità di volume $\{f\}$. Le equazioni cardinali della statica impongono:

EQUAZIONE ALA TRASLAE.
$$\int_S \{p\} ds + \int_V \{f\} dv = \{0\}$$

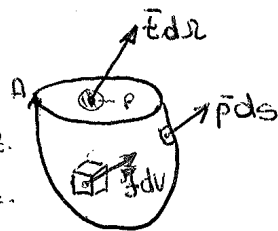
EQUAZIONE ALA ROTAZ.
$$\int_S \{r\} \wedge \{p\} ds + \int_V \{r\} \wedge \{f\} dv = \{0\}$$

S = frontiera del corpo; V = volume occupato; $\{r\}$ = vettore posizione dai suoi punti

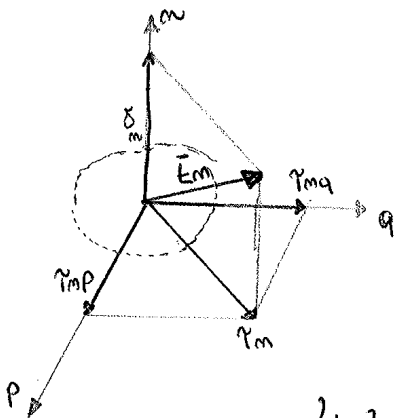
Ora occorre immaginare di effettuare una sezione del corpo in equilibrio. Ciascuna delle due porzioni in cui viene suddiviso il solido sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie (oltre che di volume) sia quelle relative alla superficie parziale esterna S_A , che quelle relative alla superficie della sezione R_A e trasmesse dalla porzione complementare del corpo:

$$\int_{S_A} \{p\} ds + \int_{R_A} \{t\} d\Omega + \int_{V_A} \{f\} dv = \{0\} \quad \parallel \text{EQUAZIONI ALA TRASLAE.}$$

$$\int_{S_A} \{r\} \wedge \{p\} ds + \int_{R_A} \{r\} \wedge \{t\} d\Omega + \int_{V_A} \{r\} \wedge \{f\} dv = \{0\} \quad \parallel \text{EQUAZ. ALA ROTAZ.}$$



$\{t\}$ è il VETTORE TENSIONE cioè la forza trasmessa dall'area infinitesima $d\Omega_A$, che costituisce un intorno del punto P sul piano A. Tale vettore in genere non è ortogonale al piano A ed è funzione sia del punto P che del piano secante A. Una volta noti il vettore posizione $\{r\}$ e il versore $\{m\}$ normale all'area infinitesima si può definire il vettore tensione: $\parallel \{t\} = \{t(\{r\}, \{m\})\} = \{t_m\}$.



Di tale vettore tensione è possibile considerare le componenti rispetto alla terna di riferimento esterna: $\{t_m\} = t_{mx} \vec{i} + t_{my} \vec{j} + t_{mz} \vec{k}$ oppure le componenti rispetto a una terna locale $(\vec{m}, \vec{q}, \vec{p})$ con uno degli assi coincidenti alla normale dell'area infinitesima, e gli altri due giacenti sul piano di sezione:

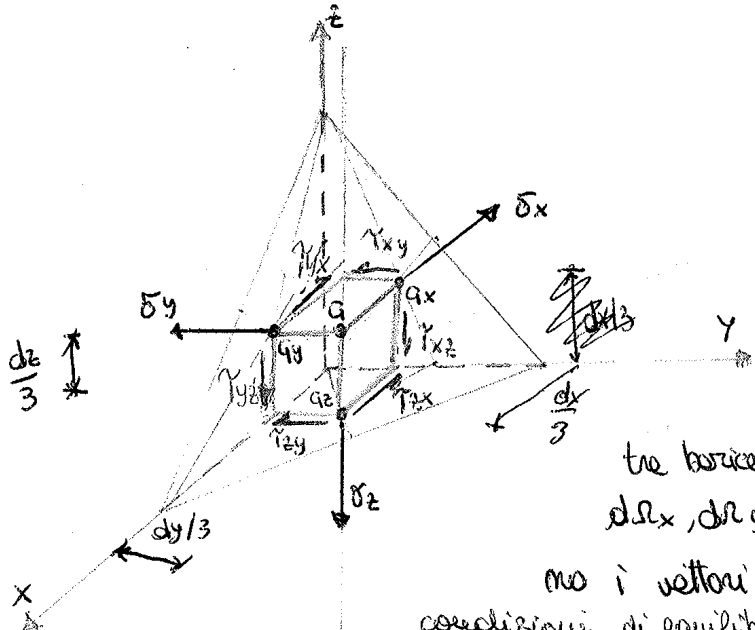
$$\{t_m\} = \delta_m \vec{m} + \tau_{mp} \vec{p} + \tau_{mq} \vec{q} \quad (\vec{m} - \vec{q} - \vec{p} \text{ versori degli assi})$$

δ_m rappresenta la componente normale, mentre τ_{mp} e τ_{mq} le componenti tangenziali. La risultante di τ_{mp} e τ_{mq} è detta COMPONENTE TANGENZIALE TOTALE:

$$\tau_m = \sqrt{\tau_{mp}^2 + \tau_{mq}^2}$$

D) DIMOSTRAZIONE CHE IL TENSORE DEGLI SFORZI È SIMMETRICO

(11)



Per dimostrare che il tensore degli sforzi è simmetrico, occorre prendere in considerazione l'equilibrio alla rotazione del ~~tetraedro~~ tetraedro infinitesimale.

G indica il p.c. baricentro dell'angolo infinitesimale dV ed è dato dalla proiezione dei tre baricentri G_x, G_y, G_z dell'angolo infinitesimale $dx/3, dy/3, dz/3$. In tali tre baricentri si applicano

o i vettori tensione e si vanno a esprimere le condizioni di equilibrio alla rotazione del tetraedro rispetto agli assi G_x, G_y e G_z . Ad esempio se analizzo la rotazione lungo l'asse G_x vedo che le componenti $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ non provocano momento perché hanno braccio nullo. In modo analogo τ_{yx} e τ_{zx} non provocano momento perché sono parallele all'asse G_x . Le uniche due componenti che contribuiscono al momento rispetto all'asse G_x sono τ_{yz} e τ_{zy} , posso scrivere allora:

$$\tau_{zy} dz \frac{dz}{3} - \tau_{yz} dy \frac{dy}{3} = 0 \quad (*)$$

(il prodotto della tensione τ per l'angolo dV , rappresenta la forza risultante infinitesimale: e $dy/3$ e $dz/3$ i rispettivi bracci di tali due forze)

Vedendo che $\frac{1}{3} dV_y dy = \frac{1}{3} dV_z dz = dV$ (semplifico $\frac{1}{3}$ da una parte e dall'altra e ottengo dV)

vedo che il volume del tetraedro infinitesimale. Ecco che l'equazione (*) si semplifica e ottengo $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, così come $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Ecco allora che la matrice delle tensioni $[\sigma]$ è dunque simmetrica, così le componenti significative si riducono da 9 a 6.

C) COME VARIANO LE COMPONENTI AL VARIARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO?

Come già fatto per il vettore spostamento, quando si è realizzata la deformazione, occorrerà ora esprimere la proiezione del vettore tensione su un asse generico. La componente normale all'angolo (con direz. del versore $\{m\}$) vale:

$$\sigma_n = t_{mm} = \{m\}^T \{t_m\} = \{m\}^T [\sigma] \{m\} \quad \text{essendo } \{t_m\} = |\sigma| \{m\}$$

La proiezione del vettore tensione lungo una direz. del versore m vale: $t_{mm} = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$

In modo simile la proiezione del vettore tensione $\{t_m\}$ su m vale: $t_{mm} = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$

Sviluppando le due espressioni matriciali, si ottiene la "LEGGE DI RECIPROCA"

$$t_{mm} = t_{mm} = \sigma_x m_x m_x + \sigma_y m_y m_y + \sigma_z m_z m_z + \tau_{xy} (m_x m_y + m_y m_x) + \tau_{xz} (m_x m_z + m_z m_x) + \tau_{yz} (m_y m_z + m_z m_y)$$

d) COSA SONO LE TENSIONI PRINCIPALI E COME SI TROVANO?

(13)

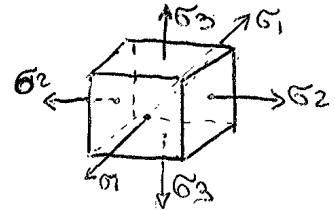
Occorre determinare se esistono giaciture rispetto alle quali siano presenti solo tensioni normali. Il versore $\{m\}$ quindi deve essere parallelo al vettore tensione $\{tm\}$.

Le due relazioni da cui si parte sono: $\{tm\} = [\sigma]\{m\}$ e $\{tm\} = \delta_m\{m\}$

Da queste due relazioni per la proprietà transitiva, si ottiene l'equazione degli autovalori che regge il problema: $([\sigma] - [I]\delta_m)\{m\} = \{0\}$ $[I] = \text{MATRICE IDENTICA}$

Tale equazione si può esprimere in termini matriciali come:

$$\begin{bmatrix} (\delta_x - \delta_m) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\delta_y - \delta_m) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\delta_z - \delta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Come già visto per le deformazioni, la soluz. ovvia ($\det \neq 0$) non ha significato fisico, siccome i coseni direttori debbono obbedire alla relaz. di normalità $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$.

Se il determinante dei coeff. si annulla ($\det = 0$) la soluzione non è ovvia e rappresenta una direzione principale. Si ottiene così un'equazione di terzo grado nell'incognito δ_m :

$$\delta_m^3 - J_I \delta_m^2 - J_{II} \delta_m - J_{III} = 0$$

Come già visto per le deformazioni J_I , J_{II} e J_{III} sono INVARIANTI SCALARI DELLA TENSIONE:

$J_I = \delta_x + \delta_y + \delta_z$ (il primo invariante si dice TRACCIA DEL TENSORE ed è pari alla somma degli elementi diagonali)

$J_{II} = - \begin{bmatrix} \delta_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \delta_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \delta_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \delta_z \end{bmatrix}$ (il secondo invariante è pari alla somma degli opposti dei determinanti dei minori principali)

$$J_{III} = \det[\sigma]$$

L'equazione di terzo grado ammette tre radici $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ dette AUTOVALORI del problema. Il sistema matriciale quindi ammette tre direzioni diverse $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$ dette AUTOVETTORI del problema.

Essendo il tensore $[\sigma]$ simmetrico gli autovalori sono reali e rappresentano appunto le tre "TENSIONI PRINCIPALI". Gli autovettori invece sono mutuamente ortogonali e rappresentano le tre "DIREZIONI PRINCIPALI" se gli autovalori sono tutti distinti.

- se $\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$ le tre tensioni principali sono tre l'oro ortogonali;

- se $\delta_1 = \delta_2 \neq \delta_3$ esistono una direzione e una giacitura principali, tra loro ortogonali;

- se $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$ tutte le direzioni sono principali.

(Ad es. un sasso di materiale omogeneo e profondità infinite nel suo = (15) re non si danneggia perché è un tensore idrostatico. Questo vale per il sasso che è un materiale omogeneo, ad esempio per l'uomo non varrebbe) la seconda componente τ_{xy} del tensore degli sforzi invece è il TENSORE DEVIATORICO:

$$[\sigma^d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

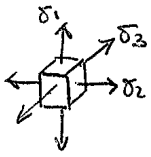
Quando si analizza la frattura occorre tenere conto di questo tensore deviatorico.

Il tensore deviatorico è differenza di quello idrostatico, varia con il variare dell'orientazione del

la terna di riferimento.

Si può osservare come la somma tra σ^i e σ^d fornisca proprio $\bar{\sigma}$

→ PROBLEMA DELLE TENSIONI PRINCIPALI: INTERPRETAZIONE GRAFICA BASATA SUL METODO DEI CERCHI DI MOHR.



Nel sistema di riferimento principale 123 le equazioni $\{t_m\} = [\sigma] \{m\}$ e $\bar{\sigma}_m = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$ possono essere così espresse in forma matriciale:

$$\{t_m\} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_m = [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

ove m_1, m_2 e m_3 sono i coseni direttori, sviluppando i calcoli matriciali otteniamo: $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_1 m_1^2 + \bar{\sigma}_2 m_2^2 + \bar{\sigma}_3 m_3^2$

Il modulo del quadrato del vettore tensione vale: $\tau_m^2 + \bar{\sigma}_m^2 = \bar{\sigma}_1^2 m_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 m_2^2 + \bar{\sigma}_3^2 m_3^2$ per i coseni direttori vale l'equaz. di normalità: $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$

Mettendo a sistema queste tre equazioni ritraccio tale soluz. del sistema:

$$\begin{cases} m_1^2 = \frac{\tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_2)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_3)}{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)} \rightarrow \text{POSITIVO} \\ m_2^2 = \frac{\tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_1)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_3)}{(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)} \rightarrow \text{NEGATIVO} \\ m_3^2 = \frac{\tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_1)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_2)}{(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)(\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)} \rightarrow \text{POSITIVO} \end{cases}$$

Se vedo e pone la relazione d'ordine: $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \bar{\sigma}_3$ che però non è restrittiva (cioè posso anche porre come relaz. $\bar{\sigma}_3 > \bar{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_1$), osservo subito che grazie a tale relazione si ha che: il denominatore della prima

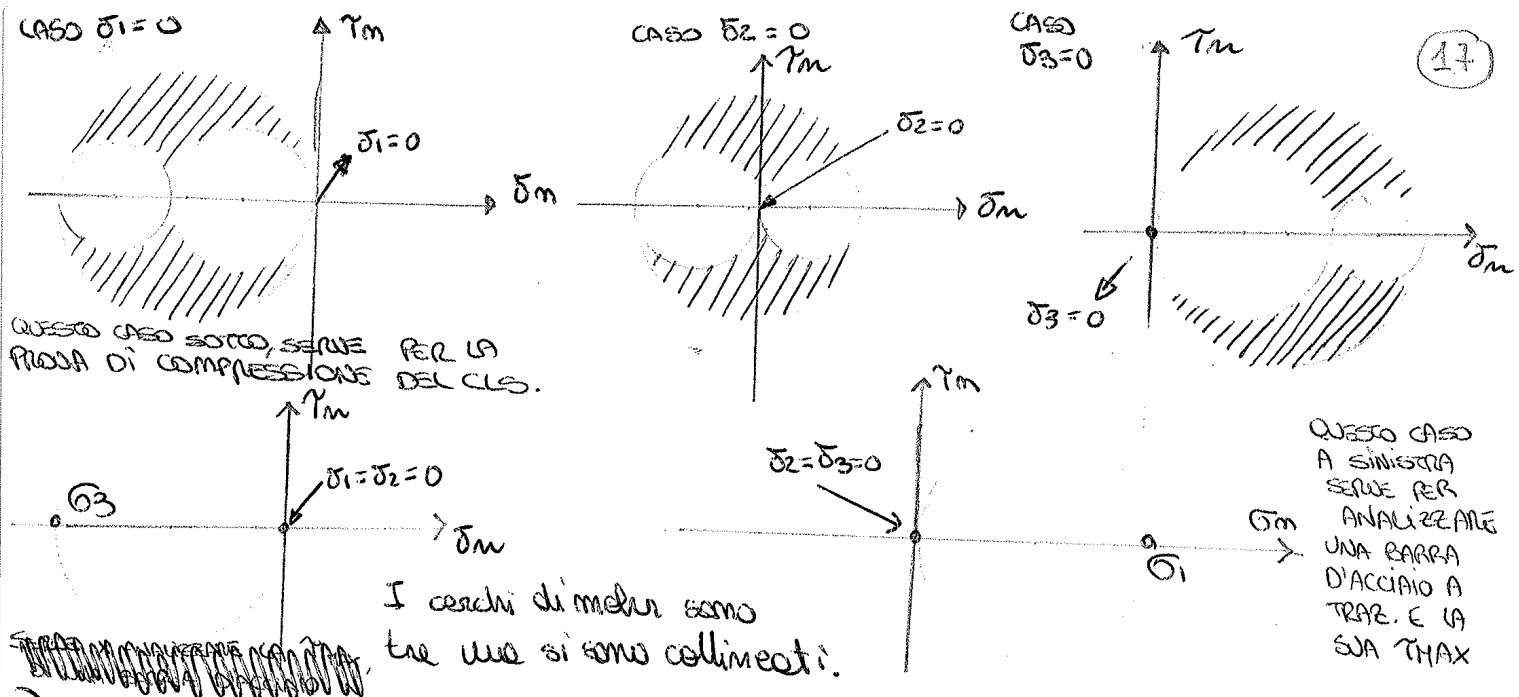
e terza soluz. sono positivi, mentre il secondo è negativo. Ecco allora che i numeratori dovranno rispettare tali uguaglianze:

$$\begin{cases} \tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_2)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_3) \geq 0 & (\text{per } m_1) \\ \tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_1)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_3) \leq 0 & (\text{per } m_2) \\ \tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_1)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_2) \geq 0 & (\text{per } m_3) \end{cases}$$

Vado ad analizzare il primo numeratore e l'operazione che effettuo si ripete in modo analogo sugli altri numeratori.

$\tau_m^2 + (\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_2)(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_3) \geq 0$ sviluppo i calcoli:

$$\tau_m^2 + \bar{\sigma}_m^2 - \bar{\sigma}_m \bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_m \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 \geq 0. \quad \text{Devo ricondurre all'equazione di una}$$

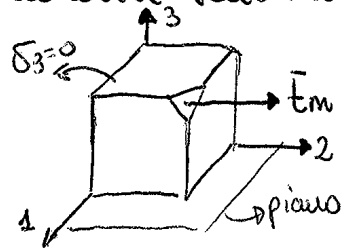


Dimostrazione delle regole di costruzione dei cerchi di Mohr per lo stato tensionale piano

Metodo Analitico

Lo stato tensionale in un punto si dice piano se il vettore tensione appartiene in ogni caso a una medesima giacitura che non dipende dalla sezione scelta. La condizione necessaria e sufficiente per la quale uno stato tensionale sia piano e' che si annulli una delle tre tensioni principali.

Supponiamo il caso $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ e $\sigma_3 = 0$. Il vettore tensione $\{t_m\}$ appartiene al piano delle tensioni $\sigma_1 - \sigma_2$, qualsiasi sia l'orientazione dell'area dS_m .



$t_m \in (1-2)$

$$\begin{bmatrix} t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

Nella direzione 3 tutte le componenti saranno nulle, anche quelle tangenziali, e quindi la matrice σ risultera':

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il problema degli autovalori si risolve annullando il determinante della seguente matrice:

$$\det. \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix}$$

le tre radici si ottengono dalle due equazioni:

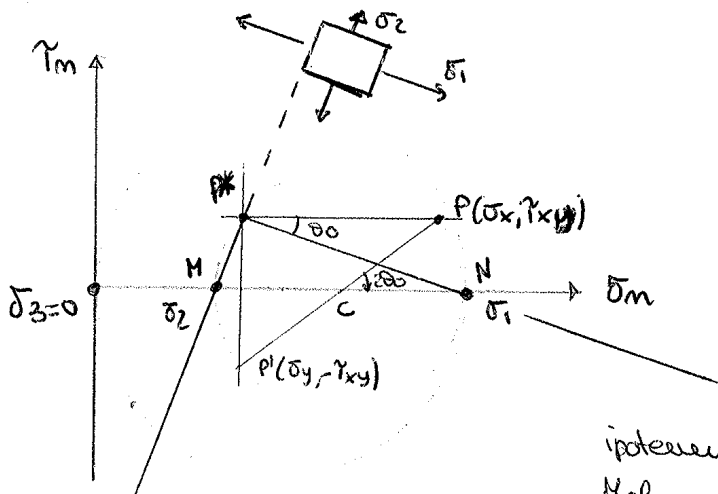
$$\begin{cases} \sigma_m = 0 \\ \sigma_m^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_m + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione e' nota perche' per ipotesi $\sigma_3 = 0$. La seconda e' l'equaz. di secondo grado e mi fornisce le due tensioni σ_1 e σ_2 diverse da zero.

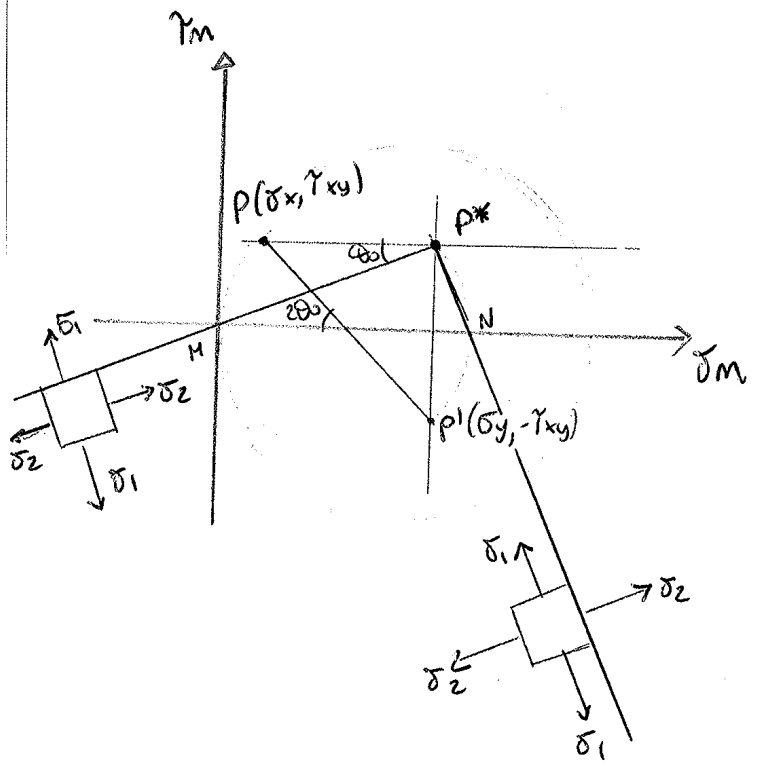
Risolvendo l'equazione ottengo:

la soluzione grafica deve rispettare le soluzioni analitiche.

Per giustificare che σ_1 si deve ragionare sull'ascissa del centro C e sul triangolo rettangolo PP^*P' che ha come ipotenusa il diametro del cerchio di Mohr.



Per giustificare $\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ si noti che $\widehat{PP^*N}$ è un angolo alla circonferenza corrispondente all'angolo al centro \widehat{PCN} , e che quest'ultimo ha un'ampiezza pari ad $\arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ posso anche effettuare il caso $\sigma_x < \sigma_y$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\partial = \text{DELTA}$

$$\boxed{[\partial]^T \{\sigma\} + \{f\} = \{0\}}$$

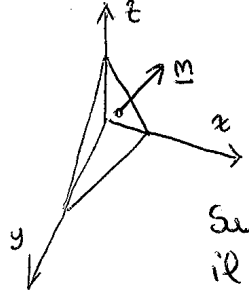
$3 \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1$

relazione di equilibrio.

(tali equazioni per il volume si possono anche dire = mere per forme intere greche pag. 234-235)

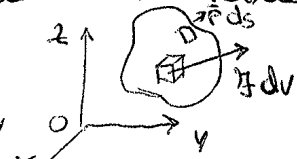
b) EQUAZIONI DI EQUILIBRIO SULLA SUPERFICIE PER IL CONTINUO 3D

Le EQUAZIONI DI EQUILIBRIO NEL VOLUME costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali, nelle sei funzioni incognite $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Tale sistema è quindi tre volte indeterminato, e, utilizzando la terminologia introdotta per i sistemi di travi, si può dire che il problema di un solido tridimensionale è tre volte iperstatico.



\vec{n} = versore normale alla faccia

Analizzo la stessa figura relativa al tetraedro di Cauchy.



Sulla frontiera del dominio V, il vettore tensione deve peraltro coincidere con la forza di superficie $\{p\}$, applicata dall'esterno

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} = [\sigma] [\vec{n}] \Rightarrow \begin{aligned} t_{mx} &= \sigma_x m_x + \tau_{yx} m_y + \tau_{zx} m_z = P_x \\ t_{my} &= \tau_{xy} m_x + \sigma_y m_y + \tau_{zy} m_z = P_y \\ t_{mz} &= \tau_{xz} m_x + \tau_{yz} m_y + \sigma_z m_z = P_z \end{aligned}$$

Queste equazioni si dicono "CONDIZIONI DI EQUIVALENZA AL CONTORNO". Esse rappresentano una delle due condizioni al contorno relative al problema generale della meccanica dei solidi elastici.

Anche le equazioni di equivalenza al contorno possono essere espresse in forma matriciale.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & m_y & m_z & 0 \\ 0 & m_y & 0 & m_x & 0 & m_z \\ 0 & 0 & m_z & 0 & m_x & m_y \end{bmatrix}}_{[K]^T} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

che quale in forma compatta è: $[K]^T \{\sigma\} = \{p\}$. Occorre osservare la col-

④ PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (senza la dimostrazione) ④

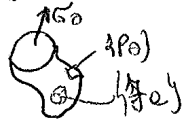
Il principio dei lavori virtuali è l'identità fondamentale nell'ambito della "meccanica dei corpi deformabili". Esso afferma l'uguaglianza tra il lavoro virtuale esterno (forze per spostamenti, noto dalla Fisica) e il lavoro virtuale interno (tensioni per relative deformazioni, il quale è esprimibile come prodotto scalare tra vettore-tensione e vettore-deformazione, i quali sono grandezze di natura tensoriale). Come già è noto infatti quando il corpo è rigido le deformazioni sono nulle e quindi il lavoro virtuale interno si annulla.

→ Un sistema di forze esterne (di volume $\{f_a\}$ e di superficie $\{p_a\}$) e di tensioni $\{\sigma_a\}$ si dice essere "staticamente ammissibile" quando esse soddisfanno le equazioni statiche e le condizioni al contorno:

$$\otimes [\partial] \{ \sigma_a \} = - \{ f_a \} \quad \forall P \in V$$

$$[N] \{ \sigma_a \} = \{ p_a \} \quad \forall P \in S$$

IPOTESI



dove V = volume occupato dal corpo; S = frontiera di tale dominio, su cui sono applicate le forze esterne $\{p_a\}$.

→ Un sistema di spostamenti $\{u_b\}$ e di deformazioni $\{\epsilon_b\}$ si dice essere "cinematicamente ammissibile" quando essi soddisfanno l'equazione cinematica:

$$[\partial] \{ u_b \} = \{ \epsilon_b \} \quad \forall P \in V \quad \text{IPOTESI}$$

~~Es~~ (VEDI BENE L'ESTENSIONE DEL TEOREMA DI GREEN pag. 238-239)

Sulla base dell'equazione ottenuta con l'estensione del teorema di Green, si può ottenere l'equazione dei lavori virtuali. Vado a considerare dapprima il lavoro virtuale compiuto dalle forze di volume $\{f_a\}$ per gli spostamenti $\{u_b\}$:

$$L_F = \int_V \{f_a\}^T \{u_b\} dv \quad \text{Applicando l'equazione statica } \otimes, \text{ ottengo:}$$

$$L_F = - \int_V ([\partial] \{ \sigma_a \})^T \{ u_b \} dv \quad \text{Riconoscendo all'eq. dell'estensione del$$

$\{f_a\}$ e $\{u_b\}$ appartengono a due campi indipendenti.

Teorema di Green ottengo:

$$L_F = \int_V \{ \sigma_a \}^T [\partial] \{ u_b \} dv - \int_S \{ \sigma_a \}^T [N] \{ u_b \} ds$$

♣ Sapendo che $\{ \epsilon_b \} = [\partial] \{ u_b \}$ e che $\{ \sigma_a \}^T [N] = \{ p_a \}^T$ ottengo:

$$L_F = \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_b \} dv - \int_S \{ p_a \}^T \{ u_b \} ds \quad \text{e quindi:}$$

$$\int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_b \} dv = \int_V \{ f_a \}^T \{ u_b \} dv + \int_S \{ p_a \}^T \{ u_b \} ds$$

Lui LAVORO VIRTUALE INTERNO

Loro LAVORO VIRTUALE ESTERNO

da un DIFFERENZIALE ESATTO, vuol dire che non dipende dalla sequenza con cui vengono applicate le E (cioè se prima comprimiamo o tagliamo)

La funzione $\phi = \phi(E_x, E_y, E_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ si dice POTENZIALE ELASTICO, e rappresenta il lavoro che si esercita per deformare il corpo.

Il differenziale totale della funzione ϕ può infatti esprimersi così: (sviluppo in serie di Taylor)

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial E_x} dE_x + \frac{\partial \phi}{\partial E_y} dE_y + \frac{\partial \phi}{\partial E_z} dE_z + \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

ma esplicitando $d\phi = \{\sigma\}^T \{dE\}$ si ha:

$$d\phi = \sigma_x dE_x + \sigma_y dE_y + \sigma_z dE_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

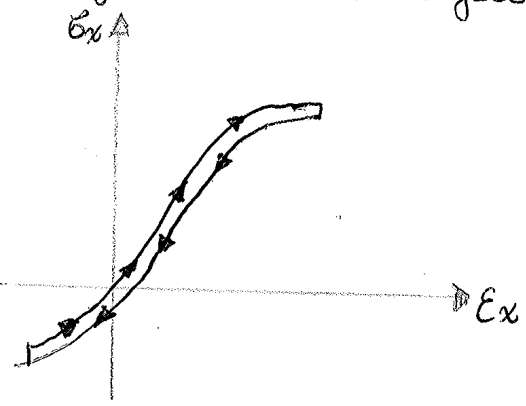
Uguagliando le due equazioni ottengo quindi le componenti di tensione e cioè: $\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial E_x}$; $\sigma_y = \frac{\partial \phi}{\partial E_y}$; $\sigma_z = \frac{\partial \phi}{\partial E_z}$; $\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xy}}$; $\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{xz}}$; $\tau_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}}$.

+ Nel caso uniaassiale, sia ϕ che σ_x , sono funzioni della sola dilatazione E_x : $\Phi = \Phi(E_x)$ $\sigma_x = \sigma_x(E_x)$

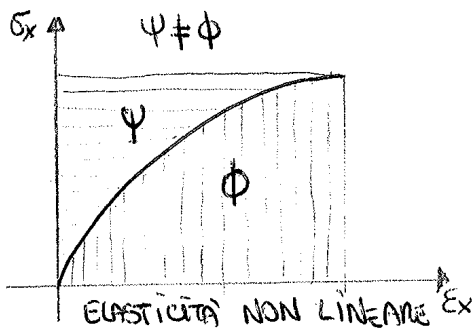
→ CORPO ELASTICO nel caso di un corpo elastico, immaginando di caricare e poi scaricare il corpo unidimensionale (ad es. una barra in trazione). Nel piano $E_x - \sigma_x$ vedo che i percorsi di carico - scarico coincidono. Il potenziale ϕ , rappresenta il lavoro di deformazione, ed è pari all'area sottesa dalla curva $\sigma_x(E_x)$, ma siccome nel caso del corpo elastico i percorsi di carico e scarico coincidono, quando vedo e scaricare completamente il corpo l'area sottesa dalla curva $\sigma_x(E_x)$ è nulla ($\phi=0$), non vi è quindi dissipazione di energia, e l'energia elastica immagazzinata viene totalmente restituita.

CORPO ELASTICO NON LINEARE:

N.B. | Tutti i materiali soggetti a basse sollecitazioni seguono il comportamento elastico (ad es. filo di ferro a basse sollecitazioni oscilla, non si deforma).

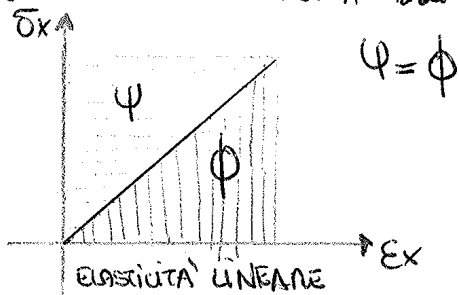


→ CORPO ANELASTICO: nel caso di un corpo unidimensionale ANELASTICO, le funzioni Φ e σ_x non sono più univoche, cioè a uno stesso valore di E_x possiamo corrispondere due o più valori del lavoro e della forza. Infatti quando si va e scaricare completamente il corpo non si percorre più la curva di carico $\sigma_x(E_x)$; si evidenziano quindi delle deformazioni residue e permanenti, con dissipazione di energia.



Quando siamo nel caso uniaxiale (8) risulta semplice dare di ψ un'interpretazione grafica. L'ENERGIA ELASTICA COMPLEMENTARE di (ψ) è infatti l'area compresa fra la curva $\epsilon_x(\sigma_x)$ e l'asse σ_x , cioè risulta essere l'area complementare

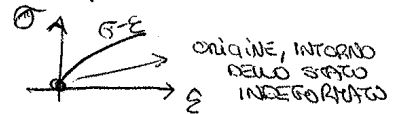
di quella che rappresenta l'energia elastica ϕ , rispetto al rettangolo di lati ϵ_x e σ_x . Nel caso generale $\psi \neq \phi$, la ~~relazione~~ relazione $\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$ NON È LINEARE e quindi si dice che il corpo deformabile gode della proprietà di ELASTICITÀ MA NON È LINEARE.



Mel caso in cui $\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$ sia LINEARE invece, si ha che $\psi = \phi$ (cioè L'ENERGIA ELASTICA COMPLEMENTARE risulta ~~essere~~ coincidere con L'ENERGIA ELASTICA, POTENZIALE ELASTICO = POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE).

Occorre ricordare che l'elasticità è un caso particolare di comportamento dove lo σ dipende da ϵ . All'interno dell'elasticità noi tratteremo quella lineare, però non si deve dimenticare che essa può anche non essere lineare.

8 LA MATRICE HESSIANA DEL POTENZIALE ELASTICO



• Mel trattare l'ELASTICITÀ LINEARE, occorre sempre ricordare che essa è all'interno dell'elasticità, ma non è l'unico caso, ovvero l'ELASTICITÀ può anche NON ESSERE LINEARE.

Partendo dalla funzione potenziale elastico, si sviluppa quest'ultimo in serie di Maclaurin nell'intorno dell'origine, cioè nell'intorno dello STATO INDEFORMATO e si ottiene:

$$\phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz}) = \phi(0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y^2}\right)_0 \epsilon_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \gamma_{yz}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_z}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_z + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} \gamma_{yz} \right\}$$

Essendo le deformazioni $\epsilon \ll 1$, cioè molto piccole, si possono trascurare i termini di ordine superiore al secondo, e quindi fermare lo sviluppo al secondo grado.

Siccome le tensioni si ottengono per derivazione di ϕ , il valore che la funzione attinge nell'origine risulta essere una costante arbitraria, che può assumersi nulla, per questo $\phi(0) = 0$. (cioè in assenza di deformazioni il lavoro ϕ è nullo).

Anche i coefficienti dei termini del primo ordine sono nulli, poiché

h) SIGNIFICATO FISICO DELLA CONDIZIONE DI DEFINITEZZA POSITIVA DELLA MATRICE HESSIANA E SUE CONSEGUENZE. (Domanda collegata con la precedente.)

Lo stato indeformato deve rappresentare un minimo assoluto di ϕ e non solo un punto stazionario come esserò dalle condizioni $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 = \sigma_x(0) = 0 \dots$; per questo motivo la matrice Hessiana deve risultare DEFINITA POSITIVA. Devono cioè essere maggiori di zero il suo determinante e quelli dei suoi minori principali. Si intravede ancora una volta l'analogia con il caso unidimensionale, in cui la rigidità della molla, che è la derivata seconda del potenziale, deve essere positiva.

Essendo $[H]$ definita positiva, si ha che: $\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\} \dots > 0$

Si deve sempre fare un lavoro positivo. Questa è la garanzia della stabilità, perché il solido elastico dopo la "deformazione" subisce un processo di scarico e ritorna nelle condizioni iniziali. ~~Il tutto~~ Chiaramente il tutto è correlato all'intensità delle deformazioni, noi lavoriamo con piccole deformazioni, perché siamo nel campo dell'elasticità lineare.

La ~~positività~~ positività del determinante Hessiano permette la sua invertibilità e quindi si ha: $\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$. Quest'ultima relazione e la sua inversa $\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$, viste in precedenza legano il vettore delle tensioni $\{\sigma\}$ a quello delle deformazioni $\{\epsilon\}$, e costituiscono una connessione tra statica e cinematica.

→ Dalla relazione che somma il potenziale elastico (ϕ) con il suo complementare (ψ) si ottiene:

$$\phi + \psi = \{\sigma\}^T \{\epsilon\} = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}$$

Cioè la somma del potenziale elastico e del potenziale elastico complementare è uguale al prodotto scalare tra il vettore tensioni $\{\sigma\}$ e quello delle deformazioni $\{\epsilon\}$. Inoltre nei casi lineari $\phi = \psi$ ed è uguale alla metà del prodotto scalare:

$$\rightarrow \phi = \psi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

Al potenziale elastico complementare ψ , quindi posso dare la seguente formula: $\psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H]^{-1} \{\sigma\}$

Questa risulta essere analoga alla formula $\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\}$, ma mentre quest'ultima era legata alle deformazioni, la formula del potenziale elastico complementare (ψ) mostra come ψ sia una forma quadratica delle componenti di tensione $\{\sigma\}$, quindi dipende dalle tensioni $\{\sigma\}$.

piu' semplificato:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -T_x(x)$$

$$EA \frac{du}{dx} = P$$

$$u = 0$$

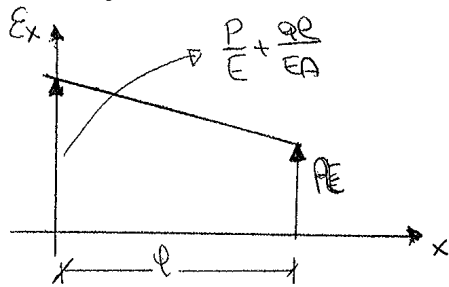


DIAGRAMMA DELLE DEFORMAZIONI E

per $0 \leq x \leq l$

per $x=l$

per $x=0$

$$T_x = q = \text{cost.}$$

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -q \text{ derivo}$$

$$E_x = \frac{du}{dx} = -\frac{qx}{EA} + C_1$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_l = -\frac{ql}{EA} + C_1 = \frac{P}{E}$$

$$C_1 = \frac{P}{E} + \frac{ql}{EA}$$

dove l = lunghezza della barra 12

EA = rigidità longitudinale della barra.

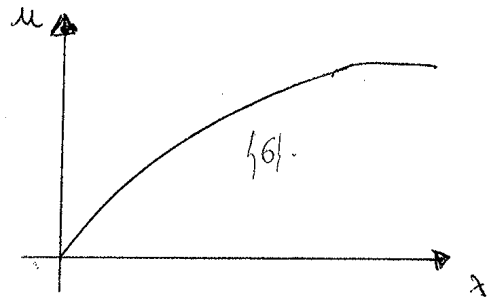


DIAGRAMMA DEGLI SPOSTAMENTI.

N.B. Se si vanno a moltiplicare per una costante c le equazioni del problema elastico tridimensionale, anche il risultato sarà moltiplicato per una costante.

1) IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Quando siamo nel problema elastico lineare, abbiamo a che fare con equazioni lineari, per cui vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Tale principio sta a indicare che se un sistema di sollecitazioni $\{T\}, \{P_a\}, \{N_a\}$ genera un campo di spostamenti $\{u_a\}$ e quindi i campi deformativi e tensionali $\{E_a\}, \{\sigma_a\}$ e se un sistema diverso di sollecitazioni $\{T_b\}, \{P_b\}, \{N_b\}$ genera i campi $\{u_b\}, \{E_b\}, \{\sigma_b\}$, allora il sistema di sollecitazioni $\{T_a\} + \{T_b\}, \{P_a\} + \{P_b\}, \{N_a\} + \{N_b\}$ genera dei campi di spostamento, deformativi e tensionali che sono la somma dei precedenti: $\{u_a\} + \{u_b\}, \{E_a\} + \{E_b\}, \{\sigma_a\} + \{\sigma_b\}$.

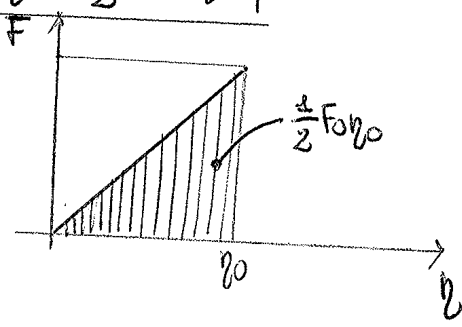
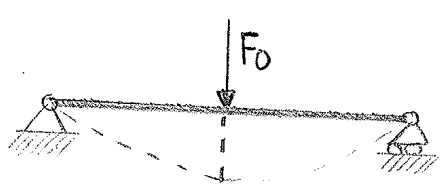
Un esempio pratico di tale principio può essere quello di una struttura, della quale conosciamo la soluzione tenendo conto solo del peso proprio della copertura e separatamente conosco la soluzione per il carico della neve. Se voglio trovare la soluzione per i due carichi messi assieme posso fare la somma delle due soluzioni, questo discende dal principio di sovrapposizione degli effetti.

Collegate con la domanda successiva.

Tale equazione è la relazione del Teorema di Clapeyron e dice che il lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne per portare il corpo dallo stato indeformato iniziale allo stato deformato finale è pari alla metà del lavoro che tali forze compierebbero se presentassero il loro valore finale durante tutto il processo di carico. *

Es → Un esempio pratico per comprendere il TEOREMA DI CLAPEYRON, può essere descritto grazie all'ausilio di una trave linearmente elastica che viene sottoposta a una forza concentrata in mezz'aria, la quale cresce lentamente in modo da non indurre fenomeni dinamici, da zero al valore finale F_0 , e nel contempo l'abbassamento (in flessione) in mezz'aria cresce da zero al valore finale η_0 . Anziché in base al TEOREMA DI CLAPEYRON il lavoro di deformazione compiuto sulla trave vale:

$$L_{DEF} = \int_0^{\eta_0} F(\eta) d\eta = \frac{1}{2} F_0 \eta_0$$



* È la metà del rettangolo che corrisponde al valore finale durante tutto il processo di carico.

m) IL TEOREMA DI BETTI

IL TEOREMA DI BETTI mostra come il principio di sovrapposizione degli Effetti nel campo dell'elasticità lineare valga solo per spostamenti, deformazioni e tensioni, ma non sia applicabile invece al lavoro di deformazione.

Si va a considerare un corpo elastico lineare e lo si sottopone a un processo di carico quasi-statico, cioè molto lento. Le forze finali applicate sono $\{T_a\}$ e $\{P_a\}$ e il lavoro di deformazione compiuto sia L_a . Si procede poi con lo stesso processo di carico, ma con un secondo sistema di forze $\{T_b\}$ e $\{P_b\}$ che compiono un lavoro L_b . Occorre anche realizzare il lavoro reciproco L_{ab} , ovvero il lavoro di trascinamento delle forze $\{T_a\}$, $\{P_a\}$ per gli spostamenti $\{u_b\}$. In formule tali lavori sono:

$$L_a = \frac{1}{2} \int_V \{T_a\}^T \{u_a\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_a\}^T \{u_a\} dS; \text{ dal teorema di Clapeyron}$$

$$L_b = \frac{1}{2} \int_V \{T_b\}^T \{u_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_b\}^T \{u_b\} dS$$

$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$$

$$L_{ab} = \int_V \{T_a\}^T \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{u_b\} dS.$$

quest'equazione esprime chiaramente la non applicabilità del principio di sovrapposizione degli Effetti per quanto riguarda il lavoro di deformazione. (e corso del lavoro reciproco)

⑨ L'IPOTESI DI ISOTROPIA NELL'AMBITO DEL COMPORT. ELASTICO LINEARE.

Un corpo materiale si dice isotropo quando le proprietà meccaniche sono considerate identiche in tutte le direzioni uscenti da un generico punto P. Questa condizione può essere tipica del calcestruzzo (vivea gettato in maniera casuale, non a suoi assi privilegiati) e dell'acciaio. Per esempio per il legno non è accettabile, siccome esso assume come asse interno privilegiato, quello perpendicolare alle fibre. Il legno, le fibre di vetro e i massi rocciosi sono infatti detti MATERIALI ANISOTROPI. Non esistendo quindi direzioni preferenziali, il potenziale elastico complementare Ψ dipenderà solo dai valori delle tre tensioni principali: $\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Essendo Ψ una forma quadratica delle componenti di tensione, si potrà porre così: $\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right\}$

Ecco che grazie all'isotropia i coefficienti si riducono da 21 a due. I valori di E e ν sono costanti e assumono un ben preciso significato fisico.

L'espressione del potenziale elastico complementare Ψ , può anche essere scritta facendo riferimento alle espressioni degli invarianti, in funzione delle tensioni principali e l'equazione diviene:

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ 3I + 2JII(1+\nu) \right\}$$

Esprimendo poi gli invarianti in funzione delle generiche componenti del vettore tensione si ha che:

$$3I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (\text{TRACCIA})$$

$$3JII = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

IL SECONDO INVARIANTE È PARI ALLA SOMMA DEGLI OPPOSTI DEI MINORI PRINCIPALI

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left\{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \right\} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

dove si è posto $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Se si va a derivare parzialmente l'equazione di Ψ , si ottengono le componenti di deformazione: QUESTE SI DICONO EQUAZ. COSTITUTIVE ELASTICHE

$$\epsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z;$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_y} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z;$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_z} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xz}} = \frac{\tau_{xz}}{G};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

18
 ① QUALI SONO LE CONDIZIONI CHE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DAL MODULO DI YOUNG E DAL RAPPORTO DI POISSON AFFINCHÈ LA MATRICE HESSIANA SIA POSITIVA?

Come già si era visto analizzando l'elasticità lineare la MATRICE HESSIANA deve essere positiva, siccome lo stato indeformato deve rappresentare un minimo assoluto del lavoro di deformazione, e non deve essere solo un punto stazionario.

Per rispettare tale condizione occorre che gli elementi E (modulo elastico) e ν (rapporto di Poisson) presenti all'interno della matrice assumano solo determinati valori.

Poiché una matrice sia definita positiva, occorre che tutti i suoi minori principali abbiano determinante maggiore di zero. Vado quindi ad analizzare il minore principale; e impongo anche $\frac{1}{G} > 0$ (così tutta la matrice ha i minori positivi).

$$\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{bmatrix}$$

Analizzerò il minore (1,1), il minore (2,2) e il minore (3,3) di questo minore principale. Ottergo le seguenti relazioni:

DAL MINORE (1,1)
 DAL MINORE (2,2)

$$\frac{1}{E} > 0$$

$$\frac{1}{E^2}(1-\nu^2) > 0$$

DAL MINORE (3-3) $\frac{1}{E^3} [1-\nu^2 + \nu(-\nu-\nu^2) - \nu(\nu^2+\nu)] > 0$

Sviluppando i calcoli del $\det.$ del minore 3-3 ottengo: $\frac{1}{E^3} [(1+\nu)^2(1-2\nu)] > 0$
 Le quattro diseg. necessarie per ottenere i valori di ν e E sono:

$$\frac{1}{E} > 0; \quad \frac{1}{E^2}(1-\nu^2) > 0; \quad \frac{1}{E^3} [(1+\nu)^2(1-2\nu)] > 0; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$

da queste ricavo:

$$\begin{cases} E > 0 \\ -1 < \nu < 1 \\ \nu < 1/2 \\ \nu > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \nu < 1/2$$

Interessando le ultime tre equazioni ottengo:

• $E > 0$

• $-1 < \nu < 1/2$

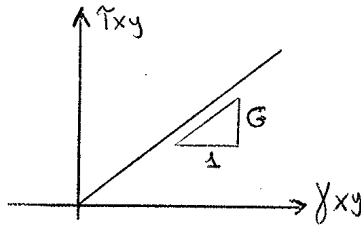
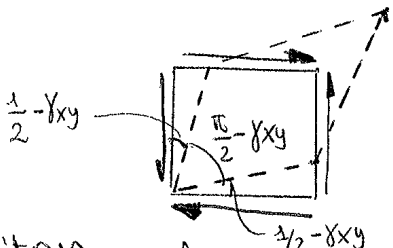
Si osserverà poi ~~per~~ successivamente come il coeff. di Poisson ν non possa mai essere negativo e quindi combierò ancora la sua condizione.

MODULO DI YOUNG E O MODULO ELASTICO

Per descrivere il modulo di Young occorre iniziare ~~partendo~~ ^{partendo} la considerazione da un parallelepipedo elementare, il quale è sottoposto solo alla componente di tensione normale σ_x . Le equazioni relative alla de-

matrice Hessiana) si osserva che $\Delta U/V$ e σ_x sono concordi. Infatti se σ_x è di trazione si producono dilatazioni volumetriche positive, mentre se σ_x è di compressione si producono dilatazioni volumetriche negative.

- MODULO ELASTICO TANGENZIALE G



Per descrivere il modulo elastico tangenziale G occorre fare riferimento al parallelepipedo deformatore e lo si va a sollecitare

solo a taglio tramite la componente tangenziale τ_{xy} , le equazioni della deformazione risultano così:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Il parametro G rappresenta la rigidità che il solido oppone agli sconvolgimenti angolari. Essi è detto MODULO ELASTICO TANGENZIALE e a livello grafico risulta essere il coefficiente angolare positivo della retta di concorrente sul piano $\gamma_{xy} - \tau_{xy}$.

N.B. Un corpo linearmente elastico e isotropo, viene caratterizzato dai valori che E e ν assumono in ciascun punto del corpo. Se le funzioni puntuali E e ν si rivelano costanti allora il corpo si dice omogeneo.

Un'altra osservazione importante da fare è quella che riguarda l'acciaio e il calcestruzzo, essi infatti non sono perfettamente isotropi e omogenei ma possono ritenersi tali con una buona approssimazione.

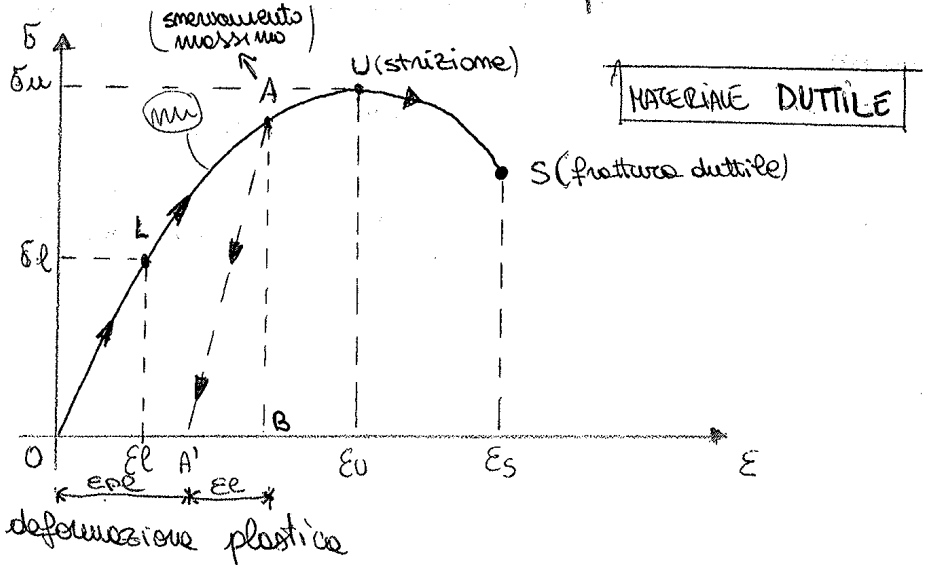
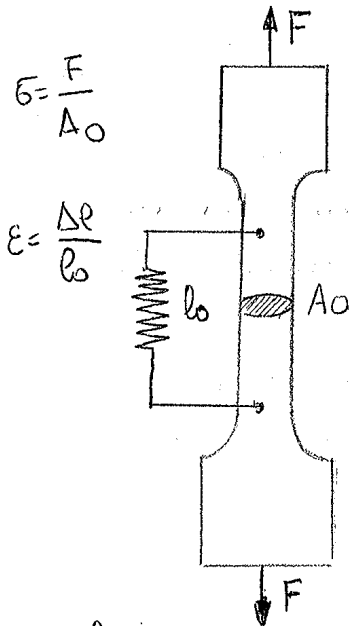
L'ipotesi di elasticità lineare come già detto è solo accettabile nel caso in cui i materiali non siano eccessivamente sollecitati. Oltre certi valori di soglia il comportamento del materiale diventa non lineare e non elastico.

TABELLA (acciaio e cls)

	$E(\text{Kg/cm}^2)$	ν	$\sigma_{\max}(\text{Kg/cm}^2)$
Acciaio	2'100'000	0.30	2'400
Calcestruzzo	250'000	0.15	30

Il rapporto σ_{\max}/E indica l'ordine di grandezza della dilatazione al di sotto del quale ha senso fisico l'idealizzazione elastica lineare.

9) DESCRIVERE LA CONTRAZIONE TRASVERSALE PLASTICA O STRIZIONE, L'INCRODIMENTO NEGATIVO E L'ENERGIA DI FRATTURA. (domanda legata con la precedente) (22)



- Quando si arriva al carico massimo la macchina riduce il carico, questa fase si chiama **SOFTENING**.

- Dopo la deformazione plastica quando il carico arriva a un valore di U (picco della curva) $\epsilon_{pl} = 2\%$ determino la σ_{pl} anche per acciai e elevate l_0 variabilità. Il carico l_0 si aggiunge facendo crescere F finché il materiale si rompe. Nel punto U il materiale non è più in grado di portare un carico superiore.

→ Questo prova che si analizza è la cosiddetta **PROVA DI TRAZIONE UNIASSIALE** che viene eseguita su un provino di materiale duttile. Al provino viene fornita la forma di una chitarra, per evitare che esso si spezzi nelle zone terminali di ancoramento alle macchine di prova. Sia A_0 l'area della sez. trasversale del provino nella zona media e " l_0 " la distanza iniziale tra due sensori incollati in due punti distinti della zona media.

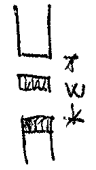
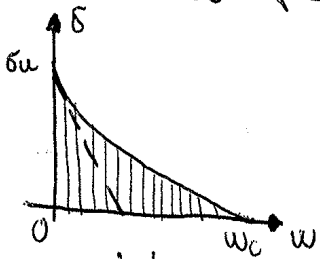
Si definisce **TENSIONE NOMINALE** σ il rapporto tra la forza F trasmissa dalla macchina e l'area A_0 della sez. trasversale; $\sigma = F/A_0$

Si definisce poi la **DILATAZIONE CONVENZIONALE** ϵ , come il rapporto tra la variazione di distanza tra i due sensori, Δl , e la distanza iniziale l_0 . $\epsilon = \Delta l/l_0$

Registrando tutti i punti durante il processo di caricamento e riportandoli sul piano σ - ϵ esserò diversi intervalli.

- Tra i punti O e L il diagramma è **LINEARE** ed **ELASTICO**;
- Da L in poi ~~il diagramma~~ la risposta non è più lineare e il materiale comincia a **smorzarsi**. Scaricando il provino, si evidenziano

I materiali fragili come i calcestruzzi per esempio sono duttili in compressione e fragili in trazione. Una prova di trazione su di un campione di calcestruzzo, a carico controllato, mostra una risposta approssimativa ^{mente} elastica e lineare e poi all'improvviso una brusca caduta del carico stesso, che corrisponde alla repentina formazione della fessura. Osservando il grafico ~~si vede~~ si vede la presenza di un ramo di "incurvamento negativo" che in inglese assume il nome di SOFTENING. L'area che sottende la curva rappresenta l'energia dissipata da parte del materiale. L'energia non è però dissipata in modo uniforme su tutto il volume, ma è dissipata solo su una banda localizzata che in seguito diviene una fessura, ecco perché il ramo decrescente di $\sigma(\epsilon)$ viene a dipendere dalla lunghezza l_0 . Il diagramma che risulta essere utile per i materiali fragili è il diagramma $\sigma-w$.



Tale diagramma rappresenta la tensione che viene trasmessa attraverso la struttura, in funzione della lunghezza della fessura stessa. Il valore w sta a indicare la distanza tra i lembi della fessura.

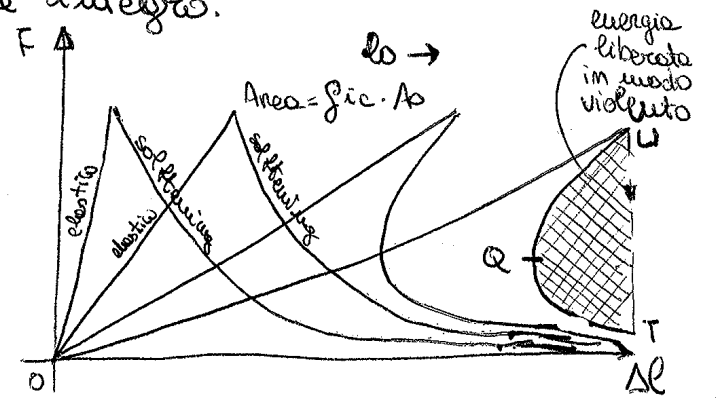
N.B. Quando w raggiunge il valore limite w_c , l'intensione si spegne totalmente e la fessura diviene una scissione completa che divide in due parti distinte il provino. L'area che viene sottesa dalla curva $\sigma(w)$ rappresenta l'energia dissipata sulla superficie unitaria di frattura.

L'ENERGIA DI FRATTURA si indica con G_{IC} e risulta essere anch'essa una proprietà intrinseca del materiale:

$$G_{IC} = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw$$

L'energia dissipata sulla superficie della fessura vale $G_{IC} \cdot A_0$, l'energia dissipata globalmente nel volume $A_0 l_0$ è ancora pari a $G_{IC} \cdot A_0$, siccome si è supposto che la dissipazione energetica avviene soltanto nella sup. fessurata e non in tutto il volume del materiale integro.

Sul piano $F-l$ posso osservare come all'aumentare della lunghezza l_0 del provino si ottengono tratti elastici e rigidità costante e tratti SOFTENING a pendenza negativa crescente e di tre a un certo limite a pendenza positiva. L'area sottesa da ciascuna curva è costante e vale $G_{IC} \cdot A_0$.



⑤ DEFINIRE LA TENSIONE IDEALE O EQUIVALENTE

Tuttavia gli elementi strutturali non funzionano in regime uniaassiale, però le prove che ~~si~~ usualmente si eseguono in laboratorio solitamente sono uniaassiali. ~~Per~~ Ecco che occorre quindi definire una funzione del tensore degli sforzi, detta TENSIONE IDEALE O EQUIVALENTE, la quale si deve comparare con la tensione di snervamento uniaassiale:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) < \sigma_p$$

ESIGENZA DI CORRELAZIONE
GLI STATI TENSIONALI, BIASSIALI E TRIASSIALI, A QUELLI UNIASSIALI.

Mel caso di isotropia del materiale la TENSIONE IDEALE è una funzione delle sole componenti principali di tensione: $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_p$

Per quanto riguarda le prove uniaassiali di trazione e compressione su campioni metallici, si può vedere che la PRESSIONE IDROSTATICA dell'ambiente in cui si eseguono le prove non influisce sul valore della tensione di snervamento. Questo importante fatto ha dato luogo a due criteri di resistenza: IL CRITERIO DI TRESCA e IL CRITERIO DI Von MISES.

⑥ IL CRITERIO DI TRESCA O DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE. COSA SI INTENDE PER TENSIONE TANGENZIALE NEL PIANO O FUORI PIANO? COSA SI INTENDE PER ESAGONO DI TRESCA?

MATERIALI DUTTI

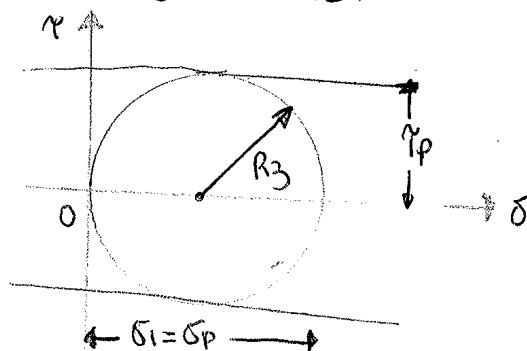
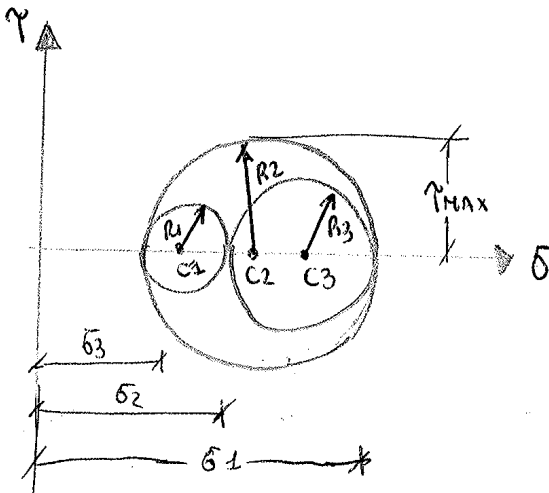
IL CRITERIO DI TRESCA o CRITERIO DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE, considera le tensioni tangenziali responsabili dello snervamento che subisce il materiale, quando è soggetto a un stato tensionale triassiale.

Il criterio di Tresca risulta essere semplice ed espressivo rappresentarlo sul piano di Mohr. la tensione tangenziale massima τ_{MAX} è pari alla metà della differenza tra le tensioni principali estreme:

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

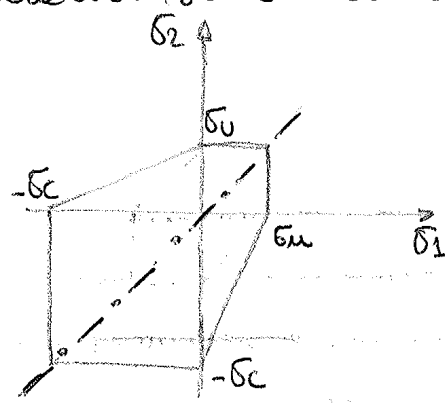
dalla condizione di snervamento uniaassiale ottengo $\tau_p = \frac{\sigma_p}{2}$

dove τ_p tensione tang. di snervamento.



Sul piano di Mohr, la condiz. $\tau_{MAX} < \tau_p$ è rappresentata da una striscia infinita delimitata dalle due rette. $\tau = \tau_p$.

Rappresentando il dominio nel caso piano ($\sigma_3=0$), otteno una generalizzazione dell'esagono di Tresca (simmetrico rispetto al I e III quadrante.)



σ_u = sforzo a trazione
 σ_c = // a compressione

Questo è appunto una generalizzazione dell'esagono di Tresca, perché se σ_u fosse uguale a σ_c otterremo l'esagono di Tresca che vale per i materiali duttili, ma noi qui realizzeremo il caso per i materiali fragili.

① IL CRITERIO DI VON MISES E DALLA MASSIMA ENERGIA DI DISTORSIONE. COSA SI INTENDE PER CRITERIO DI VON MISES? IPOTESI: MATERIALE ISOTROPO

Il criterio di Von Mises viene richiesto dalla normativa ~~europea~~ Europa, Giappone e Usa adottano anch'essi la normativa del criterio di Von Mises, perché se così non fosse ci sarebbe una concorrenza sleale sul mercato. IL CRITERIO DI VON MISES O CRITERIO DELLA MASSIMA ENERGIA DI DISTORSIONE considera responsabile della crisi puntuale del materiale, l'energia di deformazione relativa al tensore deviatorico.

Poiché, in generale, l'energia di deformazione per unità di volume, è esprimibile in funzione dei primi due invarianti della tensione, come mostrato dalla equazione: $\psi = \Phi = \frac{1}{2E} \{ J_I^2 + 2 J_{II} (1+\nu) \}$

Nel caso del tensore deviatorico σ_d tale espressione può essere particolarezzata.

$$\sigma_d = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{vmatrix}$$

$\sigma_d \rightarrow d =$ deviatorico
 Von Mises fa riferimento al tensore deviatorico.
 Nel ~~primo~~ tensore deviatorico, il primo

invariante del tensore deviatorico è nullo per definizione, per cui l'energia Φ_d associata a tale tensore diviene:

$$\Phi_d = \frac{1+\nu}{E} J_{II} d$$

dove $J_{II} d$ è il secondo invariante deviatorico, vale:

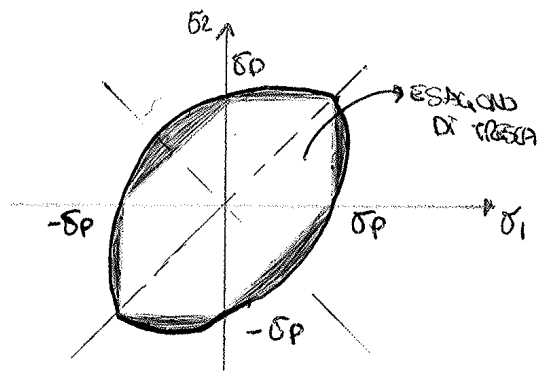
$$J_{II} d = - [(\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma}) + (\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma}) + (\sigma_2 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma})]$$

dove $\bar{\sigma}$ è la tensione media che vale: $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Sostituendo quest'ultima nell'equazione $J_{II} d$ ottengo:

$$J_{II} d = -\frac{1}{9} [(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) + \dots]$$

(è nullo perché mat. isotropo e quindi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)



Tale ellisse passa per i vertici dell'oragone di Tresca, mentre le parti evidenziate in rosso sono accettate da Von Mises ma respinte da Tresca; ecco perché c'è bisogno di una normativa unificata a livello internazionale, perché la struttura occorrerà colmare il gap tra Von Mises e Tresca. Si può quindi dire che il criterio di Von Mises è meno cautelativo rispetto a quello di Tresca.

che se a un paese fosse imposto il criterio di Tresca, la realizzazione sarebbe più pesante ~~perché~~ perché occorrerebbe colmare il gap tra Von Mises e Tresca. Si può quindi dire che il criterio di Von Mises è meno cautelativo rispetto a quello di Tresca.

FINE CAPITOLO 8

INIZIO CAPITOLO 9

$$\begin{cases} \sigma_x m_x + \tau_{yx} m_y = 0 \\ \tau_{xy} m_x + \sigma_y m_y = 0 \\ \tau_{xz} m_x + \tau_{yz} m_y = 0 \end{cases}$$

Ecco allora che si può enunciare l'ipotesi fondamentale di SAINT VENANT, la quale afferma che "A SUFFICIENTE DISTANZA DA CIASCUNA BASE, LO STATO DEFORMATIVO E TENSIONALE DIPENDE SOLTANTO DALLA RISULTANTE $\{R\}$ DELLE FORZE AGENTI SULLA BASE MEDESIMA, NONCHE' DAL MOMENTO RISULTANTE $\{M\}$ DELLE FORZE RISPETTO AL BARI-CENTRO DELLA BASE CONSIDERATA."

B) COME SI SEMPLIFICA IL PROBLEMA ELASTICO SOTTO TALI IPOTESI?

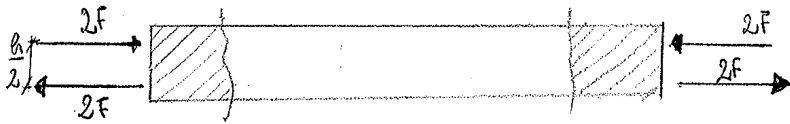
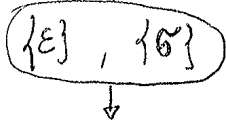
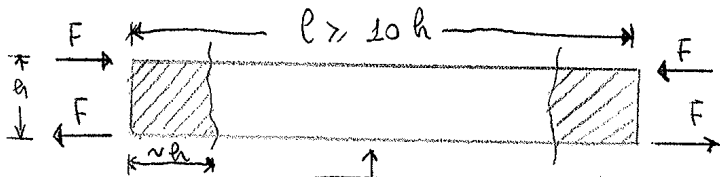
L'ipotesi fondamentale di SAINT VENANT cioè quella per cui "a sufficiente distanza da ciascuna base, lo stato tensionale e deformativo dipende solo dalla risultante $\{R\}$ e delle forze agenti sulla base medesima, nonché dal momento risultante $\{M\}$ delle forze rispetto al baricentro della base considerata", fa sì che le equazioni di equivalenza sulle basi che regolano Saint-Venant possono essere di tipo globale e non solo puntuale, quindi si ha:

$$\int_A \{f\} dA = \{R\}$$

$$\int_A (\{r\} \wedge \{f\}) dA = \{M\}$$

Analizziamo un solido SNEUO:

$l \gg 10h$ - SOLIDO SNEUO.



Si considera un prisma, che in termini tecnico assume il nome di "trave". Tale trave è rettilinea e sezione rettangolare, di base b e altezza h . Nel primo caso è soggetta a una coppia di 2 forze F con braccio l , nell'altro caso la coppia è costituita da due forze di $2F$ con braccio $l/2$.

I campi deformativi e tensionali $\{\epsilon\}, \{\sigma\}$ sono approssimativamente gli stessi a distanze dalle basi superiori all'altezza h . Invertendo uno dei due sistemi di forze e applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottengono due sistemi autoequilibrati agenti sulle basi, i quali generano un campo deformativo e tensionale approssimativamente nullo eccetto le zone terminali (come tratteggiate).

In pratica nella parte tratteggiata influisce solo la risultante R , come sotto l'ipotesi dell'enunciato di Saint Venant, dove "h" assume il ruolo di "sufficiente distanza", mentre posso vedere che le deformazioni $\{\epsilon\}$ e le tensioni $\{\sigma\}$ dipendono dal momento M . Tutto ciò vale sotto le condizioni dell'ipotesi snello o cioè $l \gg 10h$.

Si può notare che lo sforzo NORMALE ECCENTRICO equivale a una forza normale N applicata in un punto qualsiasi del piano che non sia il baricentro G (altrimenti si avrebbe sforzo normale centrato). (4)

Anche la sollecitazione TAGLIO-TORSIONE è equivalente a una forza T con la retta d'azione di tale forza che non passa necessariamente per il baricentro.

d) IL CASO ELEMENTARE DELLO SFORZO NORMALE CENTRATO (tensioni, deformazioni e lavoro) ^(13/10)
 Come anche per le altre caratteristiche di che producono una tensione normale σ_z anche per lo SFORZO NORMALE CENTRATO si fa prima un'ipotesi tensionale e si verifica che quest'ultima soddisfi tutte le condizioni equazioni del problema elastico, comprese le condizioni al contorno.

L'IPOTESI TENSIONALE è quindi rappresentata da:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \tilde{\sigma}_z = c \end{aligned}$$

dove c è una costante determinabile in base alle condizioni globali di equivalenza al contorno. Le equazioni indefinite di equilibrio sono soddisfatte dall'equazione $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Nel determinare le sollecitazioni elementari dovrà sempre analizzarsi una "check list", composta da tensioni, deformazioni e lavoro.

• TENSIONI

Il primo step da effettuare è quello di verificare che la sup. laterale sia libera dalle tensioni.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_x \\ \tilde{\sigma}_y \\ \tilde{\sigma}_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \{0\}$$

Chiaramente nel volume del solido di Saint Venant, si annullano tutte le equazioni (esclusa quella con $\tilde{\sigma}_z$, essendo $\tilde{\sigma}_z = \text{costante}$). Però la derivata di una funzione costante è nulla, quindi annullandosi anche quest'equazione abbiamo visto che effettivamente la superficie laterale è libera dalle tensioni.

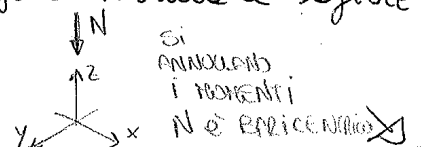
$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\sigma}_z = \frac{\partial}{\partial z} (c) = 0$$

derivata di una costante è nulla.

Analizziamo M_x e M_y :

$M_x = \int \tilde{\sigma}_z y \, dA = c \int y \, dA = 0$. M_x è nullo perché lo sforzo normale agisce nel baricentro, la stessa cosa accade per M_y :

$$M_y = -\int \tilde{\sigma}_z x \, dA = -c \int x \, dA = 0$$

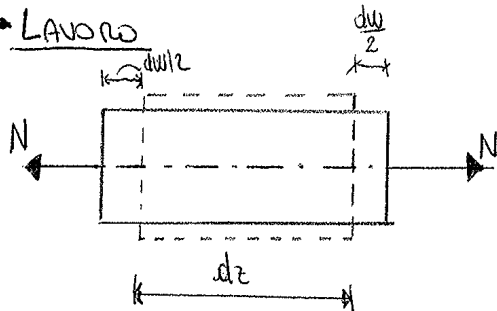


Dalle equazioni $\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$, discende che il campo di spostamento u_0, v_0, w_0 non ha componenti deformative. Esso quindi rappresenta una generica rototraslazione rigida.

(u_0, v_0, w_0) è un moto rigido, quando c'è un corpo privo di deformazioni, il moto si dice rigido, ed è verificata l'ipotesi per cui ^{non} vi è in frattura. Questa soluzione ottenuta è costituita dalle tensioni $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ e degli spostamenti (u, v, w) ed è l'unica soluzione possibile, questo per il Teorema di Unicità di Kirchhoff. (se la soluz. esiste allora è unica)

(es. pratico, comprimiamo una spugna, poi muoviamo le mani creando uno spostamento, quindi un moto rigido, ma lei rimane compressa)

• LAVORO



Il lavoro elementare di deformazione, relativo a un tratto di lunghezza dz, si può ottenere applicando il Teorema di Clapeyron.

$$dL = \frac{1}{2} N dw = \frac{1}{2} N \epsilon_z dz$$

dl = lavoro infinitesimo.

Sapendo che $\epsilon_z = \frac{N}{EA}$, sostituendo quest'ultima nella relaz. precedente trov:

$$dL = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dz$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \right]$$

questo è il terzo risultato per lo sforzo normale centrato, e riguarda il campo lavorativo.

N.B.] Quest'ultimo risultato è importante infatti la struttura di tale formula si conserva anche per le altre sollecitez. elementari.

② IL CASO DELLA FLESSIONE RETTA (TENSIONI, DEFORMAZIONI E LAVORO, ASSE NEUTRO, ASSE DI SOLLECITAZIONE, RAGGIO DI CURVATURA)

Come per lo sforzo normale centrato, anche per la flessione retta occorre partire da un'ipotesi tensionale iniziale, la quale subirà poi verificata. Si ipotizza infatti un campo uniaxiale tensionale σ_z , variabile linearmente sulla sezione trasversale:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = ax + by + c$$

• TENSIONI

Queste costanti a, b, c possono determinarsi in base alle condizioni al contorno; le equazioni da cui si inizia sono le seguenti:

- ① $\int_A \sigma_z dA = N = 0$; 2) $\int_A \tau_{zx} dA = T_x = 0$; ③ $\int_A \tau_{zy} dA = T_y = 0$;
- ④ $\int_A \sigma_z \cdot y dA = M_x \neq 0$; ⑤ $\int_A \sigma_z \cdot x dA = -M_y = 0$; ⑥ $\int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = M_z = 0$ ⑦

L'asse X è detto ASSE NEUTRO. L'asse Y invece è detto ASSE (8)

DI SOLLECITAZIONE.

↳ (ASSE NEUTRO = asse libero dalle tensioni)

Nel caso di FLESSIONE RETTA l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono mutuamente ortogonali.

DEFORMAZIONI

Procedimento nella "check list" tipica del principio di Saint Venant, dopo aver visto che la soluz. tensionale soddisfa le equaz. indefinite di equilibrio si passa ad realizzare il campo deformativo.

Tramite le equazioni costitutive elastiche (8.73 pag. 253, il passaggio consiste nello svolgere il calcolo matriciale e andare a mettere al posto di σ_x, σ_y e σ_z i valori dello stato tensionale attuale) ottengo il seguente campo deformativo:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y; \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y$$

Sfrutto: ~~...~~

$$-\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\}$$

$$\epsilon_z = \frac{M_x}{EI_x} y;$$

$$-\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0.$$

Effettuando un'integrazione alle equazioni delle deformazioni, riesco a ottenere il campo degli spostamenti, e meno delle componenti di rotaz. rigida:

(pongo come nello sforzo normale centrato $\epsilon_x = \partial u / \partial x, \epsilon_y = \partial v / \partial y$
 $\epsilon_z = \partial w / \partial z, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$)

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y; \quad v = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y; \quad w = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{EI_x} y;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Per ottenere gli spostamenti (u, v, w) integro le equaz. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$ e ricavo:

$$u = -\nu \frac{M_x}{EI_x} xy + u_0(y, z)$$

PASSAGGI: $\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int -\nu \frac{M_x}{EI_x} y dx$

$$u = -\nu \frac{M_x}{EI_x} \int y dx$$

$$u = -\nu \frac{M_x}{EI_x} xy + u_0(y, z) \quad \text{costante di integrazione}$$

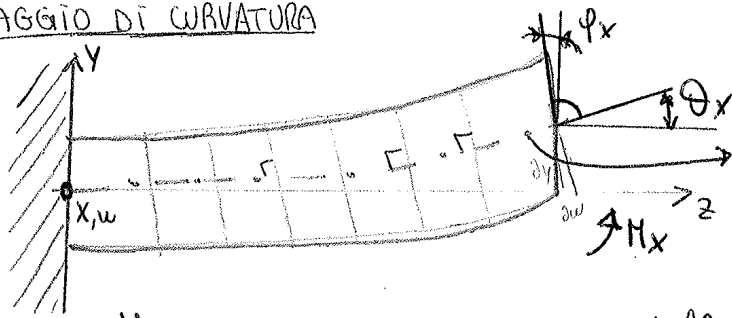
e lo stesso ragionamento lo effettuo per v, w .

$$v = -\nu \frac{M_x}{EI_x} \frac{y^2}{2} + v_0(x, z)$$

$$w = \frac{M_x}{EI_x} yz + w_0(x, y)$$

Ottenute queste tre equazioni, le vedo a introdurre, applicando la derivazione, nelle equazioni dello sconnimento angolare ($\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$)

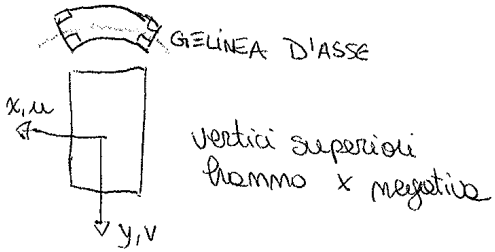
• RAGGIO DI CURVATURA



$\phi_x =$ angolo di cui ruota la sezione. (10)

LINEA D'ASSE: passa per tutti i baricentri
 $x =$ asse uscente.

M_x , provoca la tensione delle fibre sotto la linea d'asse e la compressione di quelle sopra la linea d'asse.



N.B. | Tutti i concetti dell'elemento si deformano = no nello stesso modo ($\phi_x = \text{cost.}$) ancora quindi e che fare con un cerchio e non una parabola, anche perché si qualizzano spostamenti piccoli, quindi potro' "confondere" il cerchio con la parabola, il cosiddetto "cerchio osculatore".

Le fibre compresse sono quelle sopra alla linea d'asse e si dilatano, mentre quelle tese sono quelle sotto la linea d'asse e si contraggono trasversalmente.

vedi passaggi trasformazioni da P a P' pag. 283

I punti dell'asse z di coordinate $P(0,0,\bar{z})$ dopo la deformazione si trasformano in $P'(0, v_p, \bar{z})$

In tale caso vale il Principio di Conservazione delle Sezioni Piane il quale afferma che ~~per~~ ogni sezione trasversale ruota rigidamente dell'angolo ϕ_x attorno ~~alla~~ all'asse x, oltre a traslare su y della quantità v_p .

Inoltre ogni singola sezione trasversale a deformazione avvenuta, rimane ortogonale all'asse deformato essendo $\gamma_{yz} = 0$.

l'angolo ϕ_x risulta essere: $\phi_x = \text{ATANQ}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \approx \frac{M_x \bar{z}}{EI_x}$

↳ argomento piccolo.

$\theta_x = \text{ATANQ}\left(\frac{-\partial v}{\partial z}\right) \approx \frac{M_x \bar{z}}{EI_x}$

La relazione di ϕ_x , rappresenta la rotazione della sezione, mentre quella di θ_x quella dell'asse. Confrontando le due espressioni, posso concludere che $\phi_x \approx \theta_x$, quindi e' confermato il fatto che l'angolo rimane retto anche dopo la deformazione.

Facendo riferimento all'equaz. differenziale dell'angolo ϕ ottengo:

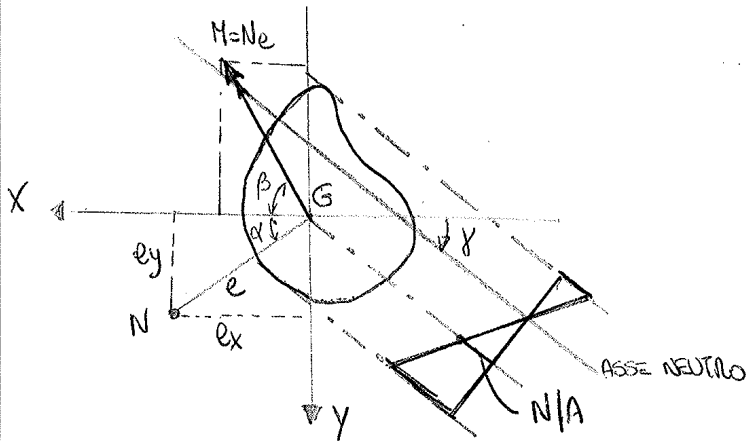
$d\phi_x = \frac{M_x}{EI_x} dz$ ho derivato rispetto a z

Vedo a ingrandire il concio delle trave;

F) IL CASO COMPOSTO DI FLESSIONE DEVIATA.

(12)

Per realizzare la FLESSIONE DEVIATA, occorre partire da uno stato tensionale che è lo SFORZO NORMALE ECCENTRICO. Tale sollecitazione è composta da una forza assiale N , avente eccentricità e_y rispetto all'asse X ed eccentricità e_x rispetto all'asse Y , e quindi eccentricità $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ rispetto all'asse baricentrico.



Come sempre partire dallo sforzo NORMALE ECCENTRICO, perché la forza normale N , a seguito dell'eccentricità e_x, e_y produce le flessioni rette M_x e M_y , le quali presenti simultaneamente generano la FLESSIONE DEVIATA.

$$M_x = N \cdot e_y ; \quad M_y = -N \cdot e_x.$$

Sommando i campi tensionali assiali ottengo: (sfrutto le formule trovate in precedenza per SFORZO NORMALE CENTRICO e FLESSIONE RETTA)

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Il segno meno \ominus è dovuto al fatto che il momento M_y , se positivo tende le fibre longitudinali del semipiano $x < 0$, (mezza moia destra) e comprime quelle del semipiano $x > 0$.

La relazione precedente esprime i momenti d'inerzia in funzione dell'area A e dei rispettivi raggi centrali d'inerzia. Essendo $I = \rho^2 A$ (in generale) e sostituendo le formule di M_x e M_y ottengo:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y \cdot y}{I_x} + \frac{N e_x \cdot x}{I_y} \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_y \cdot y}{\rho^2 x} + \frac{e_x \cdot x}{\rho^2 y} \right)$$

Da quest'ultima relazione si può vedere che la tensione nel baricentro è positiva e dipende da N/A . Inoltre si va a definire l'ASSE NEUTRO, anche nel caso di sollecitazione composta, come quel luogo in cui si annulla la tensione σ_z , e si ottiene l'equaz. dell'asse neutro:

$$1 + \frac{e_y}{\rho^2 x} y + \frac{e_x}{\rho^2 y} x = 0.$$

L'ASSE NEUTRO può risultare secante o non secante la sez. trasversale in funzione sia dell'eccentricità e che dell'angolo α . Se l'eccentricità è bassa l'ASSE NEUTRO non interseca la sezione, mentre per eccentricità alte l'ASSE NEUTRO interseca la sezione.