



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1287

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Pullara

MATERIA: Meccanica Razionale Temi D'Esame + Eserc,
Prof. Delitala

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FORMULARIO - Meccanica Razionale

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_q(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{QP}$$

$\forall p, q \in \text{Corpo Rigido}$

$$\vec{a}_p(t) = \vec{a}_q(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{QP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{QP})$$

$$\hookrightarrow = \vec{a}_q(t) + \vec{\omega} \wedge \vec{QP} + (\vec{\omega} \cdot \vec{QP}) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{QP}$$

* MOMENTI D'INERZIA

- ASTA (baricentro): $I_G = \frac{1}{12} m l^2$
- ASTA (estremo): $I_E = \frac{1}{3} m l^2$
- DISCO (baricentro): $I_G = \frac{1}{2} m R^2$

CASO OMOGENEO: $I_a = \int_B r^2 \rho dt$

CASO PARTICELLARE: $I_a = \sum_i m_i r_i^2$

\rightarrow a: giratore; r: distanza punto-giratore

• TEOREMA DI HUYGENS - STEINER: $I_a = I_G + m d^2$

* POTENZIALI:

- GRAVITA' $U = -mgy$
- FORZA $U = Fx$
- MOMENTO $U = M\theta$ (segno dip da conc. θ)
- MOLLA $U = -\frac{1}{2} kx^2$
- F. CENTRIFUGA $U = \frac{1}{2} I_{zz} \Omega^2$

* EQUAZIONI CARDINALI DEL MOTO

• I eq: $R^{EXT} = R^{A,E} + R^{V,E} = \frac{dQ}{dt} = m \cdot a_G$

Q: quantità di moto $\rightarrow Q = \sum_i m_i v_i$

• II eq: $M_A^{EXT} = M_A^{AN} + M_A^V = \frac{dK_A}{dt} + U_A \wedge Q_A$ (GENERALE)

\hookrightarrow valida x qualsiasi sistema materiale e qualsiasi scelta del polo A

Se $A \equiv G$ (baricentro) o $A \equiv O$ fisso

$\Rightarrow M^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}$ con $K_A = I_A \omega$ (diff: continuo, particelle)

x scelte opportune (I_A cost e $\theta \rightarrow \omega$)

$\Rightarrow M^{EXT} = I_A \ddot{\theta}$

* EQUAZIONE LINEARIZZATA

$$A^* \ddot{q} - H(q - q_E) = 0$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} a(q_E) \dot{q}^2 \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} U''(q_E) (q - q_E)^2 \quad (1 \text{ sola coord. Lagrangiana})$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \sum_{h,k} h_{h,k} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right)_{q_E} (q_1 - q_{1E}) (q_2 - q_{2E}) \quad (2 \text{ coord. lag})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0$$

* ENERGIA

• ENERGIA CINETICA $T = \frac{1}{2} m v_a^2 + T^{(G)} \rightarrow$ TEO KÖNIG
 \hookrightarrow relativa al baricentro

$$T = \frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{1}{2} I_a \omega \cdot \omega$$

• ENERGIA POTENZIALE V $U = -V$

• POTENZIALE $\cdot U$

• ENERGIA MECCANICA $E = T - U = T + V$

* PULSAZIONI PROPRIE

$$a \ddot{q} + b(q - q_E) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

oppure

$$\det |A\omega^2 + B| = 0 \quad B: \text{ Hessiana nel punto di equilibrio stabile}$$

* STATICA

$R^{EXT} = 0$
 $M^{EXT} = 0$ nei punti d'equilibrio stabile (sost.)

* HAMILTONIANA

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad H(q, \dot{q}) = \text{cost.}$$

* TRIGONOMETRIA

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\arccos \Rightarrow \pm \arccos \theta \rightarrow (\text{attenzione alla sostituzione})$$

$$\arcsin \Rightarrow \begin{matrix} + \\ \pi - \end{matrix} \arcsin \theta$$

INDICE

• MODELLISTICA E FISICA MATEMATICA

• CINEMATICA

(analisi dei moti del sistema; ex: traiettorie, velocità, accelerazioni in un sistema di riferimento fisso o variabile) senza preoccuparci delle cause che hanno generato

1. MOTI

- CINEMATICA DEL PUNTO
- " DEL CORPO RIGIDO → distribuzione velocità corpo rigido
- " RELATIVA → cambio sistema di riferimento

• VINCOLI (limitazioni imposte a priori sul moto)

• GEOMETRIA MASSE (baricentri e momenti d'inerzia)

• DINAMICA (si collega il moto alle cause)

- (-) FORZE, LAVORO E POTENZIALE
- (-) LEGGI MECCANICHE
- (-) DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE
- (-) " DEI SISTEMI DI PUNTI
- (-) " DEL CORPO RIGIDO → EQ. CARDINALI
- (-) STATICA (equilibrio)

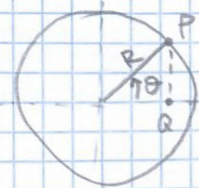
• MECCANICA LAGRANGIANA

(formalismo astratto che in condizioni particolari ci permette di trovare le equazioni di evoluzione del sistema).

• STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO E LINEARIZZAZIONI

MOTO ARMONICO

• MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = -R \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = R \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

Essendo il moto uniforme:

$$|\vec{v}| = \text{costante} \rightarrow \text{moto uniforme}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + R^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2} = R |\dot{\theta}|$$

essendo R fisso $\Rightarrow |\dot{\theta}| = \text{costante}$

Integriamo:

$$|\dot{\theta}| = \text{costante} \quad \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta} t$$

PERIODO

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$$

FREQUENZA

$$\nu = \frac{\dot{\theta}}{2\pi}$$

Introducendo l'accelerazione

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ \ddot{y} = -R \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

Ma c'è $\dot{\theta} \times k$ $\dot{\theta}$ è costante!

• Tornando al MOTO ARMONICO

Q proiezione di P sull'asse x

$$\ddot{x} = -\dot{\theta}^2 x$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

PULSAZIONE

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

eq. differenziale

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\omega$$

A = R = AMPIEZZA

$\varphi = \theta_0$ = FASE INIZIALE

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi)$$

MOTO ARMONICO SMORZATO

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

$$b > 0, \quad a, c > 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per analizzare le 2 radici osserviamo il segno del Δ .

- $b^2 > 4ac$ RADICI REALI \rightarrow entrambe NEGATIVE

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \text{MOTO SMORZATO}$$

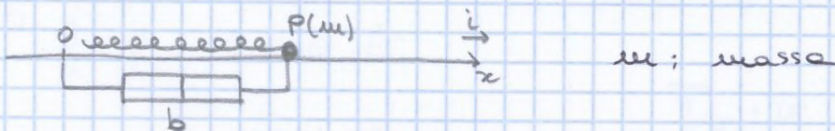
- $b^2 = 4ac$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} \rightarrow \text{SMORZAMENTO CRITICO}$$

- $b^2 < 4ac$ λ_1, λ_2 COMPRESSE CONIUGATE

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \left(C_1 \cos \sqrt{4ac - b^2} \cdot t + C_2 \sin \sqrt{4ac - b^2} \cdot t \right)$$

MASSA - MOLLA e SMORZATORE



$$\vec{F}_{el} = -kx \vec{i}$$

$$A_{ur} = -b\dot{x} \vec{i}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

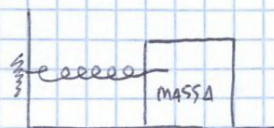
Se siamo nel caso :

- $b^2 > 4ac$
- $b^2 = 4ac$

La massa si ferma immediatamente in 0 senza oscillare

Cos'è un modello?

ESEMPIO



SISTEMA MASSA - MOLLA

ASSUNZIONI E SEMPLIFICAZIONI

- * Sistema si comporta come un punto-massa identificato dalla variabile x
- * Azione della molla si esplica in una forza del tipo $-Kx$ (LEGGE DI HOOKE)
- * Trascuriamo attrito e viscosità dell'aria

Usando la LEGGE DI NEWTON: $F = m \cdot a$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

$x(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

MODELLO DESCRITTO DA EQUAZIONE DI EVOLUZIONE CHE È UN' EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA (ODE: ORDINARY DIFF. EQ.)

Ma i modelli possono anche essere di tipo diverso:

ES MODELLO DI DINAMICA DI UNA POPOLAZIONE ~~ISOLATA~~

Assumiamo di tenere in conto di 2 fattori:

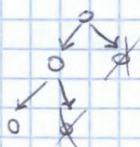
(RIDUZIONE COMPLESSITÀ / SEMPLIFICARSI LA VITA)

- Tasso NATALITÀ N
- Tasso MORTALITÀ M

Vogliamo definire un modello ovvero una Equazione di Evoluzione del numero di individui:

$$P = P(t)$$

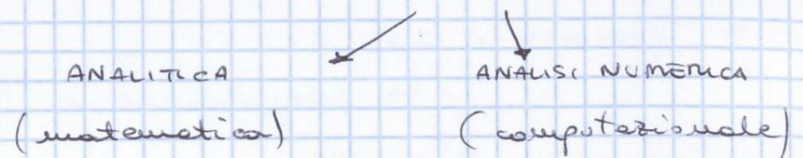
$$\frac{dP}{dt} = N_p - M_p$$



COSTRUZIONE MODELLO MATEMATICO

Processo deduttivo a passi diversi:

- Riduzione complessità e ipotesi semplificative;
- Variabili in gioco: individuare le variabili di stato che caratterizzano il fenomeno che voglio studiare e si individuano le variabili indipendenti (tempo e/o spazio) (VARIABILI DIPENDENTI)
- Relazioni costitutive che sono od es LEGGI FISICHE ($F = m \cdot a$) o FENOMENOLOGICHE (es di prima).
- Identificazione dei parametri e ~~costituisce~~ ^{deriva} il modello
- Formulazione del PROBLEMA MATEMATICO e ANALISI QUALITATIVA



Caratteristiche del modello:

- Il modello deve essere consistente ovvero il numero di incognite deve essere uguale al numero di equazioni indipendenti.
- A priori nella costruzione di un modello vi è una scelta della SCALA DI RAPPRESENTAZIONE (livello di dettaglio che voglio ottenere):
 - SCALA MICROSCOPICA (gli oggetti sono considerati individualmente)
 - SCALA MESOSCOPICA (statistica per sistemi con gran numero di individui)
 - SCALA MACROSCOPICA (faccio medie e considero densità)
- Il modello deve essere DIMENSIONALMENTE COERENTE

ES1

$$\frac{dp}{dt} = Np \quad \rightarrow \quad \frac{\#}{t} = N \cdot \# \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{t}$$

Un'altra classe interessante di modelli è definita da EQ. SCALARI di ORDINE ELEVATO.

$$\frac{d^N u}{dt^N} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}\right)$$

↑
↓
EQUAZIONE DI ORDINE N (massimo grado della derivata della variabile di stato)

Scritta in FORMA NORMALE perché ho isolato la derivata di ordine massimo

- Possiamo essere riscritte come un sistema di N EQUAZIONI del I ordine in N INCOGNITE.

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{du}{dt}, \quad u_3 = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \dots, \quad u_N = \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_3 \\ \vdots \\ \frac{du_N}{dt} = f\left(t, u_1, u_2, u_3, \dots, u_N\right) \end{cases}$$

ES

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad \text{MASSA-MOLLA}$$

$$u_1 = x \quad \downarrow \text{POSIZIONE} \quad u_2 = \frac{dx}{dt} \quad \downarrow \text{VELOCITÀ}$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{K}{m} u_1 \end{cases}$$

In funzione delle tipologie del CAMPO VETTORIALE si può effettuare la seguente classificazione:

• MODELLO LINEARE (più semplice da studiare)

$$\vec{f}(t, \vec{u}) = \underline{\underline{A}}(t) \vec{u} + \vec{b}(t)$$

↑
MATRICE DI COEFF
N x N
↑
VETTORE A N COMPONENTI

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

Con l'assegnazione di condizioni iniziali e ai limiti per l'applicazione del modello al caso specifico

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{u}) \\ \bar{u}(t_0) = \bar{u}_0 \end{cases} \quad \text{PROBLEMA AL VALORE INIZIALE (IVP)}$$

→ N CONDIZIONI INIZIALI
(una per ogni variabile di stato)



• PROBLEMA AL VALORE INIZIALE E AI LIMITI

Si assegnano $p < N$ CONDIZIONI INIZIALI

$$u_i(t_0) = u_{i_0} \quad i = 1, \dots, p$$

e $N - p$ CONDIZIONI AI LIMITI (TEMPO FINALE DI OSSERVAZIONE)

$$u_i(T) = u_{i_1} \quad i = p+1, \dots, N$$

• Il problema matematico è definito associando al modello (EQ. DI EVOLUZIONE) le CONDIZIONI INIZIALI E AI LIMITI.

Tale problema si dice BEN FORMULATO se il numero di condizioni (iniziali e ai limiti) è CORRETTO

• Il problema si dice BEN POSTO se la soluzione ESISTE, UNICA e dipende con continuità dal dato iniziale

TEOREMA DI ESISTENZA

Se $\bar{f}(t, \bar{u})$ è continuo in un rettangolo

$$R = \left\{ (t, \bar{u}) : \|\bar{u} - \bar{u}_0\| \leq K, |t - t_0| \leq \hat{T} \right\}$$

allora esiste almeno una soluzione dell'I.V.P. che è di classe C^1 (soluz. continua con derivate continue) per:

$$|t - t_0| < \hat{T} \quad \text{con} \quad \hat{T} = \min \left\{ T, \frac{K}{M} \right\}$$

$$\text{ed} \quad M = \max_{(t, \bar{u})} \|\bar{f}(t, \bar{u})\|$$

Sostituisco il tempo zero nella formula di posizione e ricavo le cost.

$$x(0) = x_0 = -g \frac{0^2}{2} + A \cdot 0 + B \Rightarrow B = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -g \cdot 0 + A = v_0$$

$$x(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

Dopo quanto tempo il grave inizialmente fermo toccherà terra?

Cerco il tempo t^* in $x(t^*) = 0$

$$x(t^*) = 0 = -g \frac{t^{*2}}{2} + v_0 t^* + x_0$$

$$t^{*2} = \frac{2x_0}{g} \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

ES CADUTA DI UN GRAVE CON ARIUNTO

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - \mu \frac{dx}{dt}$$

Bisogna inserire un termine di VISCOSITA' dell'ARIA \rightarrow prop. alla velocità

VISCOSITA' DEL MEZZO (AMA)

\downarrow si oppone al moto in funzione della velocità

Si può risolvere considerando la ODE del I ORDINE sulla velocità

$$\frac{dV}{dt} = -g - kV$$

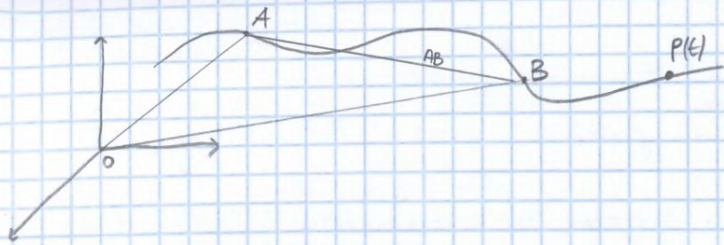
\downarrow μ/m

Verificando ad esempio l'esistenza di una VELOCITA' LIMITE di caduta di un grave (pioggia/proiettile)

In MECCANICA formalizzeremo in maniera rigorosa (RAZIONALE) il processo deduttivo di un modello meccanico ad esempio con le

- Eq. cardinali
- Eq. Lagrange

Averemo modelli alle derivate ordinarie di cui ci occuperemo cercheremo soluzioni linearizzate o di equilibrio, ma non soluzioni esplicite che spesso non si riescono a trovare e si potrebbe trovare solo la soluzione numerica (simulazione).



$$AB = OB - OA$$

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{d}{dt}(OB - OA) = \frac{dOB}{dt} - \frac{dOA}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Considero il modulo dello spostamento infinitesimo

$$ds = |dP| = |v(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Esso si identifica con la LUNGHEZZA D'ARCO percorsa dal punto

$$s(t) = \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau \quad \text{LEGGE ORAMA}$$

s è una funzione invertibile e posso avere $t(s)$

$$s(t) \longleftrightarrow t(s)$$

quindi

$$p(t) = p(t(s)) = \hat{p}(s)$$

ovvero posso descrivere il moto di P in 2 modi EQUIVALENTI:

- definendo la posizione del punto in funzione del tempo $P(t)$

- $\{ \hat{p}(s), s(t) \}$

↑
TRAJETTORIA

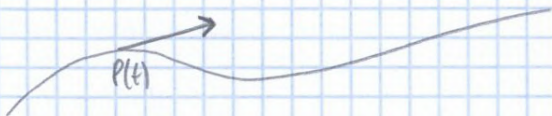
↑
LEGGE ORAMA

(aspetto geometrico)

(aspetto cinematico)

COME SCEGLIERE ~~LA~~ SR PIU' O MENO OPPORTUNI PER DESCRIVERE IL MOTO DEL PUNTO?

COMPONENTI INTINSECHE DI VELOCITA' E ACCELERAZIONE



il VETTORE TANGENTE $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{p}}{ds}$

in particolare in un moto circolare uniforme

$$a = c \cdot \vec{s}^2 \vec{u} \rightarrow c = \frac{1}{R} \quad \vec{v} = \dot{s} \vec{t}$$

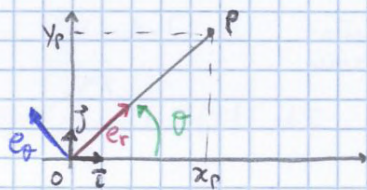
che è l'accelerazione centripeta.

MOTO PIANO IN COORDINATE POLARI

Moto è piano se la traiettoria è una CURVA PIANA

→ introduciamo le coordinate polari

(r, θ)



$$OP = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$$

definisco i VERSORI MOBILI

$$e_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$e_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta \end{array}$$

$$OP = r \cdot \vec{e}_r$$

$$v = \frac{dOP}{dt} = \frac{d(r \cdot \vec{e}_r)}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$e_r = \cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j}$$

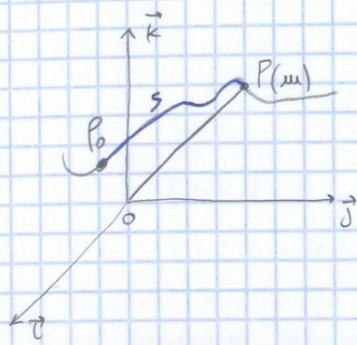
$$\dot{e}_r = -\sin \theta \dot{\theta} \vec{i} + \cos \theta \dot{\theta} \vec{j} = \dot{\theta} e_\theta$$

$$v = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

e analogamente si ricava l'accelerazione in coordinate polari

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

CINEMATICA DEL PUNTO



$\vec{OP} = \vec{OP}(t)$ legge di moto

Traiettoria

Legge di moto

$\vec{OP} = \vec{OP}(s)$

$s = s(t)$

Si: ascissa curvilinea

$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ \vec{t} : VERSIONE TANGENT

$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} = \dot{s}\vec{t}$

$\vec{a} = \frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \ddot{s} \frac{d\vec{P}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\vec{P}}{ds^2} = \ddot{s}\vec{t} + c\dot{s}^2\vec{n}$

$\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n}$

Piano \vec{t}, \vec{n} piano osculatore

c: CURVATURA

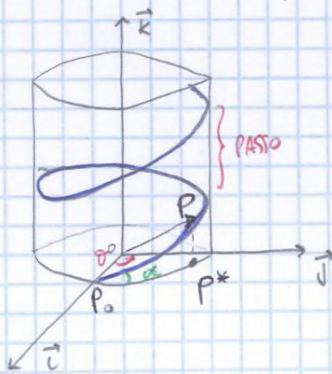
$\vec{P}, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ TERNA INTRINSECA

\vec{n} : NORMALE PRINCIPALE

\vec{b} binormale $\frac{d\vec{b}}{ds} = \tau\vec{n}$ dove τ e' la torsione (seconda curvatura).

MOTI ELICOIDALI

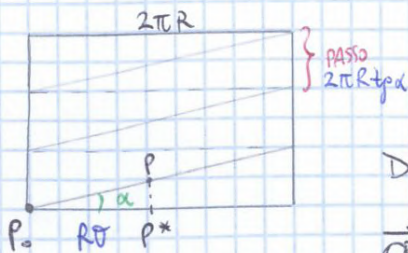
Moto in cui il punto P e' vincolato a muoversi lungo un'ELICA CILINDRICA



α : angolo cost.

traiettoria

Apriamo il cilindro



~~Descrivendo il moto~~

~~$\vec{OP} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j} + R\theta t g\alpha\vec{k}$~~

$\vec{\lambda} = \text{vers } \vec{OP}^* = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$

$\vec{\mu} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$

vers $\perp \vec{\lambda} \in$ al piano

Descrivendo il moto:

$\vec{OP} = \vec{OP}^* + \vec{P}^*P = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j} + R\theta t g\alpha\vec{k}$

$h = R t g\alpha$ PASSO RIDOTTO

$$e_j = e_k = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 = 1$$

Le 6 condizioni di ortogonalità sono quindi 3 QUANTITÀ INDIPENDENTI ovvero equivalentemente posso affermare che

$$e_h(t) = \underline{R}(t) \vec{t}_h \quad (2)$$

matrice di trasformazione ortogonale ovvero

$$R^T R = R R^T = \underline{1} \quad \det R = 1$$

↓
m. identità

Riprendendo la (1)

$$QP(t) = P(t) - Q(t) = OP - OQ$$

$$P(t) = Q(t) + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$$

$$= Q(t) + \sum_{h=1}^3 y_h \vec{e}_h$$

$$= Q(t) + \underline{R}(t) \underbrace{\sum_h y_h \vec{t}_h}_{\text{quantità COSTANTE NEL TEMPO}} = \vec{p} \quad \text{VECTORE COSTANTE}$$

(2)

$$= Q(t) + \underline{R}(t) \vec{p} \quad (3)$$

origine SR solido

R è una matrice di ROTAZIONE

⇒ abbiamo solo 3 quantità da determinare per definire l'orientamento dell' SR mobile rispetto al fisso

Tra le possibili parametrizzazioni una è quella degli ANGOLI DI EULERO oppure un'altra è quella degli ANGOLI DI CARDANO.

La scelta è dettata da questioni di comodità rispetto all'applicazione

• Ora cosa possiamo dire su velocità e accelerazione del CR?

↳ Le velocità dei CR non sono distribuite arbitrariamente, ma sono legate da

$$V_p(t) = V_q(t) + \bar{\omega} \wedge \overline{QP} \quad \forall p, q \in CR.$$

↑
velocità angolare

dette **LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ** o

FORMULA FONDAMENTALE DELLE VELOCITÀ DI UN CR

Analogamente si esprime una relazione tra le accelerazioni di coppie di punti di un CR.

$$a_p(t) = a_q(t) + \dot{\bar{\omega}} \wedge \overline{QP} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QP}) \quad \forall p, q$$

↓
LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE ACCELERAZIONI
che si ottiene derivando la formula fondamentale delle velocità.

↳ Questo implica che bastano 3 PARAMETRI per fissare la posizione di tutti i punti del corpo rigido ($Q(t)$) (le coordinate dell'origine del SR mobile).

→ 3 GRADI DI LIBERTA' di un corpo rigido in moto traslatorio

E della legge delle velocità

$$V_p(t) = V_a(t) \quad \forall p, a$$

Ovvero tutti i punti hanno la stessa velocità, ma questa in generale può essere differente da istante a istante (a meno che il moto non sia uniforme e rettilineo).

NB: in effetti si può descrivere la posizione e velocità del CR dando posizione e velocità di uno dei suoi punti (a : baricentro).

Quindi devo definire le 3 componenti del punto prescelto

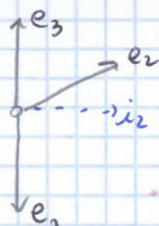
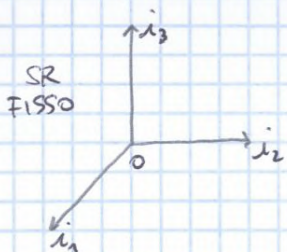


3 GRADI DI LIBERTA'

(il moto del CR è univocamente determinato definendo il moto di un suo punto).

• MOTO ROTOTRASLATORIO

In cui esiste un orientamento solidale al corpo che si mantiene costante rispetto all'osservatore fisso e la direzione costante è quella di ω (vel. angolare)



Se scegliamo $i_3 = e_3$ parallela alla direzione costante $\Rightarrow \dot{e}_3 = 0$

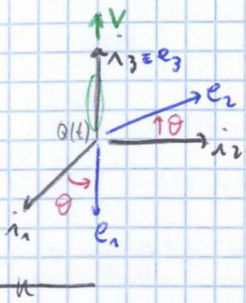
D'altra parte delle formule di Poisson

$$\dot{e}_3 = \omega \wedge e_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \parallel e_3$$

Ovviamente il moto traslatorio è un caso particolare del moto rototraslatorio in cui, non solo un versore solidale, ma tutti si mantengono costanti

• MOTO EUCLIDALE

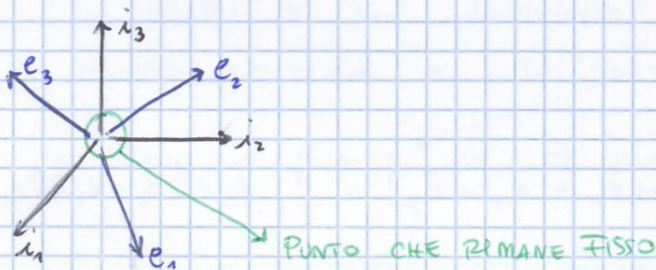
Esiste una retta // alla direzione privilegiata in cui i punti hanno velocità // alla retta stesse.



mi bastano 2 PARAMETRI infatti le coordinate x_0, y_0 sono costanti e devo conoscere $[z_0, \theta]$

• MOTO POLARE

Se uno dei punti solidali con il corpo rigido rimane fisso



CR e' in rotazione attorno al cosiddetto ASSE Istantaneo di ROTAZIONE

ho bisogno di 3 PARAMETRI

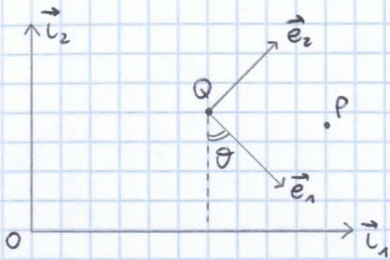
x_k varia nel tempo

(ad es angoli di EULERO) x definire il moto POLARE (in fatti l'origine O e' nota perché sappiamo sia il punto fisso del moto polare)

MOTI RIGIDI PIANI

$\vec{v}_P, \vec{a}_P \parallel$ piano fisso xy

$\vec{\omega} = \omega \vec{t}_3$ (è perpendicolare al piano)



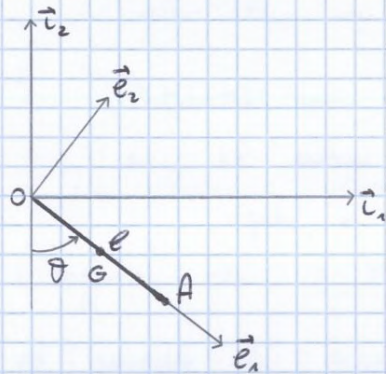
Per ragioni di segno θ antiorario

θ : angolo tra direzione fissa e direzione solidale

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \dot{\theta} \vec{t}_3 \wedge \vec{QP}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \ddot{\theta} \vec{t}_3 \wedge \vec{QP} - \dot{\theta}^2 \vec{QP}$$

ESERCIZIO: ASTA RIGIDA, m, l (ESTREMO FISSO)



Versori:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \sin\theta \vec{t}_1 - \cos\theta \vec{t}_2 \\ \vec{e}_2 = \cos\theta \vec{t}_1 + \sin\theta \vec{t}_2 \end{cases}$$

G: punto medio dell'asta ($\frac{l}{2}$)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \underbrace{\dot{\theta} \vec{t}_3 \wedge \vec{OA}}_{\text{sarebbe } \vec{t}_3 \wedge \vec{t}_1 = \vec{t}_2} = l \dot{\theta} \vec{e}_2 = l \cos\theta \dot{\theta} \vec{t}_1 + l \sin\theta \dot{\theta} \vec{t}_2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \ddot{\theta} l \vec{e}_2 - l \dot{\theta}^2 \vec{e}_1$$

ha una componente centripeta e una tangente

$$\vec{v}_G = \frac{l}{2} \dot{\theta} \vec{e}_2$$

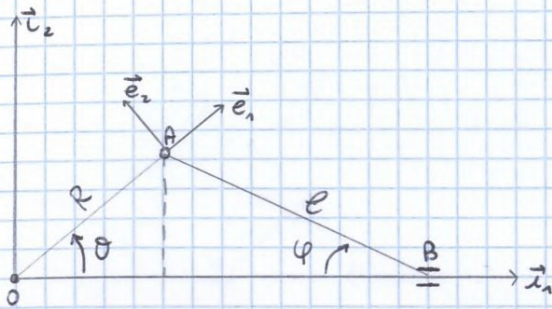
$$\vec{a}_G = \frac{l}{2} \ddot{\theta} \vec{e}_2 - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \vec{e}_1$$

Dimostriamo che queste formule sono universali

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = l \dot{\theta} \vec{e}_2 + \dot{\theta} \vec{t}_3 \wedge \left(-\frac{l}{2} \vec{e}_1\right) = l \dot{\theta} \vec{e}_2 - \frac{l}{2} \dot{\theta} \vec{e}_2 = \frac{l}{2} \dot{\theta} \vec{e}_2$$

Analogamente x derivazione ottengo l'accelerazione che è uguale.

ESERCIZIO: MANOVELLISMO (BIELLA - MANOVELLA)



$\overline{OA} = R = \text{MANOVELLA}$

$\overline{AB} = l = \text{BIELLA}$

A = bottone di manovella

B = piede di biella

$R \ll l$ (in applicazioni pratiche)

$\vec{\omega}_1 = \dot{\theta} \vec{i}_3$ manovella

$\vec{\omega}_2 = -\dot{\varphi} \vec{i}_3$ biella
 - xk φ senso ORARIO

$R \sin \theta = l \sin \varphi$

Adesso utilizzando le formule fondamentali:

$\vec{v}_B = \vec{v}_A - \dot{\varphi} \vec{i}_3 \wedge \overline{AB}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A - \ddot{\varphi} \vec{i}_3 \wedge \overline{AB} - \dot{\varphi}^2 \overline{AB}$

$\vec{v}_A = R \dot{\theta} \vec{e}_2$

$\vec{a}_A = R \ddot{\theta} \vec{i}_3 \wedge \vec{e}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_1$

VERSORI
 $\vec{e}_2 = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{i}_2$
 $\vec{e}_1 = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{i}_2$

Utilizzando la relazione geometrica in VERDE

$\sin \varphi = \frac{R \sin \theta}{l}$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{R}{l} \sin \theta\right)$

deriviamo

$\dot{\varphi} = \frac{\frac{R}{l} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \theta}} \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R \cos \theta \dot{\theta}}{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \theta}}$

Possiamo dire che:

- il denominatore non si annulla MAI;
- quando $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ A si trova sulla verticale \Rightarrow tutti i punti hanno

UGUALE VELOCITA'

Derivando $\dot{\varphi}$ otteniamo $\ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi} = \frac{R \cos \theta}{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \theta}} \ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \frac{-R \sin \theta \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \theta} - R \cos \theta (l^2 - R^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} \cdot R \sin \theta \cos \theta}{l^2 - R^2 \sin^2 \theta}$

— k —

OSSERVAZIONE:

Analoga tra moto di rotazione e moto traslatorio (moto lungo linea retta)

ROTAZIONE CON ASSE FISSO

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_z$$

integrando

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega_z dt = \omega_z \int_0^t dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_z t$$

Se ad esempio acc. angolare costante = α

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d\omega_z}{dt} = \alpha$$

integrando

$$\omega_z(t) = \omega_z(0) + \alpha t$$

ma $\frac{d\theta}{dt} = \omega_z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega_z d\tau = \theta_0 + \omega_z(0)t + \int_0^t \alpha t d\tau =$$

$$= \theta_0 + \omega_z(0)t + \alpha \frac{t^2}{2}$$

TRASLAZIONE 1D

Velocità costante

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_x$$

integrando

$$x = x_0 + v_x t$$

Accelerazione costante

$$v_x = v_{x0} + a_0 t$$

integrando

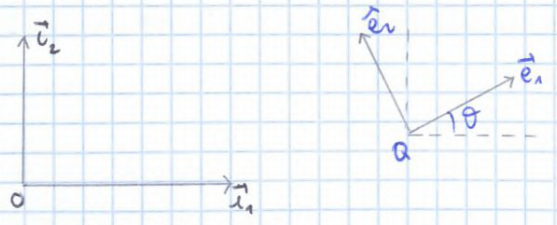
$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

MOTO PIANO

Supponiamo che il moto del CR si svolga in un piano detto PIANO DIREZIONE DEL MOTO π

$$v_p = v_q + \omega \wedge QP$$

$\in \pi \quad \in \pi \quad \in \pi \Rightarrow \omega \perp \pi$ (velocità angolare è perpendicolare al piano del moto)



$\{x_0, y_0, \theta\}$ mi servono 3 PARAMETRI per descrivere il moto di un CR libero

SISTEMI VINCOLATI

Come possiamo ottenere queste diverse tipologie di moti rigidi che abbiamo classificato?

Di quanti parametri abbiamo bisogno a descrivere questi moti rigidi?

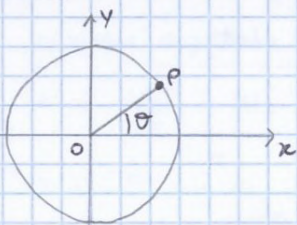
→ VINCOLI

Consideriamo un punto o un corpo rigido soggetto a VINCOLI da intendersi come restrizioni a priori ai possibili moti del sistema.

Ci sono vincoli di diversa natura ad esempio quelli su cui ci concentreremo:

VINCOLI DI POSIZIONE: restrizioni a priori imposte alle posizioni dei punti

ESEMPIO: PUNTO SU UNA GUIDA RIGIDA



$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

IL VINCOLO SI TRADUCE IN RELAZIONI MATEMATICHE!

Considero le coordinate polari:

$$OP(t) = R \cos \theta(t) \vec{i} + R \sin \theta(t) \vec{j}$$

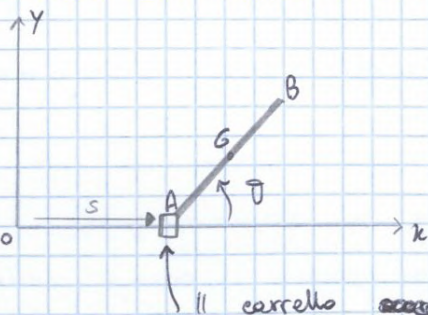
Un punto libero nello spazio ha bisogno di 3 parametri (x_p, y_p, z_p) per descrivere il suo moto.

Il vincolo ha ridotto a 1 il numero di parametri NECESSARI:

θ PARAMETRO LIBERO

che può essere variato arbitrariamente per ottenere le configurazioni del sistema

ESEMPIO: ASTA CON ESTREMO VINCOLATO SU GUIDA FISSA



Asta $AB = l$

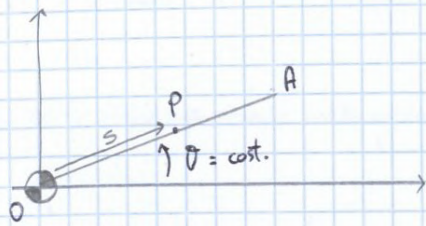
G: punto medio dell'asta

A scorre lungo x

Nel caso libero l'asta AB è un ~~corpo~~ ~~CL~~ CL nel piano e necessita di 3 PARAMETRI INDIPENDENTI (due coordinate x, y dell'origine del sistema di riferimento solidale).

Ora con il vincolo di posizione qualunque punto dell'asta è moto

ESEMPIO | PUNTO VINCOLATO SU GUIDA MOBILE



Asta in moto rotatorio uniforme con velocità angolare costante.

La posizione dei punti sulla guida è determinata dalla coord. libera S

- Il vincolo è MOBILE e compare esplicitamente il tempo

Prima con i vincoli FISSI:

- * Considerando le VELOCITÀ VIRTUALI queste sono ~~date~~ tutte tangenti alla guida (congelando il sistema il vincolo è diventato fisso)
- * Mentre le VELOCITÀ EFFETTIVE (guide che ruota) hanno anche una componente perpendicolare

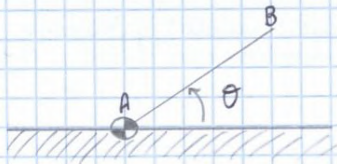
→ tra le infinite velocità virtuali in questo caso non si trovano le velocità effettive

$$v_p = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial S} \dot{S} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

FUNZ. COMPOSTA
 $P(s, t) = P(s(t), t)$

PEZZO CHE COMPARE XK IL VINCOLO È MOBILE E CHE SI ANNULLA SE CONSIDERIAMO VELOCITÀ VIRTUALI IN CUI SI CONGELA IL SISTEMA

• VINCOLO UNILATERO



Asta deve mantenersi al di sopra della guida orizzontale

Il vincolo ha effetto sulle configurazioni di confine o frontiera che corrispondono $\theta = 0$ e $\theta = \pi$

DEF: Uno spostamento virtuale si definisce REVERSIBILE se anche il suo opposto è virtuale

~~esse definisce~~

• Nel caso di un corpo rigido si può utilizzare la formula fondamentale delle velocità

$$dP = dQ + \omega dt \wedge QP$$

\nwarrow \nearrow
 SPOSTAMENTI EFFETTIVI \textcircled{d} VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA

Lo spostamento virtuale sarà:

$$\delta P = \delta Q + \omega dt \wedge QP$$

COORDINATE LIBERE o LAGRANGIANE

Coordinate ESSENZIALI e INDIPENDENTI che servono a parametrizzare le configurazioni del sistema

NESSUNA può ESSERE ELIMINATA

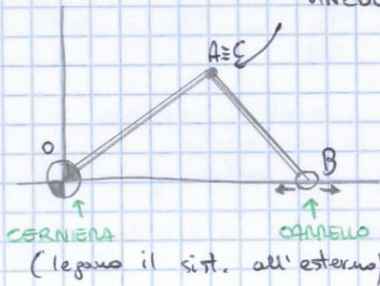
TMA DI LORO

$$\mathcal{P}(q_1, q_2, \dots, q_m; t) \longrightarrow N \text{ GRADI DI LIBERTÀ} \quad q_i = q_i(t)$$

In generale le parametrizzazioni possono essere non GLOBALI (possono essere necessari più sistemi di coordinate)

ESEMPIO | BIELLA - MANOVELLA

Vincolo iniziale al sistema (lega punti interni al sistema)



(TRASFORMA MOTO ROTATORIO IN MOTO TRASLATORIO)

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A = x_C \\ y_A = y_C \end{cases} \quad y_B = 0 \quad \xrightarrow{\text{VINCOLO SEMPLICE (1 eq)}}$$

\swarrow \swarrow \swarrow
 vincolo DOPIO (definito da 2 eq)

Ricordiamo che un CR nel piano è descritto da 3 PARAMETRI LIBERI (3 gradi di libertà) e il nostro sistema è composto da due aste (6 = 3+3 gradi di libertà). I vincoli introducono 5 relazioni (5 = 2+2+1 : 2 doppi e 1 semplice)

La scelta delle coordinate libere non è UNIVOCA!

[...] $P = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_N, t)$

- Assegnate le $q_k(t)$ abbiamo i moti del sistema.
In particolare la velocità di un generico punto

$$v_p = \frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P}{\partial t}$$

← PER LA MOBILITÀ DEL VINCOLO

e lo spostamento effettivo

$$dP = v_p dt = \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P}{\partial t} dt$$

↑ SPOSTAMENTI EFFETTIVI COORD. LAGRANGIANE

spostamento virtuale

$$\delta P = v_p' dt = \sum_{k=1}^N \frac{\partial P}{\partial q_k} \delta q_k$$

↑ VELOCITÀ VIRTUALE

↑ SPOSTAMENTO VIRTUALE COORD. LAGRANG.

Andando a valutare la reversibilità degli spostamenti virtuali distinguiamo tra VINCOLI BILATERALI e UNILATERALI.

* I vincoli BILATERALI impongono un legame tra le coordinate lagrangiane (q_1, \dots, q_N) che individuano la posizione del sistema

→ ovvero le q_k non sono libere di assumere qualsiasi valore arbitrario (restrizione alle possibilità del moto del sistema)

In particolare un vincolo bilaterale che è traducibile matematicamente in una relazione del tipo:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N; t) = 0$$

è detto OLONOMO.

Cio' comporta che le coordinate libere necessarie a descrivere il sistema sono ridotte in numero dal vincolo.

* Se il vincolo è UNILATERALE questo si esprime in forma di disuguaglianza

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N; t) \geq 0$$

Il vincolo impone una restrizione sulla velocità ($V_c = 0$) che equivale a:

$$\dot{x}_G = R\dot{\theta}$$

x_G : coordinata lungo \vec{i} del centro del disco

Quindi il vincolo di puro rotolamento è un vincolo di mobilità e limita le velocità. Tuttavia in questo caso si può integrare la relazione $\dot{x} = R\dot{\theta}$

$$x_G = R\theta + \text{cost.}$$

e quindi il vincolo è integrabile ed è equivalente

GRADI DI LIBERTÀ

Se i vincoli sono bilaterali e di posizione ovvero OLONOMI, il numero di GRADI DI LIBERTÀ del sistema è uguale al numero di COORDINATE LIBERE

↓
Infatti per assegnare posizione e l'atto di moto dobbiamo conoscere le q_k e le velocità \dot{q}_k che nel caso di vincoli olonomi possono essere assegnate liberamente (vincolo sulle posizioni).

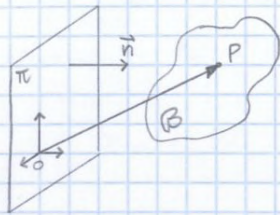
Se invece considerassi M vincoli di pura mobilità allora le velocità che posso assegnare liberamente sono $N - M$ e il numero di gradi di libertà deve essere definito in funzione degli spostamenti virtuali ammissibili.

- Praticamente nei nostri casi con vincoli olonomi (bilaterali e di posizione) considero un sistema composto da più parti rigide, il numero di gradi di libertà (che è uguale al numero di coordinate libere necessarie a descrivere il sistema) lo ottengo sommando i gradi di libertà di ogni parte rigida (3 gradi di libertà nel piano; 6 nello spazio) e sottraendo il numero di vincoli SEMPLICI/DOPPI interni e esterni al sistema.

le componenti

$$x_G = \frac{\sum_i m_i \cdot x_i}{M} = \frac{\int_B x \rho dt}{M}$$

\downarrow M ↓ M
 PARTICELLE OMOGENEO



$$\vec{n} \perp \pi$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{n} = \delta \quad (\text{distanza con segno dal piano } \pi)$$

$$O \in \pi$$

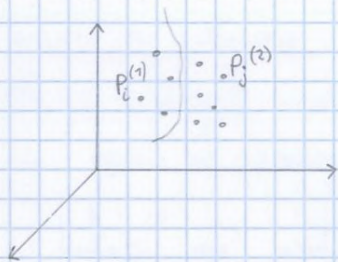
$$M \cdot \vec{OG} = \int_B \vec{OP} \rho dt$$

$$M \cdot \vec{OG} \cdot \vec{n} = \int_B \delta \rho dt$$

$$M \cdot \delta_G = \sum_i m_i d_i$$

con δ_G : distanza del baricentro dall'origine.

Se considero il baricentro appartenente al piano $\Rightarrow \sum_i \delta_i = 0$



$P_i (m_i)$

$i = 1, 2, \dots, n$

$P_i^{(1)}$

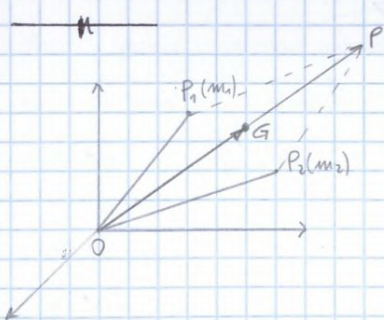
$i = 1, \dots, m$

$P_i^{(2)}$

$i = m+1, \dots, n$

$$M_{tot} \cdot \vec{OG} = \sum_{i=1}^m m_i \vec{OP}_i = \sum_{i=1}^m m_i \vec{OP}_i^{(1)} + \sum_{i=m+1}^n m_i \vec{OP}_i^{(2)} = m^{(1)} \vec{OG}^{(1)} + m^{(2)} \vec{OG}^{(2)}$$

$$\vec{OG}_{tot} = \frac{m^{(1)} \vec{OG}^{(1)} + m^{(2)} \vec{OG}^{(2)}}{M_{tot}}$$



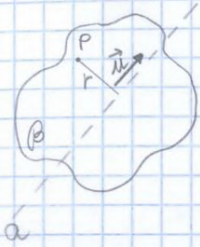
$$m_1 = m_2$$

$$\vec{OG} = \frac{m_1 (\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2)}{2m}$$

$G \in$ retta $\overline{P_1 P_2}$ e divide il segmento $\overline{P_1 P_2}$

MOMENTO D'INERZIA

retta a di versore \vec{u}



r : distanza a di P da retta a

$$I_a = \int_B r^2 \rho dt \quad \leftarrow \text{caso omogeneo}$$

$$I_a = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad \leftarrow \text{caso particolare } \geq 0$$

$$I_a = m \sigma_a^2$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{I_a}{m}}$$

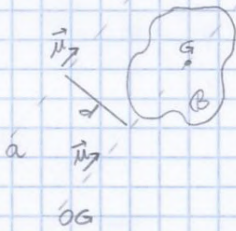
raggio di pravitazione

$$a : m \sigma_a^2 = I_a$$

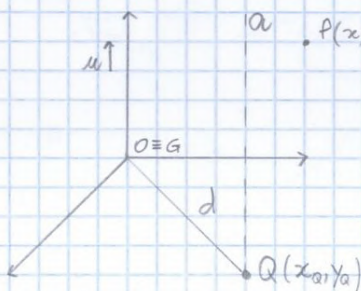
a : piratore

TEOREMA DI HUYGHENS - STEINER

$$I_a = I_{aG} + m d^2$$



DIMOSTRAZIONE



$$\vec{u} \parallel \vec{k}$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$I_a = \int_B (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \rho dt$$

Sviluppando i quadrati

$$r^2 = (x^2 + y^2) + (x_0^2 + y_0^2) - 2xx_0 - 2yy_0$$

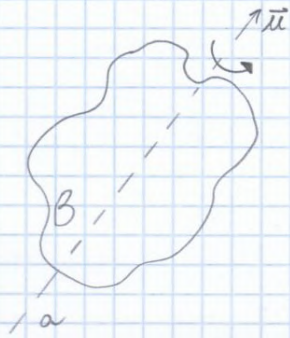
$$I_a = \int_B [(x^2 + y^2) + (x_0^2 + y_0^2) - 2xx_0 - 2yy_0] \rho dt = I_{aG} + m d^2 - 2x_0 \int_B x \rho dt - 2y_0 \int_B y \rho dt$$

$\rho \Rightarrow I_{aG}$ distanza tra le rette //

$\rightarrow x_0 = 0$ $\rightarrow y_0 = 0$
 x_k riferimento \Rightarrow coincidono con rette

$$I_a = I_{aG} + m d^2$$

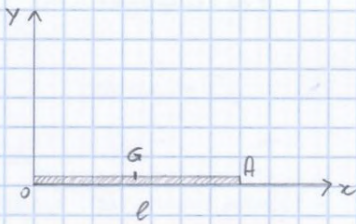
c.v.d.

ESEMPIO | CORPO RIGIDO ROTANTE ATTORNO AD ASSE FISSO

θ : angolo di rotazione

$$M_a = I_a \cdot \ddot{\theta} \quad \text{Equazione di moto}$$

$$F = m \ddot{x}$$

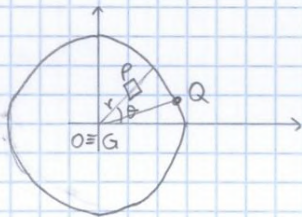
ESEMPIO | ASTA m, l OMOGENEA

$$m = \rho l$$

$$I_o = \int_0^l \rho x^2 dx = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{m l^2}{3}$$

Applicando H-S

$$I_G = I_o - \frac{m l^2}{4} = \frac{m l^2}{12}$$

ESEMPIO | Disco omogeneo, m, R 

ρ : densità

r, θ : coordinate polari

$$dA = dT = r dr d\theta$$

$$I_G = \iint \rho r^2 \cdot r dr d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = \frac{m R^2}{2}$$

Applicando Teo. H-S. ottengo I per un punto Q e circonferenza

$$I_a = I_G + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

CASI PARTICOLARI

- * Se $I_x = I_y$ corpo a struttura piroscopica rispetto ad O
 \Rightarrow Asse z : principale d'inerzia
- * Se $O \equiv G \Rightarrow I_x^G = I_y^G$: il corpo e' un piriscopio
 \Rightarrow Asse z : asse piriscopio

ELLIPSOIDE D'INERZIA

$$\vec{OL} = \pm \frac{1}{\sqrt{I_a}} \vec{u}$$

$$x_L = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{I_a}} \quad y_L = \pm \frac{\beta}{\sqrt{I_a}} \quad z_L = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{I_a}}$$

$$I_a = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2\alpha\beta I_{xy} + 2\alpha\gamma I_{xz} + 2\beta\gamma I_{yz}$$

$$1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2I_{xy} xy + 2I_{xz} xz + 2I_{yz} yz$$

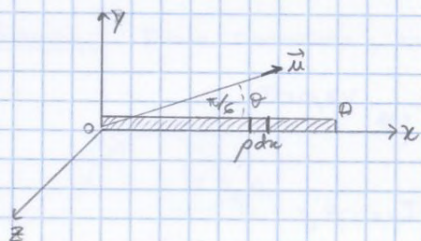
Nel caso piroscopico \Rightarrow ELLIPSOIDE ROTONDO

Se $O \equiv G$ ELLIPSOIDE CENTRALE D'INERZIA

Se assi principali d'inerzia

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

ESEMPIO | Asta omogenea, m, l



$$I_a = \int_0^l \frac{x^2}{4} \rho dx = \rho \frac{l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}$$

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} + 0 \vec{k} \quad I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_a = I_0 \vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{ml^2}{6} \vec{j} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} \right) = \frac{ml^2}{12} \quad (\text{ottenuto con matrice d'inerzia})$$

$$I_0 \vec{u} = \frac{ml^2}{6} \vec{j}$$

Osserviamo il non ellissoide d'inerzia del caso

$$1 = \frac{I_x}{I_y} x^2 + y^2 + I_z z^2$$

$I_x = 0 \Rightarrow xk$ e' un'asta

Essendo $I_y = I_z$ passanti x asse $\perp O \equiv \frac{ml^2}{3}$

$$\frac{ml^2}{3} (y^2 + z^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{CILINDRO}$$

Ci occupiamo (dopo la parte di descrizione cinematica) di individuare le cause che producono il moto

↳ PRINCIPI DI NEWTON

Si postula l'esistenza di un SISTEMA DI RIFERIMENTO (S.R) INERZIALE rispetto a cui il moto di un corpo soddisfa le leggi seguenti:

• LEGGE DI INERZIA (I PRINCIPIO)

Ogni corpo non sollecitato da alcune forze permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, o sollecitato da un sistema di forze a risultante nulla.

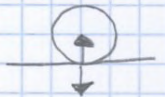
• LEGGE DI AZIONE (II PRINCIPIO)

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = ma$$

FORZA ESERCITATA SUL CORPO VARIAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO PROPORZIONALITA' TRA FORZA E ACCELERAZIONE

• LEGGE DI AZIONE E REAZIONE (III PRINCIPIO)

Ad ogni azione corrisponde una reazione eguale e contraria



↳ **NB**: Stiamo parlando di accelerazione assoluta rispetto a SR fissi.

Ricordando i risultati di cinematica relativa possiamo considerare SR in moto traslatorio, rettilineo e uniforme rispetto al SR FISSO

↓
detti SR. INERZIALI o GALILEIANI

Un SR solidale con la terra (che a rigore non è inerziale) può essere considerato tale visto che la differenza tra le accelerazioni assolute e quelle relative al SR TERRESTRE sono trascurabili per gran parte delle appl. tecniche.

• DETERMINISMO MECCANICO

Proiettando $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ sugli assi coordinati

↓ Eq. DERIVATE ORDINATE VETTORIALI del II ORDINE

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Si ottengono 3 equazioni scalari nelle 3 incognite $\{x(t), y(t), z(t)\}$

LAVORO

È definito come la quantità scalare

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{P} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

↑
SPOSTAMENTO
ELEMENTARE

↓
È FORMA DIFFERENZIALE ESATA SE È DEFINITA UNA FUNZIONE CHE
NE RAPPRESENTA IL POTENZIALE

$$dL = dU$$

↳ per cui $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

$$L = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1$$

Per cui il lavoro di una forza conservativa dipende solo da posizioni iniziali e finali

In particolare il lavoro lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo!

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE

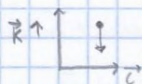
• FORZE COSTANTI

$$\vec{F} = F_{0x} \vec{i} + F_{0y} \vec{j} + F_{0z} \vec{k}$$

dove il potenziale risulta

$$U(x, y, z) = F_{0x} x + F_{0y} y + F_{0z} z$$

In particolare la FORZA PESO



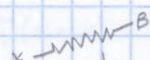
$$\vec{F} = +mg \vec{j} = -mg \vec{k}$$

$$L = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{P} = -mg \int_1^2 dz = -mg(z_2 - z_1)$$

se la quota di arrivo e partenza è la stesse $L=0$ ($z_2 = z_1$)

• FORZE ELASTICHE

$$\vec{F} = -k(r-r_0) \vec{u}$$



LEGGE FENOMENOLOGICA DI HOOKE

$k > 0$: COSTANTE DI ELASTICITÀ DELLA MOLLA (RIGIDITÀ)

$(r-r_0)$: ELONGAZIONE RISPETTO ALLA LUNGHEZZA DI RIPOSO DELLA MOLLA r_0 (QUANTITÀ ≥ 0)

\vec{u} : DIREZIONE DEL VERSORE LUNGO LA MOLLA

$$U = -\frac{k}{2} (r-r_0)^2$$

$$L = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{P} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

In effetti il lavoro è indipendente dalla traiettoria seguita, ma dipende solo dagli

ESTREMI

• FORZE CENTRALI

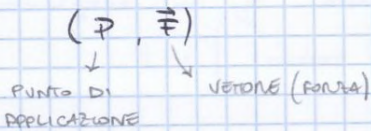
Dirette verso un punto fisso

...
 $\sum_{j \neq i} F_{ij}^I =$ somma delle forze interne o risultante delle forze interne $= 0$ (nuovo)

Definizione
 In fatti per il principio di azione e reazione le forze interne sono eguali e contrarie a due a due \Rightarrow sommandole ha un sistema di vettori con risultante nulla (e anche con momento risultante nulla).

SISTEMI DI FORZE

Una forza può essere rappresentata con un vettore applicato



Valgono le operazioni di calcolo vettoriale (composizioni di più forze, scomposizioni secondo direzioni assegnate)

\rightarrow La forza tende a muovere un corpo nella direzione della sua azione
 RETTA DI APPLICAZIONE di (P, \vec{F}) è la retta passante per P e parallela ad \vec{F}

\downarrow
 Vale il PRINCIPIO di TRANSMISSIBILITA' per cui una forza può essere applicata in un qualunque punto della retta di azione senza modificare gli effetti risultanti.

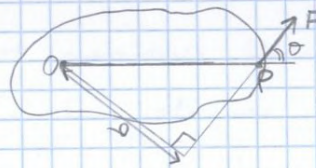
MOMENTO DI UNA FORZA APPLICATA (P, \vec{F})

(Ed in generale di un vettore applicato) rispetto ad un polo O
 È definito

$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}$

Ad es. se considero il caso piano

b: è il BRACCIO del vettore \vec{F} risp. a O



$b = OP \sin \theta$

$|M_O| = |OP|_{\perp} |F|$

componente \perp di OP risp. a F

$\vec{M}_O = b F \vec{k}$

VERSORE \perp AL FOGLIO CON SEGNO DATO DALLA REGOLA DELLA MANO DX

\rightarrow In pratica il momento tiene conto del fatto che l'applicazione di una forza ad un corpo, oltre a spostarlo nella direzione della forza può (non sempre) farlo RUOTARE



COPPIA

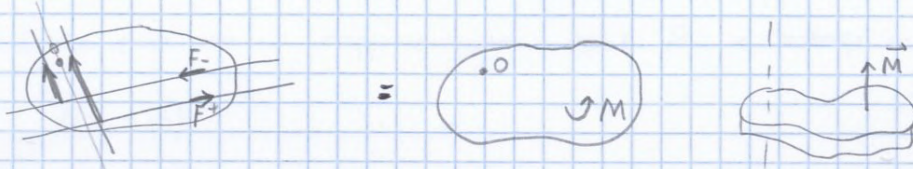
Sistema di due vettori applicati il cui risultante è NULLO

$$\{(P_1, F), (P_2, F)\}$$

e il momento risultante (essendo un sistema a risultante nulla) è indipendente dal polo scelto.

→ In pratica si considerano forze uguali e opposte non allineate.

Il loro effetto è quello di tendere a far rotolare il corpo



\vec{M} è un VETTORE LIBERO infatti dipende dalle intensità e dalle distanze delle forze applicate, ma non dal polo rispetto a cui si calcola:

$$M_o = r_b \wedge (-F) + r_a \wedge (F) = -r_b \wedge F + r_a \wedge F = (r_a - r_b) \wedge F = d \wedge F$$

↓
distanza tra le forze

~~CALCOLO~~

LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE SU CR

$$dL = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dP_i$$

Se considero un corpo rigido sapremo che

$$dP_i = dQ + \varepsilon \wedge QP_i \quad \text{con} \quad \varepsilon = \omega dt$$

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i F_i \cdot dQ + \sum_i F_i \cdot \varepsilon \wedge QP_i = \\ &= R \cdot dQ + \underbrace{\left(\sum_i QP_i \wedge F_i \right)}_{M_o} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

PERMUTAZIONE CICLICA PRODOTTI MISTI

$$\Rightarrow dL = \underbrace{\vec{R}}_{\text{RESULTANTE}} \cdot d\vec{Q} + \underbrace{\vec{M}_o}_{\text{MOMENTO RESULTANTE ESP. A Q}} \cdot \vec{\varepsilon}$$

Dipende solo dai vettori caratteristici del sistema di forze (e quindi non cambia se si sostituisce un sistema equivalente con gli stessi vettori considerati).

* Vediamo di risolvere la (2) introducendo la QUANTITA' DI MOTO

$$Q = \sum_{i=1}^N m_i \cdot v_i \quad (\vec{a} \quad \vec{v}_i)$$

Ricordando la definizione di baricentro

$$OG = \frac{\sum_i m_i OP_i}{\sum_i m_i}$$

$$m OG = \sum_i m_i OP_i$$

↑
MASSA TOTALE

derivandola rispetto al tempo

$$m \frac{dOG}{dt} = \sum_i m_i \frac{dOP_i}{dt} \quad (\text{supponendo la massa costante nel tempo})$$

Ricordando che $OG = G - O$

$$m(v_G - v_O) = \sum_i m_i (v_i - v_O) = \sum_i m_i v_i - m v_O$$

$$m v_G = \sum_i m_i v_i = Q \quad \rightarrow \quad Q = m v_G$$

↑
velocità baricentro

La quantità di moto per un sistema qualsiasi è uguale al prodotto tra la massa totale e la velocità del baricentro.

derivandola rispetto al tempo

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (m v_G) = m \frac{d v_G}{dt} = m a_G$$

derivando la definizione di baricentro di G

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \right) = \sum_i m_i \frac{d v_i}{dt} = \sum_i m_i a_i$$

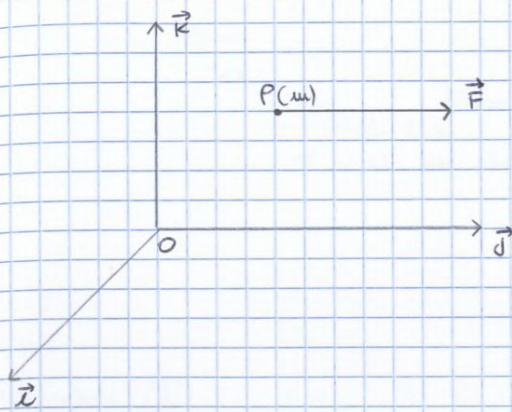
↓
ricordando la (2) abbiamo

$$R^{\text{ext}} = R^A + R^V = \frac{dQ}{dt} = m a_G \quad \text{PRIMA EQUAZIONE CARDINALE DEL MOTO}$$

Esprime il fatto che la variazione (derivata) della quantità di moto di un sistema qualsiasi eguaglia in ogni istante la risultante delle forze esterne (attive e vincolari)

Definendo un legame causa/effetto per il moto traslatorio o equivalentemente (TEOREMA DEL MOTO DEL BARICENTRO) il baricentro del sistema si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema e in esso fossero concentrate tutte le forze esterne (attive + vincolari).

↳ estensione della II legge di Newton al moto dei sistemi.



$$\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, \varphi) \rightarrow \text{caso generale}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(P) \rightarrow \text{forza conservativa}$$

F conservativa se

$$\vec{F} = \vec{F}(P) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$U(x, y, z) \quad | \quad \vec{F} = \text{grad} U$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

In dominio semplicemente connesso condizione sufficiente per \vec{F} conservativo

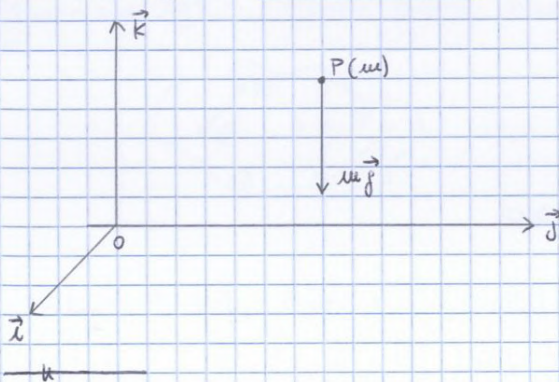
$$dL = \vec{F} \cdot dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU$$

\vec{F} costante

$$\vec{F} = F_x^{(0)} \vec{i} + F_y^{(0)} \vec{j} + F_z^{(0)} \vec{k}$$

$$U(x, y, z) = F_x^{(0)} x + F_y^{(0)} y + F_z^{(0)} z + \text{cost.}$$

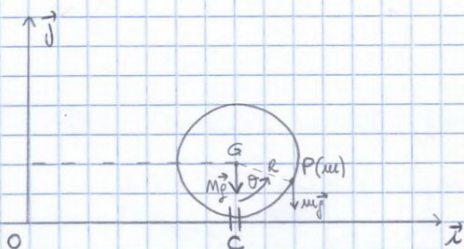
ESEMPIO ① : FORZA PESO



$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

$$U = -mgy + \text{cost.}$$

ESERCIZIO ① : DISCO : M, R / PUNTO P : m



Legame tra x_G e θ

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CG}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$$

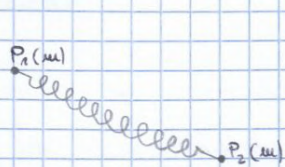
$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \dot{\theta} \vec{k} \wedge \vec{CG} = -R\dot{\theta} \vec{i}$$

$$\vec{v}_G = \dot{x} \vec{i}$$

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}$$

$$U(\theta) = -MgR - mgy_p + c = mgy_p (R - R\cos\theta) + c = mgy_p R \cos\theta + \text{cost.}$$

ESEMPIO (5) : FORZA ELASTICA TRA DUE PUNTI MOBILI P_1, P_2 DEL SISTEMA

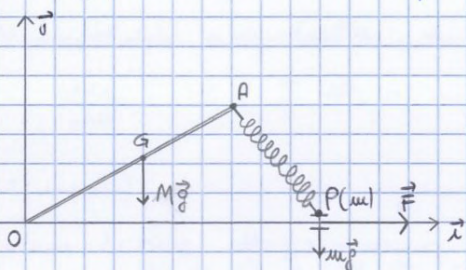


$$\vec{F}_1 = -k \overrightarrow{P_2 P_1}$$

$$\vec{F}_2 = -k \overrightarrow{P_1 P_2}$$

$$\begin{aligned} dL &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{P}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{P}_2 = -k \overrightarrow{P_2 P_1} \cdot d\vec{P}_1 + k \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot d\vec{P}_2 = \\ &= -k \overrightarrow{P_2 P_1} \cdot (d\vec{P}_1 - d\vec{P}_2) = -k \overrightarrow{P_2 P_1} \cdot d\overrightarrow{P_1 P_2} = \\ &= -k r \vec{u} \cdot d(r\vec{u}) = -k r dr \end{aligned}$$

ESERCIZIO (3) : ASTA : M, l / PUNTO $P : m$



$$U(x, \theta) = -Mg y_G - \frac{k}{2} AP^2 + Fx + C$$

$$y_G = \frac{l}{2} \sin \theta$$

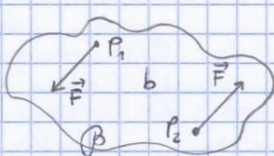
$$x_A = l \cos \theta$$

$$\overrightarrow{AP}^2 = (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2$$

$$\overrightarrow{AP}^2 = x^2 + l^2 \cos^2 \theta - 2lx \cos \theta + l^2 \sin^2 \theta$$

$$U(x, \theta) = -Mg \frac{l}{2} \sin \theta - \frac{k}{2} x^2 + k lx \cos \theta + Fx + \text{cost.}$$

ESERCIZIO (4) : CORPO RIGIDO PIANO



$M > 0$ costante

$M = Fb$ - coppia arbitraria

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$$

θ : angolo di rotazione

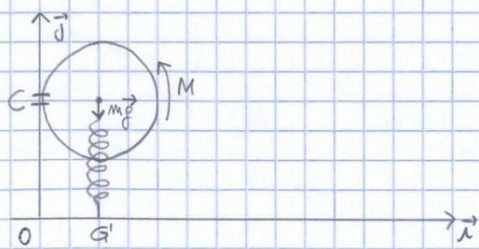
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{P}_1 - \vec{F} \cdot d\vec{P}_2 = \vec{F} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) dt =$$

$$= \vec{F} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_1 - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{P_1 P_2}) dt = \vec{F} \cdot (-\dot{\theta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{P_1 P_2}) dt = Fb \dot{\theta} dt = M d\theta \Rightarrow dL = M d\theta$$

$$U = \int M d\theta = M\theta + C$$

Se $M = M(\theta) \Rightarrow U = \int M(\theta) d\theta$

ESEMPIO (6) : DISCO : m, R / MOLLA



$$U(y) = -mgy - \frac{k}{2} y^2 + \frac{My}{R} + \text{cost.}$$

$$\vec{v}_G = \dot{y} \vec{j} = \underbrace{\vec{v}_G}_{L=0} + \dot{\theta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{CG} = R \dot{\theta} \vec{j} = \dot{y} \vec{j}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$$

$$\Rightarrow \sum_i AP_i \wedge m_i v_i = M_A^{EXT} = M_A^{ATT} + M_A^V$$

↓ momento risultante delle forze esterne rispetto ad A

Analogamente a quanto fatto per passare da (1) a (2) (Eq. CARDANA) cerchiamo di caratterizzare questa quantità con una grandezza propria del sistema materiale considerato:

Definiamo il momento delle quantità di moto (MOMENTO ANGOLARE) rispetto al polo arbitrario A:

$$K_A = \sum_i AP_i \wedge m_i v_i$$

Calcoliamo la derivata di K_A :

$$\begin{aligned} \frac{dK_A}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i AP_i \wedge m_i v_i \right) = \sum_i \frac{dAP_i}{dt} \wedge m_i v_i + \sum_i AP_i \wedge \frac{d(m_i v_i)}{dt} = \\ &= \sum_i \frac{dAP_i}{dt} \wedge m_i v_i - \sum_i v_A \wedge m_i v_i + \sum_i AP_i \wedge m_i v_i = \\ &= \underbrace{\sum_i v_i \wedge m_i v_i}_{=0 \quad v_i \parallel v_i} - \underbrace{\sum_i v_A \wedge m_i v_i}_{=v_A \wedge \sum_i m_i v_i = v_A \wedge Q} + \underbrace{\sum_i AP_i \wedge m_i v_i}_{=M_A^{EXT}} = \\ &= -v_A \wedge Q + M_A^{EXT} \end{aligned}$$

$$M_A^{EXT} = M_A^{ATT} + M_A^V = \frac{dK_A}{dt} + v_A \wedge Q$$

(5) SECONDA EQUAZIONE CARDINALE (generale)

Valida per un qualsiasi sistema materiale e qualsiasi scelta del polo A.

• Dispensando dell'arbitrarietà di A possiamo fare coincidere il polo A con il baricentro G oppure, se esiste un punto O che si mantiene fisso durante il moto

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ se } A \equiv G \quad v_A = v_G \quad v_A \wedge Q = v_G \wedge m v_G = 0 \\ * \text{ se } A \equiv O \text{ (Fisso)} \quad v_A = v_O = 0 \quad v_A \wedge Q = 0 \end{array} \right\} \text{ si annulla } v_A \wedge Q$$

⇒ In questi 2 casi

$$M^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}$$

SECONDA EQUAZIONE CARDINALE (con A FISSO o coincidente con BARICENTRO)

Fornisce relazione causa/effetto per il moto rotatorio

Quest'ultima espressione coincide con quanto trovato nel caso di particella singola.

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} & \left[\omega_1 (x_{2i}^2 + x_{3i}^2) - \omega_2 x_{1i} x_{2i} - \omega_3 x_{1i} x_{3i} \right] e_1 + \\ & \left[-\omega_1 x_{2i} x_{1i} + \omega_2 (x_{1i}^2 + x_{3i}^2) - \omega_3 x_{2i} x_{3i} \right] e_2 + \\ & \left[-\omega_1 x_{3i} x_{1i} - \omega_2 x_{3i} x_{2i} + \omega_3 (x_{1i}^2 + x_{2i}^2) \right] e_3 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per m_i e \sum_i si ha che \textcircled{b}

$$\begin{aligned} \sum_i m_i A P_i \wedge (\omega \wedge A P_i) &= (I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3) e_1 + \\ &+ (I_{21} \omega_1 + I_{22} \omega_2 + I_{23} \omega_3) e_2 + \\ &+ (I_{31} \omega_1 + I_{32} \omega_2 + I_{33} \omega_3) e_3 \end{aligned}$$

Dove I_{11}, I_{22}, I_{33} sono i momenti di inerzia del corpo rigido rispetto agli assi x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}

$$I_{11} = \sum_i m_i (x_{2i}^2 + x_{3i}^2)$$

$$I_{22} = \sum_i m_i (x_{1i}^2 + x_{3i}^2)$$

$$I_{33} = \sum_i m_i (x_{1i}^2 + x_{2i}^2)$$

E I_{kl} sono detti PRODOTTI D'INERZIA

$$I_{kl} = -\sum_i m_i x_{ki} x_{li} \quad k \neq l$$

\Rightarrow Dunque calcoliamo, trovata l'espressione di \textcircled{b} e possiamo scrivere

$$K_A = \overset{a+b}{\downarrow} m A G \wedge V_A + I_A \omega$$

\swarrow matrice d'inerzia \downarrow vel. angolare del CR

$$I_A = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{MOM. INERZIA} \\ \text{risp. assi} \end{pmatrix}$$

che caratterizza le proprietà geometriche della distribuzione delle masse del CR rispetto ad A

MOMENTI D'INERZIA

• MOM. di un punto rispetto asse: $I_w = m r^2$

• SISTEMA DI PUNTI

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2$$

• SISTEMA CONTINUO

$$I_A = \int_B \rho r^2 d\tau$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

\downarrow con asse x (ASSE INERZIA)

$R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G \rightarrow 1^a$ equazione vettoriale (tre equazioni scalari)

$M^{EXT} = \frac{dK_A}{dt} \rightarrow 1$ equazione vettoriale (tre equazioni scalari)

se $A \equiv G$ baricentro, $A \equiv O$ punto fisso

$EXT = AMIVE + VINCOLARI$

Nel caso della dinamica del corpo rigido

$K_A = I_A \cdot \vec{\omega}$ se $A \equiv G$ o $A \equiv O$

matrice inerzia \uparrow velocità angolare \uparrow

$K_A = \sum_{k=1}^3 I_{k\ell} \omega_k \vec{e}_k = I_A \cdot \vec{\omega}$
 versore S.R. \downarrow e' una matrice \downarrow

$I_A = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$
 PRODOTTI D'INERZIA \rightarrow
 MOMENTI D'INERZIA \downarrow

Essendo i prodotti d'inerzia per definizione

$I_{k\ell} = I_{\ell k}$

\Rightarrow la matrice d'inerzia e' una matrice simmetrica che, ricordiamo, permette di determinare i mom. d'inerzia del sistema e qualunque retta passante per A

La matrice d'inerzia e' simmetrica e definita positiva \Rightarrow e' DIAGONALIZZABILE

Utilizzando una terna di autovettori di I_A detta TERNA PRINCIPALE D'INERZIA rispetto ai cosiddetti assi principali d'inerzia e momenti non nulli sono principali d'inerzia se in piu' sono calcolati rispetto al baricentro sono detti CENTRALI

ESEMPIO | ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO RISPETTO AD ASSE FISSO CHE SUPPONIAMO PASSANTE PER A.

Introduciamo un S.R. solidale al corpo rigido

$A (e_1, e_2, e_3)$ e $e_k \parallel$ asse fisso

$K_A = \sum_k I_{k3} \omega_k e_k = \omega_3 (I_{13} e_1 + I_{23} e_2 + I_{33} e_3)$

$\vec{\omega} = \omega_3 \vec{e}_3, \omega_1 = \omega_2 = 0$

Se l'asse fisso e' principale d'inerzia allora:

$K_A = I_{33} \omega_3 e_3 \rightarrow$ il momento delle quantita' di moto e' parallelo all'asse fisso

Si individua un sistema di riferimento solidale con origine nel baricentro in cui l'osservatore solidale vede il corpo in quiete.

Ricordando il risultato di cinematica relativa

$$\dot{c} = c' + \omega \wedge c$$

con $c = \vec{c}$ vettore generico

derivata rispetto ad un osservatore fisso

derivata rispetto ad un osservatore solidale

$$c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

FORMULE DI POISSON

$$\dot{c} = \underbrace{\dot{c}_1 e_1 + \dot{c}_2 e_2 + \dot{c}_3 e_3}_{c'} + \underbrace{\omega \wedge c_1 e_1 + \omega \wedge c_2 e_2 + \omega \wedge c_3 e_3}_{\omega \wedge c}$$

(derivata rispetto ad un asse solidale)

$$\rightarrow \dot{c} = c' + \omega \wedge c$$

In particolare se scegliamo $c = \omega \Rightarrow \dot{\omega} = \omega'$ ($\omega \wedge \omega = 0$)

$$K_G = I_G \omega$$

$$\dot{K}_G = (\dot{K}_G)' + \omega \wedge K_G$$

$$\dot{c} = c' + \omega \wedge c$$

$$(K_G)' = (I_G \omega)' = I_G \omega' = I_G \dot{\omega}$$

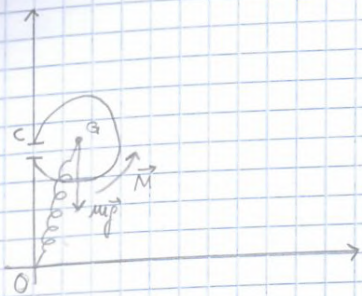
nel sistema di riferimento la matrice d'inerzia è costante (corpo in quiete)

$$K_G = I_G \dot{\omega} + \omega \wedge K_G = \begin{vmatrix} e_{G1} & e_{G2} & e_{G3} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_{G1} \omega_1 & I_{G2} \omega_2 & I_{G3} \omega_3 \end{vmatrix} =$$

$$= [I_{G1} \dot{\omega}_1 - (I_{G2} - I_{G3}) \omega_2 \omega_3] \vec{e}_{G1} + [I_{G2} \dot{\omega}_2 - (I_{G3} - I_{G1}) \omega_1 \omega_3] \vec{e}_{G2} + [I_{G3} \dot{\omega}_3 - (I_{G1} - I_{G2}) \omega_1 \omega_2] \vec{e}_{G3}$$

Analoga espressione si ottiene riferendo il tutto invece che al baricentro rispetto ad un punto fisso O ($K_O = I_O \omega$)

ESERCIZIO (2) : DISCO OMOGENEO m, R (ROTOLA SENZA STRISCARE SULL'ASSE y)



$$\vec{F}_{el} = -K \vec{OG}$$

$$x_G = R$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \dot{\theta} \vec{k} \wedge \vec{CG} = \dot{y} \vec{j} = R \dot{\theta} \vec{j}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R} \quad \theta = \frac{y}{R}$$

$$\vec{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \vec{j} + \Phi_{Cy} \vec{j}$$

$$\cdot i) -KR + \Phi_{Cx} = m \ddot{x}_G = 0$$

$$\cdot j) -K_y - m g + \Phi_{Cy} = m \ddot{y}$$

$$\cdot k) \text{ C\grave{e}} \quad M - \Phi_{Cy} R = \frac{m R^2}{2} \frac{\ddot{y}}{R}$$

$$\Phi_{Cx} = KR$$

$$\Phi_{Cy} = m \ddot{y} + K y + m g$$

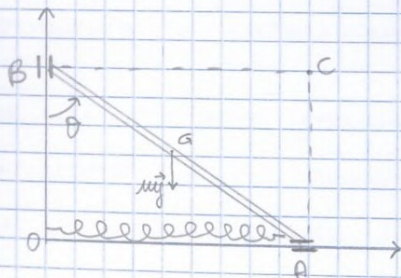
Si puo' risolvere anche rispetto al polo C :

$$\text{C\grave{e}} \quad -m g + M - K y R = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\theta}$$

$$I_C = I_G + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

$$-m g + M - K y R = \frac{3}{2} m R^2 \frac{\ddot{y}}{R}$$

ESERCIZIO (3) : ASTA OMOGENEA m, l CON VINCOLI LISCI



$$\vec{\Phi}_A = \Phi_A \vec{j}$$

$$\vec{\Phi}_B = \Phi_B \vec{i}$$

$$I_C = I_G + m \frac{l^2}{4} = \frac{m l^2}{3}$$

$$\cdot i) -K l \sin \theta + \Phi_B = m \ddot{x}_G$$

$$\cdot j) -m g + \Phi_A = m \ddot{y}_G$$

$$\text{C\grave{e}} \quad +m g \frac{l}{2} \sin \theta - K l^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{m l^2}{3} \ddot{\theta}$$

$$x_G = \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\dot{x}_G = \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x}_G = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{l}{2} \cos \theta \ddot{\theta}$$

$$y_G = \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\dot{y}_G = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{y}_G = -\frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{l}{2} \sin \theta \ddot{\theta}$$

CASO STATICO

$$m g \frac{l}{2} \sin \theta - K l^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\rightarrow \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{m g}{2 K l}$$

$$\begin{cases} P_1 (\theta = 0) \\ P_2 (\theta = \pi) \end{cases}$$

$$\text{se } m g \leq 2 K l$$

$$P_3 (\theta_3 = \arccos \frac{m g}{2 K l})$$

$$P_4 (\theta_4 = -\arccos \frac{m g}{2 K l})$$

$$R^{EXT} = \frac{dR}{dt} = m a_G$$

$$M^{EXT} = \frac{dKA}{dt}$$

$$A \equiv G$$

$$A \equiv O \text{ (fisso)}$$

Nel caso di corpi rigidi:

$$K_A = I_A \omega \quad \text{con polo arbitrario } A \text{ scelta come prima}$$

$$\dot{K}_A = \frac{dKA}{dt} = I_A \dot{\omega} + \omega \wedge I_A \omega$$

Il sistema di forze esterne compare solo attraverso i vettori caratteristici (risultante e momento d'inerzia)

→ sollecitazioni esterne equivalenti (con medesimi vettori caratteristici)

forniscono la stessa dinamica per il corpo rigido

↳ ad esempio la sollecitazione peso che è distribuita su tutto il corpo può essere ~~con~~ sostituita dalla risultante applicata al baricentro

Oss. Ruolo Forze Interne = il sistema forze interne è equilibrato (vettori caratteristici nulli) e può essere trascurato e sostituito con il sistema nullo.

→ la dinamica del corpo rigido non è influenzata in alcun modo dalle forze interne e le equazioni cardinali forniscono tutte le informazioni per determinare la dinamica del corpo rigido ovvero sono NECESSARIE e SUFFICIENTI a determinare la dinamica di un corpo rigido.

• per un sistema generico (non rigido) invece sono NECESSARIE MA NON SUFFICIENTI e si devono completare con altre equazioni (costitutive) che dipendono dalle forze interne

CORPO RIGIDO NELLO SPAZIO → 6 GRADI DI LIBERTA' → 6 PARAMETRI LIBERI COORDINATE LAGRANGIANE

Equazioni cardinali sono le equazioni vettoriali ovvero 3+3=6 equazioni scalari

$$R^A + R^V = m a_G (q, \dot{q}, \ddot{q})$$

$$q = \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$M^A + M^V = \frac{dKA}{dt}$$

$$A \equiv G \quad \text{o} \quad A \equiv O \text{ (fisso)}$$

$$= \sum_K I_{A_K} \dot{\omega} (q, \dot{q}, \ddot{q}) + \omega (q, \dot{q}) \wedge K_A (q, \dot{q})$$

$$\hookrightarrow I_A \omega (q, \dot{q})$$

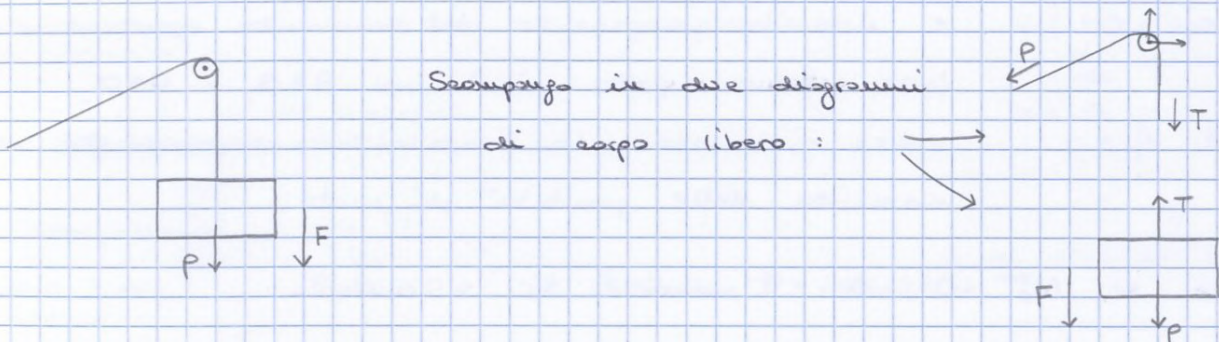
dette EQUAZIONI DI EULERO

Tuttavia nel caso di più gradi di libertà (ad esempio se consideriamo un sistema articolato con N parti rigide connesse tra loro) tale processo algebrico che porta alla scrittura di equazioni pure in forma normale può essere oneroso. → si cercheranno altre vie per ottenere le equazioni pure (senza reazioni vincolari che a differenza delle forze attive esterne sono incognite che non conosciamo).

Le altre vie sono:

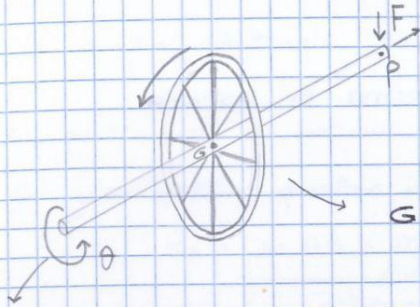
- * INTEGRALI PRIMI
 - * ENERGIA CINETICA E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA
 - * EQUAZIONI DI LAGRANGE
 - * PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
- } per classi particolari di vincoli

Nota: considerando sistemi articolati in pratica si scompone il sistema considerato in diagrammi di corpo libero ovvero si isolano le singole parti dalle altre e si rappresentano tutte le forze esterne agenti su di esse



PRECESSIONE GIROSCOPICA

Un giroscopio in rotazione (ex: trottola) sollecitato con una forza risponde (cioè il suo asse di rotazione si muove) non nel piano ~~applicato~~ della forza, ma in una direzione ad esso ortogonale



Giroscopio vincolato nel baricentro $G \equiv 0$

$\omega \approx \dot{\theta} e_3$ (trascurando le altre velocità di rotazione)

e_3 : asse principale d'inerzia

II EQUAZIONE CARDINALE $M_G^{EXT} = \frac{dK_G}{dt}$ dove $K_G = I_3 \omega = I_3 \dot{\theta} e_3$

Supponiamo di applicare una forza \perp all'asse giroscopico

$$M_G^{EXT} = PG \wedge F = \frac{d}{dt} (I_3 \dot{\theta} e_3) = I_3 \ddot{\theta} e_3 + I_3 \dot{\theta} \frac{de_3}{dt}$$

PG ha direzione asse giroscopico

I_3 costante

direzione asse giroscopico

$e' \perp$ all'asse giroscopico infatti ricordiamo che $\frac{dn}{dt} \perp n$

$\rightarrow PG \wedge F$ è \perp all'asse giroscopico (di rotazione velocità)

con n generico vettore

In componenti:

LUNGO L'ASSE GIROSCOPICO

$$\rightarrow I_3 \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \dot{\theta} = \text{costante}$$

\rightarrow vel. rotazione costante

\perp AD e_3

$$\rightarrow PG \wedge F = I_3 \dot{\theta} \frac{de_3}{dt}$$

\rightarrow variazioni nel tempo di e_3 che è lo spostamento dell'asse giroscopico

A parità di momento della forza lo spostamento dell'asse è tanto inferiore quanto maggiore è la velocità di rotazione

\rightarrow TENACIA ASSE GIROSCOPICO

Quindi con una buona approssimazione il giroscopio tende a mantenere invariata la direzione dell'asse di rotazione e lo spostamento dell'asse $(\frac{de_j}{dt})$ ha direzione del momento della forza che per la regola della mano destra (prodotto vettoriale) è perpendicolare alla sollecitazione stessa \rightarrow

\rightarrow TENDENZA AL PARALLELISMO dell'asse giroscopico con il momento sollecitante

$$= \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_A + \frac{1}{2} \omega \cdot \sum_i \vec{AP}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

↳ = K_A : MOMENTO DELLE QUANTITA' DI MOTO RISPETTO AD A

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_A + \frac{1}{2} \omega \cdot K_A$$

con A punto arbitrario solidale al corpo rigido

- Se in particolare il sistema ha un punto fisso conviene far coincidere la scelta di A con questo punto fisso perché:

$$K_A = \underbrace{m \vec{AG} \wedge \vec{v}_A}_{=0} + I_A \omega$$

↳ = 0 perché $\vec{v}_A = 0$

E quindi:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_A + \frac{1}{2} \omega \cdot I_A \omega$$

↳ = 0 punto fisso ↳ = K_A

ENERGIA CINETICA PER UN CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO A

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega \cdot \omega = \frac{1}{2} \sum_k I_k \omega_k^2$$

matrice d'inerzia diagonalizzata

↳ componenti della velocità angolare rispetto alla terza principale d'inerzia

Ad esempio il caso di moto rotatorio/platea intorno ad una cerniera in A

- Se invece il polo A coincide con il baricentro $A \equiv G$

$$K_{A=G} = \underbrace{m \vec{AG} \wedge \vec{v}_G}_{=0} + I_G \omega \rightarrow K_G = I_G \omega$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \omega I_G \omega$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega \cdot \omega$$

In effetti il medesimo risultato si può ottenere dal Teorema di Koenig

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T^{(a)}$$

energia cinetica nel moto del baricentro (origine del SR in G)

nel moto rispetto al baricentro, il baricentro stesso è fisso per cui l'energia cinetica è quella ottenuta nel caso di A fisso con $A \equiv G$:

$$T^{(a)} = \frac{1}{2} I_G \omega \cdot \omega$$

- In pratica

In un moto traslatorio in cui $\omega = 0$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 \quad (\text{analogia alla definizione data per particella singola})$$

In un moto rotatorio rispetto al baricentro fisso ad un punto fisso

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega \cdot \omega \rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow \text{si ritrova una simmetria già osservata con le eq. cardinali}$$

Nell'ulteriore ipotesi di forze attive conservative $dL^A = dU$ con U : potenziale
 $\rightarrow dT = dL^A = dU \rightarrow dT = dU$

Integrando nel tempo si ottiene l'integrale primo dell'energia

$$dT - dU = 0$$

$$T - U = \text{cost} = E$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

l'energia meccanica rimane costante nel tempo ed è quindi uguale all'energia meccanica calcolata all'istante iniziale

$$E = T_0 - U_0$$

energia meccanica del sistema definita come la differenza tra energia cinetica e potenziale
 \downarrow
è naturale definire l'energia potenziale come

$$V = -U$$

l'integrale dell'energia (conservazione energia meccanica) è di interesse particolare nello studio di sistemi conservativi con un grado di libertà per cui si ha un'unica coordinata lagrangiana q e un'equazione pura data dalla conservazione dell'energia

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \rightarrow v^2$$

$$E(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = T + V$$

$$T = E - V$$

$$\frac{1}{2} m \dot{q}^2 \xrightarrow[\text{rispetto a } q]{\text{risolvere}} \dot{q} = \pm \sqrt{2 \frac{E - V}{m}}$$

$$q = \int \pm \left[\frac{m}{2(E - V)} \right]^{1/2} dt$$

→ determinando quindi il moto del sistema in ogni istante di tempo in realtà molte informazioni si possono ottenere da un'analisi qualitativa

(TEOREMA DI WEIERSTRASS) del moto → BUCHE DI POTENZIALE

CASO STATICO (tutte le equazioni = 0)

- \vec{i}) $-k(x - R\sqrt{3}) + \phi_{cx} = 0$
- \vec{j}) $-2mg + \phi_A + \phi_{cy} = 0$
- c) $-M + mg \frac{R}{2} \sqrt{3} - \phi_A R \sqrt{3} = 0$
- B) (disco) $-M + \phi_{cx} R = 0$

$$\phi_{cx}^{(static)} = \frac{M}{R}$$

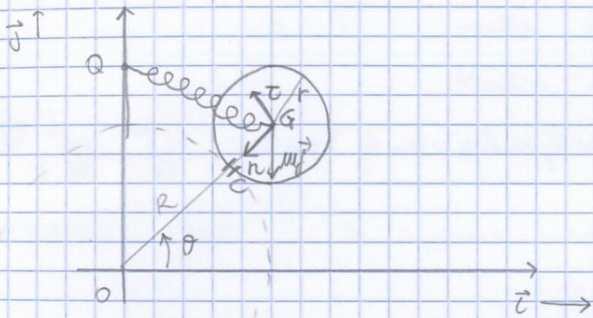
$$Kx = KR\sqrt{3} + \frac{M}{R} \quad \text{Equazione del moto}$$

$$\phi_A = -\frac{M}{R\sqrt{3}} + \frac{mg}{2}$$

$$\phi_{cy} = \frac{3}{2}mg + \frac{M}{R\sqrt{3}}$$

$$x_e = R\sqrt{3} + \frac{M}{KR} \quad \text{Posizione di equilibrio}$$

Esercizio ②: DISCO: m, R



$$\overline{OQ} = 2R$$

$$\begin{aligned} \vec{F}^{el} &= -k\vec{QA} = -k(x_a - x_a)\vec{i} - k(y_a - y_a)\vec{j} = \\ &= -k(R+r)\cos\theta\vec{i} + k[2R - (R+r)\sin\theta]\vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge \vec{CG}$$

$$(R+r)\dot{\theta}\vec{e} = -r\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{n} = r\dot{\varphi}\vec{e}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}$$

$$\cdot \vec{i}) \quad -k(R+r)\cos\theta + \phi_{cx} = m\ddot{x}_G$$

$$\cdot \vec{j}) \quad +k[2R - (R+r)\sin\theta] - mg + \phi_{cy} = m\ddot{y}_G$$

$$c) \quad -mg r \cos\theta + k(R+r)\cos\theta \cdot r \sin\theta + k[2R - (R+r)\sin\theta] r \cos\theta = \frac{3}{2}mr^2 \frac{(R+r)}{r} \ddot{\theta}$$

$$\frac{3}{2}m(R+r)\ddot{\theta} + [mg - 2kR]\cos\theta = 0 \quad \text{Equazione del moto}$$

$$x_G = (R+r)\cos\theta$$

$$\dot{x}_G = -(R+r)\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\ddot{x}_G = -(R+r)\cos\theta\ddot{\theta} - (R+r)\sin\theta\dot{\theta}^2$$

$$\phi_{cx} = k(R+r)\cos\theta^E$$

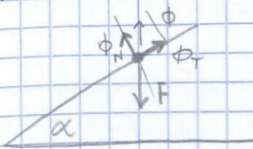
$$\phi_{cy} = mg - k[2R - (R+r)\sin\theta^E]$$

Se $k = \frac{mg}{2R}$ $\forall \theta$ e' di equilibrio

Se $k \neq \frac{mg}{2R}$ $\theta^E = \pm \frac{\pi}{2}$

VINCOLI IDEALI

ESEMPIO Consideriamo un piano inclinato



La reazione vincolare la scomponiamo in componente tangenziale ϕ_T ed in una normale al piano ϕ_N

$$\vec{\phi} = \phi_T \vec{t} + \phi_N \vec{n}$$

↓
 ATTRITO
 TANGENTE
 SUPERFICIE

↳ Se in particolare il punto non è vincolato sulla superficie, ma si muove in presenza di vincolo UNILATERALE

$$\phi \cdot \vec{n} = \phi_n \geq 0$$

↓
 Contempla la possibilità che il punto si stacchi dalla superficie.

Mentre nel caso di vincolo BILATERALE $\vec{\phi}_n$ può avere qualsiasi segno.

VINCOLO LISCIO: Si suppone che il coeff. di attrito sia nullo.

$$|\phi_T| = 0$$

⇒ ovvero la reazione vincolare è NORMALE ALLA SUPERFICIE

$$\begin{cases} \vec{\phi} = \lambda \vec{\nabla} f \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

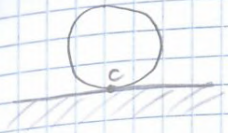
• Non ci focalizzeremo sulla classe (+) ampia) di vincoli ideali

Ricordiamo di lavoro di un sistema di forze applicate ai punti P_i

$$\text{LAVORO EFFETTIVO} = dL = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

ESEMPIO | VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO

Disco che rotola senza strisciare



$$v_c = 0 \Rightarrow \delta C = 0 \quad (\text{velocità virtuale nulla } \times \text{ evitare strisciamento})$$

$$\delta L^V = \phi \cdot \delta C = 0$$

Questi esempi ci suggeriscono di introdurre la classe dei VINCOLI IDEALI o PERFETTI tali che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è NON NEGATIVO a partire da qualsiasi configurazione

$$\delta L^V \geq 0 \quad \forall \delta P$$

In particolare per spostamento virtuale reversibile

$$\delta L^V = 0 \quad \forall \delta P \text{ reversibile}$$

↓ OGNERO PER

- VINCOLI IDEALI BILATERALI \rightarrow per cui ogni spostamento virtuale è reversibile

$$\delta L^V = 0$$

- VINCOLI IDEALI UNILATERALI

$$\delta L^V \geq 0$$

In pratica tra i vincoli ideali e bilaterali (che tratteremo maggiormente) abbiamo:

- * vincoli privi di attrito sia fissi che mobili
- * vincoli di rigidità
- * vincoli di rotolamento senza strisciamento
- * vincoli interni in sistemi articolati costituiti da n parti rigide

Tra i vincoli ideali unilaterali abbiamo

- * vincoli privi di attrito e unilaterali (es: superficie)

Riprendendo il TEO dell'energia cinetica avevamo ottenuto che

$$dT = dL^A + dL^V$$

↓
variazione
EN. CINETICA

↓
variazione
del lavoro
delle F attive

↓
variazione
del lavoro
delle F vincolari

che non rappresenta un'equazione pura del moto perché compaiono le forze vincolari.