NUMERO: 1285 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Antoniotti

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale, Temi D'esame + Eserc., Prof.Curà

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

Francesca Curà   Consulenza → Lunedì 15:00 - 16:00
                                     in ufficio

Corso classico — Lezione + Esercitazione
- Taglio pratico
  - → Capire cosa fa e i limiti di quello che fa

Martedì : Esercitazioni (3 ore)

- Calcolo di coefficiente di sicurezza di struttura
  - → Quanto regge una struttura ferma o in movimento
    - → Carichi, Tensioni
    - → Fermate in un istante
  - → Dipende da cosa si dimensiona
    - → Ad es.: Funi hanno coefficiente di sicurezza 5 perché significano la vita
      - → Sopportano 5 volte il carico standard

Testi consigliati
- → Scritto da Curà : non più in stampa
- Molto materiale online

Esame — Allo scritto si possono usare appunti
- → Una parte — per sufficienza
- Orale obbligatorio : classico
  - → Pesa abbastanza

Squadra 1 → Aula 6 ABATE - DI NAPOLI

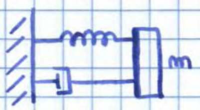
Squadra 2 → Aula 4C DI NOIA - LUTRI

Sistemi a parametri concentrati

↳ Si possono studiare con parametri rappresentativi del modello

↓

Il modello / la struttura rappresenta un determinato parametro da studiare



CORSO - PROGRAMMA

modelli → strutt.
→ carichi
→ vincoli

STRUTT. RIGIDA (struttura come infinitamente rigida)

↓

STRUTT. DEFORMABILE

} Soluzioni esatte (teoriche, in forma chiusa)

↓

STRUTT. DISCRETE

} Soluzione approssimata

Scelta TRAVE → modelli ← Calcolo dof's (gradi di libertà)

↓ EQ. DI EQUILIBRIO

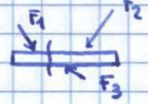
Concentrate e distribuite ← FORZE ESTERNE ← Reazioni vincolari

↓

FORZE INTERNE ← Diagrammi degli sforzi

↳ Necessariamente <u>distribuite</u>

Carichi



Struttura rigida

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 270

$n = m$ → Tutte coord. vincolate (sistema non si muove)

$\ell = 0$ → Non ha movimenti consentiti da struttura (gradi di libertà)

sist. ISOSTATICO

↳ Eq. di equilibrio le uso per calcolare eq. vincolari

$n = m + \ell$

$n - m = \ell$

sist. IPOSTATICO o LABILE → Ha dei gradi di libertà → Si può muovere

Uso eq. di equilibrio per vincoli e gradi di libertà

$m > n$ sist. IPERSTATICO (Troppo vincolato)

↳ il numero di vincoli sorpassa la dimensione

Non bastano eq. di equilibrio

n coordinate → n equazioni di equilibrio

3 piano

6 spazio

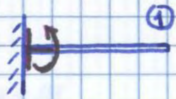
MODELLI DI VINCOLO

2D $n = 3$

1 — INCASTRO

Elementi cementati, saldati

① $n = 3$



①

$m = 3$

vincolate 3 coordinate

ISOSTATICO $\ell = n - m = 3 - 3 = 0$

①

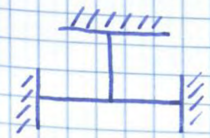
$n = 3$

$m > n$

2 incastri

$m = 3+3 = 6$

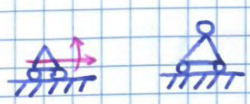
IPERSTATICA (3 volte)



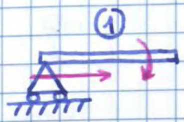
$n = 3$

$m = 9$

3 — CARRELLO o APPOGGIO SEMPLICE



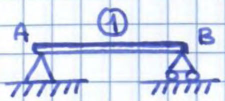
Vincola solo al terreno
↓
permette rotazione e traslazione



$n = 3$
$m = 1$

$n - m = 3 - 1 = 2 = l$

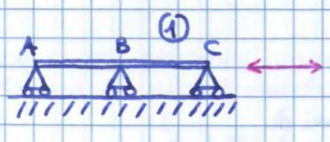
MOLTO LABILE



$n = 3$

$m = \underset{A}{2} + \underset{B}{1} = 3$

$l = 0$ TRAVE ISOSTATICA



$n = 3$ Con Equazioni → IPERSTATICO

$m = \underset{A}{1} + \underset{B}{1} + \underset{C}{1} = 3$

$n - m = l = 0$ Sembra ISOSTATICO

In realtà è LABILE → Eccezioni al modello (ATTENZIONE)

Se sistema

ISOSTATICO $m = n$ $l = 0$ Eq. → per calcolare forze incognite

IPOSTATICO $m = n + l$

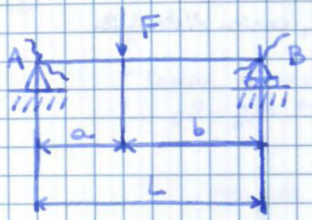
↓ Con Eq. calcolo reazioni vincolari

→ Con Eq. calcolo eq. del moto (fotografati in momento in cui condiz. di carico gravoso) per studiarlo

IPERSTATICO $n > m$

Eq. non bastano per calcolare tutte reaz. vincolari

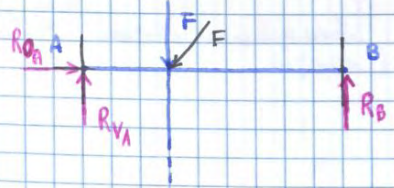
Esercizi



$m = 3$

$n = 3 = \underset{A}{2} + \underset{B}{1}$

PER CALCOLARE REAZIONE VINCOLARE
Stacco da sist. il vincolo
↓
E metto forze che reggono il sistema
(che esercitano i vincoli)



Verso: a caso (poi vedo il segno e cambio verso se è negativo)

Incognite $\cancel{R_{O_A}}, R_{V_A}, R_B$

$\oplus \rightarrow$ $R_{A_o} = 0$

$\oplus \uparrow$ $R_{A_v} - F + R_B = 0$ $\qquad R_{A_v} = F - R_B = \frac{F \cdot b}{L}$

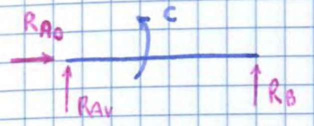
$\oplus$ A $\quad -F \cdot a + R_B \cdot L = 0$ $\qquad \bullet \boxed{R_B = \frac{F \cdot a}{L}}$

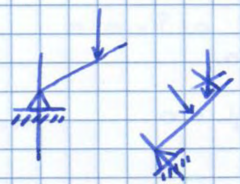
↓
Forze che passano per A non le considero

Esercizio
- Stesso risultato con equazione rispetto a B
- Con forza inclinata

Sottoproblema
di RUOTA DENTATA

Applicando momento: i due vincoli devono reagire in modo uguale e contrario





$\uparrow R_{AV}$ $\downarrow R_B$

$\oplus \rightarrow$ $R_{A0} = 0$

$\oplus \uparrow$ $R_{AV} + R_B = 0$

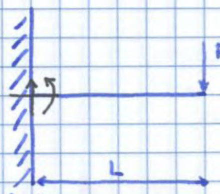
La coppia di reazioni deve bilanciare C

$A \circlearrowleft$ $C + R_B \cdot L = 0$ $R_B = -\frac{C}{L}$ $R_{AV} = \frac{C}{L}$

Coppia concentrata

TRAVE A MENSOLA
(A sbalzo)

INCASTRO



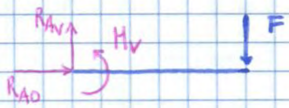
In realtà non esiste incastro perfetto (con rigidezza infinita)

Sistema ISOSTATICO

$n = 3$
$m = 3$

$n - m = \ell = 0$

- Vincolo a rotazione → MOMENTO A VINCOLO

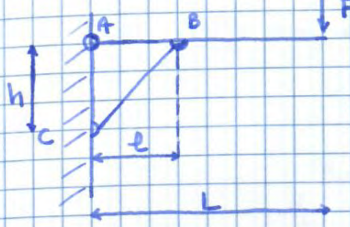


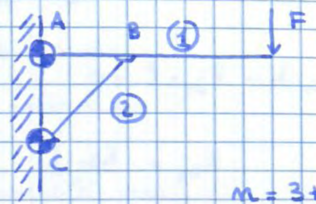
$\oplus \rightarrow$ $R_{A0} = 0$

$\oplus \uparrow$ $R_{AV} - F = 0$ $R_{AV} = F$

$A \circlearrowleft$ $M_V - F \cdot L = 0$ $M_V = FL$

SISTEMA ARTICOLATO





$n = 3+3 = 6 \rightarrow$ 6 Eq. di equilibrio

$m = \underset{A}{2}+\underset{B}{2}+\underset{C}{2} = 6$

$n - m = l = 0$ SIST. ISOSTATICO

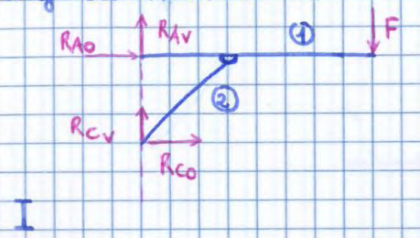
Vincoli esterni: R_{Ao}, R_{Av}

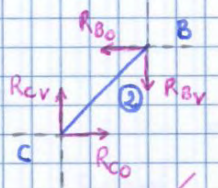
R_{Co}, R_{Cv}

Vincoli interni: R_{Bo}, R_{Bv}

Si ESPLODE il sistema

Lo slego da vincoli esterni





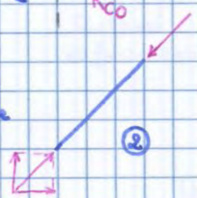
II

ASTA: Trave che è caricata solo agli estremi e solo dalle reazioni vincolari

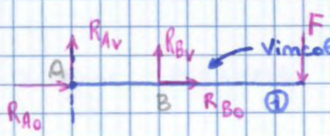
Può essere un puntone/tirante:

FACCIO IPOTESI

• Sist. dev'essere coerente con sist. totale



Risultante di reazioni vincolari sono lungo asta



Vincolo interno: reazioni uguali e contrarie

III

$$\begin{cases} R_{Ao} + R_{Bo} = 0 \\ R_{Av} + R_{Bv} - F = 0 \\ R_{Bv} \cdot l - F \cdot L = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Ao} = -R_{Bo} & R_{Bo} = \frac{F \cdot L}{h} \\ R_{Av} = F - R_{Bv} & R_{Av} = \frac{F(l-L)}{l} \\ R_{Bv} = \frac{F \cdot L}{l} \end{cases}$$

I + III $\rightarrow$ 3 Eq

$\boxed{\text{I} + \text{II}}$ $\rightarrow$ 3 Eq

II + III $\rightarrow$ 3 Eq

$$\begin{cases} R_{Cv} = F - R_{Av} = \frac{\cancel{F \cdot l} - \cancel{Fl} + FL}{l} = \frac{F \cdot L}{l} \\ R_{Ao} = -R_{Co} = -\frac{F \cdot L}{h} \\ R_{Co} = \frac{F \cdot L}{h} \end{cases}$$

I

$\oplus\uparrow$ $R_{Av} + R_{Cv} - F = 0$ $\quad R_{Av} = F - R_{Cv}$

$\xrightarrow{\oplus}$ $R_{Co} + R_{Ao} = 0$ $\quad R_{Ao} = -R_{Co} = -\frac{F \cdot L}{h}$

$A\circlearrowright$ $-F \cdot L + R_{Co} \cdot h = 0$ $\quad R_{Co} = \frac{F \cdot L}{h}$

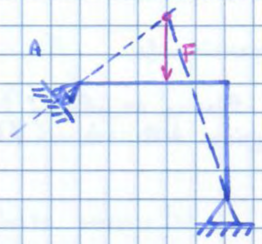
IL METODO DELLE TRE FORZE (Usato quando non c'erano calcolatori)

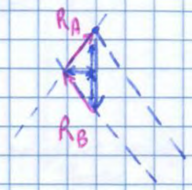
↳ Metodo grafico — per reaz. vincolari del sistema

Se conosco una $\vec{F}$ e direzione di seconda

↓ Conosco anche terza

Punto in cui somma di momenti è zero





$R_{Ax} - R_{Bx} = 0$

$R_{Ay} + R_{By} = F$

Equazione di momenti — Più equazione di equilibrio a traslaz. di forze

RISULTANTE DI FORZE PARALLELE

Sistemi di forze equivalenti → Stesso effetto

↓

STESSA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO SU TRAVE

- Modulo di risultante

$$R_i = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

⊕ ↑ Eq. a traslaz. verticale

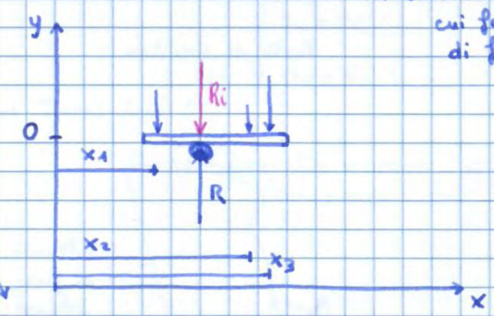
⊕ Eq. di momento

↓

Si va a cercare tronco attorno cui fare bilanciamento di forze

- Direzione : PARALLELA

- Posizione

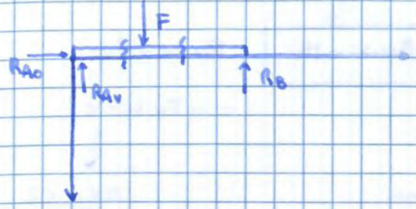


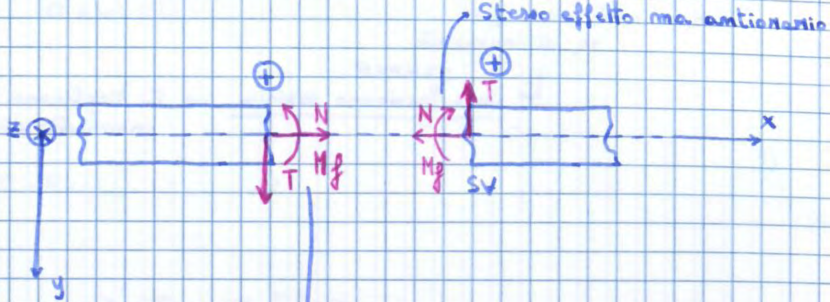
Equilibrio a rotazione attorno a un punto O qualsiasi →

$$R\,x = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot x_i$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$$

Convenzioni





m = 3
2 [N] 1 [N·m]

N sforzo normale
T sforzo di taglio (simile ad attrito)
Mf momento flettente

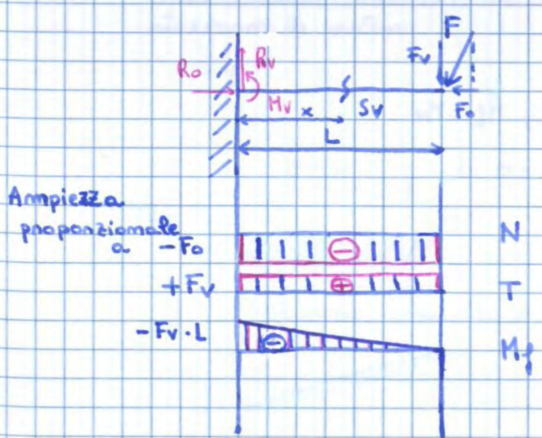
Sforzo normale — Applicato in asse del baricentro
Tende ad allungare / accorciare (comprimere) pezzo
In faccia uscente
N è ⊕ se diretto in verso concorde con asse x
In faccia con asse x
Entrante: verso contrario

→ Non ha significato FISICO → Segno non significa nulla

Parte di fibre TESE e parte sono COMPRESSE
- Positivo se va a mettere in tensione le y positive

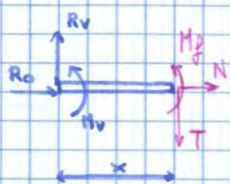
In baricentro
- Impedisce slittamento tra sezioni (fa scorrere piani)
- Uguali e opposte → Si devono annullare in unione
- Positivo se è nel verso di y crescente (In faccia con x uscente)

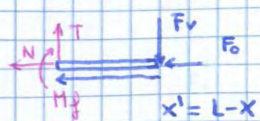
DIAGRAMMI DEGLI SFORZI → Andamento di 3 forze interne



$$\begin{cases} R_o = F_o \\ R_v = F_v \\ M_v = F_v \cdot L \end{cases}$$

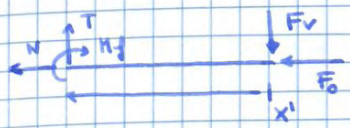
Trave spezzata in modo casuale (tra perno e forza applicata)





$N + R_o = 0$ $\boxed{N = -R_o} = -F_o$ → costante su trave

Carico interno costante → Rottura non dipende da carico interno ma da materiale



$x' = L - x$

$0 < x' < L$

$N + F_o = 0 \qquad N = -F_o$

$T - F_v = 0 \qquad T = F_v$

$M_f + F_v x' = 0$

$M_f = -F_v \cdot x' \qquad x' = 0 \rightarrow M_f = 0$

$x' = L \rightarrow M_f = -F_v \cdot L$

$$\boxed{\frac{dM_f}{dx} = T}$$

Non funziona se la uso con x'

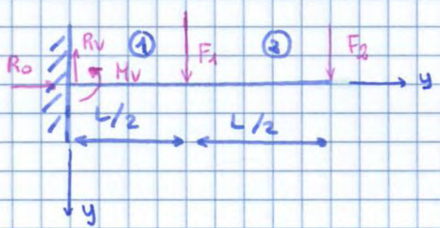
• perché $dx' = -dx$

Devo ricordarmi se la voglio usare (simile a integrale con sostituzione)

$M_f = -F_v (L - x)$

$\frac{dM_f}{dx} = F_v = T$

LE CAMPATE



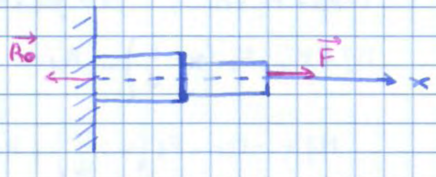
$R_o = 0$

$R_v = F_1 + F_2$

$M_v = F_1 \cdot \frac{L}{2} + F_2 \cdot L$

$0 < x < \frac{L}{2} - dx \rightarrow$ Prima campata

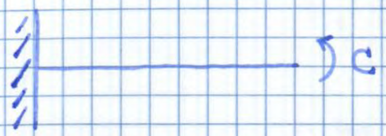
Secondo concetto di campata: quando cambia la geometria del sistema

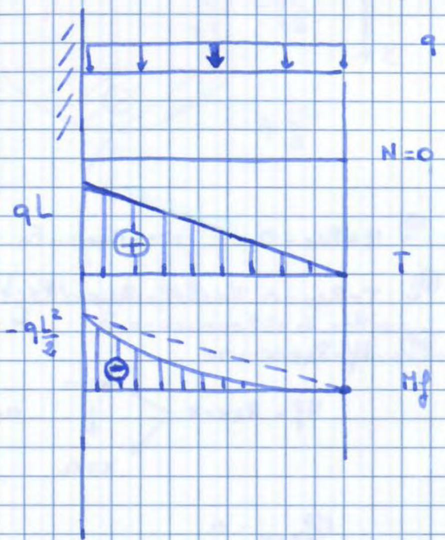


$$Mf_{x=\frac{L}{2}} = -\cancel{F_1 \frac{L}{2}} - F_2 L + \cancel{F_1 \frac{L}{2}} + F_2 \frac{L}{2} = -F_2 \cdot \frac{L}{2}$$ → Continua senza discontinuità

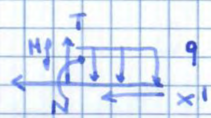
$$Mf_{x=L} \quad -F_1 \frac{L}{2} - F_2 - F_1 \frac{L}{2} + F_1 L + F_2 L = 0$$

Esercizi





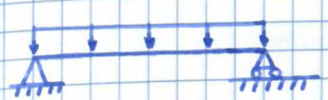
Trave a 1 campata



$T - qx' = 0 \qquad T = qx'$

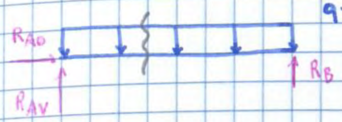
$$Mf + qx'\left(\frac{x'}{2}\right) = 0$$

$$Mf = -q\frac{x'^2}{2} \qquad x' = \frac{L}{2} \rightarrow Mf = -q\frac{L^2}{8}$$



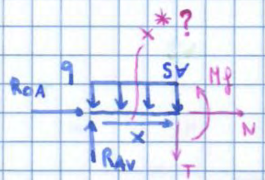
$R_{A0} = 0$

$R_{AV} = R_B = \frac{q \cdot L}{2}$



Una sola campata → Carico è continuo

↳ Non cambiamo condizioni di equilibrio



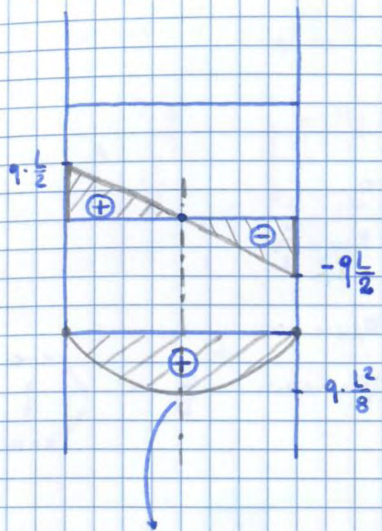
$\xrightarrow{+}$ $N = 0$

$\downarrow +$ $-R_{AV} + T + qx = 0$

$T = \frac{qL}{2} - qx$ ⟨ $x = 0$; $x = L$

$T_{x=0} = q\frac{L}{2}$

$T_{x=L} = -q\frac{L}{2}$



$\circlearrowleft +$ $M_f - R_{AV} \cdot x + q\frac{x^2}{2} = 0$

$M_f = q\frac{L}{2}x - q\frac{x^2}{2}$ ⟨ $x = 0$; $x = L$

Momento flettente è responsabile di rottura

↳ dove è max / min

$$M_{f\, x=\frac{L}{2}} = \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = q \cdot \frac{L^2}{8}$$

$x = x^*$

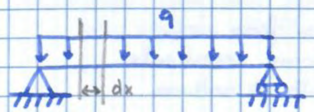
$$T = \frac{qL}{2} - qx = 0$$

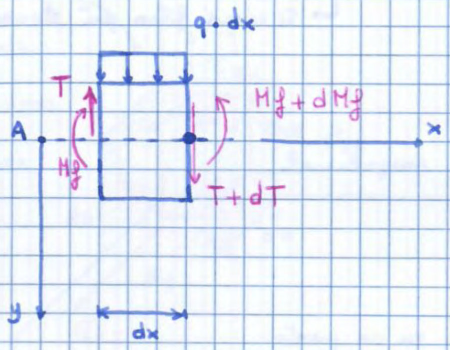
$$x^* = \frac{qL}{2q} = \frac{L}{2}$$

↳ Coordinata dove c'è il massimo o il minimo di Mf

RELAZIONE TRA T e Mf

(DIMOSTRAZIONE)





$+\downarrow \quad \cancel{T} + dT - \cancel{T} + q \cdot dx = 0$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -q}$$

Relazione tra sforzo di taglio e carico distribuito

$+\circlearrowright \quad \cancel{Mf} + dMf - \cancel{Mf} - T \cdot dx + \underbrace{\cancel{q \cdot \frac{dx^2}{2}}}_{\cong 0} = 0$

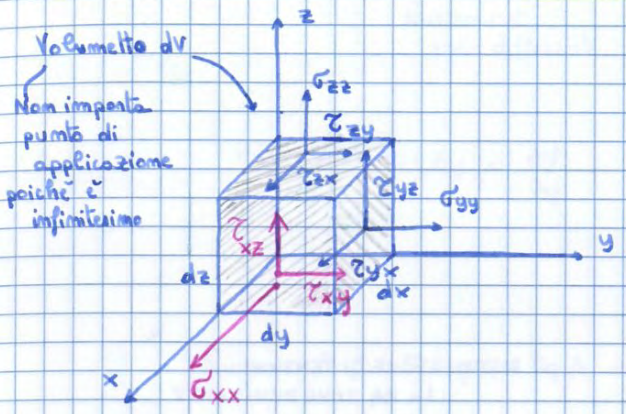
Contributo trascurabile

$$\boxed{\frac{dMf}{dx} = T}$$

TENSORE delle tensioni

↓

Elemento con una serie di componenti che esprime livello di tensione in un punto dello spazio



Per definire tensione in un punto

↓

Servono 6 incognite del problema (con 6 eq. di equilibrio)

↓

$3\sigma + 3\tau$

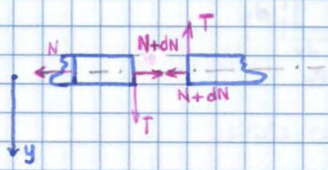
TENSORE → Matrice con 9 componenti

	FACCE $\perp x$	$\perp y$	$\perp z$
$// x$	σ_{xx}	τ_{yx}	τ_{zx}
$// y$	τ_{xy}	σ_{yy}	τ_{zy}
$// z$	τ_{xz}	τ_{yz}	σ_{zz}

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Verso: Positive tensioni con x uscente

(Come convenzioni di forze interne (sforzi))



• Si deve mettere tutto in EQUILIBRIO

↳ Ha in [N] - Newton

↳ Moltiplico tensioni per dA

$\vec{x}$

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dz\,dy - \sigma_{xx}\, dz\,dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\,dz - \tau_{yx}\, dx\,dz +$$

$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx\,dy - \tau_{zx}\, dx\,dy + \underbrace{F_x}_{\to 0} = 0$$

(Forza di massa)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cancel{dx\,dy\,dz} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cancel{dx\,dy\,dz} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cancel{dx\,dy\,dz} = 0$$

$\vec{y}$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \qquad \text{Se } F_y = 0$$

$\vec{z}$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \qquad \text{Se } F_z = 0$$

$$\frac{u_{AA'} - u_{OO'}}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Se fosse un moto rigido $\rightarrow = 0$

Ma non lo è $\rightarrow$ rappresenta deformazione in rapporto a grandezza del pezzo — Entità dipende da materiale

Gli spostamenti sono differenti

$$\frac{v_{BB'} - v_{OO'}}{dy} = \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \cong tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{u_{B'B} - u_{O'O}}{dy} + \frac{v_{A'A} - v_{O'O}}{dx}$$

Siamo in infinitesimi

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

LEGGI COSTITUTIVE DEL MATERIALE

Legame tra tensione e deformazione $\rightarrow$ comportamento materiale dipende da materiale e da come si usa

3 Regimi di funzionamento

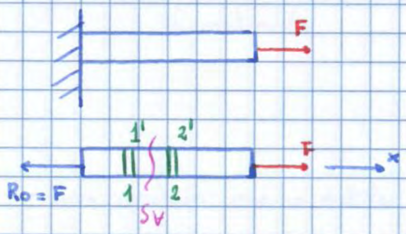
1) ELASTICO — LINEARE / NON LINEARE

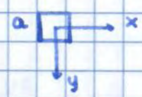
2) PLASTICO $\rightarrow$ Non lineare, non elastico

3) VISCOSO $\rightarrow$ Fenomeno del creep

Sforzo →	STRESS Tensioni	STRAIN Deformazioni	Spostamenti finiti
N	$\sigma_x = \frac{N}{A}$	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$	$\Delta L = \frac{N}{EA} \cdot L$
M_f	$\sigma_x = \frac{M_f}{I_z} y$	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_f}{E \cdot I_z} y$	$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{E \cdot I_z}$
M_t	$\tau_{ij} = \frac{M_t}{I_p} r$	$\gamma_{ij} = \frac{\tau}{G} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} r$	$\Delta\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot L$
T	$\tau_{ij} = \frac{T \cdot S_z^*}{I_z \,\text{corda}}$	$\gamma_{ij} = \frac{\tau}{G} = \frac{T \cdot S_z^*}{G I_z \cdot \text{corda}}$	Trascurabili

Trave





Ad una certa distanza tensione dipende solo da risultante e non da distribuzione

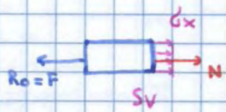
Ci si deve allontanare di una certa quantità per non risentire di effetti di vincoli

Teoria riposa della Trave (di De Saint Venant)

Come corrente di fiume

- Prima sezione si comporta come seconda e come tutte le altre (Solido conico) → Solido omogeneo isotropo → Si deforma ugualmente in tutte le direzioni

è Rimangono PIANE (scivolano)



↳ Risultante di tensioni

(forza interna)

- Nella trave (in sezione) lo sforzo che vado a trovare è la risultante dell'andamento delle tensioni

↳ Applicato in baricentro in questo caso

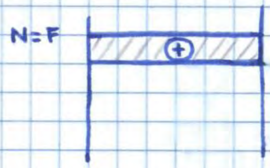
↳ Integrale di andam. di tensioni

↳ Distribuzione costante

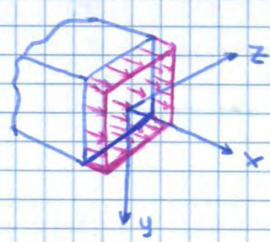
TENSIONE DOVUTA A SFORZO NORMALE: TRAZIONE

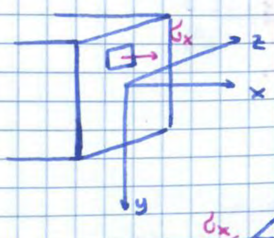
$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{a^2}$$

(o compressione)

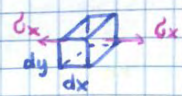


Stessa σ_x su tutta la trave





$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{N}{a^2} = \text{costante}$$

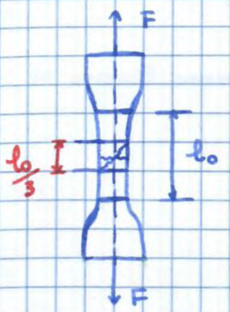


$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

↳ modulo elastico o modulo di Young

$$[E] = 210\,000 \ N/mm^2$$

Prova di TRAZIONE



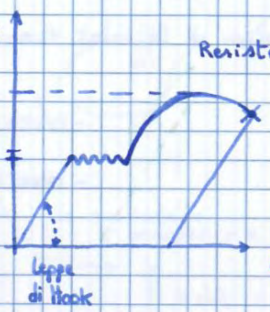
Ci possono essere 2 tipi di linea di frattura
- Una a 45° gradi rispetto ad asse
- Una a 90° gradi

Carico di rottura (massimo) ← R_m

Carico superiore di snervamento ← R_{eH}

Carico unitario di snervamento ← R_{p02}

↓ Dove si interrompe comportam. lineare (elastico) di materiale



$\frac{l_u - l_0}{l_0} = A\%$

l_u: lunghezza finale dopo rottura (avvicinando i pezzi)

↓ Dice quanto è duttile il materiale

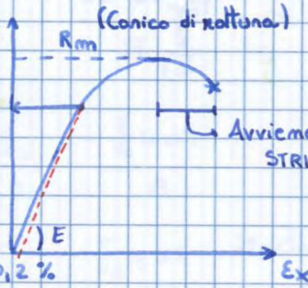
$A > 5$ duttile

$A < 5$ fragile

- Con acciaio meno duttile

(Come se fosse Carico di snervamento)

Carico limite di scostamento da proporzionalità lineare ← R_{p02}

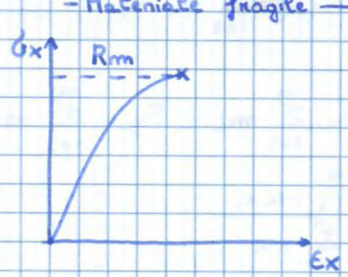


Non c'è interruzione netta tra regime elastico/plastico

↳ Si immagina che ci sia deformazione con allungamento permanente percentuale dello 0,2 %

Deformazione non più elastica → oltre 0,2 % $\quad \frac{\Delta L}{L}$ (allungamento permanente)

- Materiale fragile → Si rompe quando si arriva a carico di rottura



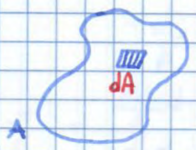
Sistema a parametri distribuiti $\longrightarrow$ ρ = costante per tutta la massa

Passando a geometria delle aree

↳ Si considera sezione di volume

↳ densità diventa "superficiale"

↳ sull'area solamente



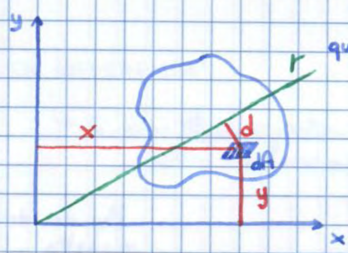
$\rho = \text{cost.}$

$[\rho] = \frac{kg}{m^2}$ 2D

$m_i \rightsquigarrow A \cdot \rho$

Se materiale è omogeneo e isotropo

$$\int_A \rho \, dA = \int_A dm$$



$$S_y = \int_A x \, dA = x_G \cdot A$$

$$S_x = \int_A y \, dA = y_G \cdot A$$

$$S_r = \int_A d \, dA = d_G \cdot A$$

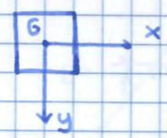
$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x \, dA}{A}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y \, dA}{A}$$

$$d_G = \frac{S_r}{A} = \frac{\int_A d \cdot dA}{A}$$

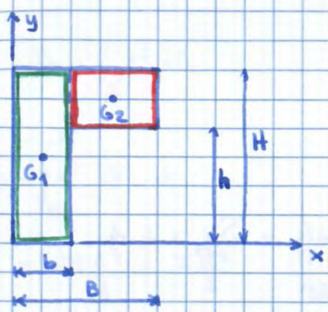
Se una sezione ha degli assi di simmetria, il baricentro sta sugli assi di simmetria.

(Anche assi di antisimmetria)



↳ Devo studiare solo altezza

Figura IRREGOLARE → Si può calcolare come somma e sottrazione di figure



Y_G? $S_{x\,TOT}$?

PER SOMMA

$A_{TOT} = A_1 + A_2$

$S_{TOT_x} = S_{①x} + S_{②x}$

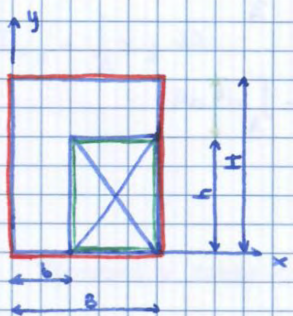
$= b \cdot H \cdot \frac{H}{2} + (B-b)(H-h)\frac{(H+h)}{2}$

$(A_1 \cdot d_1 + A_2 \cdot d_2)$

$$Y_G = \frac{b \cdot \frac{H^2}{2} + (B-b)(H-h)\frac{(H+h)}{2}}{A_{TOT}}$$

PER DIFFERENZA

↳ Si deve fare rispetto ad un asse comune alla sezione piena e alla sezione vuota



$S_{TOT} = S_{PIENO} - S_{VUOTO}$

$A_{PIENO} = BH$

$A_{VUOTO} = h(B-b)$

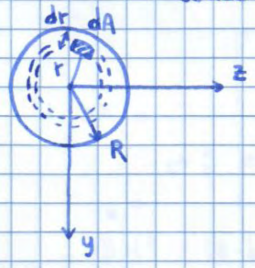
$S_{TOT} = BH \cdot \frac{H}{2} - h(B-b) \cdot \frac{h}{2}$

$$Y_G = \frac{S_{TOT}}{A_{TOT}}$$

MOMENTO D'INERZIA POLARE

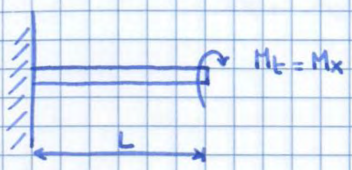
$$I_p = \int_A r^2 \, dA$$

Solido assialsimmetrico



$$I_p = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$= 2\pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$



Influisce in TORSIONE

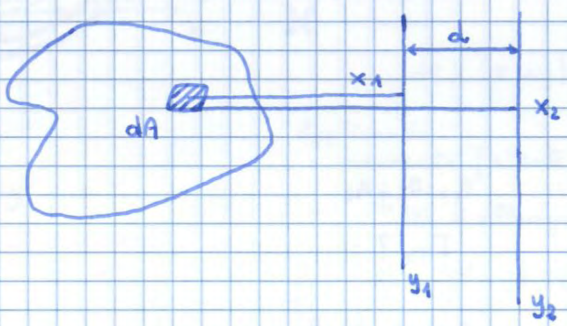
$$\Delta\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot L$$

MOMENTO CENTRIFUGO (Misto)

$$I_{xy} = \int_A x y \, dA$$

Rispetto ad assi baricentrici / di simmetria
↓
NULLO

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI D'INERZIA



I_{y_1} noto

$$I_{y_1} = \int_A x_1^2 \, dA$$

$$I_{y_2} = \int_A x_2^2 \, dA = \int_A (x_1 + d)^2 \, dA = \int_A x_1^2 \, dA + \int_A d^2 \, dA + 2 \int_A d \, x_1 \, dA$$

$$I_{y_2} = I_{y_1} + d^2 \cdot A + 2 \cdot d \, S_{y_1}$$

Termine di trasposizione

Se $y_1 \equiv y_G$ $\boxed{I_{y_2} = I_{y_G} + A \cdot d^2}$

(Momento d'inerzia rispetto al baricentro
(E il minimo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 270

SOMMA $\quad I_{x_G} = I_{x_{G_1}} + A_1\, y_{\overline{G_1G}}^2 + I_{x_{G_2}} + A_2\, y_{\overline{G_2G}}^2$

$$I_{x_G} = \frac{b \cdot H^3}{12} + A_1\, y_{\overline{G_1G}}^2 + \frac{(B-b)(H-h)^3}{12} + A_2\, y_{\overline{G_2G}}^2$$

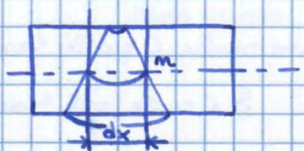
SOTTRAZIONE $\quad I_x = I_{x\,PIENO} - I_{x\,VUOTO} = \frac{B H^3}{3} - \frac{(B-b) \cdot h^3}{3}$

$$I_x = I_{x_G} + A y_G^2 \qquad I_{x_G} = I_x - A y_G^2$$

?

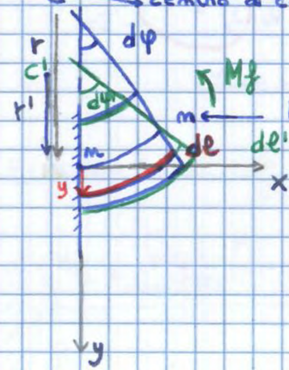
Per tutti assi paralleli
il minimo è quello passante
per il baricentro

FLESSIONE



Facce si mantengono piane
↳ Teoria rigorosa

GANCIO



C → centro di curvatura

m ← linea baricentrica o neutra —— SPARTIACQUE tra fibre compresse/distese

Fibra/Linea/Piano neutro
non viene mossa
↓
Tutte le sezioni ruotano
rispetto alla linea neutra
↓
In modo da averla
sempre ⊥

$$de = (r+y)\, d\varphi$$

Applicando
momento flettente
↓ de si allunga → de'

$$de' = (r'+y)\, d\varphi'$$

Fibra neutra : $de_m = r\, d\varphi = r' d\varphi'$

$$\varepsilon_x = \frac{de' - de}{de} = \frac{(r'+y)\, d\varphi' - (r+y)\, d\varphi}{(r+y)\, d\varphi}$$

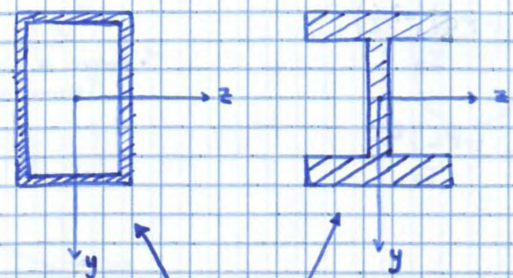
$$\varepsilon_x = \frac{\cancel{r' d\varphi'} + y\, d\varphi' - \cancel{r\, d\varphi} - y\, d\varphi}{(r+y)\, d\varphi} = \frac{y}{(r+y)} \left(\frac{d\varphi' - d\varphi}{d\varphi} \right) = \frac{y}{r+y} \left(\frac{d\varphi'}{d\varphi} - 1 \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{r+y} \left(\frac{r}{r'} - 1 \right) = \frac{r y}{r+y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 270

Strutture che funzionano benissimo per la flessione
(Sezioni)

Tubo a sezione quadrata CAVO

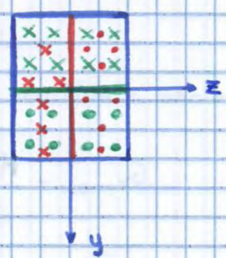


"Profilato ad H"

Poco materiale in y=0, molto agli estremi
(dove le σ_x sono elevate)

$$\sigma_x = \frac{M_f}{I_z} y = \frac{M_z}{I_z} y$$

PIANO NEUTRO xz
↳ Né trazione né compressione



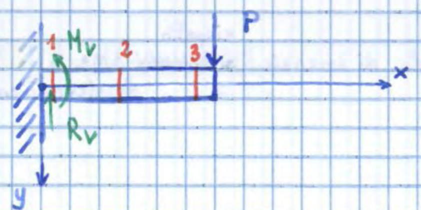
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

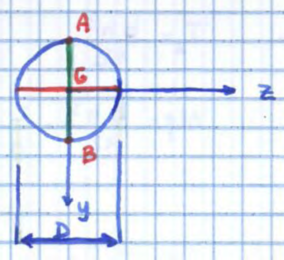
PIANO NEUTRO xy

Convenzione del segno → Identico per tutti

Momento flettente positivo se mette in tensione x / y / z positive

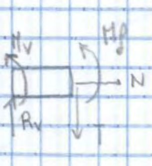
Esercizio





$R_V = P$

$M_V - P \cdot L = 0 \;;\; M_V = P \cdot L$

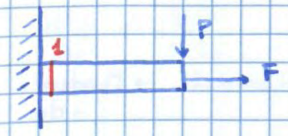


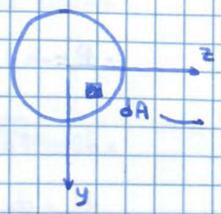
$N = 0$

$T = R_V$

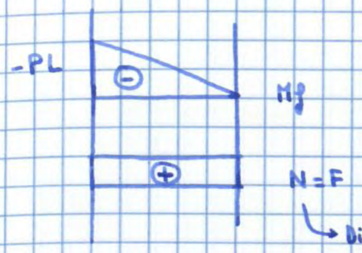
$M_f + M_V - R_V \cdot X = 0$

$$M_f = R_V \cdot x - M_V = P \cdot x - P \cdot L$$





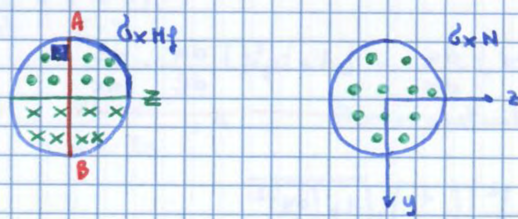
dA → Si cerca dA elementare più sollecitata

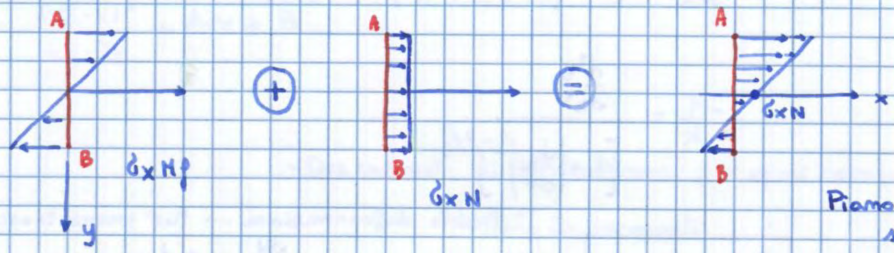


- Si sommano gli effetti di tensioni

Distribuzione di tensioni costante

Sezione 1

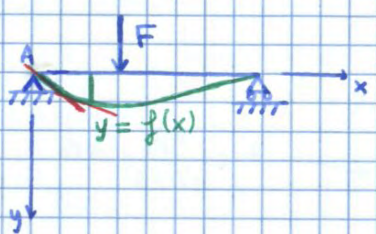




Piano a $\sigma_x = 0$ si sposta verso il basso

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

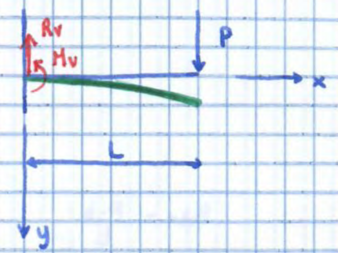
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{E I_z}$$



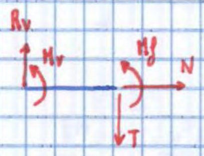
$$M_f = \frac{E}{R} I_z$$

INTEGRAZIONE

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Mf}{E \cdot I_z}$$



$R_V = P$
$M_V = P \cdot L$



$Mf + M_V - R_V x = 0$

$Mf = R_V \cdot x - PL = P(x-L)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(L-x)}{E \cdot I_z}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(L-x)^2}{2E \cdot I_z} + A$$ — Prima costante di integrazione

$$y = \frac{P(L-x)^3}{6E \cdot I_z} + A \cdot x + B$$

- Due costanti di integrazione per ogni campata
  - ↳ Sono le incognite
    - ↳ Si deve imporre CONDIZIONI AL CONTORNO (boundary conditions) → Estremi di trave o campata
- Molta attenzione

• In questo caso per $x=0$ → Freccia nulla $y=0$ → Rotazione nulla $\frac{dy}{dx}=0$ — Per l'incastro (vincolo)

$$0 = -\frac{PL^2}{2EI_z} + A \rightarrow A = \frac{PL^2}{2EI_z}$$

$$0 = \frac{P(L)^3}{6EI_z} + B \rightarrow B = -\frac{PL^3}{6E \cdot I_z}$$

$$\rightarrow y = \frac{P(L-x)^3}{6E \cdot I_z} + \frac{PL^2}{2E \cdot I_z}x - \frac{PL^3}{6E \cdot I_z}$$

Verificare coerenza

$$y_{max}\Big|_{x=L} = \frac{PL^3}{2EI_z} - \frac{PL^3}{6EI_z} = \frac{PL^3}{3E \cdot I_z}$$

Condizioni di congruenza

- $\frac{dy^{I}}{dx} = \frac{dy^{II}}{dx}$ per $x = a$

- $y_1 = y_2$ per $x = a$

$y^{I} = 0$ per $x = 0$

$\hookrightarrow B_1 = 0$

per $x = a$ $\quad -\frac{Pba^2}{2EI_zL} + A_1 = -\frac{Pba^2}{2EI_zL} + A_2 \qquad \frac{dy^{I}}{dx} = \frac{dy^{II}}{dx}$

$$A_1 = A_2$$

$$-\frac{Pba^3}{6EI_z \cdot L} = -\frac{Pba^3}{6EI_z \cdot L} + B_2 \qquad y_1 = y_2$$

$$B_2 = 0$$

$y^{II} = 0$ per $x = L$

$$0 = -\frac{P \cdot b\, L^{\cancel{3}\,2}}{6EI_z \cdot \cancel{L}} + \frac{Pb^3}{6EI_z} + A_2 \cdot L$$

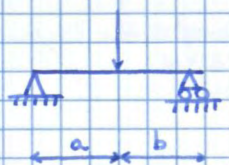
$$A_2 = \frac{PbL}{6EI_z} - \frac{Pb^3}{6E \cdot I_z \cdot L}$$

$$f_{max} = -\frac{Pba^3}{6E \cdot I_z L} + \frac{PbLa}{6EI_z} - \frac{Pb^3 a}{6EI_z \cdot L}$$

Importante

Per $a = b = \frac{L}{2}$ La freccia $_{max}$ si avrebbe in mezzeria

$$f_{max} = \frac{P \cdot L^3}{48 E \cdot I_z}$$



$$-\frac{P \cdot \cancel{L} \cdot L^3}{16 \cdot 6 \cdot E I_z \cdot \cancel{L}} + \frac{PL \cdot L \cdot L}{12 \cdot 2E \cdot I_z} - \frac{PL^3 \cdot \cancel{L}}{6 \cdot 16 E I_z \cdot \cancel{L}}$$

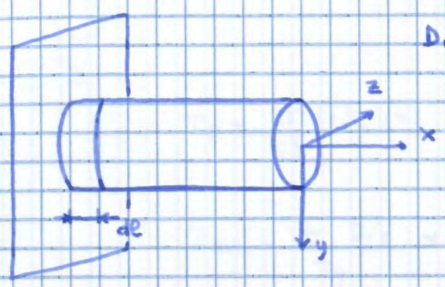
$$-\frac{P \cdot L^3}{48 E I_z} + \frac{PL^3}{24 E I_z} = \frac{PL^3}{48 E I_z}$$

Tensioni dovute a momento torcente

Applicando torsione → Piani rimangono paralleli tra loro, ruotano solamente "attorno ad un elica"

- Sezioni rimangono piane (perpendicolari ad asse) della trave

D.R

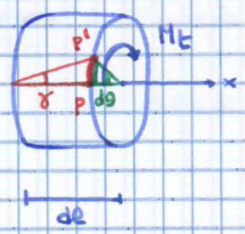


Distribuzione di tensione τ

↓ Risultante provoca un momento torcente

Tensioni τ giacciono su piano di sezione

γ: deformazione angolare



$M_t = M_x$

$\overset{\frown}{PP'}$ appartenente a sup. laterale del cilindro $\quad \overset{\frown}{PP'} = \gamma\, dl$

$\overset{\frown}{PP'}$ appartenente a sup. di sezione $\quad \overset{\frown}{PP'} = r\, d\vartheta$

$$\gamma\, dl = r\, d\vartheta$$

$$\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{\gamma}{r}$$

$\sigma_x = E\, \varepsilon_x$

$\boxed{\tau = G\,\gamma}$ Legge di Hooke per torsione

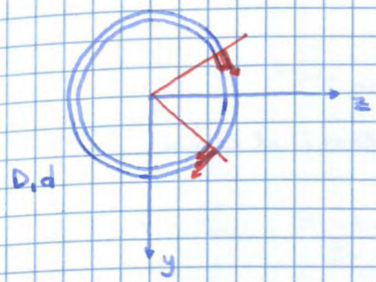
↳ MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE $\quad G = 83\,000 \ N/mm^2$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

↳ coefficiente di Poisson

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{\tau}{G \cdot r}}$$

Per alberi di trasmissione — Cerchio cavo



D, d

- Materiale concentrato in τ_{MAX} → Si sfrutta bene materiale
- Leggero
- Meno costoso

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left[D^4 - d^4\right]$$

$$\tau_{MAX} = \frac{M_t \cdot D/2}{I_p}$$

MOLLA EQUIVALENTE — Elemento molla di parametri concentrati

$\Delta\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot L$ → Molle di torsione si basano su questa relazione

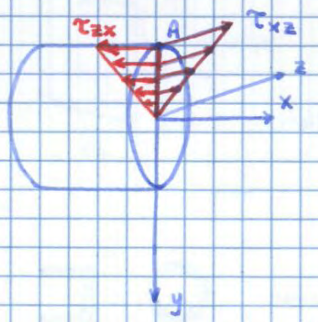
$M_t = \boxed{K_t}\,\Delta\theta$

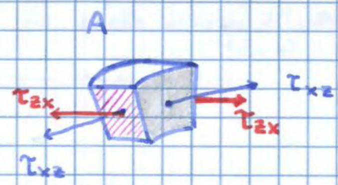
$$K_t = \frac{G \cdot I_p}{L} = [N \cdot m]$$

costante elastica → Esprime Rigidezza di molla

RECIPROCITÀ DELLE TENSIONI TANGENZIALI

$\tau_{ij} = \tau_{ji}$





Generano una coppia

$\tau_{xz} \cdot dx$

↓ Dev'essere bilanciata da τ_{zx}

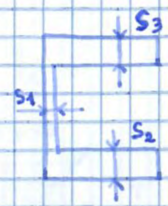
Eq. di equilibrio di momenti:

$$\tau_{xz}\, dz\, \cancel{dy}\, dx - \tau_{zx}\, dx\, \cancel{dy}\, dz = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Se il solido è in equilibrio esistono anche τ_{zx} che equilibrano τ_{xz}

Per strutture con spessore differente



$$\tau_{MAX} = \frac{M_t \cdot S_{MAX}}{I_t}$$ → Momento d'inerzia a torsione

(3) → Numero di "lati" —— Se struttura

2

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot S_i^3$$

(3) → deriva da α/β di formula

TAGLIO

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T \cdot S_z^*}{I_z \cdot corda}$$

S_z^* → Varia su sezione

corda → larghezza di sezione, // ad asse neutro

I_z → Momento d'inerzia di tutta sezione rispetto all'asse neutro

ipotesi

→ x

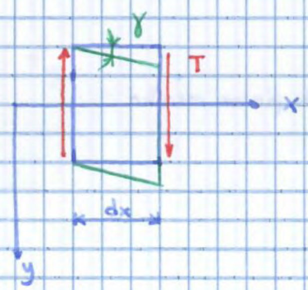
$$\frac{dM_f}{dx} = T \rightarrow \text{Se } M_f \text{ è costante} \rightarrow T = 0$$

Pagine scorrono tra loro liberamente

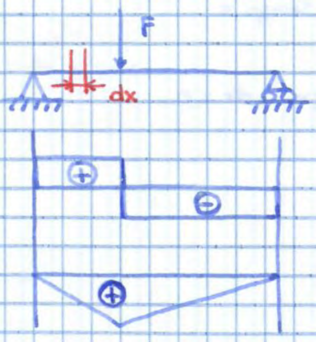
Ad esempio: un libro non ha sforzo di taglio

τ_{yx} Impediscono scorrimento relativo di fogli/piani paralleli (simile ad attrito)

- Su pagina esterna vanno a zero (superficie)



Per sforzo di Taglio le sezioni si svergolano



$$\frac{dM_z}{dx} \frac{1}{b \cdot I_z} \int_A y\, dA = \tau_{yx}$$

T

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z^*}{b \cdot I_z}$$

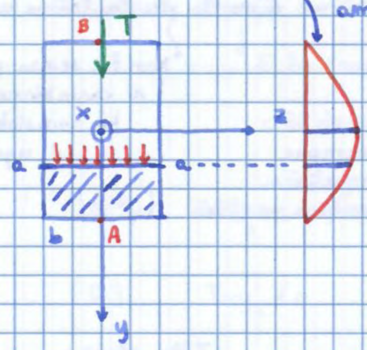
Taglio in 2 categorie → Sezioni piene (Rettangolare, Circolare)
→ Sezioni cave

- Sezioni piene
  ↳ Taglio non viene mai considerato → È trascurabile
  - A meno che non sia esplicitamente richiesto

Esempio

Spina di sicurezza → Se coppia è troppo elevata → Si trancia in 2
↳ Per non danneggiare altri pezzi

Rappresenta in scala ampiezza di τ



$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T}{b \cdot I_z} \int y\, dA$$
$$= \frac{T}{b \cdot I_z} \int_y^{h/2} y \cdot b\, dy$$
$$= \frac{T \cdot 12}{b \cdot bh^3} \cdot \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2\right] = \frac{T \cdot 6}{bh^3} \left[\frac{h^2}{4} - y^2\right]_0^{h/2}$$

$\tau_{MAX} = \frac{3}{2}\, \tau_{media}$

$\left(\frac{T}{b \cdot h}\right)$

↓

T spalmato su tutta l'area

$$\underset{(y=0)}{\tau_{xy}} = \tau_{yx} = \tau_{yx_{max}} = \tau_{xy_{max}} = \frac{3}{2} \frac{T}{b \cdot h}$$

$$\underset{(y=\frac{h}{2})}{\tau_{xy}} = 0$$

Nella zona ② Il momento statico è quello di tutto quello che c'è sotto

$$\left(\int_A x \, dA \right)$$

$$\tau_{xy_{②}} = \frac{T}{c\, I_z} \left\{ S_{①z} + \int_y^{h/2} c \cdot y \, dy \right\}$$

$$\tau_{xy_{②}} = \tau_{yx_{②}} = \frac{T}{c \cdot I_z} \left\{ S_{①z} + \frac{c}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right] \right\}_0^{h/2}$$

$$\tau_{xy_{②}\, y=\frac{h}{2}} = \frac{T}{c \cdot I_z} \cdot S_{①z}$$

$$\tau_{xy_{max}\, ②\, y=0} = \frac{T}{c\, I_z} \cdot \left\{ S_{①z} + \underbrace{\frac{c}{2} \left[\frac{h^2}{4} \right]}_{S_{②z}} \right\}$$

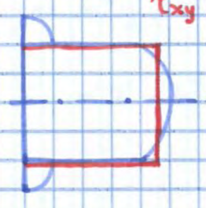
- Anche ora la τ non bilancia decrescita di σ_x
  - Punto C ha σ_x molto alta ancora
    - E ha anche la τ molto elevata
    - Si deve verificare anche il punto C per la rottura

(A) $\tau_{xy_A} = 0$ $\sigma_{xA} = \sigma_{xMAX}$

(C) $\tau_{xy_C} \neq 0$ $\sigma_{xC} \neq 0$

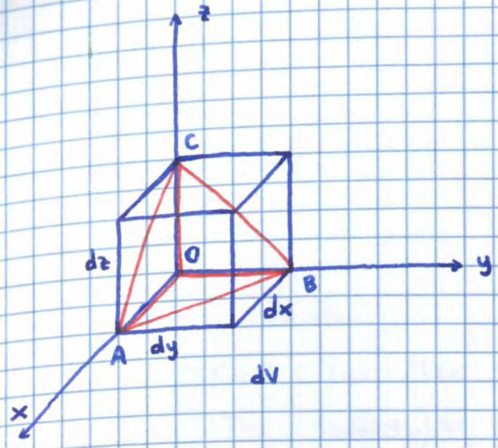
- Se la sezione è commerciale → C'è un metodo di approssimazione di τ
  - Si pensa che tutto il taglio sia sopportato da ANIMA

τ_{xy} media



$$\tau_{xy_{media}} = \frac{T}{c h}$$

- Favorevole perché nei punti "critici" è sovrastimata τ



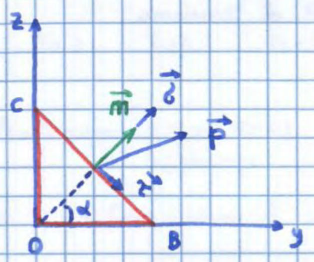
In sistema cartesiano

Tensore delle tensioni

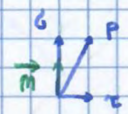
$\perp$ / $//$	x	y	z
x	σ_x	τ_{yx}	τ_{zx}
y	τ_{xy}	σ_y	τ_{zy}
z	τ_{xz}	τ_{yz}	σ_z

6 incognite
perchè $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Tetraedro di Cauchy $\longrightarrow$ Ha fatto equilibrio di quel tetraedro



- Faccia inclinata
  ha vettore p (vettore tensione)
  con σ e τ generiche
  come componenti



Posizione di piano generico
nello spazio è identificato dalla normale

- Si cerca
  di tagliare cubetto in modo da trovare vettore $\vec{p}$ diretto lungo la normale
  $\downarrow$
  Tensioni principali
  (solo normali / solo σ)
  $\longrightarrow$ Massime e minime

Si possono proiettare i piani $\longrightarrow$ Tratto le facce come normali

$\overset{\triangle}{ACB} \cdot \cos m\hat{\ } x = \overset{\triangle}{COB}$ $\longrightarrow$ Ha come normale l'asse x

$\overset{\triangle}{ACB} \cdot \cos m\hat{\ } y = \overset{\triangle}{AOC}$

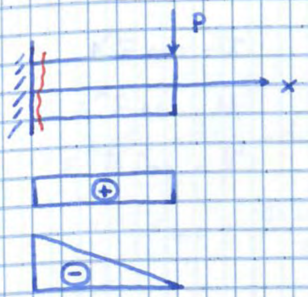
$\overset{\triangle}{ACB} \cdot \cos m\hat{\ } z = \overset{\triangle}{AOB}$

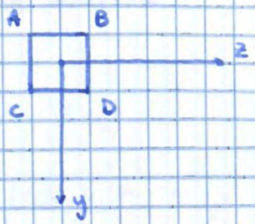
COSENI DIRETTORI (coseno fra normali ai lati)

$\cos m\hat{\ } x = \lambda$

$\cos m\hat{\ } y = \mu$

$\cos m\hat{\ } z = \nu$





lato AB è il più sollecitato
↓ Sul lato AB ci sono solo σ

$\tau = 0$

su dA elementari su AB
x è direzione principale

e su CD
la situazione è speculare

Calcolo

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{Bmatrix} = 0$$

Trovo 3 σ

Per direzioni:

λ_1, μ_1, ν_1 diventano le incognite

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{Bmatrix} = 0$$

Regola di Cramer:
Det = 0
↓
Ricavo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Per trovare AUTOVETTORI
Si aggiunge:

Cerco σ_1
↳ La normale è la direzione 1

4a equazione • Condizione di ortogonalità

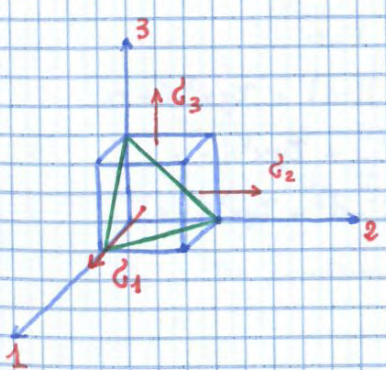
$$\boxed{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1}$$

(Altrimenti 2 eq. in 3 variabili) → Perché due equazioni sono linearmente dipendenti

Autovettori (direzioni)
↳ Sono ricavati a meno di una costante arbitraria → Ricavo La forma modale
↳ Non quanto si sposta (effettivo valore)

• Ho det in funzione di σ
↳ ottengo tre σ, il più grosso: σ_1

- Ma non so ancora direzioni
↳ Sostituisco il risultato in matrice
↳ Ottengo i coseni direttori della direzione (AUTOVETTORE) incogniti
↳ Aggiungendo condizione di ortogonalità



$$\begin{matrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{matrix}$$

$\sigma_a = 0$

$\sigma_x \sigma_y - \sigma \sigma_y - \sigma_x \sigma + \sigma^2 - \tau_{xy}^2 = 0$

$$\sigma_{b,c} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\sigma_b = \sigma_1$

$\sigma_a = \sigma_2$

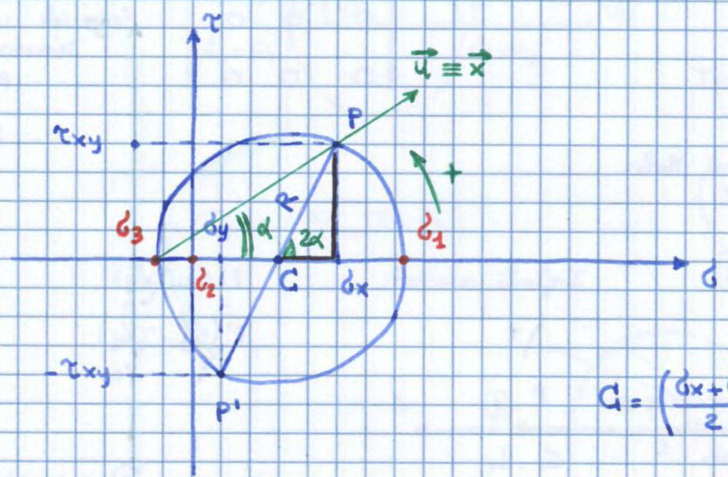
$\sigma_c = \sigma_3$

Correlazione grafica:

CERCHI DI MOHR $\longrightarrow$ Mezzo importante per capire dove vanno le direzioni principali

$\hookrightarrow$ Stati di tensione in un piano

- Costruzione grafica di un cerchio di Mohr — Si parte da due punti



$P(\sigma_x, \tau_{xy})$

$P'(\sigma_y, -\tau_{xy})$

(Estremi di diametro di cerchio)

$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$tg\, 2\alpha \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) = \tau_{xy}$$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

In σ_1 : la normale è la direzione 1

Tra $\vec{x}$ e $\vec{1}$ c'è un angolo α

Per condizione di ortogonalità tra le direzioni

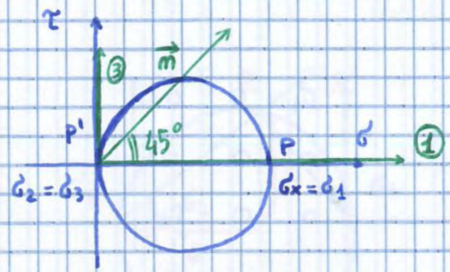
$\hookrightarrow \sigma_3$ è $\perp$ a σ_1

σ_2 è $\perp$ al piano xy perchè vale 0

Non con
- Acciai con evidente snervamento (duttili)
  ↳ "Ferracci"

Ma → con acciai che sopportano bene carichi
↳ Bene legati, non duttile
↓
Non c'è strizione
↳ Rottura a 45°

A 45° abbiamo τ massima



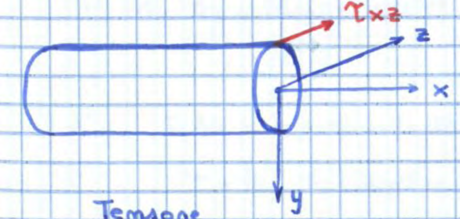
In acciai poco duttili
↓
Rottura quando si giunge a τ_{max}
↓
Ipotesi di Tresca

(Si creano piani di scorrimento diversi)
↳ Rotture dove c'è massimo attrito
↳ A 45°

$$\vec{P} = \left(\frac{\sigma_x}{2}, \tau = \frac{\sigma_1}{2}\right)$$

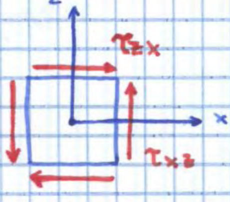
- In generale le rotture dipendono da materiale

Barra di torsione



Tensore

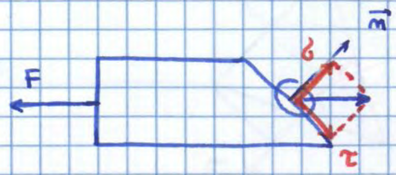
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$\sigma_a = 0$

$$\sigma_{b,c} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

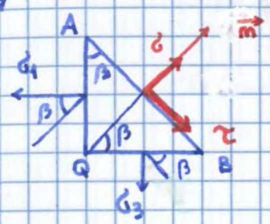


A volte non succede ciò che ci aspettiamo → Materiale può avere difetto

Innesca uno stato di tensione che non è atteso

Non in direzione principale

σ, τ ∀

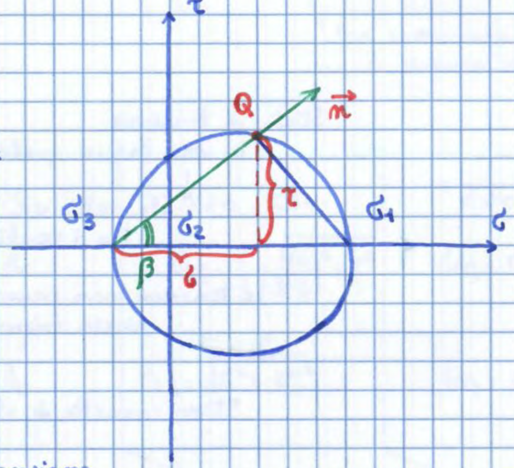


β noto da sperimentazione (provino)

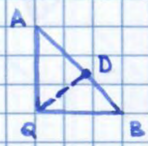
Non so perché si sia creata in quella direzione

Analisi di stato di tensione

Equazioni di equilibrio :



È come se fosse stato di tensione in Q



In Q e D la tensione è la stessa perché dA è infinitesima

$AQ = AB \cos\beta$

$BQ = AB \sin\beta$

$\vec{m}$ $\quad \sigma AB = \sigma_1 \cos^2\beta AB + \sigma_3 \sin^2\beta AB$

$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2\beta + \sigma_3 (1 - \cos^2\beta)$

$\sigma = \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2\beta$

Analizzando il cerchio di Mohr avrei ottenuto gli stessi risultati

$\perp \vec{m}$ $\quad \tau AB = \sigma_1 \sin\beta\cos\beta AB - \sigma_3 \cos\beta \sin\beta AB$

$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin\beta \cos\beta$

IPOTESI DI ROTTURA

Immaginiamo cedimento di materiale in un punto in tensione

σ_{eq} Tensione equivalente

↳ MONODIMENSIONALE

↳ Equivalente dal punto di vista di un pericolo di rottura ad uno stato di tensione tridimensionale

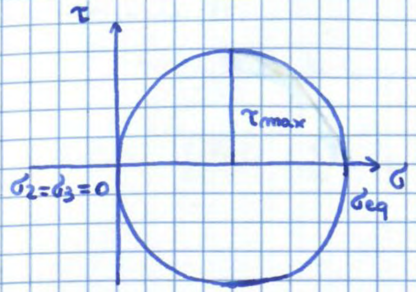
$$\sigma_{eq} \Longleftrightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

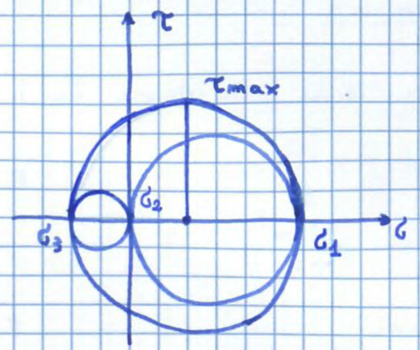
1D 3D

Unico modo per calcolare coefficiente di sicurezza

↳ Per sommare σ "diverse" vanno rese "uguali"

IPOTESI	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\sigma \neq 0 \quad \tau \neq 0$	$\sigma \neq 0 \quad \tau = 0$	$\sigma = 0 \quad \tau \neq 0$
Galileo σ_1	$\sigma_{eq} = \sigma_1$	$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$	$\sigma_{eq} = \sigma$	$\sigma_{eq} = \tau$
Tresca τ_{max}	$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{eq} = \sigma$	$\sigma_{eq} = 2\tau$
Von Mises Φ''_{max}	$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2}$	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sigma_{eq} = \sigma$	$\sigma_{eq} = \sqrt{3}\,\tau$





$\tau_{max} = \frac{\sigma_{eq}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Se $\sigma_3 = 0$ $\quad \sigma_{eq} = \sigma_1$

Con σ e $\tau \neq 0$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Con $\sigma = 0$ e $\tau \neq 0$

$\sigma_{eq} = \tau \cdot 1$

$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$

Sostituendo

$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\dots} - \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\dots}$

$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

Con $\sigma \neq 0$ e $\tau = 0$

$\sigma_{eq} = \sigma$

Con $\sigma = 0$ e $\tau \neq 0$

$\sigma_{eq} = 2 \cdot \tau$

IPOTESI DI VON MISES

Si raggiunge rottura quando si arriva a energia massima di distorsione

$\Phi''_{max\,1D} = \Phi''_{max\,3D}$

$\sigma_{eq}, 0, 0 \quad\quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

- Clapeyron
- Betti
- Energia elastica
- σ, ε 3D

$Le = Li = \Phi$

Le → Calcolato su tutta struttura

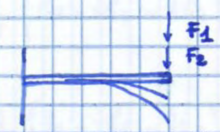
Φ → Definito su un punto → Poi si integra

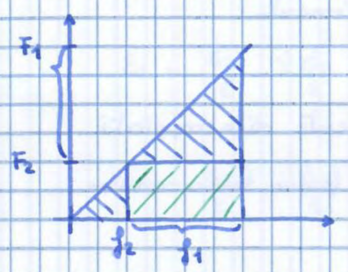
Applicando F_2

↳ Anche F_1 fa lavoro → $F_1 \cdot f_2$

$$L_e = \frac{1}{2} F_1 f_1 + \frac{1}{2} F_2 f_2 + \underline{F_1 f_2}$$

Applico prima F_2 e poi F_1





$$L_e = \frac{1}{2} F_2 \cdot f_2 + \frac{1}{2} F_1 \cdot f_1 + \underline{F_2 \cdot f_1}$$

Applicate stesse forze
con stessi spostamenti

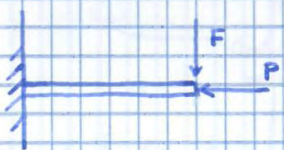
Teorema di Betti

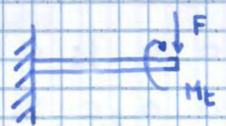
$$L_{e_{1,2}} = L_{e_{2,1}} = F_1 f_2 = F_2 \cdot f_1$$

I lavori mutui sono uguali

• MA ci sono sistemi in cui il lavoro mutuo è nullo ⟶ Forze applicate sono indipendenti l'una dall'altra (fenomeni disaccoppiati)

↓ si possono sovrapporre gli effetti per le energie





Con TENSIONI PRINCIPALI

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2\right)$$

Energia immagazzinata

$$\Phi_{3D} = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$$

Riguarda il volumetto infinitesimo con volume unitario

Punto più sollecitato

$$= \frac{1}{2E}\left\{ \underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}_{A} - 2\nu \underbrace{\left[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right]}_{B} \right\}$$

$$\Phi = \frac{1}{2E}\left\{A - 2\nu B\right\}$$

Obbiettivo

$$\Phi''_{max_{3D}} = \Phi''_{max_{1D}}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ $\quad$ $\sigma_{eq}, 0, 0$

$$\Phi''_{max} = \Phi - \Phi'$$

IPOTESI

$$\sigma_m = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

media

$$\Phi' = \frac{1}{2E}\left\{ 3\underbrace{\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right]^2}_{\sigma_m^2} - 2\nu \cdot 3\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right]^2 \right\}$$

$$\Phi' = \frac{1}{2E}\cdot\frac{1}{3}\left\{ (1-2\nu)\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]\right\}$$

$$\Phi' = \frac{1}{2E}\,\frac{1}{3}\left\{(1-2\nu)\left[A + 2B\right]\right\}$$

$$\Phi''_{max} = \Phi - \Phi' = \frac{1}{2E}\left\{A - 2\nu B - \frac{1}{3}(1-2\nu)\left[A + 2B\right]\right\}$$

$$\Phi''_{max} = \frac{1}{2E}\left\{A - 2\nu B - \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\nu A - \frac{2}{3}B + \frac{4}{3}\nu B\right\}$$

Ma nelle normative si definisce

σ_{amm} e τ_{amm}

$\sigma_{calc} \leq \sigma_{adm}$ $\qquad$ $\tau_{calc} \leq \tau_{adm}$

Da un modello di calcolo

Viene da un materiale → Varia a seconda di materiale

Con σ_{amm} → C. S. è un po' minore con stessa σ_{calc}

Per ottenere stesso C.S.
↳ σ_{calc} deve essere minore

$\left(C.S. = \dfrac{\sigma_{amm}}{\sigma_{eq}} \right)$ $\qquad$ $\sigma_{amm} \sim 0{,}9\ R_{p02}$

C.S. ha un valore diverso

Non importa rischiare di arrivare a snervamento

τ_{amm}

Se devo dimensionare un albero a torsione

$\tau_{max\,calc} \leq \tau_{amm}$

↳ lontana da R_{p02}

$\sigma_{eq} = 2\tau$
oppure
$\sigma_{eq} = \sqrt{3}\,\tau$

$\sigma_{amm} = \dfrac{R_{p02}}{1{,}5}$

Definita in costruzioni in acciaio ad esempio

→ Sto lontano da snervamento

$\tau_{amm} = \dfrac{\sigma_{amm}}{2}$

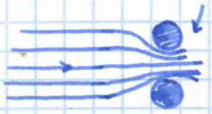
Si passa da ipotesi di rottura

$\tau_{amm} = \dfrac{\sigma_{amm}}{\sqrt{3}}$

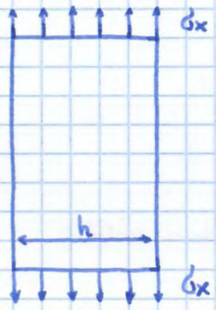
EFFETTO DI INTAGLIO

(di solito non trattato in statica)

corrente accelera e crea dei vortici



└ Allo stesso modo → Flusso di tensioni



$A = h \cdot s$

$\sigma_x = \frac{F}{A}$

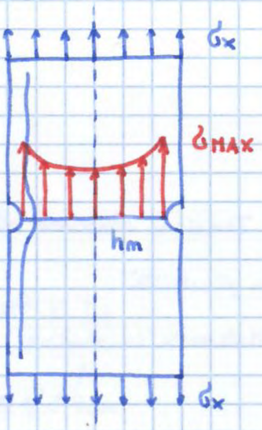
Perturbazione di stato di tensione

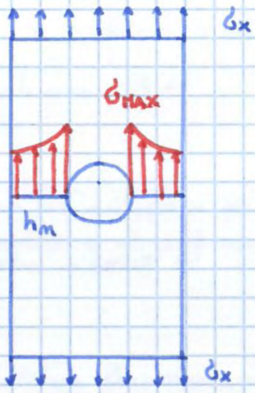
↓

Picco di tensione

↓

Anche 5 volte σ_x





"Fattore di forma" $K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_N}$

↳ σ nominale $= \frac{F}{A_n}$ (Area netta)

$A_n = h_n \cdot s$

↳ Senza intaglio

Va da 3 a 5

↓

Tensione aumenta molto

K_t è solo analitico

↳ Non c'è nulla di sperimentale

INSTABILITÀ ELASTICA

Carico di punta

Rottura → A Trazione (Perché materiale è più resistente a compressione)

Ma con COMPRESSIONE
c'è problema di instabilità elastica
↳ Quando si raggiunge il CARICO CRITICO (P_{CR})

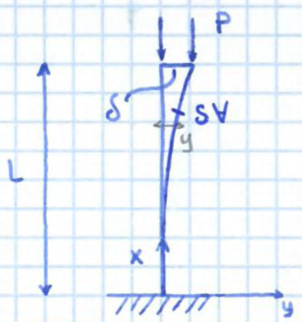
Prove di Crash
↓ Tubo si accartoccia in modo analitico
Si può prevedere ingombro finale
- Progettazione è importante

Carico critico di Eulero dipende da:
- Momento d'inerzia rispetto ad asse neutro
- Materiale
- Carico applicato
- Condizioni al contorno

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_0^2}$$

↳ Valore più basso con cui si ha instabilità

L_0 : Lunghezza libera di inflessione
↳ Dipende da lunghezza effettiva e condizioni al contorno



• Nasce da condizione REALE → Disallineamento

Carico in REALTÀ non è perfettamente baricentrico
↳ C'è un disassamento iniziale

Elementino

Equilibrio a momento

$$M_f + P(\delta - y) = 0$$

Equazione differenziale

y: distanza di sezione da trave

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_f}{E I_z}$$

$$\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_z}} \cdot L = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_z}}\, L = \frac{\pi + 2m\pi}{2} \qquad m = 0, 1, \ldots\ldots$$

Sono infinite soluzioni

↳ Cerco SOLUZIONE FONDAMENTALE → $m = 0$

(Valore minimo di P)

↓ Frequenza propria più bassa

↳ Ha contributo energetico più elevato (impatto)

↳ "Mangia" energia

$$\sqrt{\frac{P}{E \cdot I_z}}\, L = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{CR} = \frac{\pi^2}{4} \frac{E I_z}{L^2}$$

Sui libri si trova → $P_{CR} = \dfrac{\pi^2 E I_z}{L_0^2}$

E → dipende da materiale

I_z → dipende da momento d'inerzia

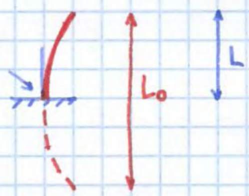
L_0 → Lunghezza libera di inflessione

↳ Deformata più bassa

L_0 dipende da condizioni di vincolo

→ $2L$ per un incastro con trave di lunghezza L

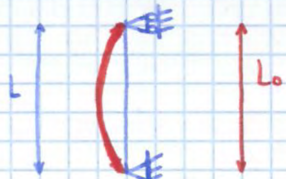
Non permette rotazione



$L_0 = 2L$

→ L per una trave con cerniera e carrello

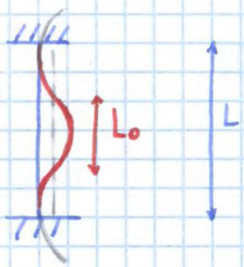
$L_0 = L$



Permette rotazione

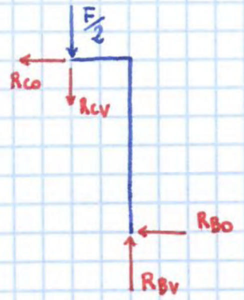
→ $\frac{L}{2}$ Per una trave con due incastri

$L_0 = \frac{L}{2}$



Ma vincoli

↳ In realtà non sono realizzabili come quelli ideali



$\oplus \rightarrow$

$$-R_{CO} - R_{BO} = 0$$

$$R_{BO} = -R_{CO} \qquad R_{CO} = -6550 \text{ N}$$

$\oplus \uparrow$

$$R_{BV} - R_{CV} - F/2 = 0$$

$$R_{BV} = R_{CV} + F/2 \qquad R_{CV} = R_{BV} - F/2 = 1200 \text{ N}$$

$\oplus$ C

$$R_{BV}\cdot \frac{L}{2} - R_{BO}\cdot 2L = 0$$

$$R_{BV} = 4\cdot R_{BO}$$

$$R_{BO} = \frac{R_{BV}}{4} = 6550 \text{ N}$$

$\oplus \rightarrow$

$$q\cdot 2L - R_{AO} - R_{BO} = 0$$

$$R_{AO} = q\cdot 2L - R_{BO} = -5350 \text{ N}$$

1200 - 6550

$\oplus \uparrow$

$$R_{AV} + R_{BV} - F = 0$$

$$R_{AV} = F - R_{BV} = 23800$$

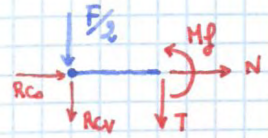
$\oplus$ A

$$R_{BV}\cdot L - q2L\cdot L - F\cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$R_{BV} = \frac{F}{2} + q\cdot 2L = 26200 \text{ N}$$

25000 + 1 · 1200

Terza campata
$(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$



$N + R_{CO} = 0 \quad , \quad N = -R_{CO} = -6550\ N$

$-T - F/2 - R_{CV} = 0$

$T = -\frac{F}{2} - R_{CV} = -25000 - 1200 = -26200\ N$

$Mf + F/2 \cdot x + R_{CV} \cdot x = 0$

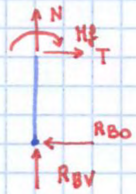
$Mf = -F/2\, x - R_{CV} \cdot x$

$Mf(0) = 0$

$Mf(\frac{l}{2}) = -25000 \cdot 0{,}3 - 1200 \cdot 0{,}3$

$= -7860\ N \cdot m$

Quarta campata
$(0 \leq x \leq 2l)$ $\quad x' = 2l - x$



$N + R_{BV} = 0 \quad , \quad N = -R_{BV} = -26200\ N$

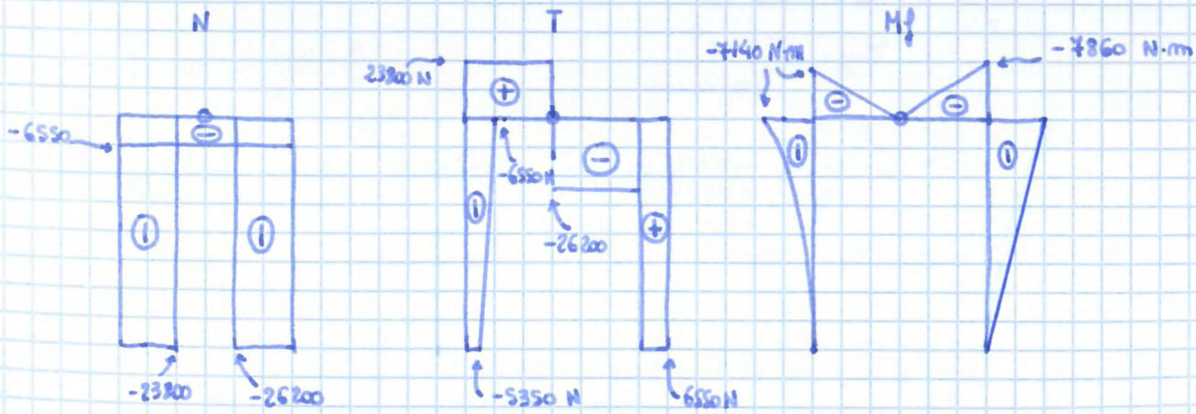
$T - R_{BO} = 0 \quad , \quad T = R_{BO} = 6550\ N$

$-Mf - R_{BO}\, x' = 0$

$Mf = -R_{BO}(2l - x)$

$Mf(0) = -7860\ N \cdot m$

$Mf(2l) = 0$



CALCOLO MATRICIALE

Metodo alternativo di calcolo

- Si calcolano gli spostamenti ai nodi su cui vengono applicate forze

(le deformazioni)

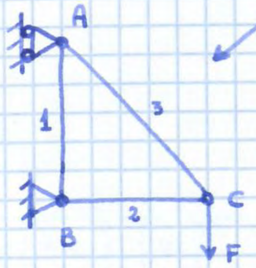
↳ E da quelle le tensioni

Legate a spostamenti da matrice di rigidezza

- Calcolo matriciale è un'approssimazione → A volte non coincide con risultato teorico

↳ Rende discreti sistemi continui

Esempio su cui è utile applicare calcolo matriciale



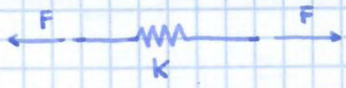
1) Formulazione di rigidezza per asta, molla, barra di tors. e (trave)

2) Coordinate locali e globali

3) Assemblaggio di struttura e soluzione

Formulazione di rigidezza

Molla → Elemento monodimensionale



$F = kx$

$$k = \frac{F}{x}$$

Soluzione TEORICA (in forma chiusa)

MATRICE DI RIGIDEZZA

Nel caso dell'asta

2 equazioni in 4 incognite

$$\underbrace{\left[\ k\ \right]}_{2\times2}\ \underbrace{\left\{ s \right\}}_{2\times1} = \underbrace{\left\{ F \right\}}_{2\times1}$$

Solo Forze

(Alla traslaz. laterale)

Eq. equilibrio STATICO

Eq. equilibrio agli spostamenti

└ Spostamenti + 1 Forza

Elemento ASTA

$i = 2$

$n_i = 1$

$n = n_i \cdot i = 2$

$2n$ variabili $= 4$

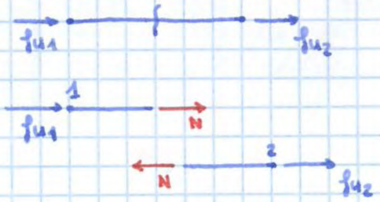
n equazioni $= 2$ eq.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

Quadrate, simmetriche, singolari → Se non sono vincolate possono compiere solo movimenti rigidi

Eq. di equilibrio : $\overset{+}{\rightarrow}$ $f_{u1} + f_{u2} = 0$

Eq. agli spost. : $u_2 - u_1 = \frac{f_{u2}}{EA} \cdot L$



$N = f_{u2} = -f_{u1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

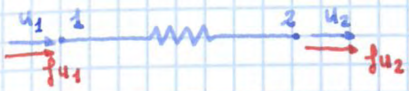
$$[a] \quad \{s\} = [b] \quad \{f\}$$

$$[b]^{-1}[a]\{s\} = [b]^{-1}[b]\{f\}$$

$$[k] = [b]^{-1}[a]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 270

MOLLA



$i = 2$

$m_i = 1$

$n = 2$

Eq. di equilibrio $\qquad f_{u1} + f_{u2} = 0$

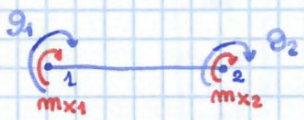
Eq. di spostam. $\qquad u_2 - u_1 = f_{u2} \cdot \frac{1}{k}$

$f_m = f_{u2} = -f_{u1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

BARRA DI TORSIONE



Eq di equilibrio $\qquad m_{x1} + m_{x2} = 0$

Eq. di spostam. $\qquad \theta_2 - \theta_1 = m_{x2} \frac{L}{G \cdot I_p}$

$$\frac{G\,I_p}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \end{Bmatrix}$$

$[k]_{\text{barra tors}}$

Prime due file di 0

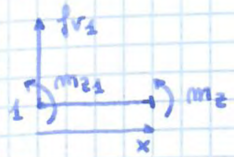
↳ i nodi non vincolati hanno spostamenti rigidi

↳ Non si deformano

↳ Tanti 0 quanti sono i gradi di libertà

↳ La trave ha 2 GdL di corpo rigido

Eq. linea elastica (per spostamenti)



$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{m_z}{E\,I_z}$$

$m_z = fv_1 x - m_{z1}$

1° integrazione

$$\int_0^L \frac{dv}{dx} = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^L \left[-fv_1 x + m_{z1}\right] dx$$

· Rotazione rigida

↳ La rotazione effettiva corrisponde alla diff. di rotazione tra i nodi

$$\alpha_{z2} - \alpha_{z1} = \frac{1}{E \cdot I_z}\left[-\frac{fv_1 \cdot L^2}{2} + m_{z1} \cdot L\right]$$

2° integrazione

$$\int dv = \frac{1}{E \cdot I_z}\left\{\int_0^L \left[-\frac{fv_1 x^2}{2} + m_{z1} x\right] dx\right\}$$

$$v_2 - v_1 - \alpha_{z1} \cdot L = \frac{-fv_1 L^3}{6 E I_z} + \frac{m_{z1} L^2}{2E\, I_z}$$

Anche la rotazione del nodo 1 dà freccia in 2

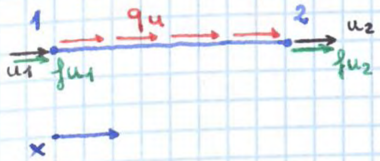
[a] è due volte singolare (ha 2 GdL di corpo rigido)

[b] è invertibile

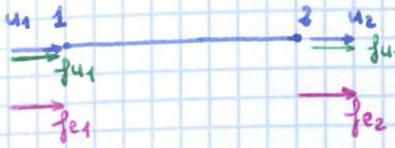
$$[k] = [b^{-1}][a] = E I_z \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 99 di 270

ASTA



Sistema continuo devo trasformarlo in un sist. con carichi equivalenti ai nodi



$$[k]_{asta}\{s\} = \{f\} + \{f_e\}$$

Equazioni di equilibrio:

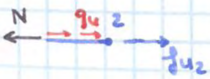
$$f_{u_1} + f_{u_2} + q_u \cdot L = 0 \qquad f_{u_1} + f_{u_2} + f_{e_1} + f_{e_2} = 0$$

$$\boxed{q_u \cdot L = f_{e_1} + f_{e_2}} \quad (1)$$

Uguagliando eq. dei due sistemi

$$\Delta \ell = \frac{N}{EA} \cdot L$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA} \int_0^L (q_u \cdot x + f_{u_2})\, dx$$



$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA} \cdot \frac{q_u \cdot L^2}{2} + \frac{1}{EA} f_{u_2} \cdot L$$

$$N = q_u \cdot x + f_{u_2}$$

$$\boxed{q_u \cdot \frac{L}{2} = f_{e_2}} \quad (2)$$

Sist. equivalente

$N = f_{u_2} + f_{e_2}$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA} f_{u_2} \cdot L + \frac{1}{EA} f_{e_2} L$$

$$\boxed{f_{e_2} = f_{e_1} = q_u \cdot \frac{L}{2}}$$

$$\{f_e\} = \frac{q_u \cdot L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \ldots$$

Con carico CONCENTRATO

Eq. di equilibrio

$$f_{u1} + f_{u2} + f_u = 0 \qquad f_{u1} + f_{u2} + f_{e1} + f_{e2} = 0$$

$$\boxed{f_u = f_{e1} + f_{e2}} \quad (1)$$

Eq. di spostamento

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA}\left\{ \int_0^{x^*} f_{u2}\,dx + \int_{x^*}^{L} [f_{u2} + f_u]\,dx \right\}$$

Si parte dal punto 2

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA}\left[\cancel{f_{u2} \cdot x^*} + f_{u2} \cdot L + f_u \cdot L - \cancel{f_{u2} x^*} - f_u \cdot x^* \right]$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA}\left[f_{u2} \cdot L + f_u (L - x^*) \right]$$

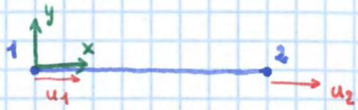
$$f_u (L - x^*) = f_{e2} \cdot L$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA}\left[f_{u2} \cdot L + f_{e2} \cdot L \right]$$

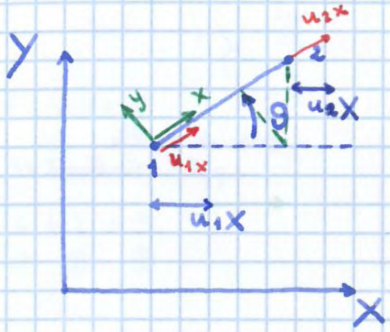
$$\boxed{f_{e2} = f_u \frac{(L - x^*)}{L} \qquad f_{e1} = f_u \frac{x^*}{L}}$$

$$\{f_e\} = \frac{q_u \cdot L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + EA\alpha T_m \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{f_u}{L}\begin{Bmatrix} x^* \\ L - x^* \end{Bmatrix}$$

MODELLAZIONE DELLA STRUTTURA



x, y, z sistema di riferimento locale



$u_1X = u_{1x}\cos\vartheta$ $\qquad$ $u_2X = u_{2x}\cos\vartheta$

$u_1Y = u_{1x}\sin\vartheta$ $\qquad$ $u_2Y = u_{2y}\sin\vartheta$

$u_{1x} = u_1X\cos\vartheta + u_1Y\sin\vartheta$

$u_{2x} = u_2X\cos\vartheta + u_2Y\sin\vartheta$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \end{bmatrix}_{2\times 4} \begin{Bmatrix} u_1X \\ u_1Y \\ u_2X \\ u_2Y \end{Bmatrix}_{4\times 1}$$

$[R]$ Matrice di rotazione

è ortogonale $[A]^{-1} = {}^tA$

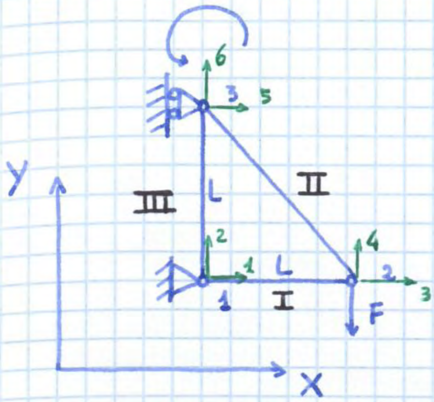
↳ Applicazione lineare

$$[k]_{xyz} \cdot \{s\}_{xyz} = \{f\}_{xyz}$$

Da coordinate locali a coordinate GLOBALI

$$[k]_{\underline{XYZ}} \{s\}_{\underline{XYZ}} = \{f\}_{\underline{XYZ}}$$

Esercizio 1 Calcolo matriciale (esercitazione 8)



(Risolvo con metodo classico anche)

8 Passaggi fondamentali :

1) Definire gli elementi in uso (asta, trave, ...)
(tipologia)

2) Calcolo dei gradi di libertà dell'intera struttura

3) Quali sono i gradi di libertà dell'elemento

4) Mappa di corrispondenza
↳ Con coordinate locali di elemento strutturale considerato
+ 1 colonna che è rotazione

GRADI DI LIBERTÀ

$n = 3 \times 3 = 9$

$m = 4 + 2 + 3$
① ② ③

$l = 0$ ISOSTATICA

3)

4 coordinate locali
↳ identificate come numeri (1,2,3,4)

	1	2	3	4	9
I	1	2	3	4	0
II	3	4	5	6	135
III	5	6	1	2	270
					−90

$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6 spostamenti possibili di tutta struttura → Matrice 6x6

↳ [k] globale del sistema

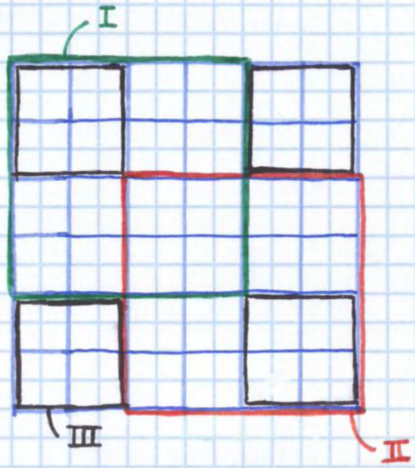
$$[k] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento 1 ha spostamenti 1,2,3,4

Elemento 2 ha spostamenti 3,4,5,6

Elemento 3 ha spostamenti 5,6,1,2

$$[k] = \frac{EA}{L} \cdot$$

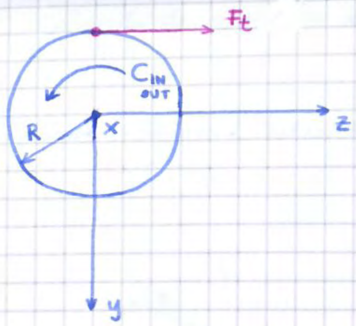


$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -100 \cdot 10^3 \\ R_5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (-F)$$

Forze sono quelle esterne

↳ Verso il mondo esterno

Sistema di 6 equazioni in 6 incognite

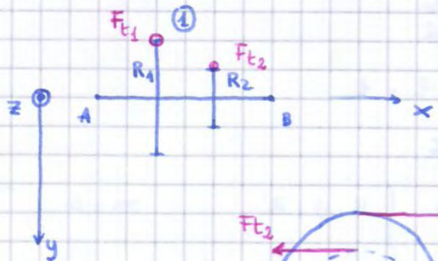


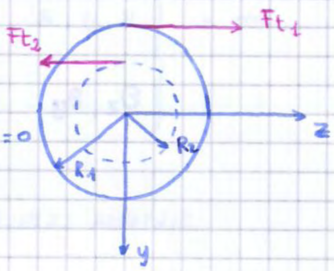
Coppia: $F_t \cdot R$

⊕↺) $C_{\substack{IN\\OUT}} - F_t \cdot R = 0$ Eq. del moto → Per equilibrio di sistema

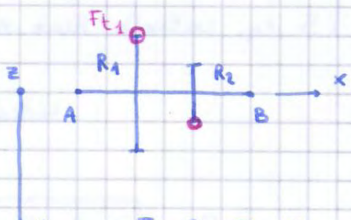
---

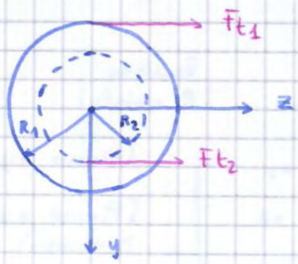
Esempio:





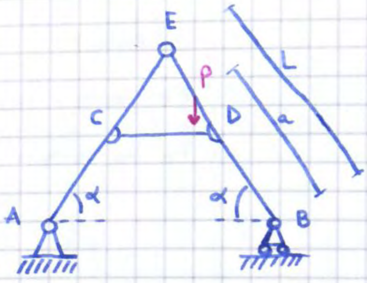
$F_{t1} \cdot R_1 - F_{t2} \cdot R_2 = 0$





$F_{t1} \cdot R_1 - F_{t2} \cdot R_2 = 0$

Esame scritto del 07. 02. 2013



Calcolare reazioni vincolari esterne ed interne ?

NB: si consiglia di risolvere il problema letterale

R_C, R_D
R_{Ao}, R_{Av}
$R_B,$
R_{Eo}, R_{Ev}

3 elementi rigidi

AE
EB
CD

$n = 3 \times 3 = 9$ coord

$$m = \underset{A}{2} + \underset{B}{1} + \underset{E}{2} + \underset{C}{2} + \underset{D}{2}$$

$n - m = l = 0$

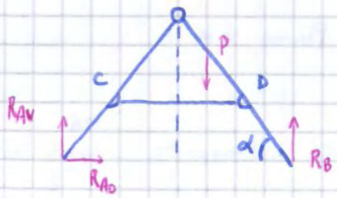
Asta

Reazioni solo orizzontali

$\oplus \uparrow$

$\oplus \circlearrowleft$

$\oplus \rightarrow \quad R_D - R_C = 0 \quad ; \quad R_D = R_C$



$\oplus \rightarrow \quad R_{Ao} = 0$

$\oplus \uparrow \quad R_{Av} - P + R_B = 0$

$$R_{Av} = \frac{P \cdot a \cos\alpha}{L}$$

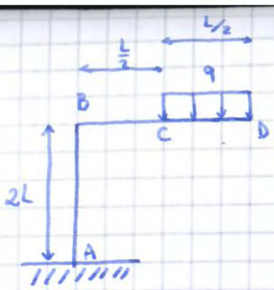
$\oplus \overset{A}{\circlearrowright} \quad R_B \cdot L - P \cdot (L - a \cdot \cos\alpha) = 0$

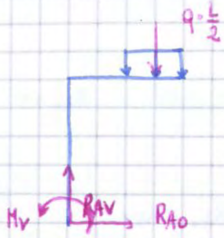
$$R_B = \frac{P(L - a \cdot \cos\alpha)}{L}$$

(1)

Verso uguale e contrario a quello di asta

Quando si riassembla
↓
Forze / Reazioni vincolari devono elidersi, annullarsi



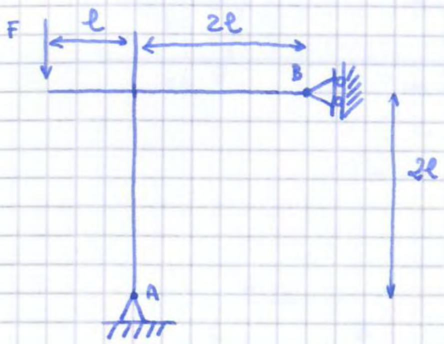


⊕ → $R_{A0} = 0$

⊕ ↑ $R_{AV} - q\cdot\frac{L}{2} = 0$

⊕ A↺ $M_V - q\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{3L}{4} = 0$

Esercizio 3 (Esercitazione 1)

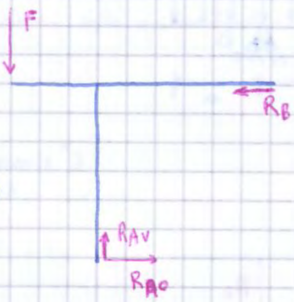


$F = 4000\ N$

$\ell = 0{,}5$

$m = 3$ ISOSTATICA

$m = \underset{B}{1} + \underset{A}{2} = 3$



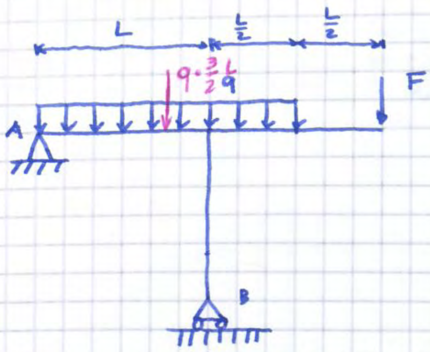
⊕ → $-R_B + R_{A0} = 0$ $R_B = R_{A0} = -2000\ N$

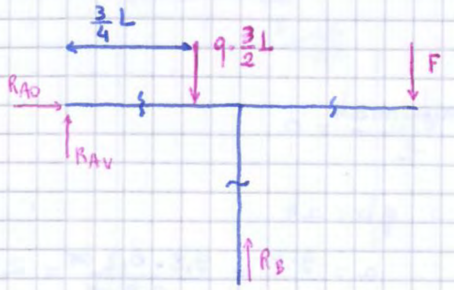
⊕ ↑ $R_{AV} - F = 0$ $R_{AV} = F = 4000\ N$

⊕ A↺ $F\cdot\ell + R_B\cdot 2\ell = 0$

$$R_B = \frac{-F\cdot\ell}{2\ell} = -\frac{F}{2} = -2000\ N$$

Esercizio 1





$\oplus \rightarrow \quad R_{AO} = 0$

$\oplus \uparrow \quad R_{AV} + R_B - q \cdot \frac{3}{2} L - F = 0$

$\oplus \circlearrowleft A \quad R_B \cdot L - F \cdot 2L - q \cdot \frac{3}{2} L \cdot \frac{3}{4} L = 0$

$F = 500\,N$
$L = 1\,m$
$q = 100\,N/m$

$R_B = F \cdot 2 + q \cdot \frac{9}{8} L =$

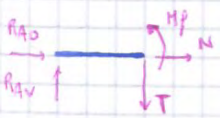
$R_B = 1000\,N + 100\,N/m \cdot \frac{9}{8}\,m$
$= 1112{,}5\,N$

$R_{AV} = q \cdot \frac{3}{2} L + F - 2F - q \cdot \frac{9}{8} L$

$R_{AV} = -F + q\left(\frac{12-9}{8}\right) L = q\,\frac{3}{8} L - F$

$R_{AV} = -500\,N + 100\,N/m \cdot \frac{3}{8} = -462{,}5\,N$

1ª campata



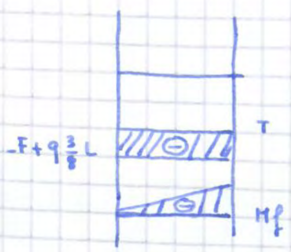
$\oplus \rightarrow \quad R_{AO} + N = 0 \qquad N = -R_{AO} = 0$

$\oplus \uparrow \quad T - R_{AV} = 0 \qquad T = R_{AV} = q \cdot \frac{3}{8} L - F$

$\oplus \circlearrowleft \quad M_f - R_{AV} \cdot x = 0 \qquad M_f = R_{AV} \cdot x$

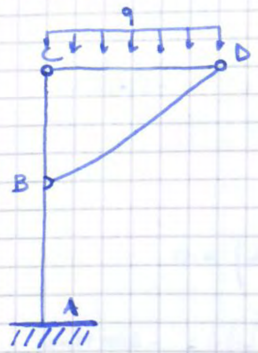
$x = 0 \rightarrow M_f = 0$

$x = \frac{3}{4} L \rightarrow M_f = \frac{3}{4} L \left(q \cdot \frac{3}{8} L - F\right) = -346{,}875$



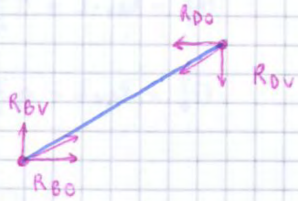
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 117 di 270

Esercizio 5



$m = 9$

$$m = \underset{B}{2} + \underset{C}{2} + \underset{D}{2} + \underset{A}{3} = 9 \rightarrow \ell = 0$$

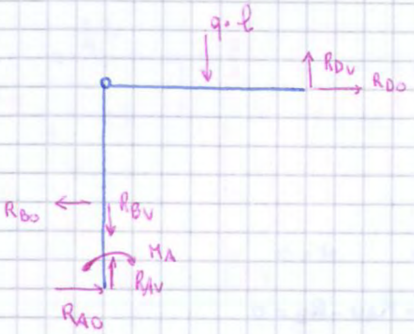


$R_{DO} = R_{BO}$

$R_{BV} = R_{DV}$

$R_{DO} \cdot h - R_{DV} \cdot \ell = 0$

$R_{DO} = R_{DV} \cdot \dfrac{\ell}{h} = 50 \cdot 2 = 100\ N$

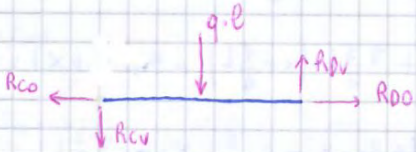


$R_{AO} - R_{BO} + R_{DO} = 0 \quad , \quad R_{AO} = 0$

$R_{AV} - R_{BV} + R_{DV} - q \cdot \ell = 0 \quad , \quad R_{AV} = q \cdot \ell = 100\ N$

$R_{BO} \cdot (L - h) + R_{DV} \cdot \ell - R_{DO} \cdot L - q \cdot \ell \left(\dfrac{\ell}{2}\right) = 0$

$R_{BO} (L-h) + R_{DV}\, \ell - R_{DV} \cdot \dfrac{\ell}{h} \cdot L - q \cdot \dfrac{\ell^2}{2} + M_A = 0$

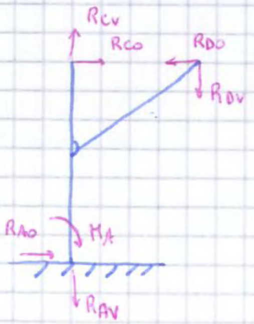


$R_{DV} - R_{CV} - q \cdot \ell = 0$

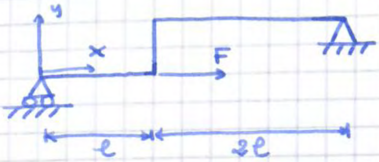
$R_{CO} = R_{DO}$

$R_{DV} \cdot \ell - q \cdot \dfrac{\ell^2}{2} = 0$

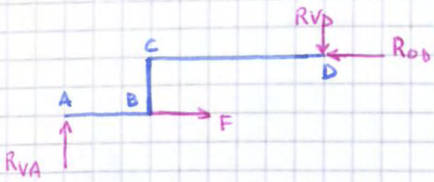
$R_{DV} = q \dfrac{\ell}{2} = 50\ N$



Es 2



$M = 3$
$m = 3$ sist.
$\ell = 0 \rightarrow$ ISOSTATICO



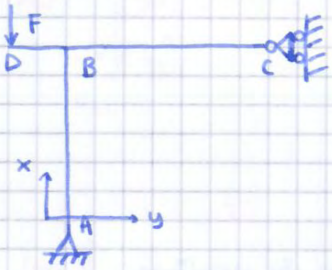
$$\begin{cases} x) & R_{OD} - F = 0 \\ y) & R_{VA} - R_{VD} = 0 \\ C\circlearrowleft & R_{VA} \cdot \ell - F \cdot h + R_{VD} \cdot 2\ell = 0 \end{cases}$$

$R_{OD} = F$

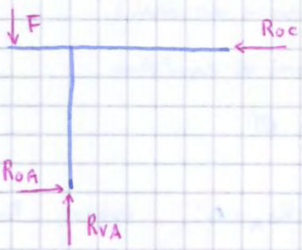
$R_{VA} = R_{VD}$

$R_{VA} = \dfrac{F \cdot h - R_{VD} \cdot 2\ell}{\ell}$

Es 3



$M = 3$
$m = 2+1 = 3$
$\ell = 0 \rightarrow$ ISOSTATICO



$$\begin{cases} x) & R_{OA} - R_{OC} = 0 \\ y) & F - R_{VA} = 0 \\ B\circlearrowleft & R_{OA} \cdot 2\ell + F\ell = 0 \end{cases}$$

$R_{OC} = R_{OA} = -\dfrac{F}{2}$

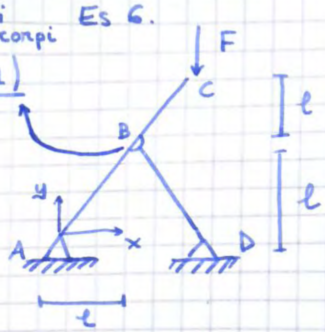
$R_{VA} = F$

$R_{OA} = \dfrac{-F}{2}$

num di corpi

$2(m-1)$

Es 6.



$F = 2\,kN$

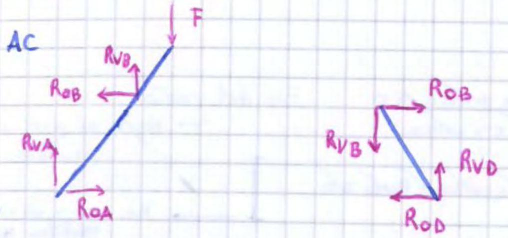
$\ell = 1\,m$

$M = 2 \cdot 3 = 6$

$m = 2+2+2 = 6$

$\quad \rightarrow 2(2-1) = 2$

$\ell = 0 \rightarrow$ ISOSTATICO.



(AC)

$R_{OA} - R_{OB} = 0 \qquad R_{OA} = R_{OB}$

$R_{VA} + R_{VB} - F = 0 \qquad R_{VA} = F - R_{VB}$

B↺ $-R_{VA} \cdot \cancel{\ell} + R_{OA} \cdot \cancel{\ell} - F \cdot \cancel{\ell} = 0$

$-F + R_{VB} + R_{VB} - F = 0$

$R_{VB} = F$

(BD)

$R_{OB} - R_{OD} = 0 \qquad R_{OB} = R_{OD}$

$R_{VB} - R_{VD} = 0 \qquad R_{VB} = R_{VD}$

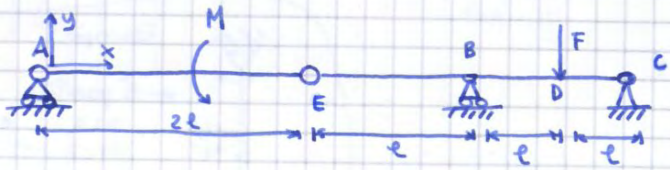
B↺ $R_{OD} \cdot \ell - R_{VD} \cdot \ell = 0$

$R_{OD} = R_{VD}$

$R_{OA} = R_{OB} = R_{VB} = R_{OD} = R_{VD} = F$

$R_{VA} = 0$

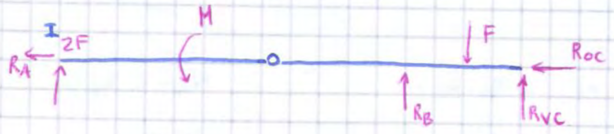
Es 7.



$2 \cdot 3 = 6 = M$

$m = 2+2+1+1 = 6$

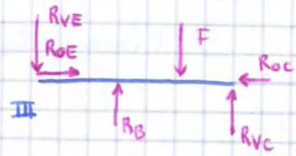
$\ell = 0 \rightarrow$ ISOSTATICO



$F = 1\,kN$

$M = 500\ Nm$

$\ell = 1\,m$



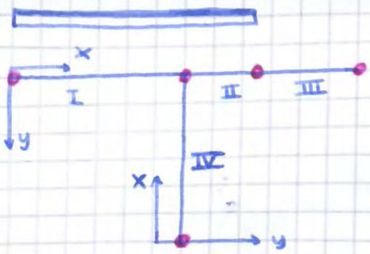
II
$$\begin{cases} R_A + R_{VE} = 0 \\ R_{OE} \overset{+2F}{=} 0 \quad ; \quad R_{OE} = -2\,kN \\ R_A \cdot 2\ell - M = 0 \end{cases}$$

$R_A = \dfrac{M}{2\ell} = 250\ N = -R_{VE}$

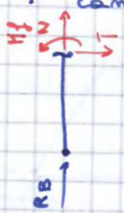
I
$$\begin{cases} R_A + R_B + R_{VC} - F = 0 \\ R_{OC} + 2F = 0 \quad ; \quad R_{OC} = -2\,kN \\ R_A \cdot 5\ell - M - F\ell + R_B \cdot 2\ell = 0 \end{cases}$$

$R_{VC} = F - R_B - R_A = 625\ N$

$R_B = \dfrac{F\ell + M - R_A \cdot 5\ell}{2\ell} = 125\ N$



4ª campata



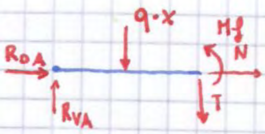
$N + R_B = 0$; $N = -R_B$

$T = 0$

$Mf = 0$

I	II	III	IV
$0 < x < 2\ell$	$2\ell < x < 3\ell$	$3\ell < x < 4\ell$	$0 < x < 2\ell$

Prima campata



$\oplus\rightarrow$ $R_{OA} + N = 0$ $\quad N = 0$

$\oplus\downarrow$ $T - R_{VA} + qx = 0$ $\quad T = R_{VA} - qx = -412,5\ N$

$\oplus\circlearrowright$ $Mf - R_{VA} \cdot x + qx \cdot \frac{x}{2} = 0$

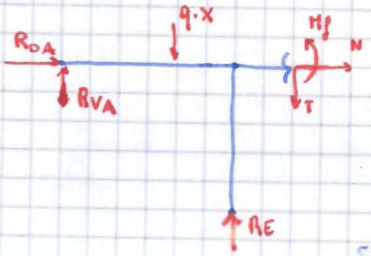
$Mf = R_{VA} \cdot x - q\frac{x^2}{2} = 0$

$Mf_{x=0} = 0$

$Mf_{x=2\ell} = R_{VA} \cdot 2\ell - q \cdot 2\ell^2 = -462,5 \cdot (1) - 100\,(2 \cdot 0,25) =$

$= -512,5$

Seconda campata
$2\ell < x < 3\ell$



$\oplus\rightarrow$ $R_{OA} + N = 0$

$\oplus\downarrow$ $T - R_{VA} + qx - R_E = 0$

$\oplus\circlearrowright$ $Mf + q \cdot x\left(\frac{x}{2}\right) - R_{VA} \cdot x - R_E\,(x - 2\ell) = 0$

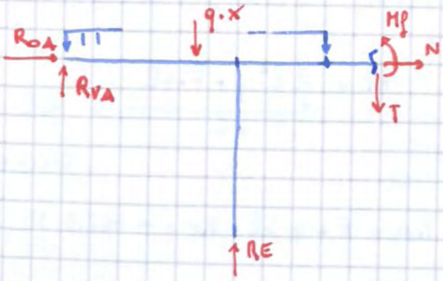
$Mf = R_{VA}x - q\frac{x^2}{2} + R_E\,(x - 2\ell)$

$Mf_{x=2\ell} = -512,5\ N$

$Mf_{x=3\ell} = -693,75 - 112,5 + 556,25 = -250\ N$

Terza campata

$\rightarrow 0 < x < \ell$



$\oplus\rightarrow$ $R_{OA} + N = 0$

$\oplus\downarrow$ $T - R_{VA} + qx - R_E = 0$

$\oplus\circlearrowright$ $Mf - R_{VA}\,(3\ell + x) + qx\left(x + \frac{3}{2}\ell\right) - R_E\,(x + \ell) = 0$

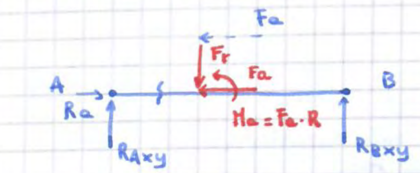
$Mf = R_{VA}\,(3\ell + x) - q3\ell\left(x + \frac{3}{2}\ell\right) + R_E\,(x + \ell)$

$-925 \quad -187,5 + 1112,5$

$Mf_{x=0} = -250\ N$

$Mf_{x=\ell} = 0$

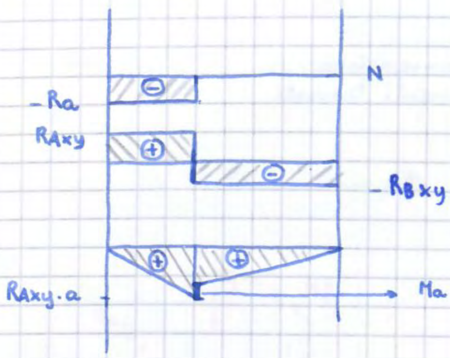
Piano xy



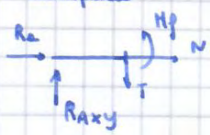
$R_a = F_a$

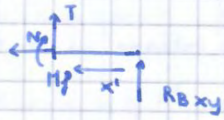
$R_{Axy} = \dfrac{F_r \cdot b}{L} + \dfrac{M_a}{L}$

$R_{Bxy} = \dfrac{F_r \cdot a}{L} - \dfrac{M_a}{L}$



1ª Campata





$R_a + N = 0 \quad , \quad N = -R_a$

$T - R_{Axy} = 0 \qquad T = R_{Axy}$

$M_f - R_{Axy} \cdot x = 0$

$M_f = R_{Axy} \cdot x$ — $x = 0$; $x = a$

$N = 0$

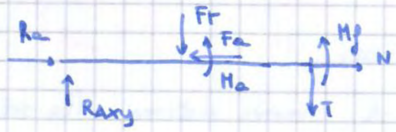
$T + R_{Bxy} = 0 \quad , \quad T = -R_{Bxy}$

$M_f - R_{Bxy} \cdot x' = 0$

$M_f = R_{Bxy}\, x'$

Si arriva allo stesso RISULTATO

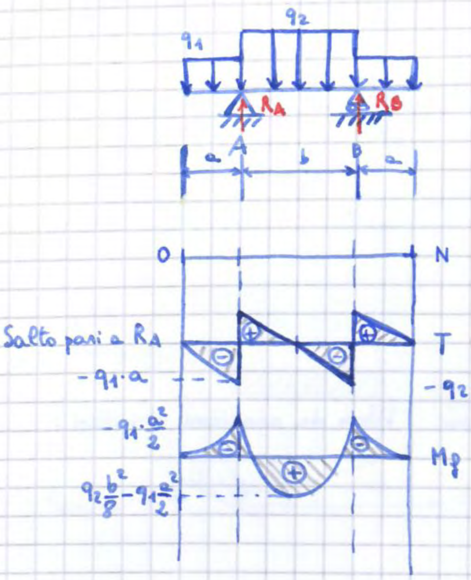
2ª campata



$+\circlearrowleft \quad M_f + M_a - R_{Axy} \cdot x + F_r \cdot (x - a) = 0$

$M_f = -M_a + R_{Axy} \cdot x - F_r (x - a)$ — $x = a$; $x = L$

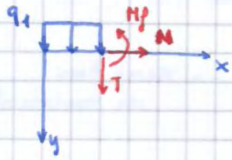
Tema d'esame dell'anno scorso



$$R_A = q_1 \cdot a + q_2 \cdot \frac{b}{2}$$

$$R_B = R_A$$

1ª campata



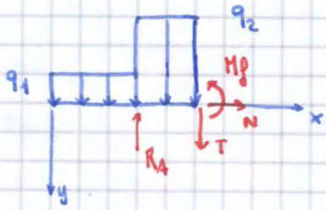
$\oplus\downarrow$ $T + q_1 \cdot x = 0$

$T = -q_1 x$ — $x = 0$; $x = a$

$\circlearrowleft +$ $Mf + q_1 x \cdot \frac{x}{2} = 0$

$Mf = -q_1 \cdot \frac{x^2}{2}$ — $x = 0$; $x = a$

2ª campata



$\oplus\downarrow$ $T - R_A + q_1 \cdot a + q_2 \cdot (x - a) = 0$

$T = -\cancel{q_1 a} - q_2 (x - a) + \cancel{q_1 a} + q_2 \cdot \frac{b}{2}$

$T = -q_2 (x - a) + q_2 \cdot \frac{b}{2}$ — $x = a$; $x = a + b$

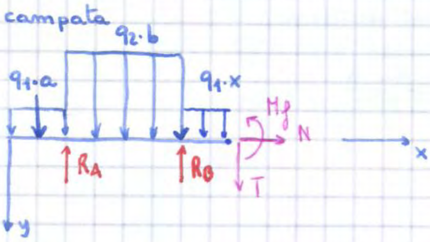
$T_{x = a + \frac{b}{2}} = 0$

↳ Massimo di momento flettente

$\circlearrowleft +$

$Mf + q_1 a \left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{q_2}{2} (x - a)^2 - R_A (x - a) = 0$ — $x = a$; $x = a + b$

3ª campata



$\oplus\rightarrow$ $N = 0$

$\oplus\downarrow$ $T + q_1 \cdot a + q_2 \cdot b + q_1 \cdot (x - (a + b)) - R_A - R_B = 0$

$T = R_A - q_1 \cdot a - q_2 b + R_B - q_1 (x - (a + b))$

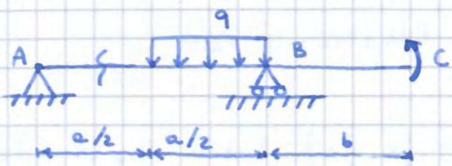
$T = q_1 a + \cancel{q_2 \frac{b}{2}} - \cancel{q_1 a} - \cancel{q_2 b} + \cancel{q_1 a} + \cancel{q_2 \frac{b}{2}} - q_1 (x - (a+b))$

$T = q_1 a - q_1 (x - (a + b))$ — $x = a + b$; $x = a + a + b$

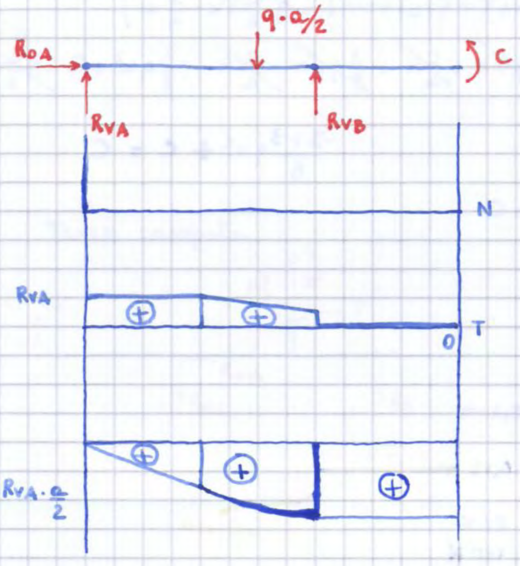
$\circlearrowleft +$

$$Mf + q_1 \cdot a \left(x - \frac{a}{2}\right) + q_2 b \left(x - \left(a + \frac{b}{2}\right)\right) + q_1 \cdot (x - (a + b)) \frac{(x - (a + b))}{2} - R_A (x - a) - R_B (x - (a + b)) = 0$$

Esercizio 5 esercitazione 2



$a = 0{,}8 \text{ m}$
$b = 0{,}3 \text{ m}$
$q = 80 \text{ N/m}$
$C = 100 \text{ N·m}$



$\oplus \rightarrow \quad R_{OA} = 0$

$\oplus \uparrow \quad R_{VA} + R_{VB} - q \cdot a/2 = 0$

$\oplus \circlearrowleft \quad C + R_{VB} \cdot a - q \cdot a/2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right) = 0$

$R_{VB} \cdot a = q \cdot a^2 \cdot \frac{3}{8} - C$

$R_{VB} = \frac{3}{8} q \cdot a - \frac{C}{a} = -101 \text{ N}$

$R_{VA} = q \frac{a}{2} - \frac{3}{8} q \cdot a + \frac{C}{a}$

$R_{VA} = \frac{1}{8} q a + \frac{C}{a} = 133 \text{ N}$

Primo campata

$\oplus \rightarrow \quad N = 0$

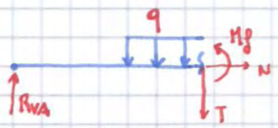
$\oplus \downarrow \quad T - R_{VA} = 0 \quad ; \quad T = R_{VA}$

$\oplus \circlearrowleft \quad Mf - R_{VA} \cdot x = 0$

$Mf = R_{VA} \cdot x \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{a}{2} \end{cases}$

$Mf_{x=\frac{a}{2}} = R_{VA} \cdot \frac{a}{2}$

Seconda campata



$\oplus \rightarrow \quad N = 0$

$\oplus \downarrow \quad T - R_{VA} + q \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$

$T = R_{VA} - q\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad \begin{cases} x = a/2 \\ x = a \end{cases}$

$T_{x=a/2} = R_{VA}$

$T_{x=a} = R_{VA} - q \cdot \frac{a}{2}$

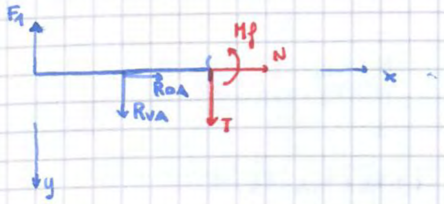
$\oplus \circlearrowleft \quad Mf - R_{VA} \cdot x + q\left(x - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4} a\right) = 0 \quad \begin{cases} x = a/2 \\ x = a \end{cases}$

$Mf_{x=a} = R_{VA} \cdot a + q \cdot \frac{1}{8} a^2$

$Mf = R_{VA} x - q x^2 + q \cdot \frac{a}{2} x + q \cdot \frac{3}{4} a x - q \cdot \frac{3}{8} a^2$

$Mf = -q x^2 + x\left(R_{VA} + \frac{5}{4} a \cdot q\right) - \frac{3}{8} q a^2$

Seconda campata



$N + R_{OA} = 0 \quad , \quad N = -R_{OA}$

$T + R_{VA} - F_1 = 0 \quad , \quad T = F_1 - R_{VA}$

$Mf + R_{VA}(x - \ell) - F_1 \cdot x = 0$

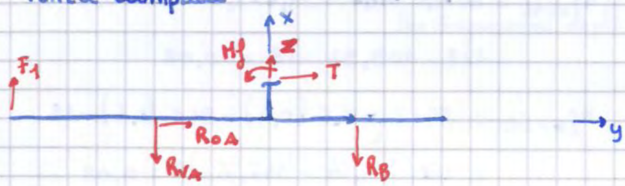
$Mf = F_1 \cdot x - R_{VA} \cdot x + R_{VA} \cdot \ell \quad \to x = \ell \quad \to x = 3\ell$

$Mf_{x=3\ell} = F_1 \cdot 3\ell - R_{VA} \cdot 3\ell + R_{VA} \cdot \ell$

$= F_1 \cdot 3\ell - R_{VA} \cdot 2\ell = 80 \cdot 1{,}2 - 91{,}6 \cdot 0{,}8 =$

$= 96 - 73{,}28 = 22{,}72$

Terza campata



$N + F_1 - R_{VA} - R_B = 0 \quad , \quad N = R_{VA} + R_B - F_1 = 0$

$T + R_{OA} = 0 \quad , \quad T = -R_{OA}$

$Mf + R_{OA}\, x + R_{VA} \cdot 2\ell - F_1 \cdot 3\ell - R_B \cdot \ell = 0$

$Mf = F_1 \cdot 3\ell + R_B \cdot \ell - R_{VA} \cdot 2\ell - R_{OA}\, x \quad \to x = 0 \quad \to x = h$

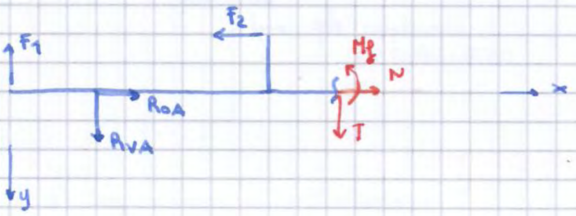
$Mf = R_{VA} \cdot 3\ell + R_B \cdot 3\ell + R_B \cdot \ell - R_{VA} \cdot 2\ell - R_{OA}\, x$

$= R_{VA} \cdot \ell + R_B \cdot 4\ell - R_{OA}\, x$

$= 36{,}64 + (-18{,}56) - R_{OA}\, x$

$-120 \cdot 0{,}15 = -18$

Quarta campata



$N + R_{OA} - F_2 = 0 \quad , \quad N = F_2 - R_{OA} = 0$

$T + R_{VA} - F_1 = 0 \quad , \quad T = F_1 - R_{VA} = -11{,}6$

$Mf + F_2 \cdot h + R_{VA}(x - \ell) - F_1 x = 0$

$Mf = F_1 x - R_{VA} x + R_{VA} \cdot \ell - F_2 \cdot h \quad \to x = 3\ell \quad \to x = 4\ell$

$Mf_{x=3\ell} = F_1 \cdot 3\ell - R_{VA} \cdot 3\ell + R_{VA} \cdot \ell - F_2 \cdot h$

$= F_1 \cdot 3\ell - R_{VA} \cdot 2\ell - F_2 \cdot h$

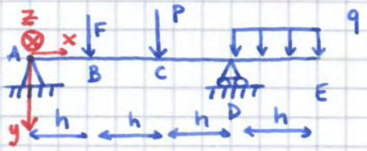
$= 81 \cdot 1{,}2\,m - 91{,}6 \cdot 0{,}8\,m - 120 \cdot 0{,}15\,m$

$= 96 - 73{,}28 - 18 = 5{,}28$

$Mf_{x=4\ell} = 81 \cdot 4\ell - R_{VA} \cdot 4\ell + R_{VA} \cdot \ell - F_2 \cdot h$

$= 129{,}6 - 146{,}56 + 36{,}64 - 18$

Esercitazione 2 (Sesama)

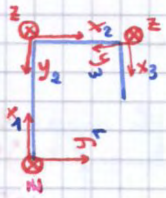


$h = 3{,}7\ m$
$P = 20\ kN$
$F = 25\ kN$

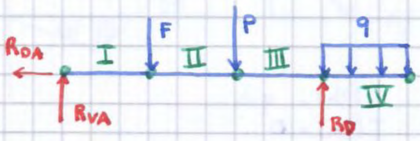
$q = 30\ kN/m$

1) $m = 3$
$m = 2+1 \rightarrow$ ISOSTATICA

2) - Sist. di riferimento globale
+
Per diagrammi degli sforzi $\rightarrow$ Sist. di riferimento locale (Asse x sull'asse della trave)



3) Calcolo di reazioni vincolari



$\oplus\downarrow \quad F + P + q \cdot h - R_{VA} - R_D = 0$

$\overset{\oplus}{\leftarrow} \quad R_{OA} = 0$

$\circlearrowleft_{D} \quad R_{VA} \cdot 3h - F \cdot 2h - P \cdot h + q \cdot h \cdot \frac{h}{2} = 0$

$R_{VA} = F \cdot \frac{2}{3} + P \frac{1}{3} - q \frac{h}{6} = 4833\ N$

$R_D = 151167$

Solo per calcolo di reazioni vincolari
$\hookrightarrow$ qh applicato in BARICENTRO

4) Diagrammi di sollecitazione
$\hookrightarrow$ Discontinuità $\longrightarrow$ Carichi conc.
Reaz. vincolari
Dove iniziano e finiscono carichi distribuiti
Dove cambia geometria
$\downarrow$
Campate
$\downarrow$
Sezioni

Campate

I) $0 < x < h$

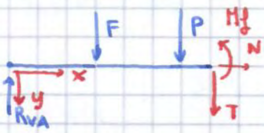
II) $h < x < 2h$

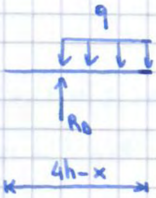
III) $2h < x < 3h$

IV) $3h < x < 4h$

In ogni sezione
$\hookrightarrow$ Si rompe solido in solo due parti

III) $2h < x < 3h$





$N = 0$

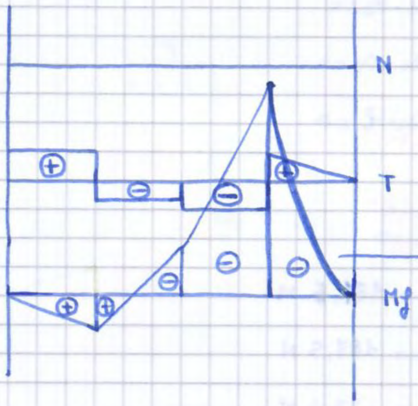
$T = R_{VA} - F - P$

$M_f = -P(x-2h) - F(x-h) + R_{VA} \cdot x$

$M_f(2h) = -56736\,N$

$M_f(3h) = -205354$

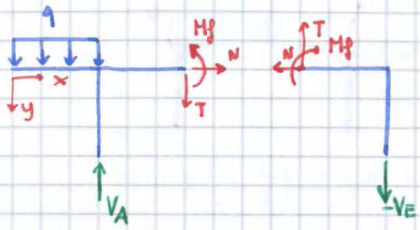
Diagrammi



(Anche se di solito si disegna al contrario)

Per concavità → Se taglio in modulo decresce
↓
Pendenza in modulo decresce
e viceversa

II) $\ell < x_1 < 3\ell$



$N = 0$

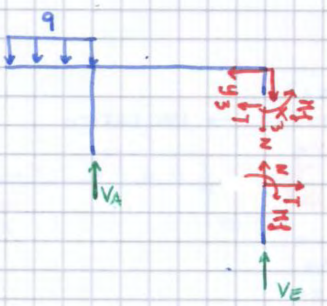
$T = -V_E = 37{,}5\ N$

$M_f = V_E\,(3\ell - x)$

$M_f(3\ell) = 0$

$M_f(\ell) = -75\ N$

IV) $0 < x_3 < \ell$

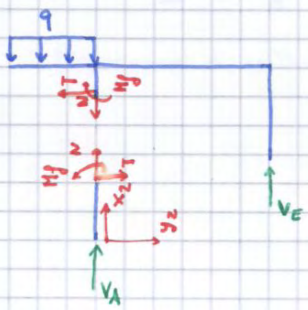


$N = -V_E = 37{,}5\ N$

$T = 0$

$M_f = 0$

III) $0 < x_2 < \ell$

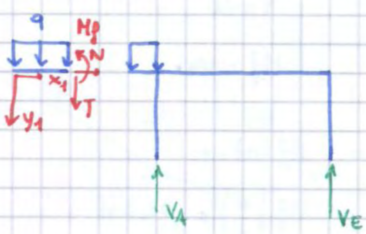


$N = -V_A = -187{,}5\ N$

$T = 0$

$M_f = 0$

I) $0 < x_1 < \ell$



$N = 0$

$T = -q \cdot x_1$

$M_f = -q\,x_1 \left(\frac{x_1}{2}\right)$

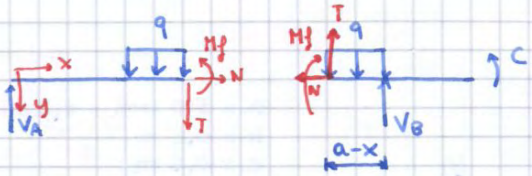
$T(0) = 0$

$T(\ell) = -q \cdot \ell$

$M_f(0) = 0$

$M_f(\ell) = -q\frac{\ell^2}{2}$

II)



$N = 0$

$V_A - q\left(x - \frac{a}{2}\right) - T = 0$

$T = V_A - q\left(x - \frac{a}{2}\right)$

$Mf = V_A \cdot x - \frac{q\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)}{2}$

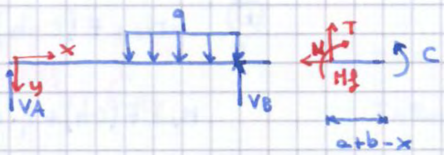
$Mf\left(\frac{a}{2}\right) = V_A \cdot \frac{a}{2} = 53{,}2\,N$

$T\left(\frac{a}{2}\right) = V_A = 133\,N$

$Mf(a) = 100$

$T(a) = 101\,N$

III)

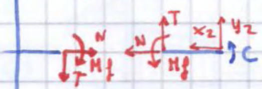


$N = 0$

$T = 0$

$Mf = C$

Altrimenti



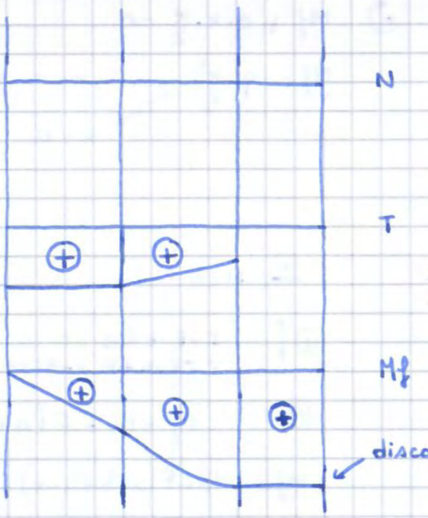
$0 < x_2 < b$

$N = 0$

$T = 0$

$Mf = -C$

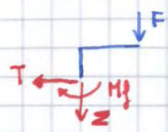
Diagrammi di sollecitazione



discontinuità → perché c'è coppia concentrata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 141 di 270

Terza campata $(0 \leq x \leq y)$

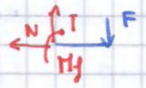


$N = -F = -2000\ N$

$T = 0$

$M_f = -F \cdot h = -300\ N \cdot m$

Quarta campata $(0 \leq x \leq h)$

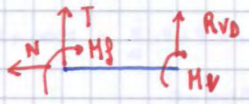


$T = F = 2000\ N$

$N = 0$

$M_f = -F \cdot (h - x)$ → $x = 0$ $M_f = -F \cdot h = -300\ N \cdot m$
→ $x = h$ $M_f = 0$

Quinta campata $(a+b \leq x \leq a+b+c)$



$N = 0$

$T + R_{VD} = 0$, $T = -R_{VD} = -3500\ N$

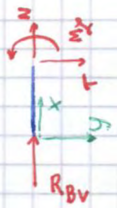
$M_f + M_v - R_{VD} \cdot (a+b+c-x) = 0$

$M_f = R_{VD}(a+b+c-x) - M_v$

$M_f(a+b) = R_{VD} \cdot c - M_v = 1750 - 1975 = -225\ N \cdot m$

$M_f(a+b+c) = -M_v = -1975\ N \cdot m$

Seconda campata $(0 \leq x \leq c)$

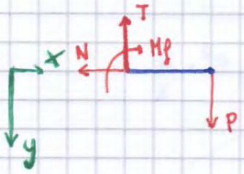


$N = -R_{Bv}$

$T = 0$

$\oplus$ $Mf = 0$

Tenza campata $(a \leq x \leq a+b)$



$\oplus$ $N = 0$

$\oplus$ $T - P = 0 \,, \quad T = P$

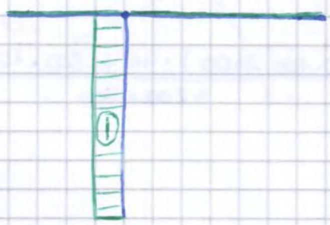
$\oplus$ $Mf + P \cdot (a+b-x) = 0$

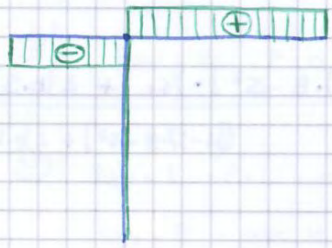
$Mf = -P(a+b-x)$

$Mf(a) = -P(b) = -2000 \cdot (0{,}4)$

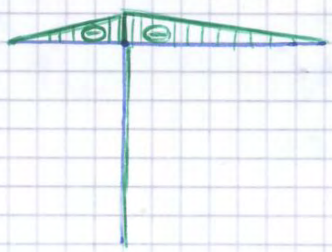
$Mf(a+b) = 0$

N





T

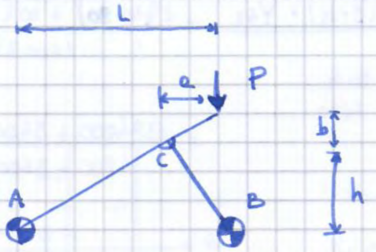


Mf

$$I_{x G_2} = \frac{1}{\cancel{12}\,6}\, b \cdot s^3 = \frac{20 \cdot 20^3}{6} = 26'666$$

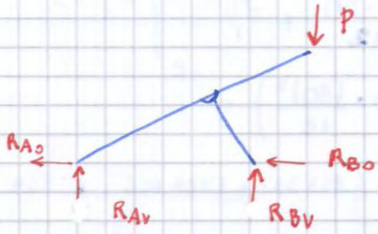
$$I_{x G} = I_{x G_1} + A \cdot (40-34)^2 + I_{x G_2} + A \cdot (34-10)^2$$
$$= 512'000 + 3200\,(36) + 26666 + 2 \cdot (400) \cdot (24)^2 =$$
$$= 512000 + 115200 + 26666 + 460800 = 1'114'666$$

Esercizio 6



$2+2+2=6=m$

$m=6$ ISOSTATICA

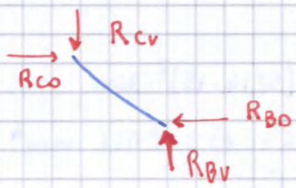


$\xrightarrow{\oplus}$ $R_{AO} = -R_{BO} = -576$

$\oplus\uparrow$ $R_{AV} + R_{BV} - P = 0$ $\qquad R_{AV} = 0$

$\oplus\circlearrowleft$ $R_{BV} \cdot L - P \cdot L = 0$

$R_{BV} = P = 1000\ N$



$\xrightarrow{\oplus}$ $R_{CO} = R_{BO} = 576$

$\oplus\uparrow$ $R_{BV} = R_{CV} = 1000\ N$

$\oplus\circlearrowleft$ $R_{BV} \cdot a - R_{BO} \cdot (h-b) = 0$

$$R_{BO} = R_{BV} \cdot \frac{a}{(h-b)} = 1000 \cdot \frac{0{,}15}{(0{,}346 - 0{,}086)}$$
$$= 576$$

ESERCITAZIONE 4 (Tensioni)

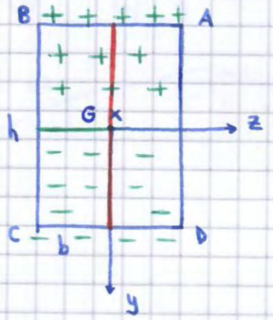
$\sigma_x = \frac{N}{A}$ costanti — Problema: segno → Trazione / → Compressione

$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$

$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$

(Sempre perpendicolari a sezione)

Esercizio 2



Momento rispetto a z negativo flettente

$M_z \ominus$

Assi di simmetria → Assi centrali di inerzia

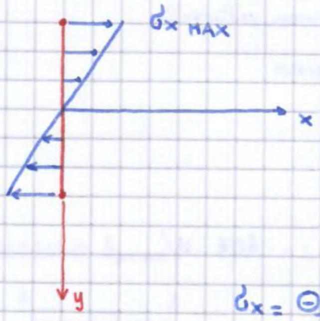
↳ Incrocio: G

↳ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ MAX

↳ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ MIN

Fra tutti ruotando

↳ sono max e min



• Struttura in deformazione si dispone in INERZIA MINIMA

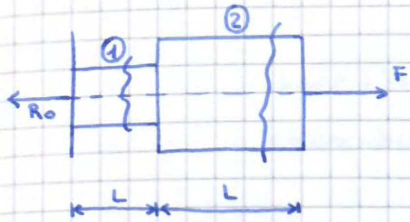
↳ Si deforma dove mom. d'inerzia è minimo

$\sigma_x = \ominus \frac{M_z}{I_z} (y)$

↳ I_z Sempre positivi

$\sigma_{x\,MAX} = \frac{-M_z \left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{b h^3}{12}}$ $\sigma_{x\,MAX} = \frac{6\, M_z}{b \cdot h^2}$

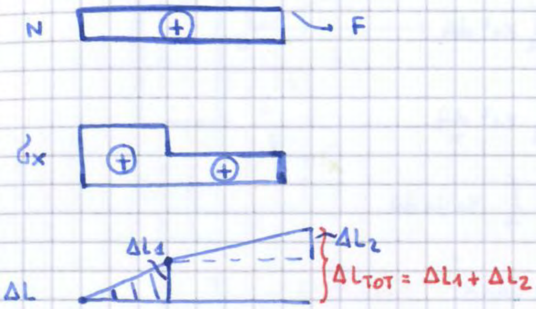
Esercizio 8



① A

② 2A

$R_o = F$



Si romperà in 1ª campata

└ perché sezione è minore

$$\sigma_{①} = \frac{F}{A}$$

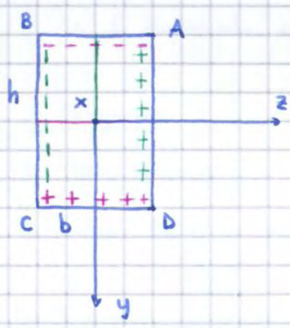
$$\sigma_{②} = \frac{F}{2A}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \qquad \varepsilon_x = \frac{N}{EA} \qquad \Delta L = \frac{N}{EA} \cdot L$$

1. $\Delta L_x = \frac{F}{EA} \cdot x$

2. $\Delta L_x = \frac{F}{2AE} \cdot x$

Esercizio 3



M_z ⊕

M_y ⊕

N ⊕

Tensioni negli spigoli?

$$A: \sigma_{x_A} = \frac{N}{b \cdot h} - \frac{M_z}{b \cdot h^3/12} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_y}{h \cdot b^3/12} \cdot \frac{b}{2}$$

$$B: \sigma_{x_B} = \frac{N}{b \cdot h} - \frac{M_z}{b \cdot h^3/12} \cdot \frac{h}{2} - \frac{M_y}{h \cdot b^3/12} \cdot \frac{b}{2}$$

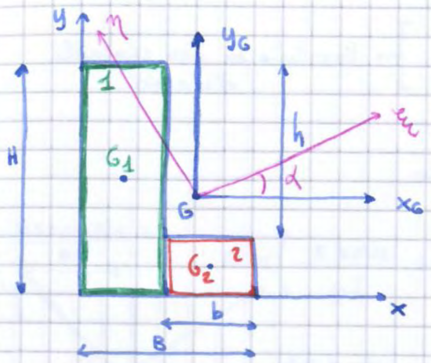
$$C: \sigma_{x_C} = \frac{N}{b \cdot h} + \frac{M_z}{b \cdot h^3/12} \cdot \frac{h}{2} - \frac{M_y}{h \cdot b^3/12} \cdot \frac{b}{2}$$

$$D: \sigma_{x_D} = \frac{N}{b \cdot h} + \frac{M_z}{b \cdot h^3/12} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_y}{h \cdot b^3/12} \cdot \frac{b}{2}$$

La Trave si inflette in direzione del momento di inerzia minimo

↳ Momento centrale d'inerzia minimo
(Dove rigidezza è minima)

Esempio di calcolo di momento centrifugo



$H = 6$ cm

$h = 5{,}2$ cm

$B = 4$ cm

$b = 3{,}2$ cm

$y_G = 2{,}1$ cm

$x_G = 1{,}1$ cm

$I_{x_G} = 25{,}8 \text{ cm}^4$

$I_{y_G} = 9{,}12 \text{ cm}^4$

Rispetto assi baricentrici

↳ $I_{x_G y_G} = A_1 \cdot (-x_{GG_1})(y_{G_1G}) + A_2 (x_{G_2G})(-y_{G_2G}) = -8{,}682 \text{ cm}^4$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}} \longrightarrow \alpha = \dots$$

FLESSIONE DEVIATA

2 Momenti

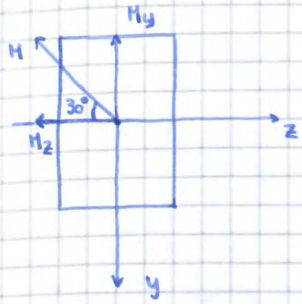
o 1 Momento spostato rispetto ad asse baricentrico

2 Categorie

1. Assi baricentrici non sono centrali d'inerzia
2. Assi baricentrici sono centrali d'inerzia

- Piano neutro non è ~~[illegible]~~ ⊥ a piano di sollecitazione

Esercizio 1



$h = 89\ mm$

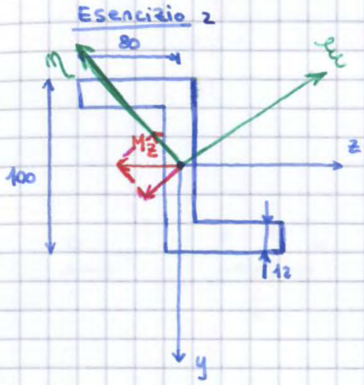
$b = 38\ mm$

$M = 180\ N \cdot m$

$\beta \cong 72{,}4°$?

Punto più sollecitato e σ_{MAX} ?

Esercizio 2

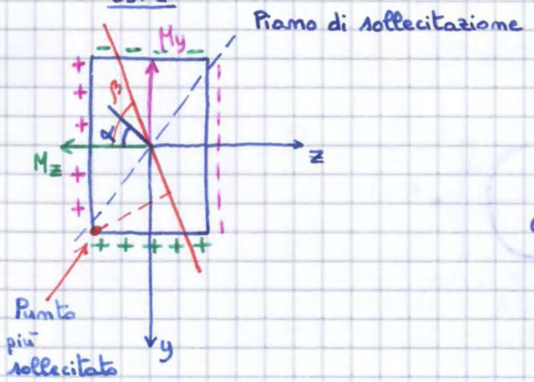


I_y, I_z, I_{yz}

α, ξ, η

M_ξ, M_η

Es. 1



$M_y = M \cdot \sin\alpha$

$M_z = M \cos\alpha$

$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = 0$

$$\frac{\cancel{M}\sin\alpha}{I_y} \cdot z + \frac{\cancel{M}\cos\alpha}{I_z} y = 0$$

$$\frac{\sin\alpha \cdot z}{I_y} = -\frac{\cos\alpha\ y}{I_z}$$

$$tg\,\alpha = -\frac{I_y}{I_z}\frac{y}{z} \qquad y = -z\,tg\,\beta$$

$$tg\,\alpha = \frac{I_y}{I_z}\,tg\,\beta$$

$$tg\,\beta = tg\,\alpha\,\frac{I_z}{I_y}$$

$$\beta = arctg\left(tg\,\alpha \cdot \frac{I_z}{I_y}\right)$$

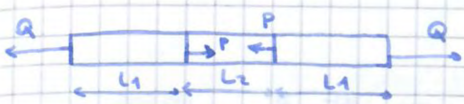
$$\beta = arctg\left(tg\,\frac{\pi}{6} \cdot \frac{h^2}{b^2}\right) = 72{,}47°$$

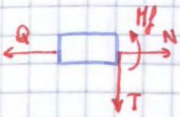
$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$\frac{I_z}{I_y} = \frac{\cancel{b} \cdot h^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{h} \cdot b^{\cancel{3}\,2}} = \frac{h^2}{b^2}$$

Esercizio 5





$Mf = 0$

$T = 0$

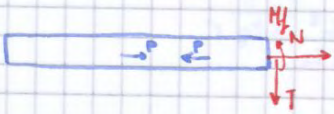
$N = Q$

$Mf = 0$

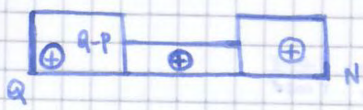
$T = 0$

$N + P = Q$

$N = Q - P$



$N = Q$



$$\sigma_{xMAX} = \frac{N}{A} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{30000\ N}{\pi\ 25^2\ mm^2} = 15{,}28\ N/mm^2$$

$$\Delta l = \frac{N}{A \cdot E} \cdot L$$

$$E = 210'000\ N/mm^2$$

$$\Delta l_1 = \frac{Q}{1962{,}5 \cdot 210000} \cdot 400 = \frac{12000000}{412.125.000} = 0{,}029\ mm$$

$$\Delta l_2 = \frac{Q-P}{1962{,}5 \cdot 210000} \cdot 800 = 0{,}038\ mm$$

$$\Delta L = 0{,}038\ mm + 2 \cdot 0{,}029\ mm = 0{,}096\ mm$$

$\cancel{\tau = \frac{Mt}{Ip} \cdot \frac{D}{2}}$ $\quad \cancel{= \frac{175500}{\frac{\pi D^3}{16}} \cdot \frac{D}{2}}$

$\cancel{\frac{175500 \cdot 16}{\pi} = 105\, D^3}$

$\cancel{D^3 = \frac{175500 \cdot 16}{105 \cdot \pi}}$

$\cancel{D = 20\ mm}$

(freccia: $\Delta\vartheta \cdot b$)

$$\frac{\Delta\vartheta}{L} = \frac{Mt}{I_p G}$$

$Mt = P \cdot b = 450\,N \cdot 350\ mm = 157'500\ N \cdot mm$

$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$

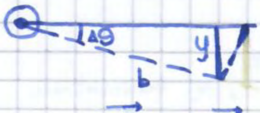
$$\Delta\vartheta = \frac{Mt}{I_p \cdot G} \cdot L$$

$$\Delta\vartheta = \frac{157'500 \cdot 500}{\frac{\pi D^4}{32} \cdot 78000} = \frac{11464.9}{D^4}$$

$$\frac{11465 \cdot 350}{D^4} < 25$$

$D^4 > 160.510$

$D > 20\ mm$



$y = b\,\Delta\vartheta$

$\vec{d\ell} = r\,\vec{d\vartheta}$

$\longrightarrow$ Per $\Delta\vartheta$ piccoli $\quad y = r\,d\vartheta$

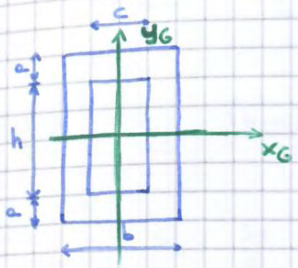
Teorema di Trasposizione (del trasporto)

$S_{x_G} = 0$

I_{x_G} = minimo

$$I_\xi = I_\eta + A(\eta - \xi)^2$$

Es 1



a = 100 mm
b = 400 mm
c = 100 mm
h = 400 mm

Baricentro su assi di simmetria

$$A = b(h+2a) - c\cdot h$$

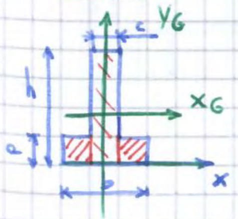
$$I_{x_G} = I_{x_G}^P - I_{x_G}^V$$

$$= \frac{b(h+2a)^3}{12} - \frac{ch^3}{12}$$

$$I_{y_G} = I_{y_G}^P - I_{y_G}^V$$

$$= \frac{(2a+h)b^3}{12} - \frac{c^3\cdot h}{12}$$

Es 2



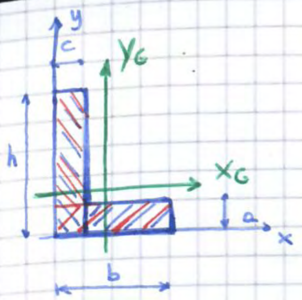
a = 100 mm
b = 400 mm
c = 120 mm
h = 500 mm

$$A = b\cdot a + c(h-a)$$

$$S_x = S_x^{①} + 2S_x^{②} = \frac{ch^2}{2} + 2\,\frac{b-c}{2}\cdot\frac{a^2}{2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 186 \text{ mm}$$

$$I_{x_G}^{TUTTO} = I_x^{TUTTO} - A y_G^2$$



$a = 100$ mm

$b = 400$ m

$c = 150$ mm

$h = 500$ mm

$$A = (b \cdot a) + (h-a) \cdot c$$

$$S_x = \frac{(b-c)\cdot a^2}{2} + \frac{c \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \frac{(h-a)\cdot c^2}{2} + \frac{a \cdot b^2}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 125 \text{ mm}$$

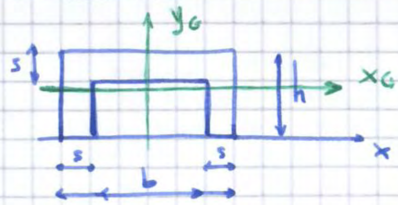
$$y_G = \frac{S_x}{A} = 200 \text{ mm}$$

$$I_{x_G} = \boxed{I_x} - A y_G^2$$

$$I_x = \frac{(b-c)\cdot a^3}{3} + \frac{c \cdot h^3}{3}$$

$$I_{y_G} = \boxed{I_y} - A x_G^2$$

$$I_y = \frac{(h-a)\cdot c^3}{3} + \frac{a \cdot b^3}{3}$$

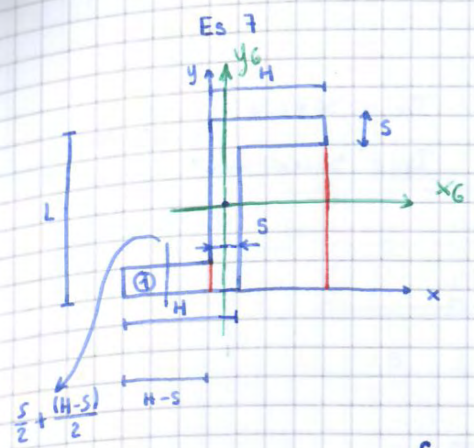


$$A = b \cdot h - (b-2s)(h-s)$$

$$S_x = S_x^P - S_x^V$$
$$= \frac{b \cdot h^2}{2} - \frac{(b-2s)(h-s)^2}{2}$$

$$I_{y_G} = I_{y_G}^P - I_{y_G}^V = \frac{b^3 \cdot h}{12} - \frac{(b-2s)^3(h-s)}{12}$$

Es 7



$L = 120$ mm

$H = 60$ mm

$s = 10$ mm

$$A = 2H \cdot s + (L - 2s) \cdot s$$

$$S_x = S_x^P - S_x^V + S_x^1$$

$$= \frac{L^2 \cdot H}{2} - \frac{(H-s) \cdot (L-s)^2}{2} + \frac{(H-s) \cdot s^2}{2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$I_{xG} = \underbrace{I_x}_{} - A \cdot y_G^2 = 4{,}47 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\frac{H \cdot L^3}{3} - \frac{(H-s)(L-s)^3}{3} + \frac{(H-s) \cdot s^3}{3} - A \cdot y_G^2$$

$$I_{yG} = \underbrace{I_y}_{} - A \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 1{,}12 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

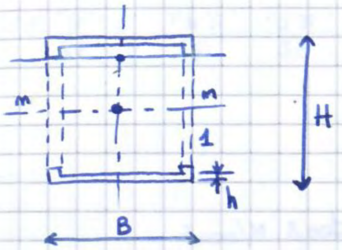
$$\frac{s \cdot H^3}{3} + \frac{L \cdot s^3}{3} + \frac{s(H-s)^3}{3} - A\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

Oppure

$$I_{xG} = 2\left[\frac{H}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{(H-s)}{3}\left(\frac{L}{2} - s\right)^3\right]$$

$$I_{yG} = \frac{L s^3}{12} + 2\left(\frac{s(H-s)^3}{12} + (H-s) \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2} + \frac{(H-s)}{2}\right)^2\right)$$

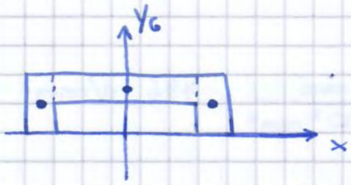
Esercizio 6 esercitazione 3



$$I_{mm} = I_x^{PIENO} - I_x^{VUOTO} - (I_x^1)$$

$$I_{mm} = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{(B-2s)(H-2s)^3}{12} - 2\,\frac{s \cdot (H-2h)^3}{12}$$

$$= \frac{80 \cdot 90^3}{12} - \frac{72 \cdot 82^3}{12} - 2 \cdot \frac{4\,(10)^3}{12} = 1.551.125$$



$$Y_G = \frac{S_x}{A} = 29{,}4 \qquad A = (B-2s) \cdot s + h \cdot s \cdot 2 = 72 \cdot 4 + 40 \cdot 4 \cdot 2 = 608$$

$$Y_G \cdot A = 2 Y_{G1} \cdot A_1 + Y_{G2} \cdot A_2$$

$$S_x = 2 \cdot \frac{s \cdot h^2}{2} + \frac{(B-2s)\,s^2}{2} + (B-2s)s \cdot (h-s)$$

$$= 2 \cdot \frac{4 \cdot 40^2}{2} + \frac{(72) \cdot 4^2}{2} + 72 \cdot 4 \cdot 36 = 17.344$$

$$S_x = \frac{h^2 \cdot B}{2} - \frac{(h-s)^2 \cdot (b-2s)}{2} = 17344$$

$$Y_{mm} = 0$$

$$Y_G = 28{,}5 + \left(\frac{H}{2} - h\right) = 33{,}5$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 167 di 270

$D = 32\ mm$
$d = 22\ mm$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = 79.905$$

$$\tau_{MAX} = \frac{260000}{79905} \cdot 16 = 52\ N/mm^2$$

$$\gamma = \frac{52}{77000} = 0{,}00068$$

$\sigma_A = -0{,}5 + \ldots\ldots\ldots = -2.625$ MPa

$\sigma_B = -0{,}5 +$

$\sigma_C = -0{,}5 + \ldots\ldots\ldots = 1.625$ MPa

$\sigma_D = -0{,}5 +$

2) Flessione deviata

• Piano neutro non è perpendicolare a piano di sollecitazione

$$\sigma_x = M_f \left[\underbrace{\frac{\cos\alpha}{I_z} y + \frac{\sin\alpha}{I_y} z}_{\text{Distanze dal piano neutro}} \right] = 0$$

Lo pongo $= 0$ Perché nel piano neutro le σ sono nulle

$$tg\alpha = -\frac{y}{z} \cdot \frac{I_y}{I_z}$$

$$tg\beta = -\frac{y}{z}$$

$$\boxed{tg\beta = tg\alpha \cdot \frac{I_z}{I_y}}$$

$I_z > I_y$ → Più è grande ↓ Più tende a piano verticale il piano neutro

$tg\beta \gg tg\alpha$

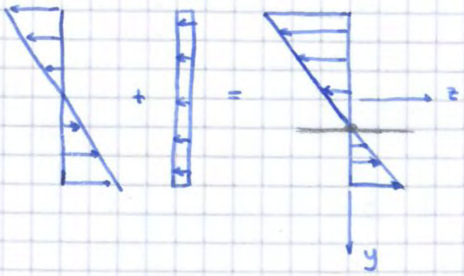
Tende ad andare su piano con mom. d'inerzia minore

$$tg\alpha = \frac{M_y}{M_z}$$

• Piano di sollecitazione / inflessione è ⊥ a M_f

3) Piano neutro con sforzo normale → Trasla

$$\sigma_x = M_f \left[\frac{\cos\alpha}{I_z} y + \frac{\sin\alpha}{I_y} z \right] + \left(-\frac{P}{A} \right) = 0$$

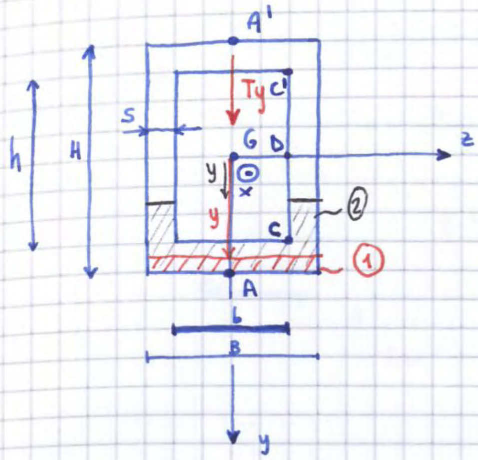


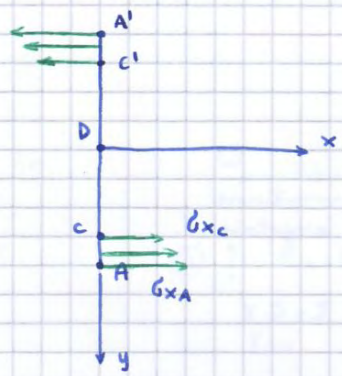
Piano neutro si sposta verso C

Esercizio d'esame

TAGLIO in trave inflessa

M_z (+)





A) $\sigma_{x\,MAX}$, $\tau_{xyA} = 0$

C) σ_{xC}, τ_{xy_C}

D) 0, $\tau_{xy\,MAX}$

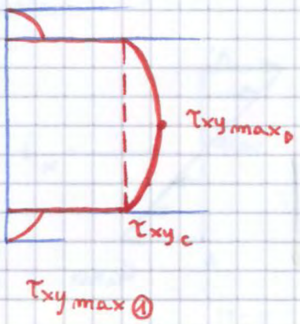
$$\sigma_{xA} = \frac{M_z}{I_z} y_{max} = \frac{M_z}{I_z}\frac{H}{2}$$

$$\sigma_{xC} = \frac{M_z}{I_z}\cdot\frac{h}{2}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_y}{I_z}\cdot\frac{S_z^*}{\text{corda}}$$

$$\tau_{xy\,①} = \frac{T_y}{I_z B}\int_y^{H/2} B y\, dy = \frac{T_y}{I_z B}\left\{\frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4}-y^2\right)\right\} \begin{cases} \frac{h}{2} \\ \frac{H}{2} \end{cases}$$

$$\tau_{xy\,①\,max} = \frac{T_y}{I_z B}\underbrace{\left[\frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4}-\frac{h^2}{4}\right)\right]}_{S_1}$$

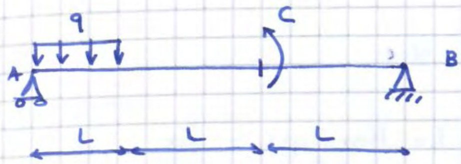


$$\tau_{xy\,②} = \frac{T_y}{I_z 2s}\left\{S_{1z} + \int_y^{h/2} 2s\, y\, dy\right\}$$

$$= \frac{T_y}{I_z 2s}\left\{S_{1z} + s\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\right\} \begin{cases} y=\frac{h}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\tau_{xy\,max\,②} = \frac{T_y}{I_z\cdot 2s}\left\{S_{1z} + \frac{s\cdot h^2}{4}\right\}$$

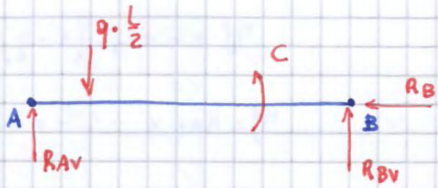
Esercizio 2 temi d'esame



$q = 600$ N/m

$C = 1500$ N·m

$L = 1$ m



$\xrightarrow{+}$ $R_B = 0$

$\oplus \uparrow$ $R_{AV} + R_{BV} = q \cdot L$

R_{AV}

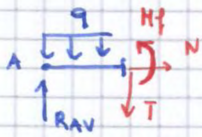
$\circlearrowleft A$ $-q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + C + R_{BV} \cdot 3L = 0$

$$R_{BV} = \frac{q\frac{L^2}{2} - C}{3L} = \frac{q \cdot \frac{1}{2} - 1500}{3}$$

$$R_{BV} = \frac{-1200}{3} = -400 \text{ N}$$

$R_{AV} = 600 + 400 = 1000$ N

Prima campata $0 < x < L$



$R_{AV} - T - qx = 0$

$T = R_{AV} - qx = 1000 - 600x$ → $x = 0$: 1000; $x = L$: 400

$N = 0$

$M_f + qx \cdot \frac{x}{2} - R_{AV} \cdot x = 0$

$M_f = R_{AV} \cdot x - q\frac{x^2}{2}$ → $x = 0$: 0; $x = L$: $1000 - 300 = 700$ N·m

Seconda campata $L < x < 2L$

$T = R_{AV} - qL = 400$

$N = 0$

$M_f - R_{AV}x + q \cdot L \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$

$M_f = R_{AV}x - q \cdot L \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right)$ → $x = L$: 700 N·m

$x = 2L$: $2000 - 600 \cdot \frac{3}{2} = 1100$ N·m

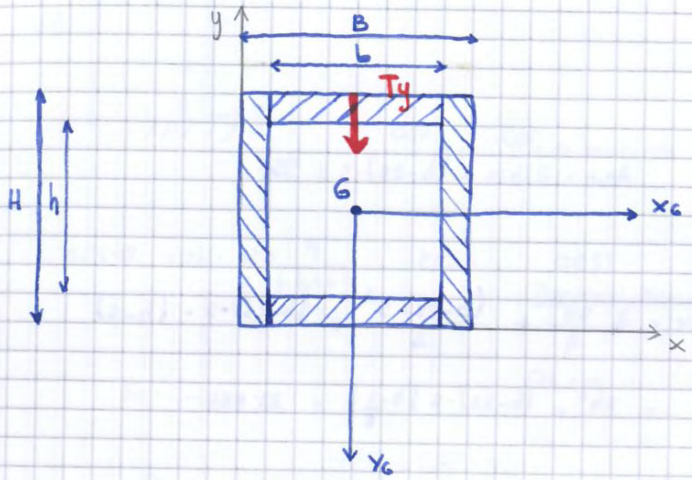
Es 2, esame scritto del 11/07/2013

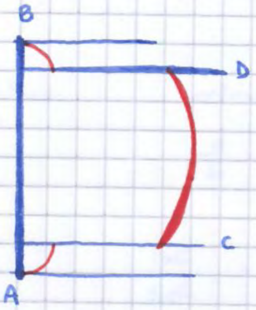
$B = 100\ mm$

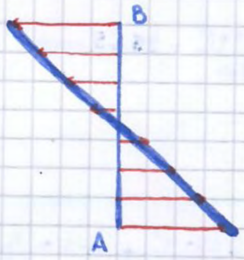
$b = 80\ mm$

$H = 60\ mm$

$h = 40\ mm$







$x_G = B/2$

$y_G = H/2$

A è il punto più sollecitato

$$I_{x_G} = 2 I_x^1 - A_1 \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2 + 2\left(\left(\frac{B-b}{2}\right)\cdot\frac{H^3}{12}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{b}{3}\left(\frac{H-h}{2}\right)^3 - b\left(\frac{H-h}{2}\right)\cdot\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \cancel{2}\,\frac{(B-b)}{\cancel{2}}\,\frac{H^3}{12}$$

τ_{zy} $\quad T_y = 2000\ N$

$$\tau_{zy} = \frac{T \cdot S_x^*}{B \cdot I_z} = \frac{T \cdot B}{(B)\ I_z}\left(\frac{H^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right) \qquad \frac{h}{2} < y < \frac{H}{2}$$

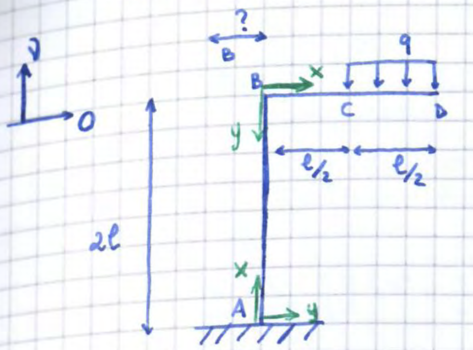
$$S_x^* = B \cdot \int_y^{H/2} y\,dy = B\left(\frac{H^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\tau_{zy} = \frac{T}{(B-b)\,I_z}\left(B\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)\right) \qquad 0 < y < \frac{h}{2}$$

σ_z $\quad M_f = 120\ N \cdot m$

$$\sigma_z = \frac{M_f}{I_z}\, y$$

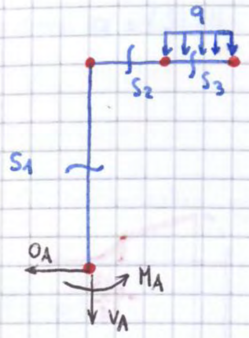
ESERCIZI SULLA LINEA ELASTICA



$\ell = 1\ m$

$q = 800\ N/m$

$\ell = m - m = 0 \rightarrow$ isostatico



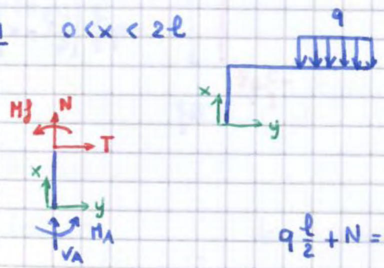
Reazioni Vincolari

$O_A = 0$

$V_A - q\frac{\ell}{2} = 0 \qquad V_A = q\frac{\ell}{2}$

$M_A - q\cdot\frac{\ell}{2}\frac{3}{4}\ell = 0 \qquad M_A = q\frac{3}{8}\ell^2$

$\underline{S_1}$ $\quad 0 < x < 2\ell$

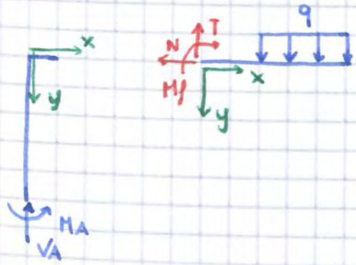


$q\frac{\ell}{2} + N = 0 \ ; \quad N = -q\frac{\ell}{2}$

$T = 0$

$Mf + M_A = 0 \ ; \quad Mf = -\frac{3}{8}q\ell^2$

$\underline{S_2}$ $\quad 0 < x < \frac{\ell}{2}$



$N = \emptyset$

$T = q\cdot\frac{\ell}{2}$

$Mf = -q\cdot\frac{\ell}{2}\left(\frac{3}{4}\ell - x\right)$

$Mf(0) = -\frac{3}{8}q\ell^2$

$Mf\left(\frac{\ell}{2}\right) = -q\frac{\ell^2}{8}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 179 di 270

II C I $\qquad 0 < x < \frac{l}{2}$

$$\frac{d^2 y_{II}}{dx^2} = \frac{ql}{2E \cdot I}\left(\frac{3}{4}l - x\right)$$

$$\frac{dy_{II}}{dx} = \frac{ql}{2EI}\left(\frac{3}{4}lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_3$$

$$y_{II} = \frac{ql}{2EI}\left(\frac{3}{8}lx^2 - \frac{x^3}{6}\right) + C_3 x + C_4$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

I C I

In A c'è un incastro → freccia = 0
↘ Rotazione = 0

↓

$$y_I(0) = 0$$

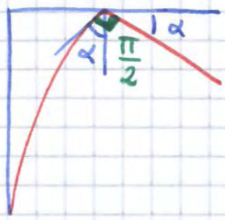
$$\left.\frac{dy_I}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

II C I

$$y_{II}(0) = 0$$

Accorciamenti e allungamenti (dovuti a N) sono trascurabili se non c'è scritto diversamente

$$\left.\frac{dy_{II}}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dy_I}{dx}\right|_{x=2l}$$



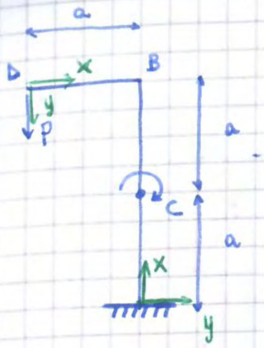
I CI

$C_2 = 0$

$C_1 = 0$

$$\frac{3}{8}\frac{ql^2}{E \cdot I}\frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

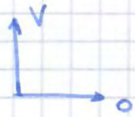
$$\frac{3}{8EI}ql^2 x + C_1 = 0$$

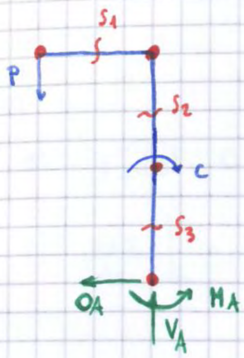


$a = 1\ m$

$P = 500\ N$

$C = 250\ N \cdot m$





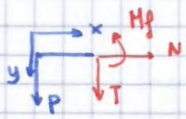
$O_A = 0$

$V_A = P$

$M_A = C - P\,a$ negativo

S1

$0 < x < a$



$N = 0$

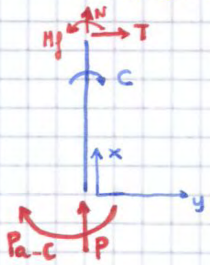
$T = -P$

$M_f = -Px$

$\begin{cases} M_f(0) = 0 \\ M_f(a) = -Pa \end{cases}$

S2

$a < x < 2a$



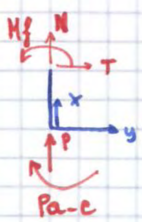
$N = -P$

$T = 0$

$M_f = Pa - C + C = P \cdot a$

S3

$0 < x < a$



$N = -P$

$T = 0$

$M_f = Pa - C$

Condizioni al contorno

III CI

1) $y_{III}(0) = 0$ $\qquad -\frac{Pa - C}{E \cdot I} \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 0 + C_2 = 0 \qquad C_2 = 0$

2) $\left.\frac{dy_{III}}{dx}\right|_0 = 0$ $\qquad -\frac{(Pa - C)}{E \cdot I} \cdot 0 + C_1 = 0 \qquad C_1 = 0$

II CI

3) $y_{II}(a) = y_{III}(a)$ $\qquad \frac{Pa}{E \cdot I} \frac{a^3}{3} + C_3 a + C_4 = -\frac{(Pa - C)}{E \cdot I} \frac{a^2}{2}$

4) $\left.\frac{dy_{II}}{dx}\right|_a = \left.\frac{dy_{III}}{dx}\right|_a$ $\qquad -\frac{Pa}{EI} a + C_3 = -\frac{(Pa - c)}{E \cdot I} a$

I CI

5) $y_I(a) = 0$ $\qquad \frac{Pa}{EI} \frac{a^3}{6} + C_5 \cdot a + C_6 = 0$

6) $\left.\frac{dy_I}{dx}\right|_a = \left.\frac{dy_{II}}{dx}\right|_{2a}$ $\qquad \frac{P}{EI} \frac{a^2}{2} + C_5 = -\frac{2}{EI} a^2 + C_3$

$M_{OD} = y_{II}(2a)$

$y_I(0)$

freccia in D

Freccia massimo

$y_I(0)$

$y_{II}\left(a+\frac{b}{2}\right)$

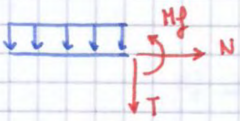
Esercizio

$R_o = 0$

$R_v = q \cdot \ell$

$M_A = -q\ell \cdot \frac{\ell}{2} = -q\frac{\ell^2}{2}$

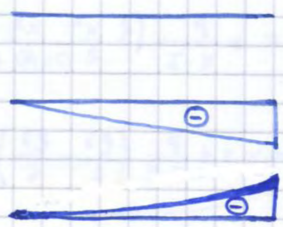
S1



$N = 0$

$T = -qx$

$Mf = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q\frac{x^2}{2}$



I CI

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{q\frac{x^2}{2}}{EI}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{EI}\frac{x^3}{6} + C_1$$

$$y = \frac{q}{EI}\frac{x^4}{24} + C_1x + C_2$$

$y(\ell) = 0$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\ell} = 0$

$$\frac{q}{E \cdot I}\frac{\ell^4}{24} + C_1 \cdot \ell + C_2 = 0 \qquad C_2 = \frac{q}{EI}\frac{\ell^4}{6} - \frac{q}{EI}\frac{\ell^4}{24}$$

$$C_2 = \frac{q}{EI}\frac{3}{24}\ell^4$$

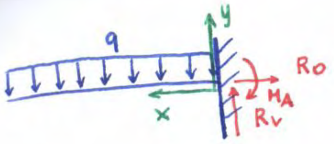
$$\frac{q}{EI}\frac{\ell^3}{6} + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{q}{EI}\frac{\ell^3}{6}$$

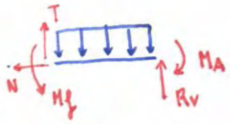
$$y = \frac{q}{EI}\frac{x^4}{24} - \frac{q}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{6} \cdot x + \frac{q}{EI}\frac{3}{24}\ell^4$$

$$\underset{x=0}{y_{max}} = \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{3}{24}\ell^4$$

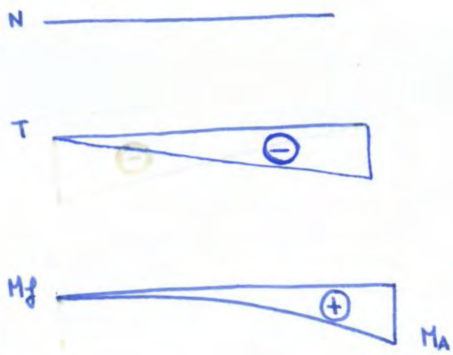
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 270



$$R_o = 0$$
$$R_v = q \cdot \ell$$
$$M_A = q\,\frac{\ell^2}{2}$$



$$T = -R_v + qx$$
$$N = 0$$
$$M_f + R_v \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} - M_A = 0$$
$$M_f = q\,\frac{x^2}{2} - R_v \cdot x + M_A$$



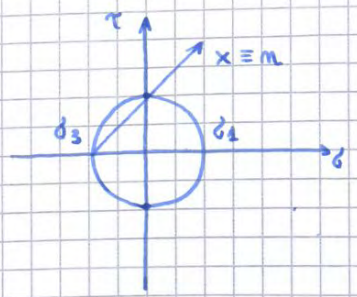
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{q\,\frac{x^2}{2} - q\ell x + q\,\frac{\ell^2}{2}}{E \cdot I}$$

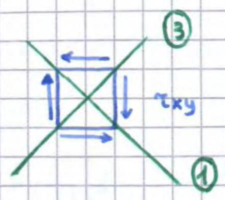
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{E \cdot I}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2} + \frac{\ell^2}{2}x\right) \qquad C_1 = 0$$

$$y = -\frac{q}{E \cdot I}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{\ell \cdot x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4}\right) \qquad C_2 = 0$$

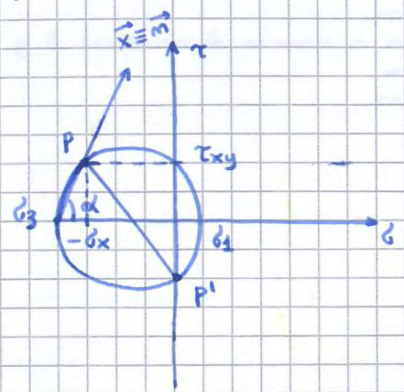
$$y_{\substack{max \\ x=\ell}} = -\frac{q}{E \cdot I}\left(\frac{3}{24}\ell^4\right)$$

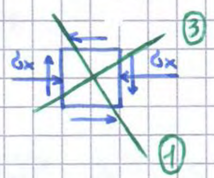
C) $\sigma_x = 0$, τ_{xy} max



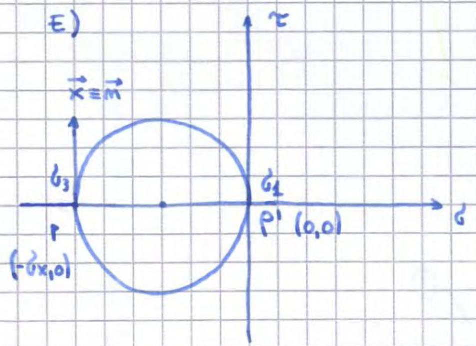


D)

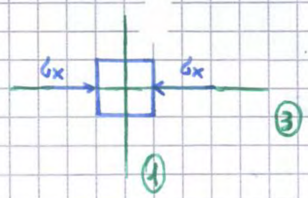




E)

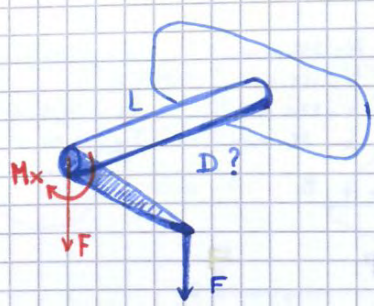


Cerchio torna ad essere il più grosso

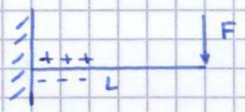


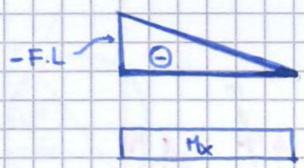
Tema d'esame

Es 2. Barra di torsione



$M_x = F \cdot b$





Stato di tensione all'incastro

M_x

M_z ⊖

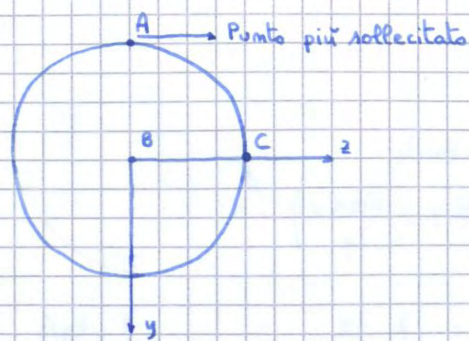
T ⊕

$4 = \frac{R_{p02}}{\sigma_{eq}}$ ← Identifica pericolo di rottura

$\sigma_{eq} = \frac{R_{p02}}{4}$

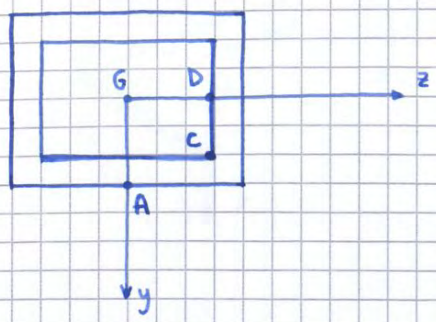
Tresca → $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

x = 0



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 193 di 270

Esercizio 2 Tema d'esame 7/02/2013



Punto più sollecitato

Attraverso le σ_{eq}

Von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

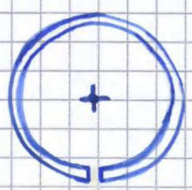
$$\sigma_{eq_A} = \sqrt{(\sigma_{xA})^2 + 0}$$

$$\sigma_{eq_C} = \sqrt{(\sigma_{xC})^2 + 3\,\tau_{xy_C}^{\,2}}$$

$$\sigma_{eq_D} = \sqrt{3\,\tau_{xy_D}^{\,2}}$$ → Meno pericoloso

Es 7 esercitazione 4

D, d



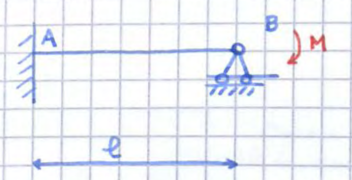
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_p}\,\frac{D}{2} \cong 100 \text{ MPa}$$

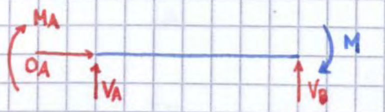
$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

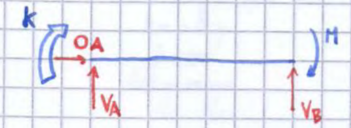
$$\tau_{max} = 3\,\frac{M_t}{2\pi r_m \cdot s^2} = 796 \text{ MPa}$$

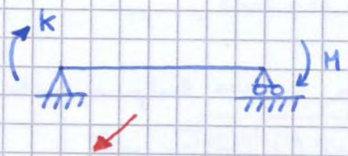
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 195 di 270

Esercizio 1 esercitazione 7

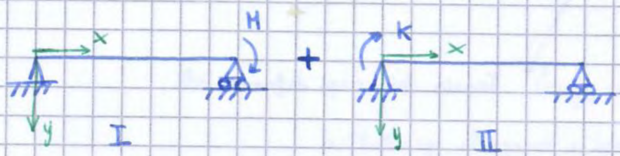








Sovrapp. di effetti

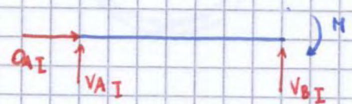


$$rot(A)_{I} + rot(A)_{II} = 0$$

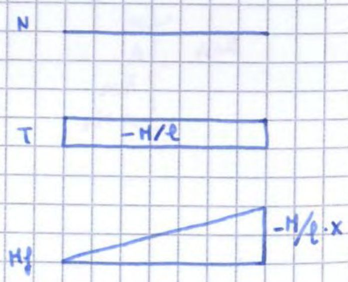
$$\frac{dy_{I}}{dx}(A) + \frac{dy_{II}}{dx}(A) = 0$$

Condizione di congruenza

I



$$\begin{cases} V_{B I} = \dfrac{M}{\ell} \\ V_{A I} = -\dfrac{M}{\ell} \\ O_A = 0 \end{cases}$$



$$\frac{d^2 y_I}{dx^2} = -\frac{Mf}{E \cdot I} = \frac{M}{E\ell I}(x)$$

$$\frac{dy_I}{dx} = \frac{M}{E\ell I}\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y_I = \frac{M}{E\ell I}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$y_{II}(x) = -\frac{k}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell}\right) + \frac{k\ell}{3EI}\cdot x$$

$$\frac{dy_{II}}{dx} = -\frac{k}{EI}\left(x - \frac{x^2}{2\ell}\right) + \frac{k\ell}{3EI}$$

$$\left.\frac{dy_{II}}{dx}\right|_{A} = \frac{k\ell}{3EI}$$

$(x=0)$

$$-\frac{M\ell}{6EI} + \frac{k\ell}{3EI} = 0$$

$$\begin{cases} k = \frac{M}{2} \\ O_A = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ V_B \cdot \ell - M - k = 0 \end{cases}$$

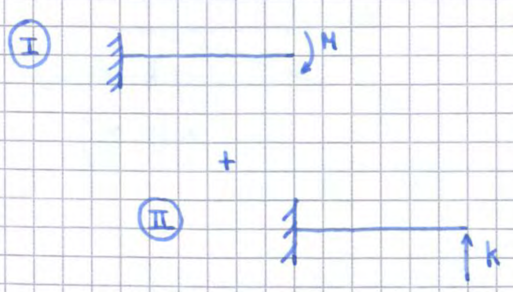
$V_A = -\frac{3}{2}\frac{M}{\ell}$

$V_B = \frac{3}{2}\frac{M}{\ell}$

Cambiando incognita iperstatica $V_B = V_k$

Cond. di congruenza $y_I(B) + y_{II}(B) = 0$

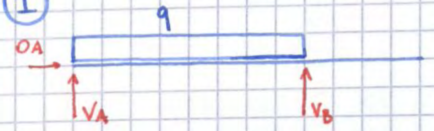
↳ Alla traslazione questa volta



$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

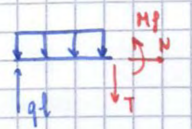
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 199 di 270

I



$OA_{I} = 0$

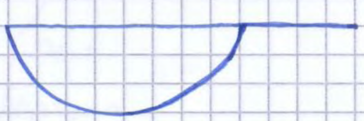
$V_{A_I} = V_{B_I} = q \cdot \ell$



$T = q(\ell - x)$

$Mf = q\left(\ell \cdot x - \frac{x^2}{2}\right)$

T



Mf

I $\quad 0 < x < 2\ell$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}_{I_1} = -\frac{q}{EI}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}_{I_1} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1$$

$$y_{I_1} = \frac{q}{EI}\left(\frac{\ell x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right) + C_1 x + C_2$$

$y_{I_1}(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

$y_{I_1}(2\ell) = 0$

$2\ell < x < 3\ell$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}_{I_2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}_{I_2} = C_3$$

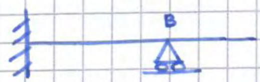
$$y_{I_2} = C_3 x + C_4$$

$y_{I_2}(2\ell) = 0$

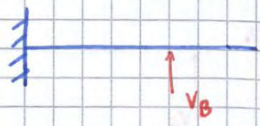
$$\frac{dy_{I_1}}{dx}(2\ell) = \frac{dy_{I_2}}{dx}(2\ell)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 201 di 270

Esercizio 2

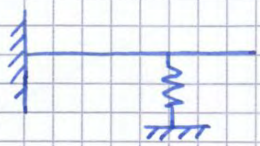


Caso ideale



$y(B) = 0$

Esercizio 3

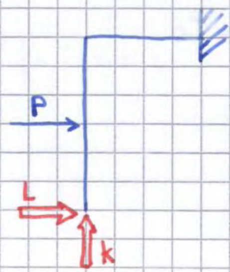


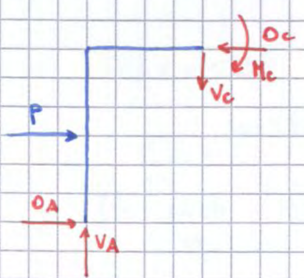
Caso reale
↓
VINCOLO CEDEVOLE

$K \cdot y(B) = V_B \longrightarrow y(B) = \frac{V_B}{K}$

Esercizio 10 esercitazione 7

2 volte iperstatico
↳ devo sciogliere 2 incognite



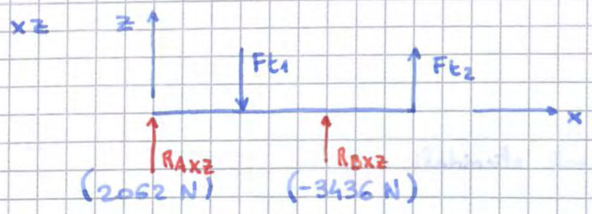


$$\begin{cases} O_A - O_C + P = 0 \\ V_A - V_C = 0 \\ P\frac{\ell}{2} + V_C \cdot \ell - O_C \cdot \ell + M_C = 0 \end{cases}$$

Condizioni di congruenza

1 C. Congr.) $y_{I_1}(0) + y_{II_1}(0) + y_{III_1}(0) = 0$

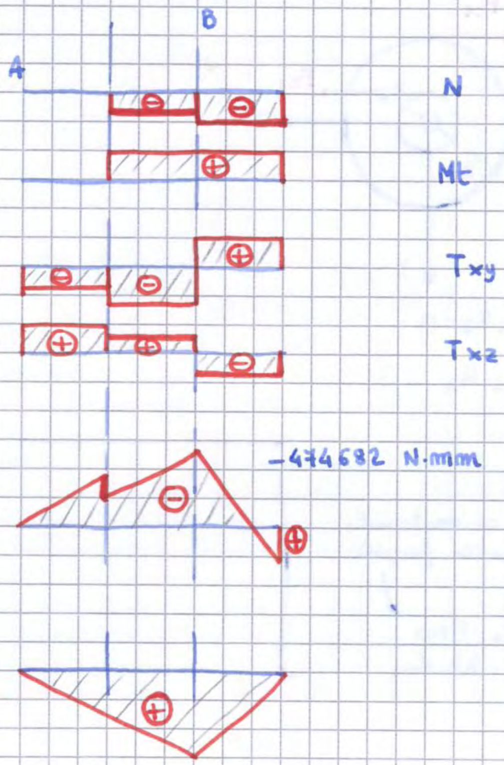
2 C. Congr.) $y_{I_3}(L) + y_{II_2}(L) + y_{III_2}(0) = 0$



$R_{Axz} + R_{Bxz} - F_{t1} - F_{t2} = 0$

$A)\ -F_{t1} \cdot L + R_{Bxz} \cdot 2L + F_{t2} \cdot 3L$

Diagrammi degli sforzi



$M_{f\,max} = \sqrt{M_{z\,max}^2 + M_{y\,max}^2}$

$M_t = M_x$

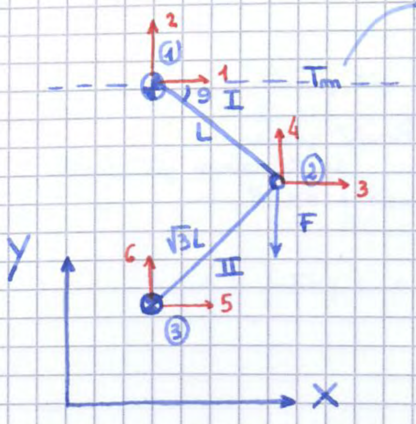
$N \ominus$

$\sigma_N = -\frac{N_B}{Area}$ molto piccolo → Trascurabile

CALCOLO MATRICIALE

Esercizio 3

Dilatazione termica



Matrice [k] è 6x6

	1	2	3	4	9
I	1	2	3	4	-30°
II	3	4	5	6	-120°

$\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos(-120°) = -\frac{1}{2}$

$\sin(-30°) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

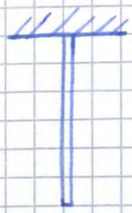
$$\underset{\substack{6\times 6 \\ XYZ}}{[K]} \{s\} = \{f\}_{xyz} + \{fe\}_{xyz}$$

globali

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} + \alpha\, Tm\, EA \begin{Bmatrix} fe_1^{I} \\ fe_2^{I} \\ fe_3^{I} + fe_3^{II} \\ fe_4^{I} + fe_4^{II} \\ fe_5^{II} \\ fe_6^{II} \end{Bmatrix}$$

$$\{fe\} = \alpha\, Tm \cdot EA \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esercitazione 9



• Trave sottoposta a peso proprio

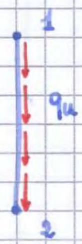
- Sforzo normale è decrescente

$$N - R + \gamma \cdot A \cdot x = 0$$

$$N = R - \gamma \cdot A \cdot x$$

$$N = \gamma \, A \, (L - x)$$

Trattato come Calc. matriciale



$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}s\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}f\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}f_e\end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\u_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}R_1\\0\end{Bmatrix} + \frac{q_u \cdot L}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

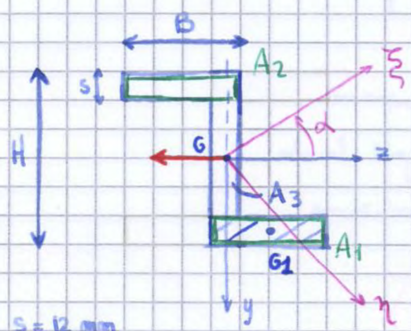
Calcolo C.S.
↓ Acciaio duttile
↓ Von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\cancel{\sigma^2} + 3\tau^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3}\, \tau_{xy\, max\, c}$$

$$C.S. = \frac{R_{p02}}{\sigma_{eq}}$$

Esercizio flessione deviata



s = 12 mm
B = 80 mm
H = 100 mm

Momento centrifugo → Im xy è ≠ 0
↳ Simile a momento statico
In assi centrali d'inerzia è 0
distanza è 0 da G

M = 1500 N·m

$$tg\, 2\alpha = \frac{2 I_{zy}}{I_z - I_y}$$

I_z, I_y sono noti

$I_z = 4{,}18 \cdot 10^{-6}\ m^4$

$I_y = 3{,}25 \cdot 10^{-6}\ m^4$

$$I_{zy} = \int_A zy\, dA$$

$$I_{zy} = A_1 \left(\frac{H-s}{2}\right)\left(\frac{B-s}{2}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{H-s}{2}\right)\cdot\left(-\frac{B-s}{2}\right)$$

(A_3 ha contributo nullo)

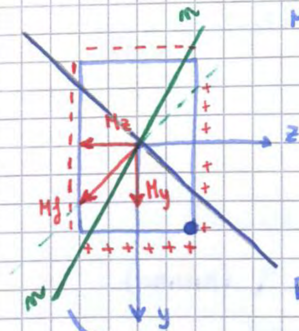
$$= 2 A_1 \left(\frac{H-s}{2}\right)\left(\frac{B-s}{2}\right) = 2{,}86 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$\alpha = 40{,}4°$$

Flessione deviata

→ Problema di costruzione

M_z, M_y

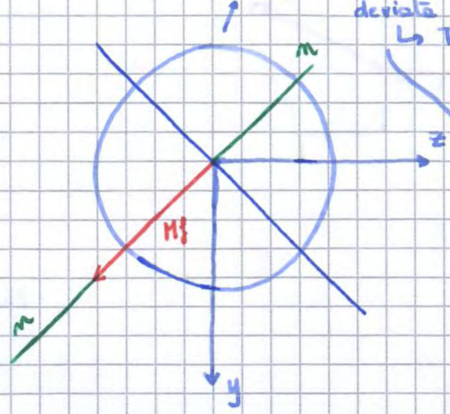


piano di sollecitazione

→ Piano neutro ruota verso momento d'inerzia minimo

Non può esistere flessione deviata

↳ Tutti assi sono centrali d'inerzia



→ Posizione del piano neutro è già conosciuta

$$\sigma_x = \frac{M_\xi}{I_\zeta} y$$

Asse neutro → Baricentrico

→ Asse centrale di inerzia → Sezione simmetrica

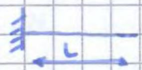
INSTABILITÀ ELASTICA

(es 11,12 esercitaz. 7)

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 E I_{minimo}}{L_0^2}$$

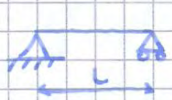
→ Condizione peggiore

L_0 → lunghezza libera d'inflessione



$L_0 = 2L$

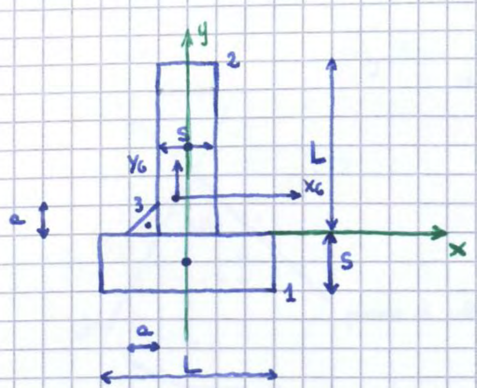
$L_0 = \frac{L}{2}$



$L_0 = L$

temi d'esame

Esercizio 7



$a = 20$ mm

$L = 120$ mm

$s = 30$ mm

Coordinate del baricentro

$$S_x = \left[s \cdot L \left(-\frac{s}{2}\right)\right]_1^{-54000} + \left[s \cdot L \cdot \frac{L}{2}\right]_2^{216000} + \left[\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3}\right]_3^{1333} = 163333 \text{ mm}^3$$

$$A = \overset{7200}{2s \cdot L} + \overset{200}{a \cdot \frac{a}{2}} = 7400 \text{ mm}^2$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A} = 22{,}07 \text{ mm}$$

$$S_y = \frac{a \cdot a}{2} \cdot \left(\frac{s}{2} + \frac{a}{3}\right) = -4333{,}33 \text{ mm}^3$$

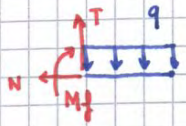
$$A = 7400 \text{ mm}^2$$

$$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{-4333{,}33}{7400} = -0{,}585 \text{ mm}$$

$$I_{xG} = \left[\overset{\overset{270000}{\frac{L \cdot s^3}{12}} + 4947065}{s \cdot L \cdot \left(\frac{s}{2} + Y_G\right)^2}\right]_1 + \left[\overset{\overset{4320000}{\frac{s \cdot L^3}{12}} + 5179265}{s \cdot L \left(\frac{L}{2} - Y_G\right)^2}\right]_2 + \left[\overset{\overset{4444}{\frac{1}{36} a \cdot a^3} \; 47442}{\frac{a^2}{2} \cdot \left(Y_G - \frac{a}{3}\right)^2}\right]_3 = 14\,768\,216 \text{ mm}^4$$

$$I_{yG} = \left[\overset{\overset{270000}{\frac{L \cdot s^3}{12}} + 1211}{s \cdot L \cdot X_G^2}\right]_2 + \left[\overset{\overset{4320000}{\frac{s \cdot L^3}{12}} + 1211}{s \cdot L \cdot X_G^2}\right]_1 + \left[\overset{4444}{\frac{1}{36} a \cdot a^3} + \overset{88368}{\frac{a^2}{2} \left(\frac{h}{3} + \left(\frac{s}{2} + X_G\right)\right)^2}\right]_3 = 4685234 \text{ mm}^4$$

III campata $\left(\frac{L}{2} < x < L\right)$



$N = 0$

$T - q \cdot x' = 0$

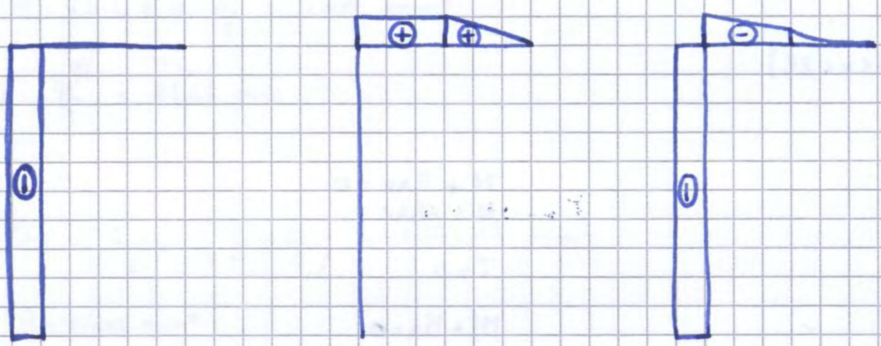
$T = q(L - x)$

$Mf + q \cdot x' \cdot \frac{x'}{2} = 0$

$Mf = -q \frac{(x-L)^2}{2}$

$Mf\left(\frac{L}{2}\right) = -q \cdot \frac{L^2}{8} = -100$

$Mf(L) = 0$



Spostamento orizzontale di B

Linea elastica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Mf}{EI_z}$$

I campo d'integrazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_A}{EI_z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_A x}{EI_z} + A \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$y = \frac{M_A x^2}{2EI_z} + B \qquad y(0) = 0 \longrightarrow B = 0$$

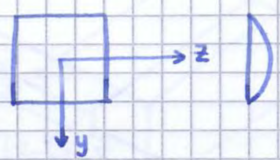
$$y = \frac{x^2}{2} \frac{M_A}{EI_z} \qquad y(2L) = \frac{4L^2}{2} \cdot \frac{3}{8} q L^2 \cdot \frac{1}{EI_z}$$

Sezione generica

M_f : $\sigma_x = \dfrac{M_f}{I_z} \cdot y$ $\qquad I_z = \dfrac{a^4}{12}$

N : $\sigma_x = \dfrac{N}{A}$

T : $\tau_{xy} = \dfrac{T \cdot S^*}{\text{corda} \cdot I_z}$



$$S_z = \int_y^{a/2} y \, dA$$

$$S_z = \int_y^{a/2} y \cdot a \, dy = \left[\frac{y^2}{2} a \right]_y^{a/2}$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right)$$

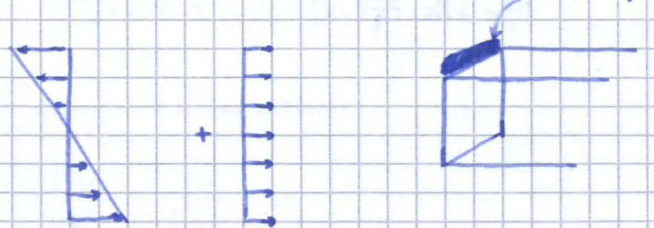
Tensioni massime :

M_f: $\sigma_x \underset{y=-a}{(x=0)} = \dfrac{-M_z - P \cdot L}{\frac{a^4}{12}} \cdot \left(\dfrac{-a}{2}\right) = \dfrac{198000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\frac{30^4}{12}} \left(\dfrac{30}{2}\right) = \dfrac{88}{2} \text{ MPa} = 44 \text{ MPa}$

N: $\sigma_x = \dfrac{1200}{a^2} = 1{,}33 \text{ MPa}$

T: $\underset{(y=0)}{\tau_{xy}} = \dfrac{180 \cdot \frac{a^3}{8}}{\frac{a^4}{12} \cdot a} = \dfrac{607500}{2025000} = 0{,}3 \text{ MPa}$

Punto più sollecitato



$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-F}{A} = \frac{-20000}{\pi \frac{D^2}{4}} = -7{,}07 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x_{Mf}} = \frac{Mf}{Iz} \cdot y = \frac{P \cdot L}{\pi \frac{D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{1200000}{635850} \cdot 30 = 56{,}61$$

$$\tau_{T\,max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{4}{3} \frac{(-P)}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{4}{3} \frac{(-3000)}{\pi \frac{D^2}{4}} = 1{,}41 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max \; y=0} = 1{,}41 + 17{,}7 = 19{,}1 \text{ MPa}$$

Punto più sollecitato qualsiasi punto in $y = R/2$

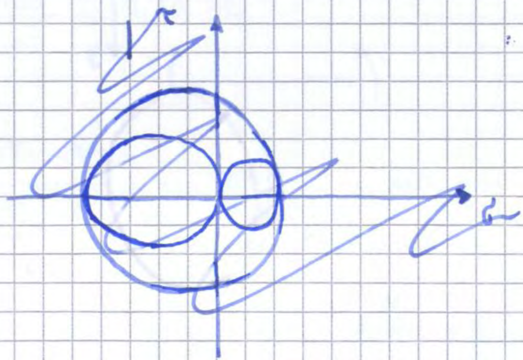
$\sigma_x = -7{,}07 \text{ MPa} + 56{,}61 = 49{,}5 \text{ MPa}$

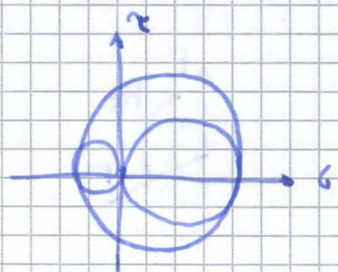
$\tau = 19{,}1 \text{ MPa} \quad (17{,}7)$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2}_{612{,}5} + \tau^2} = 24{,}75 + 31{,}26 = 56$$

$\sigma_2 = 0$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = 24{,}75 - 31{,}26 = -6{,}5$$



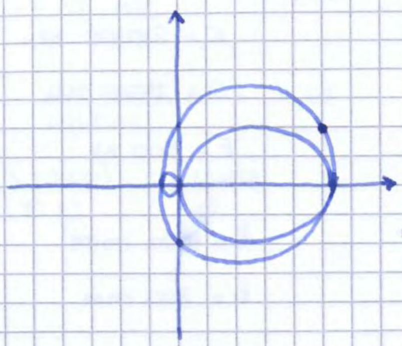


Ipotesi di Tresca

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = 56 + 6{,}5 = 62{,}5 \text{ MPa}$$

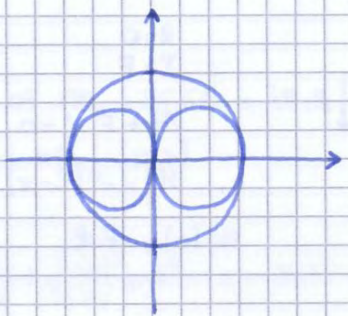
$\sigma_{x_A} = 85,11$ MPa

$\tau_{xy_A} = 12,76$ MPa



$$\begin{vmatrix} 85,11 & 0 & 12,76 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12,76 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xy_B} = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi R^2} = \frac{4}{3}\frac{500}{3,14 \cdot 382,55} = 0,55 \text{ MPa}$$



$$\begin{vmatrix} 0 & 0,55 & 0 \\ 0,55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

FRECCIA

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F\ell - Fx}{E\,I_z}$$

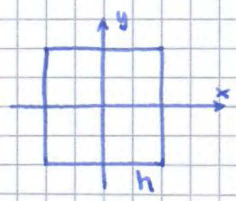
$$\frac{dy}{dx} = \frac{F\ell x}{E\,I_z} - \frac{Fx^2}{2EI_z} + A \qquad A=0$$

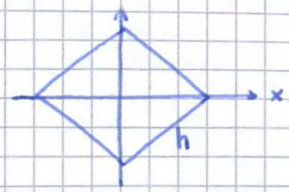
$$y = \frac{F\cdot\ell x^2}{2EI_z} - \frac{Fx^3}{6EI_z} + B \qquad B=0$$

$$y(\ell) = \frac{F\ell^3}{2EI_z} - \frac{F\ell^3}{6EI_z} = \frac{3F\ell^3 - F\ell^3}{6EI_z} = \frac{F\ell^3}{3EI_z} = \frac{500\cdot(1000)^3}{3\cdot 210000\cdot 114906} = 6,9 \text{ mm}$$

$$y = b\cdot\Delta\vartheta = b\cdot\frac{M_t}{GI_p}\cdot\ell = \frac{300\cdot 500\cdot 300\cdot 1000}{210000\cdot 229812} = 0,93 \text{ mm}$$

Es 12 esercitazione 4





$$\sigma_z = \frac{M_f}{I_x}\, y$$

$$I_{x_6} = 2\, I_{x\,tri}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} \sqrt{2}\, h \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{8} h^3 = \frac{1}{12} h^4$$

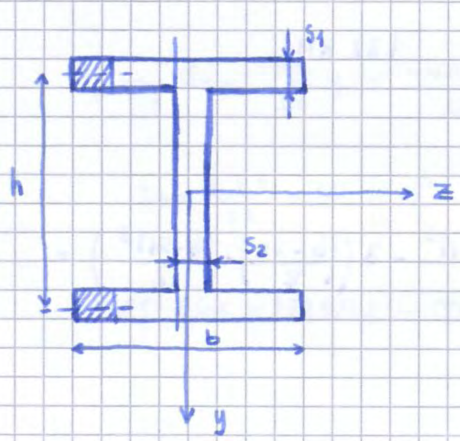
$$I_x = \frac{1}{12} h^4$$

$$\sigma_z = \frac{M_f}{\frac{1}{12} \cdot h^4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_f}{\frac{1}{6} h^3}$$

$$\sigma_z = \frac{M_f}{\frac{1}{12} h^4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h$$

$$\sigma_z = \frac{M_f}{\frac{1}{6\sqrt{2}} h^3}$$

Es.14 esercitazione 4



T_z max?

T_y max?

$b = 64$ mm
$h = 113{,}7$ mm
$S_1 = 6{,}3$ mm
$S_2 = 4{,}4$ mm

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S_y^*}{\text{corda} \cdot I_y}$$

$$S_{y_1} = \int_z^{-\frac{b}{2}} 2 s_1 \cdot z\, dz = \left[\cancel{2} s_1 \frac{z^2}{\cancel{2}} \right]_z^{-\frac{b}{2}}$$

$$= -S_1 \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \begin{cases} -\frac{s_2}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{cases}$$

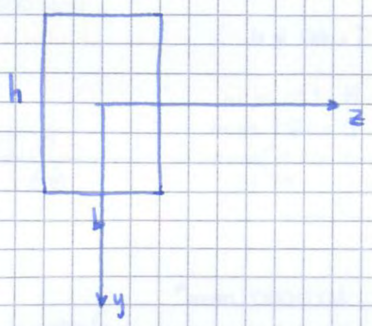
$$I_y = 2 \cdot \frac{S_1 \cdot b^3}{12} + \frac{(h - S_1) \cdot S_2^3}{12}$$

$$I_y = 276\,013$$

$$S_{y_2} = S_{y_1} + \int_z^{-\frac{s_2}{2}} (s_1 + h) \cdot z\, dz =$$

$$S_{y_1} + \left[(s_1 + h) \cdot \frac{z^2}{2} \right]_z^{-\frac{s_2}{2}} = S_{y_1} + \frac{(s_1+h)}{2} \left(\frac{s_2^2}{4} - z^2 \right)$$

Es 15 esercitazione 4



$b = 100\ mm$
$h = 160\ mm$

$T_y = 600000\ N$

$N = 500000\ N$

$M_z = 40000\ N \cdot m$

σ_x e τ_{xy}

$+\frac{h}{2}$ $\quad \sigma_{x\,max} \quad \tau_{xy} = 0$

$+\frac{h}{4}$

0 $\quad \sigma_x = 0$

$$N \rightarrow \sigma_x = \frac{N}{b \cdot h} = \frac{500\,000\ N}{16'000\ mm^2} = 31{,}25\ MPa$$

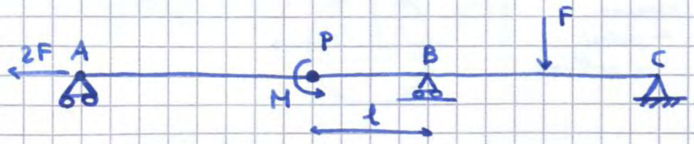
$$M_f \rightarrow \sigma_x = \frac{M_f}{I_z} y = \frac{-40000000\ N \cdot mm}{34133334} \cdot 80 = -94\ MPa$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{100 \cdot (160)^3}{12} = 34.133.334\ mm^4$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 229 di 270

Es 7 esercitazione 1

$\ell = 1\,m$
$F = 1000\,N$
$M = 500\,Nm$



$m = 6$

$m = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$

$\ell = 0 \rightarrow$ ISOSTATICA

$\oplus \rightarrow \quad R_{OC} = 2F = 2000\,N$

$\oplus \uparrow \quad R_A + R_B + R_{VC} - F = 0$

$\oplus \circlearrowleft \quad +M + R_B \cdot \ell - F \cdot 2\ell + R_{VC} \cdot 3\ell - R_A \cdot 2\ell = 0$

$R_B = F - \frac{M}{2\ell} - R_{VC}$

$\cancel{M} + \left(F \cdot \ell - \frac{M}{2} - R_{VC} \cdot \ell\right) - F \cdot 2\ell + R_{VC} \cdot 3\ell - \cancel{M} = 0$

$-F \cdot \ell - \frac{M}{2} + R_{VC} \cdot 2\ell = 0 \qquad R_{VC} = \frac{F\ell + \frac{M}{2}}{2\ell} = \frac{F}{2} + \frac{M}{4\ell} = 500\,N + 125\,N = 625\,N$

$\oplus \rightarrow \quad R_{OP} = 2F = 2000\,N$

$\oplus \uparrow \quad R_A + R_{VP} = 0 \;;\quad R_A = -R_{VP}$

$\oplus \circlearrowleft \quad M - R_A \cdot 2\ell = 0$

$R_A = \frac{M}{2\ell} = 250\,N$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 231 di 270

$$S_{z\,tot}(0) = \frac{B}{2}\left[\frac{H^2}{4} - \left(\frac{H-2h}{2}\right)^2\right] + \frac{b}{2}\left[\left(\frac{H-2h}{2}\right)^2\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot \left[\frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right)\right]}{B \cdot I_z} \qquad \left(\frac{H-2h}{2}\right) < y < \frac{H}{2}$$

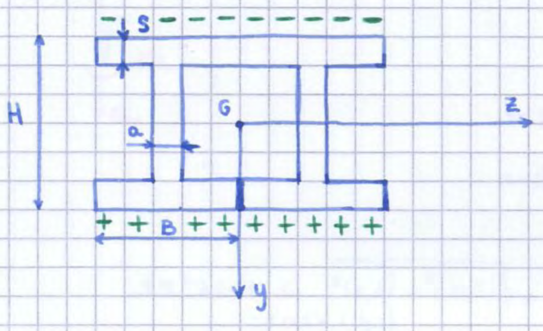
$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot \left[\frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - \left(\frac{H-2h}{2}\right)^2\right) + \frac{b}{2}\left(\left(\frac{H-2h}{2}\right)^2 - y^2\right)\right]}{b \cdot I_z} \qquad 0 < y < \left(\frac{H-2h}{2}\right)$$

19443 + 5166

$$\tau_{xy\,max\,anima} = \frac{T \cdot \left(\frac{B}{2}\left[\frac{H^2}{4} - \left(\frac{H-2h}{2}\right)^2\right] + \frac{b}{2}\left[\left(\frac{H-2h}{2}\right)^2\right]\right)}{b \cdot I_z} = \frac{1 \cdot 10^4 \left(1{,}9 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3\right)}{6 \cdot 2.05 \cdot 10^6} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy\,max\,piattabande} = \frac{T \cdot \left(\frac{B}{2}\left[\frac{H^2}{4} - \left(\frac{H-2h}{2}\right)^2\right]\right)}{B \cdot I_z} = \frac{1 \cdot 10^4 \left(1{,}9 \cdot 10^4\right)}{50 \cdot 2{,}05 \cdot 10^6} = 1{,}8 \text{ MPa}$$

Esercizio 2



$M_z = 3500$ Nm

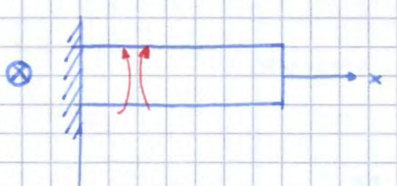
$T_y = 20000$ N

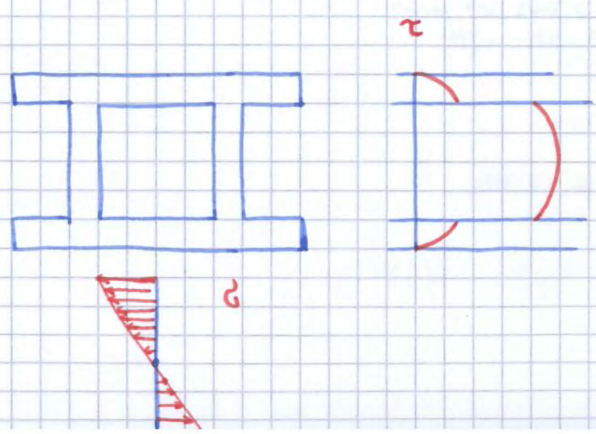
$H = 120$ mm
$B = 106$ mm
$s = 20$ mm
$a = 12$ mm

Area $= 53{,}2$ cm^2 $= 53{,}2 \cdot 10^2$ mm^2

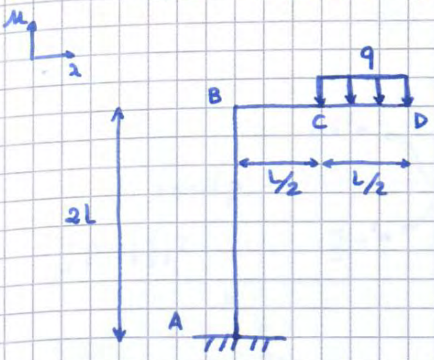
$I_z = 1143$ cm^4 $= 1{,}143 \cdot 10^7$ mm^4
$W_z = 1{,}9 \cdot 10^5$ mm^3

$I_y = 3{,}99 \cdot 10^6$ mm^4
$W_y = 7{,}5 \cdot 10^4$ mm^3





Es 1 scritto dell' 11/07/2013



$q = 800\ N/m$

$L = 1\ m$

$\oplus \rightarrow \quad -R_{AO} = 0$

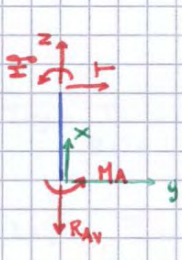
$\oplus \uparrow \quad -R_{AV} - q\frac{L}{2} = 0$

$R_{AV} = -q\frac{L}{2} = -400\ N$

$\circlearrowleft \oplus \quad M_A - q\frac{L}{2}\cdot\frac{3}{2}L = 0$

$M_A = q\frac{L^2}{8}\cdot 3$

1ª campata $(0 < x < 2L)$



$N - R_{AV} = 0\ ; \quad N = R_{AV} = -q\frac{L}{2}$

$T = 0$

$Mf + M_A = 0\ ; \quad Mf = -M_A = -q\frac{L^2}{8}3 = -300\ N\cdot m$

2ª campata $(0 < x < \frac{L}{2})$

$N = 0$

$T + R_{AV} = 0\ ; \quad T = -R_{AV} = +400\ N$

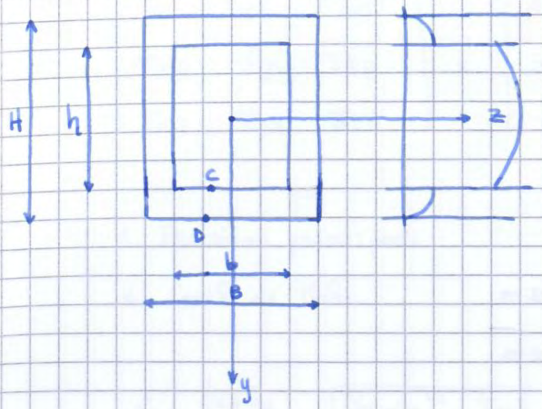
$Mf + M_A + R_{AV}\cdot x = 0$

$Mf = -M_A - R_{AV}\cdot x$

$= -q\frac{3}{8}L^2 + q\frac{L}{2}\cdot x \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{L}{2} \end{cases}$

$Mf\left(\frac{L}{2}\right) = -q\frac{3}{8}L^2 + q\frac{L^2}{4} = -\frac{qL^2}{8} = -100\ N\cdot m$

Esercizio 2 esame del 11/07/2013



$B = 100$ mm

$b = 80$ mm

$H = 60$ mm

$h = 40$ mm

$\underline{Mf}$ $\quad \underline{T}$

Baricentro $\left(\frac{B}{2}, \frac{H}{2}\right)$ Sezione ha due assi di simmetria
↳ Baricentro è dove si intersecano

I_z = I pieno - I vuoto

$$I_z = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{B \cdot I_z} \cdot \frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - y^2\right) \qquad \frac{h}{2} < y < \frac{H}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{(B-b) I_z} \cdot \left[\frac{B}{2}\left(\frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4}\right) + \frac{(B-b)}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right] \qquad 0 < y < \frac{h}{2}$$

$$\sigma_x = \frac{Mf}{I_z} \cdot y$$

Punto più sollecitato: C o D