NUMERO: 1283 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Genta

MATERIA: Meccanica delle Macchine, Prof.Eula

05/03/13

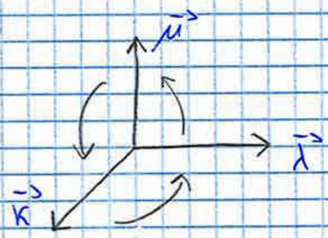
I LEZIONE:

DERIVATA DI UN VETTORE ROTANTE:

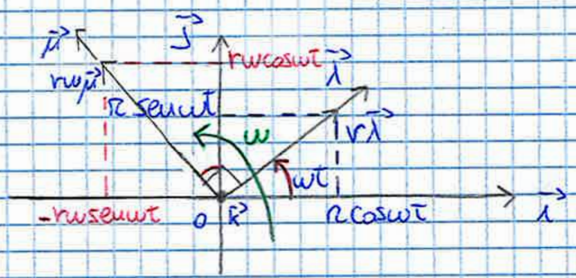
$$\boxed{\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})}$$

ω = velocità di rotazione di $r\vec{\lambda}$ nel piano

TERNA DESTRORSA



$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{k} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{k} = \vec{\lambda} \\ \vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{k} = -\vec{\mu} \\ \vec{k} \wedge \vec{\mu} = -\vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = -\vec{k} \end{cases}$$



$-r\omega\,\text{sen}\,\omega t$ è la derivata di $r\cos\omega t$
$r\omega\cos\omega t$ è la derivata di $r\,\text{sen}\,\omega t$
quindi, avendo costruito il secondo vettore opportunamente possiamo scrivere:

$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = r\omega\vec{\mu} = r\omega[\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] = \omega\vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

derivare un vettore rotante nel piano è equivalente a prendere la sua velocità ω e moltiplicarla per il vettore

$$\underbrace{\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt}}_{\text{vettore velocità}} = \omega\vec{k} \wedge \underbrace{(r\vec{\lambda})}_{\text{vettore posizione}}$$

3 1 2

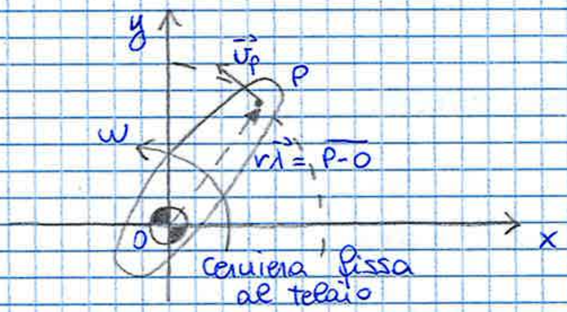
Nel piano derivare un vettore rotante $r\vec{\lambda}$ significa:
1) ruotarlo di 90° nel senso di $\vec{\omega}$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B$

Tutti i punti hanno la stessa velocità e accelerazione lineare, se così non fosse prevarrebbe una velocità sull'altra e si avrebbe una rotazione.

2) MOTO ROTATORIO INTORNO AD UN PUNTO FISSO



$PO = r = cost$

$v_O = 0 \qquad a_O = 0$

Il punto P percorre una circonferenza di centro O e raggio PO.

$$\vec{v}_P = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{r=cost.}\vec{\lambda} + r\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = r\left[\omega\vec{k}\wedge\vec{\lambda}\right] = \omega\vec{k}\wedge(r\vec{\lambda}) =$$

$$= \omega\vec{k}\wedge(\overline{P-O})$$

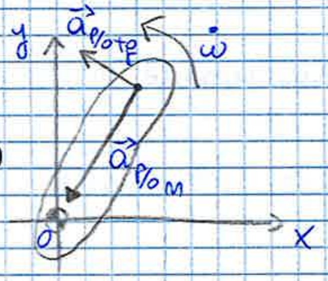
La velocità è tangente alla circonferenza.

$$\vec{a}_P = \frac{d(r\omega\vec{\mu})}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\omega\vec{\mu} + r\frac{d\omega}{dt}\vec{\mu} + r\omega\frac{d\vec{\mu}}{dt} = r\dot{\omega}\left[\vec{k}\wedge\vec{\lambda}\right] +$$

$$+ r\omega\left[\omega\vec{k}\wedge\vec{\mu}\right] = \dot{\omega}\vec{k}\wedge(r\vec{\lambda}) + r\omega^2\left[-\vec{\lambda}\right] = \underbrace{\dot{\omega}\vec{k}\wedge(\overline{P-O})}_{\text{tangente alla circonferenza}} - \underbrace{\omega^2(\overline{P-O})}_{\text{diretta verso il centro di rotazione}} =$$

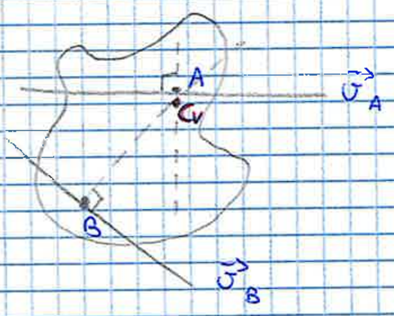
$$= \underbrace{\vec{a}_{P/O\,tg}}_{\text{acc. tangenziale}} + \underbrace{\vec{a}_{P/O\,n}}_{\text{acc. normale (centripeta)}}$$

Anche se ω è costante c'è accelerazione centripeta anche se $\dot{\omega} = 0$.
L'accelerazione centripeta è diretta dal punto verso il centro di curvatura, è per questo che ha un segno negativo (opposto a $\overline{P-O}$).



Come calcolarlo:

a) $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ NON // => sono sufficienti le direzioni



Tracciando le ⊥ alle velocità dei due punti, si trova il C_v dove si incontrano.

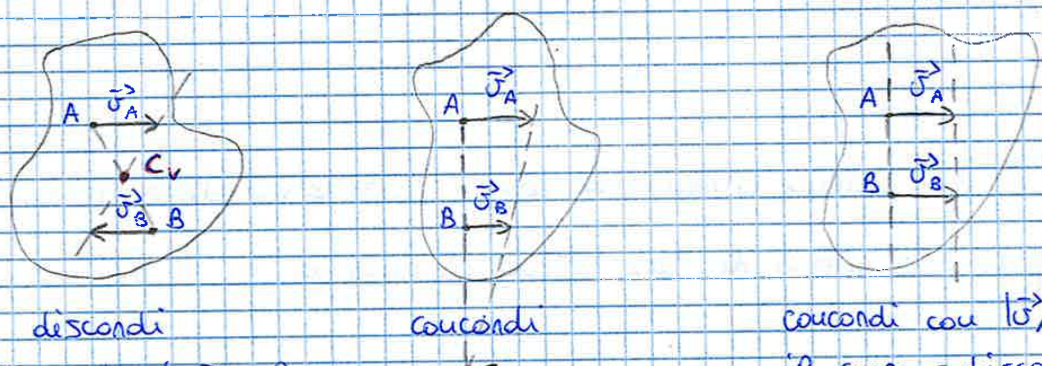
$$\vec{v}_A = \underset{0}{\vec{v}_{C_v}} + \vec{v}_{A/C_v} = \omega\vec{k} \wedge (\overline{A-C_v})$$

$$\vec{v}_B = \underset{0}{\vec{v}_{C_v}} + \vec{v}_{B/C_v} = \omega\vec{k} \wedge (\overline{B-C_v})$$

le ortogonali alle velocità sono il vettore posizione.

Tutti i punti del corpo rigido ruotano con la stessa velocità angolare ω attorno a C_v, che può essere sia interno sia esterno al corpo.

b) $\vec{v}_A // \vec{v}_B$ => bisogna conoscere modulo, direzione e verso



discordi

C_v cade dentro la distanza AB, si trova sull'intersezione delle rette congiungente $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ e la retta AB

concordi

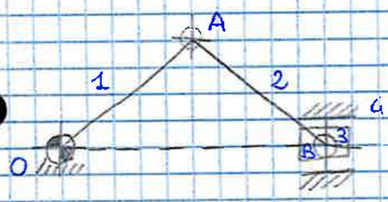
C_v

C_v cade fuori da AB e si trova come intersezione della retta $\vec{v}_A - \vec{v}_B$ e della retta AB

concordi con $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B|$ il corpo subisce una traslazione, le due rette sono parallele => $C_v = \infty$ ∄ ω $(\omega = 0)$

CATENA CINEMATICA: insieme di più corpi rigidi connessi da vincoli

- CATENA CINEMATICA SEMPLICE: se ogni corpo rigido ha 1 o 2 coppie cinematiche (vincoli)



biella - manovella

$v_o = 0$

$a_o = 0$

$C_{v_1} \equiv 0$

CALCOLO DEI GdL di UN MECCANISMO:

=> FORMULA DI GRÜBLER

⇓

$$\boxed{X = 3(m-1) - 2C_1 - C_2}$$

X = numero di G.d.L.

m = numero di corpi compreso il telaio

C_1 = numero di vincoli presenti ad un grado di libertà

C_2 = numero di vincoli presenti a due gradi di libertà

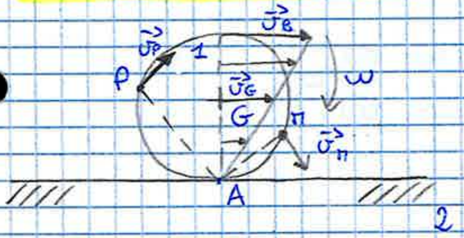
Ad esempio il sistema biella manovella:

$$\begin{cases} m = 4 \ (AO,\ AB,\ 3,\ \text{Telaio } 4) \\ C_1 = 4 \ (O;\ A;\ B;\ \text{guida orizzontale}) \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 1$$

Se il grado di libertà del meccanismo è 1 nel problema verrà dato un solo valore di velocità.

Nel sistema braccio umano ci sono 2 G.d.L. => nel problema vengono date due velocità.

RULLO SU 1 PIANO



1 = rullo

2 = piano fisso

Se nella superficie di contatto c'è puro rotolamento:

$$\begin{cases} v_{rel_{1/2}} = 0 \Rightarrow 1 \text{ G.d.L.} \Rightarrow \text{rotolamento}, \not\exists \text{ strisciamento} \\ \vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2} \quad \text{ma} \quad \vec{v}_{A_2} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{A_1} = 0 \Rightarrow A \equiv C_{v_1} \end{cases}$$

$$\vec{v}_G = \cancelto{0}{\vec{v}_{C_{v_1}}} + \omega\vec{k} \wedge (\overline{G - C_{v_1}})$$

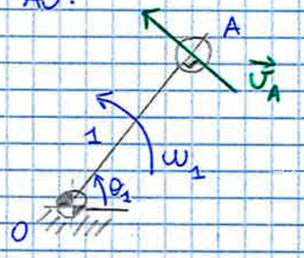
$$\vec{v}_B = \cancelto{0}{\vec{v}_{C_{v_1}}} + \omega\vec{k} \wedge (\overline{B - C_{v_1}})$$

$BC_{v_1} = d = 2\text{raggio} = 2GC_{v_1}$

$v_B = 2v_G$

Per fare gli esercizi conviene sempre partire dal punto in cui si hanno più informazioni.

AO:



ω_1 non è data esplicitamente
si devono avere i dati con le misure del S.I.

$$\omega_1 = \frac{2\pi\, n_1}{60} = 157{,}07 \text{ rad/s}$$

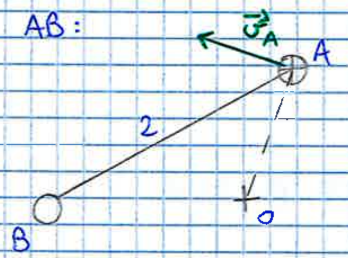
$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O} \qquad \vec{v}_O = 0 \qquad \vec{a}_O = 0$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A/O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (A-O)$$

$\vec{k}$ è il versore uscente

$$\begin{cases} M & v_A = \omega_1 AO = 32{,}98 \text{ m/s} \\ D & \perp AO \\ V & \omega_1 \end{cases}$$

AB:



$\vec{v}_A$ passando da un corpo all'altro rimane uguale

$$\underline{\vec{v}_B} = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \cancel{\vec{v}_A} + \underline{\omega_2 \vec{k} \wedge (B-A)}$$

La direzione di $\vec{v}_B$ è nota, infatti il corpo 3 può solo muoversi orizzontalmente nella guida.

	$\vec{v}_B$ =	$\vec{v}_A$	+ $\omega_2 \vec{k} \wedge (B-A)$
M	?	nota	$\omega_2 AB$ = ?
D	orizzontale	nota	$\perp AB$ (nota)
V	?	nota	ω_2 ?

Queste sono il numero minimo di informazioni che servono per ricavare le incognite. Il metodo che si usa è quello del triangolo, se le velocità si devono sommare i versi saranno concordi, se si devono sottrarre i versi sono discordi.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 140

Per calcolare il modulo bisogna conoscere le distanze dei C_v.

- $\dfrac{AC_{v_2}}{\text{sen}(90°+30°)} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,45°} \Rightarrow AC_{v_2} = 0{,}747\ m$

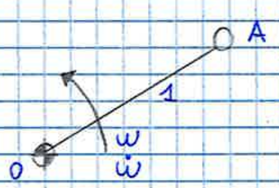
$\dfrac{BC_{v_2}}{\text{sen}\,15°} = \dfrac{AB}{\text{sen}\,45°} \Rightarrow BC_{v_2} = 0{,}223\ m$

$\vec{v}_A = \underbrace{\cancel{\vec{v}_{C_{v_2}}}}_{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge (A - C_{v_2})$

M	$\omega_2 = v_A / AC_{v_2} = 44{,}21\ rad/s$
D	$\perp AC_{v_2}$
V	$\omega_2 \circlearrowleft$ (da $\vec{v}_A$)

- $\vec{v}_B = \underbrace{\cancel{\vec{v}_{C_{v_2}}}}_{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge (B - C_{v_2})$

M	$v_B = \omega_2 AC_{v_2} = 9{,}86\ m/s$
D	orizz
V	$\leftarrow$



Per calcolare l'accelerazione si usa il teorema di Rivals.

$\vec{a}_A = \underbrace{\cancel{\vec{a}_O}}_{0} + \vec{a}_{A/O\,tg} + \vec{a}_{A/O\,n}$

- $\vec{a}_A = \underbrace{\dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (A-O)}_{\text{tangenziale}} - \underbrace{\omega_1^2 (A-O)}_{\text{centripeta}}$

	tangenziale	centripeta
M	$\dot{\omega}_1 AO = 210\ m/s^2$	$\omega_1^2 (AO) = 5180{,}91\ m/s^2$
D	$\perp AO$	$//\ AO$
V	$\dot{\omega}_1 \circlearrowleft$	$A \rightarrow O$

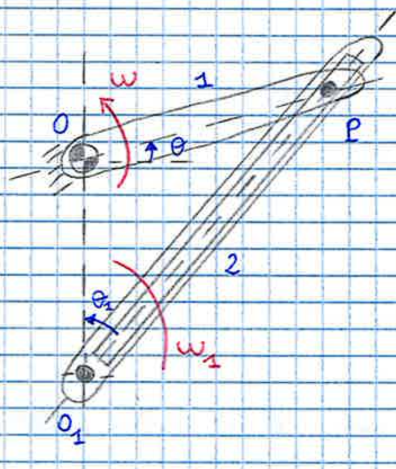
08/03/13

III LEZIONE:

- Consideriamo sempre il sistema biella-manovella.

$AB: \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A\,tg} + \vec{a}_{B/A\,n}$ per il teorema di Rivals

GUIDA DI FAIRBAIN O GLIFO



È un meccanismo che trasforma la rotazione completa del corpo 1 in rotazione alterna del corpo 2. In questo caso alcune distanze non rimangono costanti.

$PO = cost$

$PO_1 \neq cost$

Se ci sono moti relativi all'interno del sistema bisogna scrivere l'equazione del moto composto.

$$\vec{v}_{P_{assoluta}} = \vec{v}_{P_{relativa}} + \vec{v}_{P_{trascinamento}}$$

$$\vec{a}_{P_{assoluta}} = \vec{a}_{P_{relativa}} + \vec{a}_{P_{trascinamento}} + \vec{a}_{Co}$$

$\vec{a}_{Co}$ = accelerazione di Coriolis o accelerazione complementare =

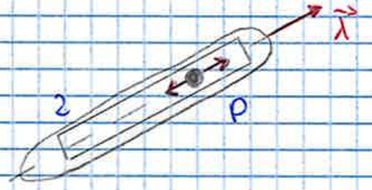
$= 2\omega_{trasc}\,\vec{k} \wedge \vec{v}_{rel}$

Se il moto di trascinamento è di traslazione non c'è $\vec{a}_{Co}$.

IDENTIFICAZIONE DEI MOTI:

1) MOTO ASSOLUTO
2) MOTO RELATIVO
3) MOTO DI TRASCINAMENTO

Si inizia analizzando il moto relativo all'interno del sistema.



2) MOTO RELATIVO: traslazione di P lungo $\vec{\lambda}$: $\pm v_{P_{rel}} \vec{\lambda}$

Per analizzare i vari moti conviene considerare i corpi singolarmente.

$\omega = 157$ rad/s

$\dot{\omega} = 0$

$OP = 0,3$ m $\quad O_1P = 0,6$ m

$O_1O = 0,4$ m $\quad \vartheta = 27,27°$ $\quad \vartheta_1 = 26,38°$ $\qquad$ si considera un istante

M	$\omega PO = 47,1$ m/s	?	?
D	$\perp PO$	lungo PO_1	$\perp PO_1$
V	ω ↻	?	?

È un caso che il moto relativo sia perpendicolare al moto di trascinamento.

12/03/13

IV LEZIONE:

Analizziamo i G.d.L del glifo:

$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$

$m = 3$ (1, 2, telaio)

$C_1 = 2$ (O, O_1) $\qquad \Rightarrow \quad x = 1$

$C_2 = 1$ (P)

Il punto P consente sia la rotazione che la traslazione.

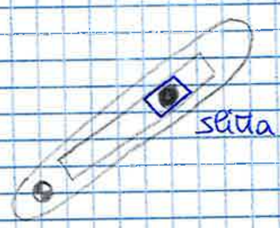
Esiste un altro modo per calcolare i G.d.L.

Si può considerare il punto P inserito all'interno di una slitta che permette la traslazione.

$m = 4$ (1, 2, slitta, telaio)

$C_1 = 4$ $(O, O_1,$ slitta, perno 3$)$ $\qquad \Rightarrow \quad x = 1$

$C_2 = 0$



In questo modo vengono separate la traslazione e la rotazione.

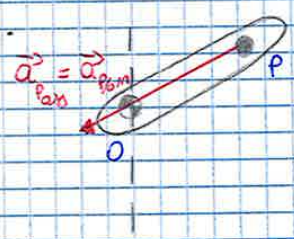
Sul corpo 1 : $\vec{a}_P = \vec{a}_{P_{ass}} = \cancel{\vec{a}_O} + \vec{a}_{P/O_{tg}} + \vec{a}_{P/O_n}$

$\vec{a}_{P_{ass}} = -\omega^2 (P-O) + \cancel{\dot{\omega}\vec{k} \wedge (P-O)}$

M $\omega^2 PO = 7394,7 \ m/s^2$

D // PO

V P → O



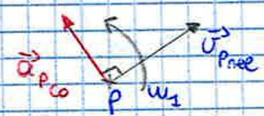
Il verso di $\vec{a}_{P/O_n}$ è opposto al vettore posizione $\overline{P-O}$

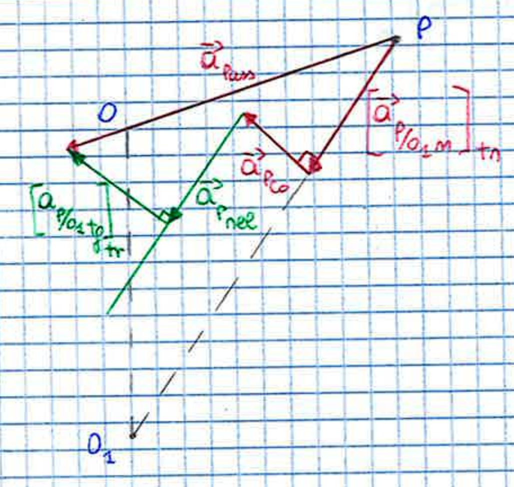
Sul corpo 2: $\vec{a}_{P_{ass}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_{Co}} = \pm a_{P_{rel}} \vec{\lambda} + \left[\vec{a}_{O_1} + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (P-O_1) - \omega_1^2 (P-O)\right]_{tr} +$

$+ \left[2\underset{\omega_{tr}\vec{k}}{\underset{\shortparallel}{\omega_1\vec{k}}} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}\right]$

$\vec{a}_{P_{ass}} = \pm a_{P_{rel}} \vec{\lambda} + \left[\dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (P-O_1) - \omega_1^2 (P-O)\right]_{tr} + \left[2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}\right]$

M	note	?	$\dot{\omega}_1 PO_1$?	$\omega_1^2 PO = 2388 \ m/s^2$	$2\omega_1 v_{P_{rel}} = 3528,9 \ m/s^2$
D	note	// PO_1	⊥ PO_1	// PO_1	⊥ $\vec{v}_{P_{rel}}$
V	nota	?	$\dot{\omega}_1$?	P → O_1	

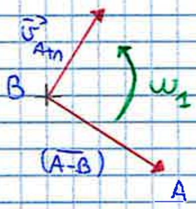




Noti gli angoli si possono calcolare i moduli delle accelerazioni non note.

$\omega_1 = \frac{v_{A_{tr}}}{AB} = 1\ rad/s$

$\vec{v}_{A_{tr}} = \omega_1 \vec{k} \wedge (A-B)$



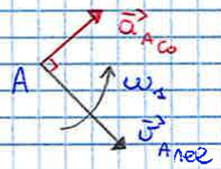
$\vec{a}_{A_{ass}} = \vec{a}_{A_{rel}} + \vec{a}_{A_{tr}} + \vec{a}_{A_{co}}$

$\vec{a}_{A_{co}} = 2\omega_{tr}\vec{k} \wedge \vec{v}_{rel} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{A_{rel}}$

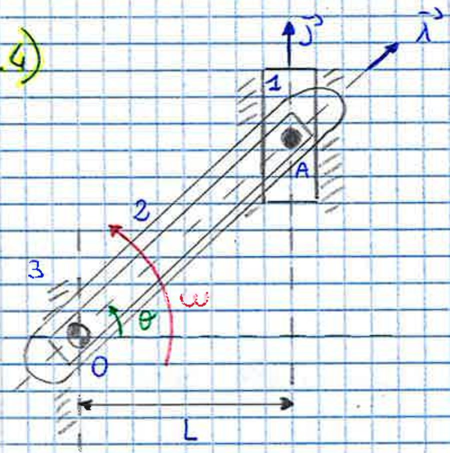
M $\quad 2\omega_1 v_{A_{rel}} = 1,73\ m/s^2$

D $\quad \perp \vec{v}_{A_{rel}}$

V



1.4)



$\omega = 1\ rad/s$

$\dot{\omega} = 0$

$L = 200\ mm$

$\theta = 0°;\ 20°$

AO ≠ cost => MOTO RELATIVO

1) AO ≠ cost => traslazione lungo $\vec{\lambda}$ => MOTO RELATIVO

2) nel corpo 2 senza guida si può solo ruotare intorno ad O (ω) => MOTO DI TRASCINAMENTO

3) nel corpo 1 => A ha moto assoluto => traslazione lungo $\vec{j}$

$\vec{v}_{A_{ass}} = \pm v_{A_{ass}}\vec{j} = \pm v_{A_{rel}}\vec{\lambda} + \vec{v}_{A_{tr}} \Rightarrow \pm v_{A_{ass}}\vec{j} = \pm v_{A_{rel}}\vec{\lambda} + [\cancel{\vec{v}_O}^{\,0} + \omega\vec{k} \wedge (A-O)]_{tr}$

M	?	?	$\omega AO = 0,2\ m/s$; $0,213\ m/s$
D	lungo $\vec{j}$	lungo $\vec{\lambda}$	$\perp AO$
V	?	?	ω ↺

ATTENZIONE: ricordarsi $\vec{v}_O$ il moto di trascinamento è il moto del corpo 2 come se non ci fosse la guida => $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O}$

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = 11,56 \ rad/s$$

$$v_B = \omega(BC_v) = 1,156 \ m/s$$

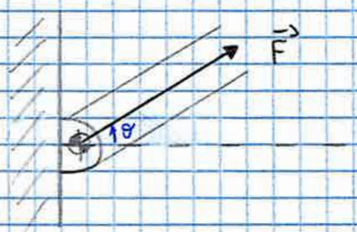
$$v_G = \omega(GC_v) = 1,156 \ m/s$$

Tutti i punti della sbarretta AB ruotano con lo stesso verso attorno al C_v => essendo $\vec{v}_A$ volta in verso, lo sono anche tutte le altre. Sono tutte in verso antiorario.

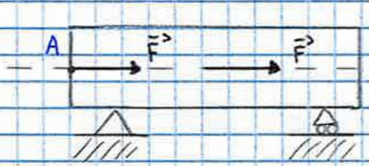
13/03/13

V LEZIONE:

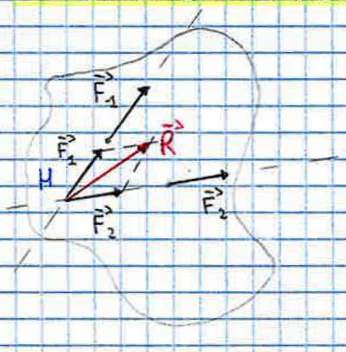
FORZA: vettore applicato di cui si deve specificare modulo, verso, direzione e punto d'applicazione



Nel corpo rigido esiste un principio chiamato PRINCIPIO DI TRASMISSIBILITÀ di una forza: la forza può essere traslata sulla sua retta d'azione



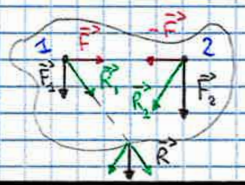
COMPOSIZIONE DI FORZE



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ↓ IDENTITÀ

Come per le velocità si può utilizzare un poligono chiuso per trovare la forza incognita.

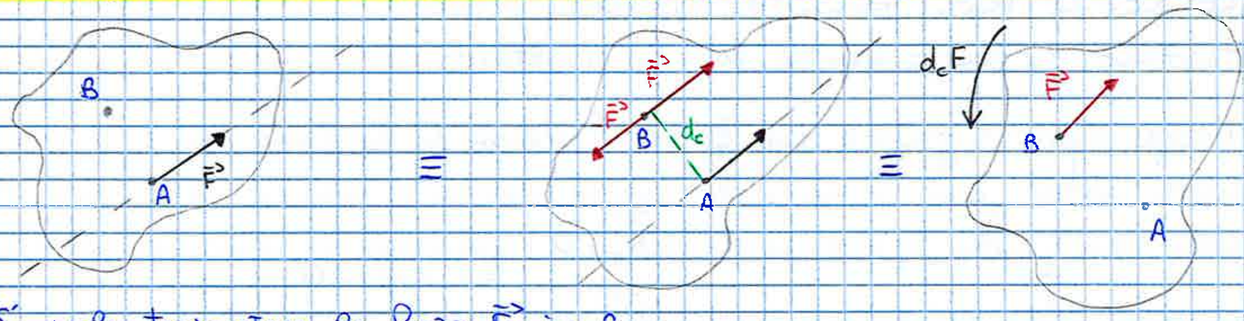
Quando $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono parallele non si può costruire il parallelogramma.



si tracciano due forze $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ nel punto 1 e 2, si fa la risultante e poi prolungando si ottiene $\vec{R}$ come risultante di $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$

Due sistemi si dicono in EQUILIBRIO se hanno $\vec{R} = 0$, $\vec{\Pi}_R = 0$

TRASPORTO DI UNA FORZA FUORI DALLA SUA RETTA D'AZIONE



Si vuole trasportare la forza $\vec{F}$ in B.

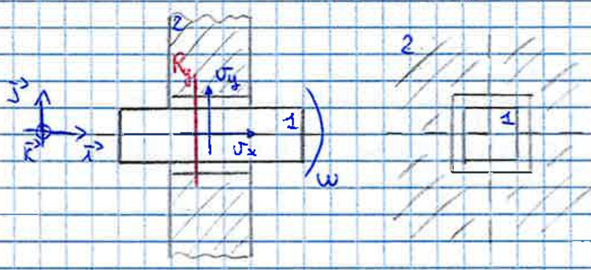
Se una forza $\vec{F}$ viene portata fuori dalla sua retta d'azione si deve aggiungere un momento di trasporto $C = d_c F$.

TIPI DI FORZE

1) forze concentrate: applicate in un punto
2) forze distribuite: applicate in più punti
3) forze esterne: pesi e inerzie, compaiono anche sull'assemblato
4) forze interne: reazioni vincolari che nascono nei vincoli e sono sempre delle incognite

REAZIONI VINCOLARI: sono forze e coppie scambiate nei vincoli, sono incognite e nascono nelle direzioni in cui il vincolo impedisce il moto

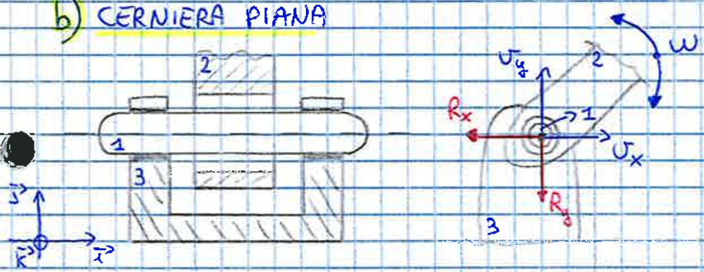
a) COPPIA PRISMATICA (pattino) ⇒ solo traslazione



$$\begin{cases} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ \Pi_i \neq 0 \end{cases}$$

reazioni vincolari

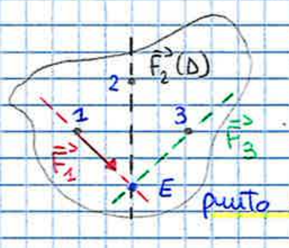
b) CERNIERA PIANA



$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ \omega \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ \Pi_k = 0 \end{cases}$$

reazioni vincolari

3) corpo rigido soggetto a tre forze



punto di stella

Di una forza si deve conoscere modulo, direzione e verso, della seconda si deve conoscere la direzione e della terza solo il punto d'applicazione.

Si prolunga $\vec{F}_1$ fino ad incontrare la direzione di $\vec{F}_2$, l'intersezione viene chiamato PUNTO DI STELLA.
Per l'equilibrio anche $\vec{F}_3$ deve passare per il punto di stella.

EQ. ALLA ROTAZIONE $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_{i_F} = 0$

$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$

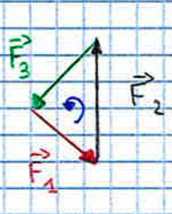
$M_o = bF \quad b \perp F \quad$ b rispetto ad O

passano tutte per E

rispetto ad E: $F_1 \cdot \underbrace{\cancel{b_E}}_{0} + F_2 \cdot \underbrace{\cancel{b_E}}_{0} + F_3 \cdot \underbrace{\cancel{b_E}}_{0} = 0 \Rightarrow$ equilibrio alla rotazione

le forze hanno braccio nullo rispetto ad E

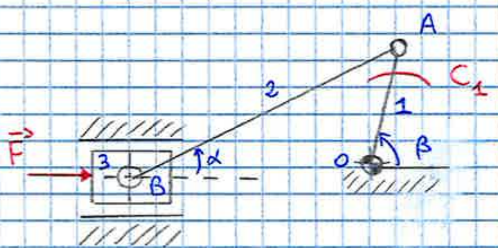
EQ. ALLA TRASLAZIONE $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i = \vec{R}_F = 0 \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$



Tutte le forze devono avere lo stesso verso in modo tale che la risultante sia nulla.

Il modulo si calcola con la trigonometria e geometria del sistema.

ESEMPIO:

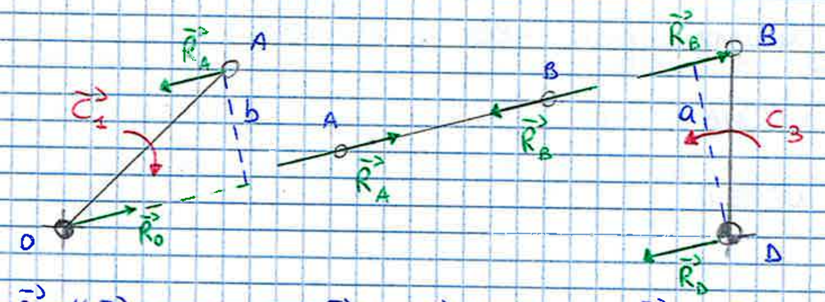


noti α, β, OA, AB

C_1? $\quad \vec{F}$ nota

Vengono trascurati i pesi

Innanzitutto bisogna separare i tre corpi e tracciare i diagrammi di corpo rigido (forze interne ed esterne che agiscono sul corpo).



$\vec{R}_A \parallel \vec{R}_O$
$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_O|$
$C_1 = R_A b$

$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$

$\vec{R}_B \parallel \vec{R}_D$
$|\vec{R}_B| = |\vec{R}_D|$
$C_3 = R_D a$

19/03/13

VII LEZIONE:

3 LEGGI DELLA DINAMICA (O DI NEWTON)

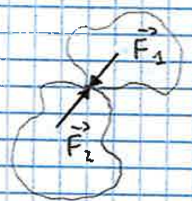
1) Una particella resta a riposo o in moto rettilineo uniforme se $\vec{R}_F = 0$

2) l'accelerazione di una particella è proporzionale alla $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{EST}$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{EST_i} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ = accelerazione della particella
m = massa della particella [kg]
⇓
inerzia o resistenza della particella a cambiare la sua velocità

3) Principio di azione - reazione

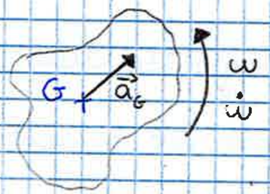


$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

2) ⇒ nel corpo rigido

$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{EST_i} = m\vec{a}_G}$ EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE

$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \vec{M}_{EST_i} = I_G \dot{\vec{\omega}}}$ EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE



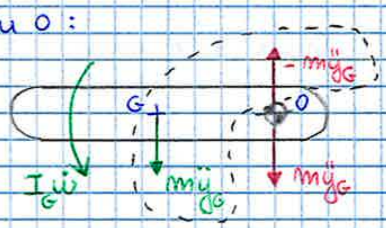
m = massa del corpo rigido [kg]

I_G = momento d'inerzia baricentrico [$kg m^2$]
momento d'inerzia di massa

I_A = momento d'inerzia di area [m^4] dipende dalla forma geometria del corpo considerato

Anche se il momento è in punto qualsiasi le azioni d'inerzia vanno sempre calcolate nel baricentro. Infatti $I_G \dot{\omega}$ è un vettore libero, è una coppia che non dipende dal punto di applicazione.

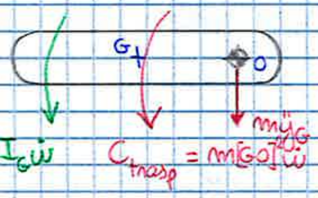
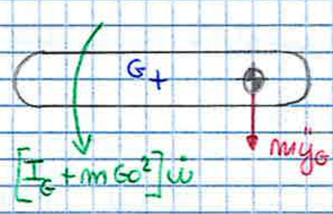
In O:



$$C_{trasporto} = m\ddot{y}_G (GO)$$

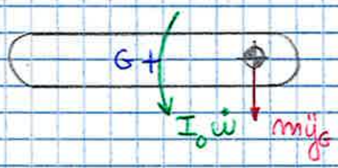
$$\ddot{y}_G = \vec{a}_{y_G} = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (\overline{G-O}) \qquad \text{è solo tangenziale}$$

$$M \quad \ddot{y}_G = \dot{\omega}\, GO \quad \Rightarrow \quad C_{tras} = \dot{\omega}\left[m(GO)^2\right]$$

$\equiv$  $\equiv$ 

$I_G + m(GO)^2 = I_O$ TEOREMA DI HUYGHENS

Il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un punto distante a dal baricentro è pari alla somma del momento d'inerzia nel baricentro più ma^2.



Attenzione: le azioni d'inerzia sono sempre opposte alle accelerazioni, inoltre conviene considerare le azioni d'inerzia rispetto al baricentro altrimenti bisogna calcolare la coppia di trasporto

BARICENTRO DI UN CORPO RIGIDO NEL PIANO

1) SISTEMA DISCRETO $\Rightarrow$ n° masse

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{M} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{M} \end{cases} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

2) SISTEMA CONTINUO:

$$\rho = \text{densità} = \frac{dm}{dV}$$

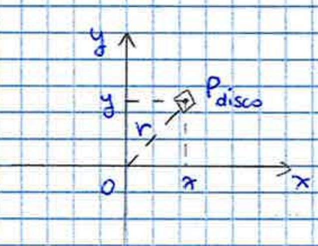
consideriamo ρ = costante

2) MOMENTO D'INERZIA DIAMETRALI (x, y)

$I_x = \int_\Pi y^2 dm$

$\Rightarrow$ per simmetria $I_x = I_y$

$I_y = \int_\Pi x^2 dm$

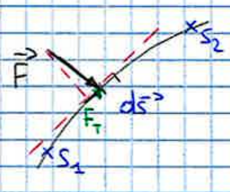


$r^2 = x^2 + y^2$

$$I_0 = \int_\Pi r^2 dm = \int_\Pi (x^2+y^2) dm = \int_\Pi x^2 dm + \int_\Pi y^2 dm = I_x + I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^2}{4}$$

LAVORO DI 1 FORZA



$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos\alpha$ [Joule]

$L = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$dL = F ds \cos\alpha = F_T ds$ $\rightarrow$ >0 concordi (forza e spostamento)
$\searrow$ <0 discordi

$L = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1}^{S_2} F_T ds$ lavoro di una forza

$L_c = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$ lavoro di una coppia

POTENZA $= \frac{dL}{dt}$ [Watt]

$P_F = \frac{dL}{dt} = F_T \frac{ds}{dt} = F_T v$

$P_c = \frac{dL}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$

$P_{tot} = F_T v + M\omega$

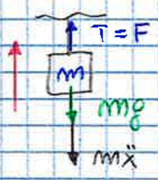
le forze sono associate ad una velocità lineare, le coppie ad una velocità angolare.

$(m)\ +\uparrow\quad T - mg - m\ddot{x} = 0$

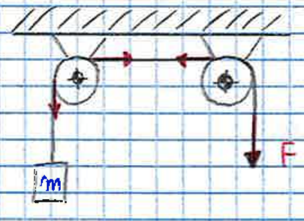
$(m_1)\ +\uparrow\quad T - m_1 g + m_1 \ddot{x} = 0$

$$\ddot{x} = g\,\frac{m_1 - m}{m_1 + m} = 1{,}4\ m/s^2$$

Se al posto di m_1 si applica una forza $F = m_1 g = 1962\ N$



$+\uparrow\ F - mg - m\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{F - mg}{m} = 3{,}27\ m/s$



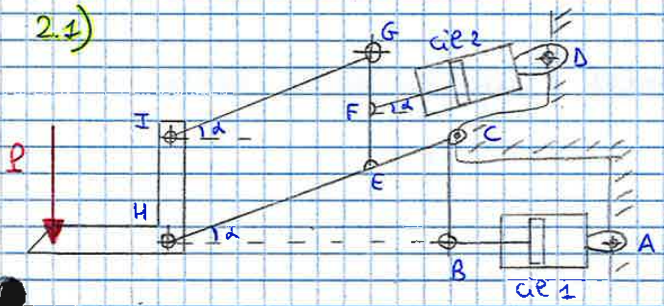
L'accelerazione è maggiore in questo caso poiché, anche se la forza applicata è uguale, non c'è la forza d'inerzia che ostacola il moto.

20/03/13

VIII LEZIONE:

PALA CARICATRICE (eq. statico)

2.1)

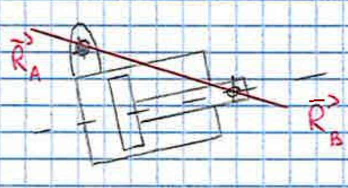


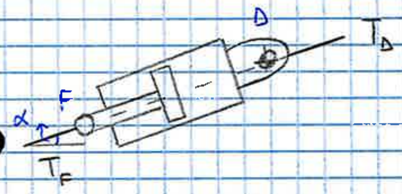
I cilindri sono sempre considerati ASTE SCARICHE.

$F_{press} = pS$

Il numero di motori in un meccanismo è uguale ai G.d.L.

In questo caso i due cilindri hanno i vincoli lungo l'asse e quindi anche le reazioni vincolari hanno direzione assiale. Nel caso in cui il cilindro sia vincolato non assialmente le reazione vincolari hanno direzione uguale alla congiungente dei vincoli.



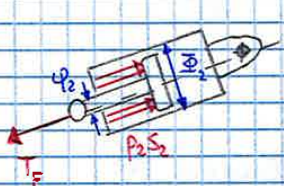


I cilindri sono considerati aste scariche

$\Rightarrow V_F = H_F \operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{cases} H_F = 52448\ N \\ V_F = 30280\ N \\ V_E = -15140\ N \\ H_E = -26224\ N \end{cases}$$

Siccome V_F e H_F sono positivi i versi scelti sono corretti $\Rightarrow T_F$ nel cilindro tende a tirare il cilindro

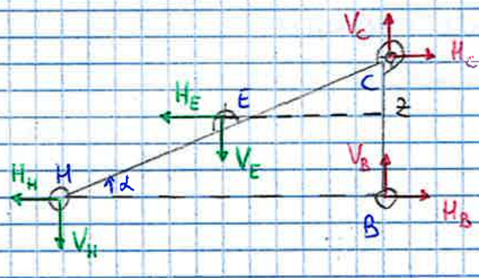


Affinchè lo stelo stia fermo ci deve essere una pressione opposta tale che la forza di pressione sia uguale e contraria.

$$S_2 = \frac{\pi}{4}\left[\Phi_2^2 - \varphi_2^2\right] \qquad T_F = P_2 S_2$$

$$T_F = \sqrt{V_F^2 + H_F^2}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{T_F}{S_2} = 7139680{,}74\ Pa = 71{,}38\ bar \qquad 1\ bar = 10^5\ Pa$$



Questa è un'unica asta
E e C non spezzano l'asta

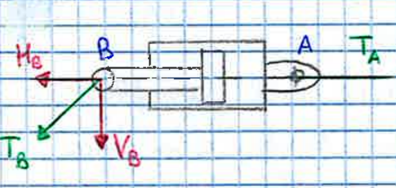
$\xrightarrow{+}$ $-H_H - H_E + H_C + H_B = 0$

$+\uparrow$ $-V_H - V_E + V_C + V_B = 0$

$C\circlearrowleft +$ $H_B(BC) + V_E(EC\cos\alpha) - H_E(EC\operatorname{sen}\alpha) + V_H(HC\cos\alpha) - H_H(HC\operatorname{sen}\alpha) = 0$

$Ez = EC\cos\alpha \qquad BC = HC\operatorname{sen}\alpha$

$zC = EC\operatorname{sen}\alpha \qquad HB = HC\cos\alpha$



Siccome le reazioni vincolari delle aste scariche devono essere allineate con l'asse l'unica soluzione è che $V_B = 0$

le forze in rosso N_1, N_2 sono le forze che si generano dal contatto con il terreno, in questo caso conosciamo solo la direzione che è normale al terreno stesso poiché non ci sono attriti.

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$x(t) = \cancel{x_0} + \cancel{v_0}t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2 \quad \Rightarrow \quad x_{AB} = \frac{1}{2}\ddot{x}t^{*2}$

$v(t) = \cancel{v_0} + \ddot{x}t \quad \Rightarrow \quad v_B = \ddot{x}t^*$

$t^* = \frac{v_B}{\ddot{x}}$

$x_{AB} = \frac{1}{2}\ddot{x}\left[\frac{v_B}{\ddot{x}}\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{\ddot{x}} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2x_{AB}\ddot{x}}$

Consideriamo il carrello e scegliamo un sistema di riferimento con assi paralleli al piano inclinato.

$\overset{+}{\nearrow}x \quad \underline{\underline{T_D}} - m_1\underline{\underline{\ddot{x}}} - m_1 g \operatorname{sen}\alpha = 0$

L'equazione lungo y non aggiunge informazioni, non serve scriverla.

Nel corpo 3: $\overset{+}{\nearrow}x \quad \underline{\underline{T_E}} + \underline{\underline{T_N}} - T_D = 0$

Quando ci sono delle tensioni su una puleggia conviene sempre verificare se queste danno momento.

$\overset{\curvearrowleft +}{O_3} \quad T_N r_3 - T_E r_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_E = T_N$ questa relazione vale se non esistono coppie esterne, inerzie, attriti o rigidezze

Nel corpo 2 sono presenti le reazioni vincolari in O, siccome non è richiesto calcolarle e sono incognite conviene fare un'equazione di momento rispetto ad O.

$\overset{\curvearrowleft +}{O} \quad I_O\underline{\underline{\dot{\omega}_2}} + T_E r_2 - F r_2 = 0$

Ci sono 5 incognite però sappiamo che $T_E = T_N \Rightarrow T_D = 2T_E = 2T_N$

Non ci sono abbastanza equazioni per risolvere il sistema, spesso bisogna cercare di legare le accelerazioni angolari con quelle lineari.

Noi consideriamo sempre condizioni di puro rotolamento. Di conseguenza la puleggia 3 che rotola sulla fune legata ad O (fune fissa, può

$\overset{\curvearrowleft +}{A}$ $T\cos 25° \cdot a + T \operatorname{sen} 25° \cdot d - F_c - mgb = 0$

$\Rightarrow T = 19{,}61 \text{ kN}$

$\overset{+}{\rightarrow}$ $R_{Ax} = T\cos 25° = 17{,}77 \text{ kN}$

$+\uparrow$ $R_{Ay} = mg + F - T\operatorname{sen} 25° = 6{,}37 \text{ kN}$

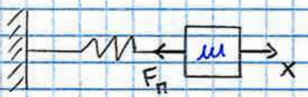
$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 18{,}88 \text{ kN}$

26/03/13

X LEZIONE:

LAVORO DI UNA MOLLA

È un elemento elastico



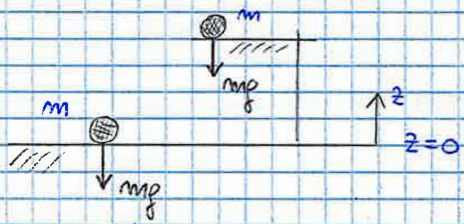
$F_{molla} = -kx$

$$L_{molla} = -\int_{x_1}^{x_2} (kx)\,dx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

Quando si comprime una molla si ha un'energia potenziale:

$$\Delta E_{pel} = -L_{molla} = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

LAVORO DELLA FORZA PESO

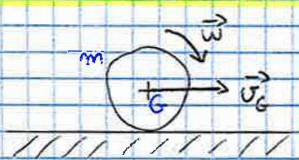


$$L_{F_{peso}} = -\int_0^h mg\,dz = -E_{pg} = -mgh \qquad [J]$$

C'è il meno poiché forza e spostamento sono opposte.

ENERGIA CINETICA

$$E_K = \frac{1}{2}m v_G^2 + \frac{1}{2}I_G \omega^2$$



Il moto più generico è la rototraslazione (nel piano)

L'energia cinetica è la somma del contributo della traslazione e della rotazione.

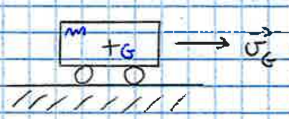
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 140

$$F \frac{2AB r_2}{r_2} = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_o \left(\frac{2 v_B}{r_2}\right)^2 + m_1 g h$$

$$F \cdot 2AB = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{4 v_B^2}{r_2^2} + m_1 g h$$

$v_B = 4{,}19$ m/s

QUANTITÀ DI MOTO



$$\boxed{\vec{Q} = m \vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m \vec{a}_G = -\vec{F}_{in_G} \qquad \left(\vec{F}_{in_G} = -m \vec{a}_G\right)$$

$$\xrightarrow{+} \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i} + \vec{F}_{in_G} = 0$$

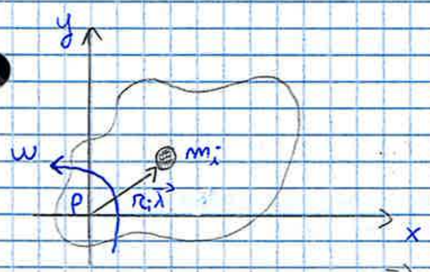
$$\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i} = -\vec{F}_{in_G} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$ TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i} = \frac{dQ}{dt}}$$

Se in un sistema isolato si ha:

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{est_i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = cost$$ PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO



$$\vec{K}_p = \vec{\rho} \wedge \vec{Q}$$

$\vec{Q}$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$

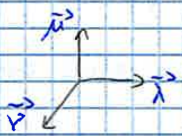
$$\vec{K}_p = \sum_{i=1}^{m} r_i \vec{\lambda} \wedge \underbrace{m_i r_i \vec{\lambda}}_{\vec{Q}_i}$$

$$\left(\vec{K}_p = \vec{L}\right)$$
momento angolare

$$\vec{K}_p = \sum_{i=1}^{m} r_i \vec{\lambda} \wedge m_i \underbrace{\left[\omega \vec{k} \wedge r_i \vec{\lambda}\right]}_{\vec{v}} = \sum_{i=1}^{m} r_i \vec{\lambda} \wedge m_i \omega r_i \vec{\mu}$$

derivata di un vettore rotante = sua velocità angolare ∧ vettore posizione

$$\vec{K}_p = \sum_{i=1}^{m} \left[r_i^2 m_i \omega\right]\left[\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu}\right]$$



$$\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{\nu}$$

$$\vec{K}_p = \sum_{i=1}^{m} \left(m_i r_i^2\right) \omega \vec{\nu} \qquad (\perp \text{ piano})$$

$\vec{K}_p = I_p \omega \vec{\nu}$ nel piano $\quad P \equiv G \quad \vec{K}_G = I_G \omega \vec{\nu}$

Se invece i due carrelli rimangono attaccati dopo l'urto c'è solo una v_f.
Anche in questo caso non ci sono forze orizzontali e quelle verticali sono bilanciate.
=> c'è di nuovo conservazione della quantità di moto $Q_i = Q_f$

$Q_i = m_1 v_{1i}$
$Q_f = (m_1 + m_2) v_f$

URTO ANELASTICO: c'è dissipazione di energia

$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$

In questo caso c'è una variazione di energia cinetica poiché il sistema ha cambiato la sua massa.

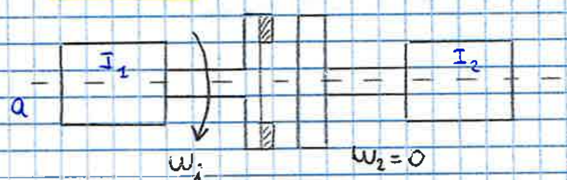
$\Delta E_{cin} = E_{cin_f} - E_{cin_i}$

$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$

⇓

energia dissipata dall'urto tra i due carrelli

ESEMPIO 2:



Essendo oggetti in rotazione non si parla di masse ma di momenti d'inerzia.

$I_1 \Rightarrow I_1 + I_2 \Rightarrow$ URTO ANELASTICO => c'è dissipazione di energia
(i) (f)

In questo caso si fa l'equilibrio dei momenti:

a) $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{est_i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}_G}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{K}_G = cost$

$K_{G_i} = I_1 \omega_i$
$K_{G_f} = (I_1 + I_2) \omega_f$

$I_1 \omega_i = (I_1 + I_2) \omega_f$

$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_i^2$

Nell'urto anelastico, sia che ci sia rotazione, sia che ci sia traslazione c'è dissipazione di energia cinetica.

$h = OZ - OD = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$

$\Delta E_{p_g} = (m_1+m_2)gL(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 = (m_1+m_2)gL(1-\cos\theta)$

$v_f = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)gL(1-\cos\theta)\cdot 2}{(m_1+m_2)}}$ $v_f = 1{,}41\ m/s$

$\Rightarrow m_1 v_i = (m_1+m_2)v_f \Rightarrow v_i = 708{,}41\ m/s$

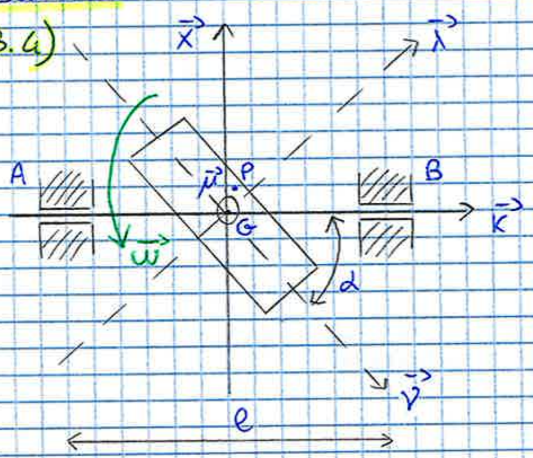
$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}m_1 v_i^2 = 15067{,}9\ J$

27/03/13

XI LEZIONE:

ESERCIZIO:

3.4)



$\alpha = 1°$ $m = [\pi r^2 h]\rho = 275{,}6\ Kg$

$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 157{,}08\ rad/s$ (costante)

$\vec{F}_{in_G}$? $\vec{\Pi}_{in_G}$?

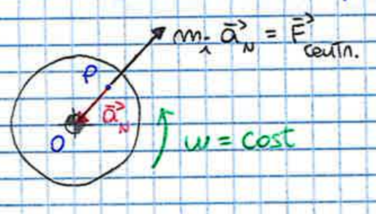
$\vec{F}_{in_G}$: $\omega = cost$, $\dot{\omega} = 0$

$\Downarrow$

resta l'accelerazione centripeta $\vec{a}_N = -\omega^2(P-G) \Rightarrow$ forza d'inerzia centrifuga

$\vec{a}_{t_p} = \dot{\omega}\vec{k} \wedge (P-G) = 0$

Anche la forza centrifuga, essendo una forza d'inerzia, è opposta all'accelerazione centripeta.

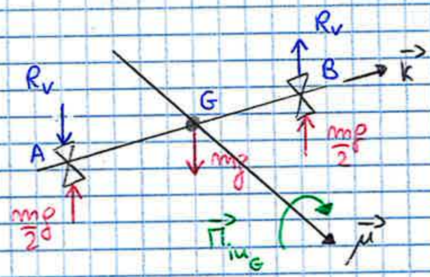


Essendo le accelerazioni centripete molto alte (dipendono da ω^2), la forza centrifuga può far esplodere il pezzo (vince sulla forza di aggregazione del materiale).

I_ν = momento di inerzia assiale $= \frac{mr^2}{2} = 3,1\ kg\,m^2$?

I_λ = momento di inerzia diametrale $= \frac{m}{4}\left[r^2 + \frac{h^2}{3}\right] = 7,3\ kg\,m^2$

$\vec{\Pi}_{in_G} = -\frac{d\vec{K}_G}{dt} = -1808\,\vec{\mu}\ [Nm]$



Il peso si scarica a metà poiché il rotore è centrato.

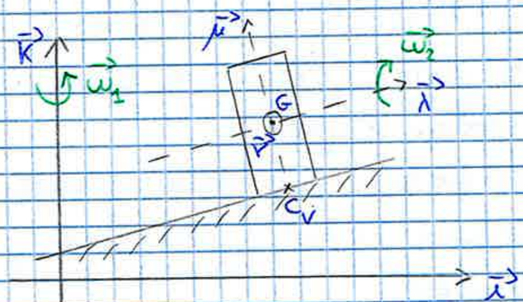
La coppia d'inerzia tende a far alzare A => nasce una coppia di forze (reazioni vincolari) sui supporti.

$R_v = \frac{\Pi_{in_G}}{e} = 3014\ N$

$+\uparrow$ A : $-R_v + \frac{mg}{2} = R_A = -1662\ N$

B : $R_v + \frac{mg}{2} = R_B = 4366\ N$

Si poteva anche risolvere con gli equilibri (uno verticale e uno di momento).



EQUILIBRIO DI UNA RUOTA IN CURVA

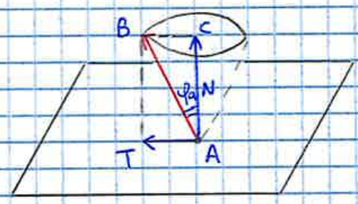
$\vec{\omega}_{ass} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{tr} = -\omega_2\vec{\lambda} + \omega_1\vec{k}$

$\frac{d\vec{K}_G}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\lambda}}{dt}, \frac{d\vec{\mu}}{dt}, \frac{d\vec{\nu}}{dt}$

$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \vec{\omega}_{ass} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\lambda}$

$[\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}]$ in G => riferita alla forcella

Se si considera la forcella, essa risente solo della ω di trascinamento.



$T \leq f_a N \qquad T_{lim} = f_a N$

CONO DI ATTRITO DI ADERENZA (MODELLO GEOMETRICO)

In $\hat{ABC} \Rightarrow T_{lim} = (\operatorname{tg}\varphi_a) N$

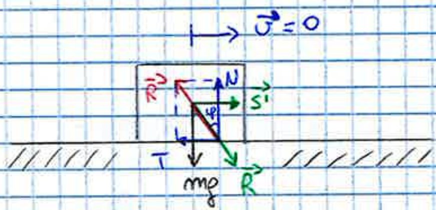
$T_{lim} = f_a N \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi_a = f_a \qquad \varphi_a = \operatorname{arctg} f_a$

Riducendo T si riduce il cono ovvero la risultante cade all'interno del cono limite.

Aumentando S aumenta T $\Rightarrow$ T tende a T_{lim}

Superato il T_{lim} la cassa comincia a muoversi.

2) ATTRITO di STRISCIAMENTO : $T > T_{lim} \Rightarrow v \neq 0$



$v = \text{cost} \Rightarrow S' = T$

T = forza di attrito tangenziale di strisciamento cassa-terreno opposta al moto

legge di attrito di strisciamento : $\boxed{T = fN}$

N $\perp$ piano di scorrimento

T lungo piano di scorrimento e opposta a $\vec{v}$

f coeff. di attrito di strisciamento (dipende dai materiali e dalla superficie di contatto)

$f_a > f$

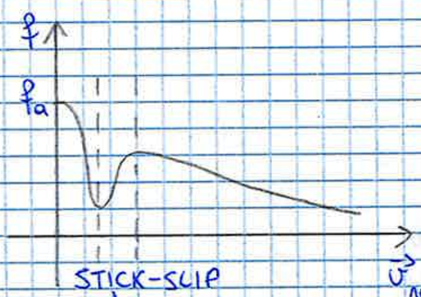


diagramma che confronta f e f_a rispetto alla velocità, è ricavato sperimentalmente f in realtà varia con la velocità ma si assume che sia costante

STICK-SLIP

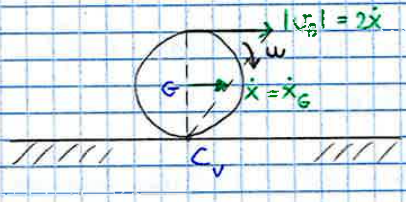
continuo passaggio tra aderenza e strisciamento, l'oggetto si vede che saltella (esempio quando la porta cigola)

Il problema è capire come si muove la ruota. A differenza della cassa che poteva solo traslare, la ruota può avere due G.d.L.

RUOTA ↗ 1 GDL se $\dot{x}$ e ω ($\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$) sono legate => PURO ROTOLAMENTO ⇓ ADERENZA

RUOTA ↘ 2 GDL se $\dot{x}$ e ω ($\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$) sono indipendenti ⇓ NO PURO ROTOLAMENTO => STRISCIAMENTO

a) 1 GDL => PURO ROTOLAMENTO



$$\vec{\dot{x}}_G = \underbrace{\vec{v}_{C_v}}_{0} + \omega \vec{k} \wedge (G - C_v) \Rightarrow \dot{x}_G = \omega r$$

$$\vec{\dot{x}}_B = \underbrace{\vec{v}_{C_v}}_{0} + \omega \vec{k} \wedge (B - C_v) \Rightarrow \dot{x}_B = \omega (2r)$$

$\dot{x}_G = \dot{x} = \omega r \Rightarrow$ in G $\ddot{x}_G = \ddot{x} = \dot{\omega} r$ CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO

$$\text{④} \begin{cases} \ddot{x} = \dot{\omega} r \\ T \leq f_a N \end{cases}$$

Bisogna sempre verificare queste condizioni numericamente.

Se si trova $T > f_a N$ => NO ADERENZA

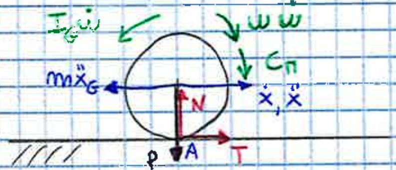
$$\Downarrow \quad \begin{cases} \dot{x} \neq r\omega \\ \ddot{x} \neq r\dot{\omega} \end{cases}$$

=> STRISCIAMENTO ④ $T = fN$

09/04/13

XIII LEZIONE :

RUOTA MOTRICE (non c'è la forza $\vec{S}$ ma una coppia C_m)

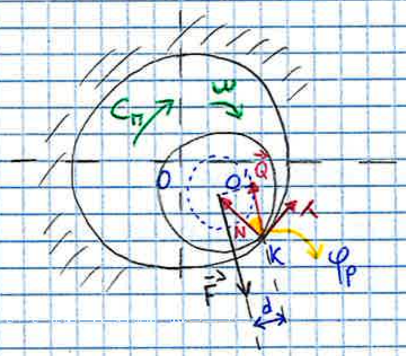


Ha due gradi di libertà poiché ha un moto di trascinamento => la velocità lineare e angolare sono indipendenti.

T è la forza d'attrito che si oppone a C_m (coppia imposta dall'esterno)

N.B. T si oppone SEMPRE alla coppia/forza che genera il moto

ATTRITO AL PERNO



F = carico sul perno O'

$\vec{Q} \parallel \vec{F}$ $|F| = |Q|$

$\rho_p = d$ = distanza di Q da O'

$\varphi_p = \arctg f_p \Rightarrow \hat{N, Q}$ f_p = coeff. attrito al perno (dato fornito)

Per vincere l'attrito è necessario applicare una coppia motrice esterna.

$\vec{Q} \parallel \vec{F} \Rightarrow$ Q è tangente al cerchio d'attrito

Si genera un cerchio in cui $\vec{Q}$ rimane alla distanza ρ_p da O'

$\Rightarrow \rho_p = r_p \operatorname{sen} \varphi_p$

$r_p = O'K$ = raggio del perno

Durante la rotazione ω si genera una $\vec{Q}$ tangente al cerchio di attrito al perno di raggio ρ_p. Questo rappresenta l'attrito nel vincolo di cerniera.

$\vec{Q}$ è la reazione vincolare in O'

CONDIZIONI ATTRITO AL PERNO

1) $\vec{Q}$ tangente al cerchio d'attrito
2) $\vec{Q}$ opposta ad $\vec{\omega}$
3) $\vec{Q}$ deve rispettare l'equilibrio del perno $(\vec{Q} \parallel \vec{F},\ |\vec{Q}| = |\vec{F}|)$

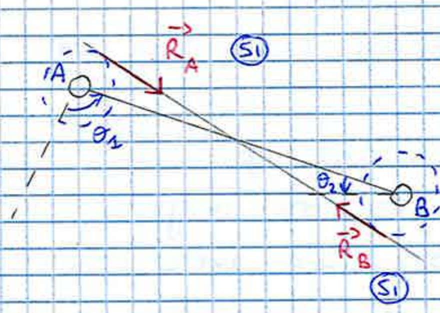
$\Downarrow$

in queste condizioni Q ed F generano la coppia di attrito resistente che si oppone alla coppia motrice

Si deve:

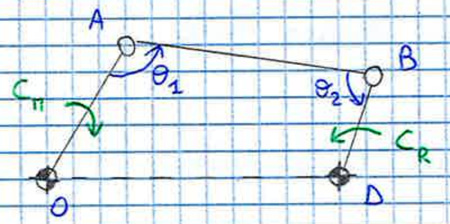
1) separare le parti del sistema
2) tracciare il cerchio di attrito sulle cerniere
3) stabilire il verso di $\vec{Q}$ in base alle tre condizioni precedenti

$\vec{Q}$ è la reazione vincolare nella cerniera e segue l'attrito al perno.
L'attrito al perno non sposta da O' né peso né inerzie, coinvolge solo $\vec{Q}$



In questo caso tutte le condizioni sono rispettate. Essendo AB un'asta scarica le reazioni $\vec{R}_A$ e $\vec{R}_B$ sono opposte, rispettano l'equilibrio. Sono entrambe tangenti al cerchio e sono entrambe opposte all'andamento dell'angolo che esprime il moto.

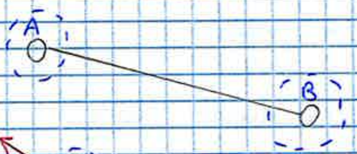
QUADRILATERO ARTICOLATO



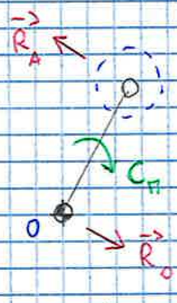
Attrito in A e B

θ_1 aumenta

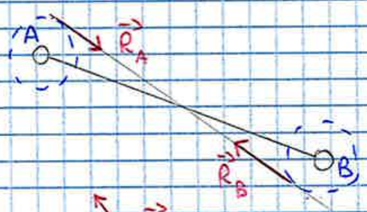
θ_2 diminuisce



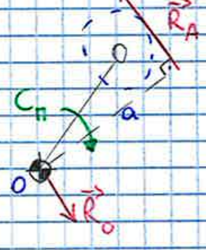
AB è un'asta scarica



In questo modo si determina il verso ma non la direzione e il punto di applicazione.

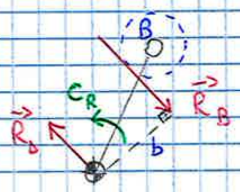


Questa è l'unica soluzione che rispetta tutte le condizioni.



$\vec{R}_O \parallel \vec{R}_A \qquad |R_O| = |R_A|$

O) $C_M - R_A a = 0$



$\vec{R}_B \parallel \vec{R}_D \qquad |\vec{R}_B| = |\vec{R}_D|$

D) $C_R - R_B b = 0$

Senza attrito $\vec{R}_A$ sarebbe centrata in A e quindi il braccio a sarebbe minore. In questo caso (con attrito) $a > a_i$ => la coppia resistente è della cassa.

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha - K\operatorname{sen}\beta \\ T = -mg\operatorname{sen}\alpha + K\cos\beta \\ T = fN \end{cases}$$

$$K(\beta) = \frac{f\,mg\cos\alpha + mg\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta + f\operatorname{sen}\beta}$$

Siccome il problema chiede il K_{min} si può trovare $G(\beta)_{max}$ dove $G(\beta)$ è il denominatore di $K(\beta)$. Il numeratore è costante, non dipende da β.

$$\frac{dG(\beta)}{d\beta}_{MAX} = -\operatorname{sen}\beta + f\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\beta = f = tg\varphi \quad \Rightarrow \quad \beta = \varphi = arctg f$$

$\beta = 11,31°$

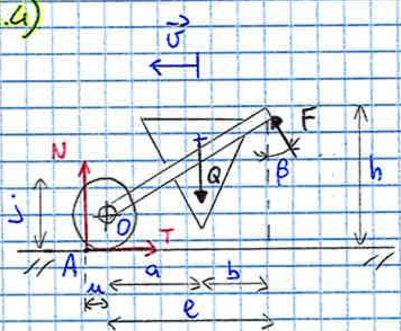
Per verificare che sia un minimo bisogna controllare $\frac{d^2G(\beta)}{d\beta^2} < 0$

$\beta = 0 \div 90°$ se β fosse maggiore di 90° la slitta scenderebbe

$K_{min}(\beta) = 2,3$ kN

$\alpha = 30\%$ $\Rightarrow$ $tg\alpha = \frac{30}{100}$ $\Rightarrow$ $\alpha = 16,69°$!

4.4)



$Q = 784,8$ N

$u = 10$ mm attrito volvente

$O \begin{cases} d_p = 2r_p = 30 \text{ mm} \\ f_p = f = 0,2 \end{cases}$ attrito al perno

$l = 1,2$ m $\quad h = 0,8$ m

$a = 0,7$ m $\quad j = 0,4$ m

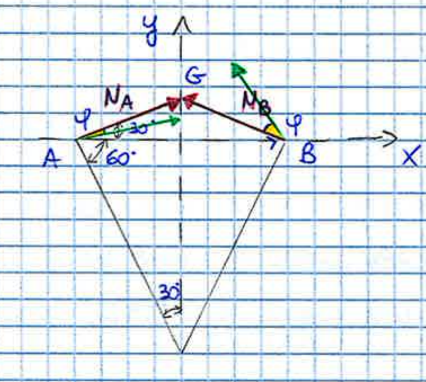
$b = 0,5$ m

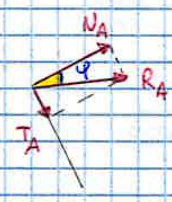
T è opposto al moto

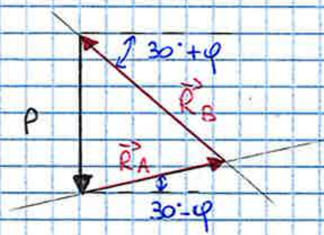
Nell'assemblato non si vede l'attrito al perno

$$\begin{cases} \uparrow \quad N - Q + F\cos\beta = 0 \\ \rightarrow \quad T = F\operatorname{sen}\beta \\ A \circlearrowleft \quad -Q(a+u) + F\cos\beta(l+u) + F\operatorname{sen}\beta(h) = 0 \end{cases}$$

in modo da eliminare T e N.







$$\begin{cases} \uparrow \quad -P + R_A \operatorname{sen}(30°-\varphi) + R_B \operatorname{sen}(30°+\varphi) = 0 \\ \rightarrow \quad R_A \cos(30°-\varphi) - R_B \cos(30°+\varphi) = 0 \end{cases}$$

$R_A = 814{,}8\,N \qquad R_B = 1088{,}88\,N$

Si poteva anche procedere normalmente scrivendo 3 equazioni ($\uparrow \rightarrow \circlearrowleft$) e proiettando N_A, N_B, T_A e T_B lungo gli assi x e y.

$$\begin{cases} T = R \operatorname{sen}\varphi \\ N = R \cos\varphi \end{cases}$$

G) $C_m - (T_A + T_B)\frac{d}{2} = 0 \quad \Rightarrow C_m - \frac{d}{2}(R_A + R_B)\operatorname{sen}\varphi = 0$

$C_m = 6{,}9\ Nm$

Calcolare la potenza in Kcal/h.

Nel sistema abbiamo:
- C_m azione motrice
- $C_R = (T_A + T_B)\frac{d}{2}$ azione resistente (data dall'attrito)
- inerzie (non c'è poiché $\omega = cost$)

$P_m = C_m \omega$

$P_{diss} = C_R \omega$

Tutto ciò che viene fornito serve per vincere l'attrito e mantenere la velocità costante.

$\Rightarrow P_m = P_{diss} \quad \Rightarrow P_{diss} = C_R \omega = C_m \omega = 72{,}33\ W$

$\boxed{1 \text{ caloria} = 4{,}186\ J}$

$P_{diss} = Q = 72{,}33 \cdot \frac{3600}{1000 \cdot 4{,}186} = 62{,}20\ Kcal/h$ quantità di calore che si sviluppa per attrito

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 140

$T < f_a N \Rightarrow \exists$ puro rotolamento $\Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta} = 0{,}875 \ m/s^2$

$\alpha = 45°$

$\ddot{\theta} = 8{,}88 \ rad/s^2 \qquad N = 69367{,}17 \ N \qquad f_a N = 13373{,}4 \ N \qquad T = 24967{,}17 \ N$

$T > f_a N \Rightarrow$ strisciamento

$$\begin{cases} T = fN \\ \ddot{x} \neq r\ddot{\theta} \end{cases}$$

Bisogna ricalcolare le incognite utilizzando $T = fN$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\omega} = 3{,}05 \ rad/s^2 \\ \ddot{x} = \dfrac{mg\,\text{sen}\alpha - T}{m} = 5{,}89 \ m/s^2 \\ T = fN = 0{,}15 \cdot 69367{,}17 \end{cases}$$

Quanti giri fa il rullo percorrendo 200 m?

$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2 \Rightarrow 200 = \frac{1}{2}\ddot{x}t^{*2}$

$t^* = \begin{cases} \alpha = 10° & 21{,}3 \ s \\ \alpha = 45° & 8{,}24 \ s \end{cases}$

$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \begin{cases} 399{,}9 \ rad \\ 103{,}5 \ rad \end{cases}$

Le leggi della cinematica possono essere utilizzate sia per grandezze lineari che per grandezze angolari.

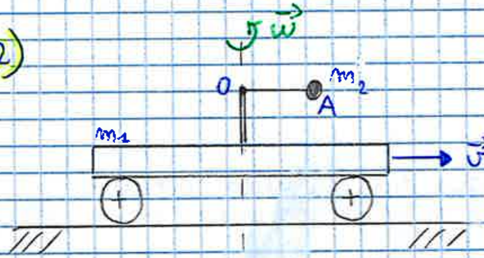
$\alpha = 10° \Rightarrow \theta^*_{10°}/2\pi = 63{,}68$ giri

$\alpha = 45° \Rightarrow \theta^*_{45°}/2\pi = 16{,}48$ giri

12/04/13

XV LEZIONE:

3.2)



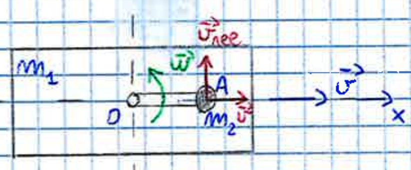
$m_1 = 20 \ kg \qquad m_2 = 5 \ kg$

$OA = r = 0{,}4 \ m$

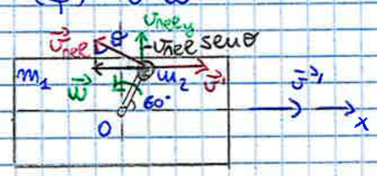
$\omega = 4 \ rad/s$

$v = 0{,}6 \ m/s \ (\theta = 0°) \qquad v? \ \theta = 60°$

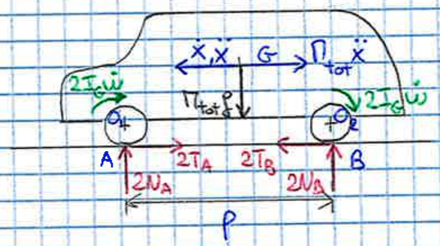
(i) $\theta = 0°$



(f) $\theta = 60°$



4.5)



$M_{tot} = 1360$ kg
$P = M_{tot}\,g = 13341{,}6$ N
$p = 2{,}3$ m
$r = 0{,}325$ m
$x_G = 1{,}30$ m $\quad z_G = 0{,}72$ m
$f = 0{,}2 \quad f_a = 0{,}55$ m
$m_r = q = 10$ kg $\quad \rho_i = 0{,}2$ m

$I_G = \rho_i^2\, q = 0{,}4$ kg m^2 (ruota)

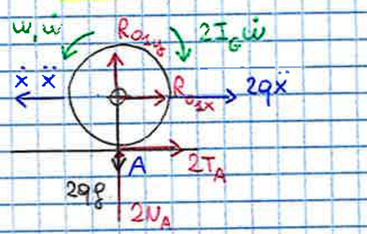
la scocca subisce solo una rotazione, mentre le ruote rototraslano.

? $C_{M_{max}}$, ? $\ddot{x}_{max}$, ? R_A, R_B

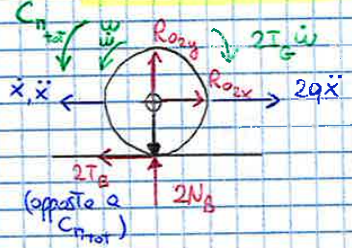
significa chiedere la condizione limite per aderenza

Il problema dice che le ruote motrici sono solo quelle posteriori.

ASSALE ANTERIORE



ASSALE POSTERIORE



le forze sono moltiplicate per due poiché si sta considerando l'assale cioè l'insieme delle due ruote. Le reazioni vincolari sono considerate generiche perché tanto non devono essere calcolate.

Nella struttura totale, la coppia motrice o la coppia frenante scambiate all'interno della struttura non si vede.

$O_1 \circlearrowright \quad 2I_G\dot{\omega} - 2T_A r = 0 \qquad (1)$

$O_2 \circlearrowright \quad 2I_G\dot{\omega} + 2T_B r - C_{M_{tot}} = 0 \qquad (2)$

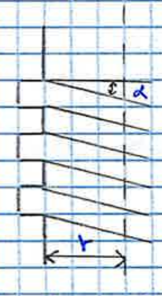
Sulle ruote posteriori bisogna fare la discussione dell'aderenza.

$\Rightarrow T_B = f_a N_B$ (aderenza limite) $\quad (3)$

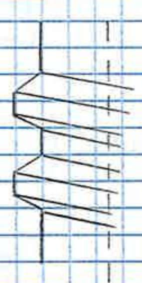
$\Rightarrow \ddot{x}_{MAX} = r\,\dot{\omega}_{MAX}$ (puro rotolamento) $\quad (4)$

Analizziamo ora l'equilibrio dell'assemblato:

La vite può avere diversi tipi di profili:

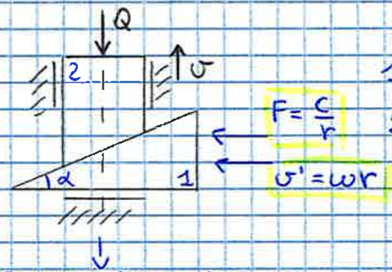


RETTANGOLARE



TRAPEZIA

Sviluppare un'elica sul piano significa disegnare un piano inclinato:

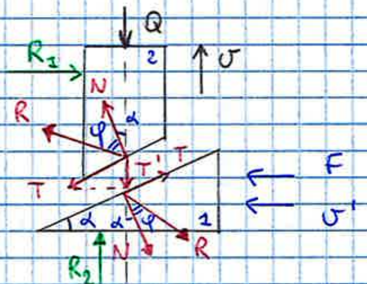


1 madrevite
2 vite

CUNEI EQUIVALENTI

r = raggio medio della vite

Spezzando il sistema si riescono a mettere in evidenza le reazioni scambiate.



R forza di attrito scambiata tra 1 e 2

La T deve essere presa in modo che la sua componente verticale sia opposta al moto.

$\hat{\varphi}$: N; R => angolo di attrito di strisciamento

α : angolo di inclinazione del filetto (sempre tra N e l'asse)

La vite trasla verticalmente => la coppia prismatica (senza attrito) esercita una reazione vincolare orizzontale (R_1).

Le reazioni di attrito sul corpo 1 sono uguali e contrarie a quelle del corpo 2.

Il nostro scopo è quello di trovare la coppia C necessaria per sollevare il carico Q. Si suppone velocità costante => no inerzie.

$$\delta dA = k\left[dT \frac{ds}{dt}\right] = k\left[(f p dA)\, v_{rel}\right] \Rightarrow \boxed{\delta = k[f p v_{rel}]}$$

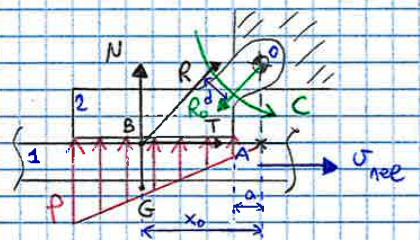
$dT = f dN = f p dA$

p = pressione di contatto

FRENI

1) FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO (Hp di usura)
2) FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO LIBERO (Hp di usura)
3) FRENO A TAMBURO (O A CEPPO) AD ACCOSTAMENTO RIGIDO (no Hp di usura)
4) FRENO A TAMBURO (O A CEPPO) AD ACCOSTAMENTO LIBERO (no Hp di usura)
5) FRENI A DISCO: (Hp di usura)
   - ad accostamento rigido
   - ad accostamento semi-rigido
   - ad accostamento libero

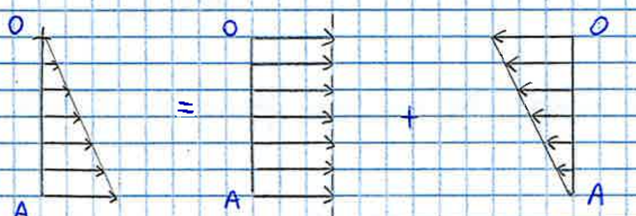
1) FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



1 nastro
2 pattino

Il pattino viene premuto lungo il nastro e la coppia permette di frenarlo.

$\delta = k f p v_{rel}$



rotazione intorno ad O — traslazione lungo il nastro — rotazione intorno ad A

Allontanandosi da A il pattino affonda maggiormente sul nastro.

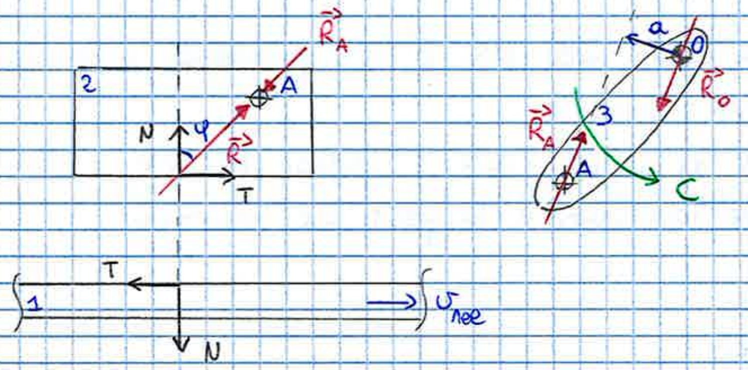
v_{rel} si può considerare costante

$\Rightarrow \delta \equiv p$ p è proporzionale a δ e δ ad x $p = k\delta = kx$

G = baricentro delle pressioni di contatto

Il pattino ha due gradi di libertà, può ruotare intorno ad O e intorno ad A.

Bisogna spezzare il sistema nei 3 parti prima di applicare l'ipotesi di usura e analizzare l'andamento delle pressioni.



R_A e R_o devono formare una coppia opposta a C

$|\vec{R}| = |\vec{R}_A|$

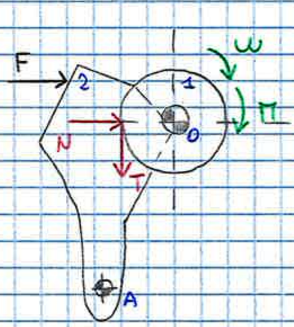
$O \circlearrowleft^+ \quad C - R_A a = 0$

$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_o|$

$|\vec{R}| = |\vec{R}_A| = |\vec{R}_o|$

$R = \dfrac{N}{\cos\varphi} = \dfrac{T}{\operatorname{sen}\varphi} \Rightarrow T = \dfrac{C}{a}\sin\varphi$

3) FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO 1 G.d.L.

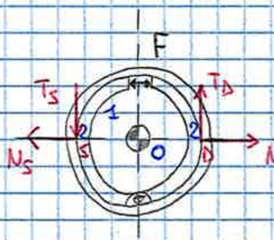


1 Tamburo
2 Leva

CEPPO ESTERNO

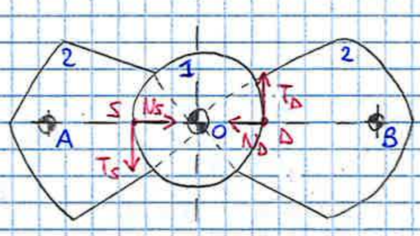
La N è rivolta verso l'interno, verso il centro O.

La T si oppone al moto del tamburo.



1 Tamburo
2 ceppi

CEPPI INTERNI

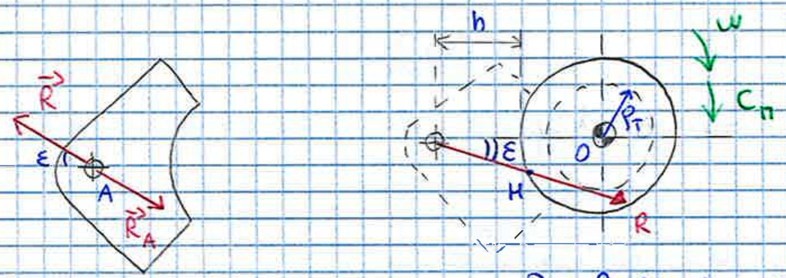


1 Tamburo
2 ceppi

CEPPI ESTERNI

Con due ceppi si sviluppano reazioni d'attrito differenti a destra e a sinistra.

Ha solo 1 G.d.L poiché la leva può ruotare solo attorno ad A.



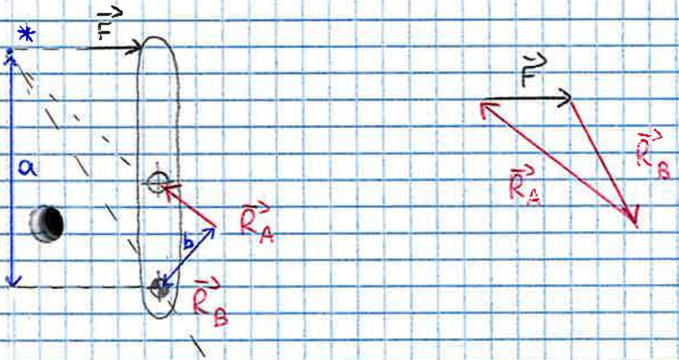
$$\varepsilon = \arcsin \frac{\rho_T}{R_1 + h}$$

$\rho_T = R_1 \sin\varphi$ raggio di attrito del tamburo

R deve passare per A

R deve essere tangente al cerchio d'attrito del tamburo

Il punto di contatto H non è più sull'asse.



$O)_+ \quad C_n - R\rho_T = 0$

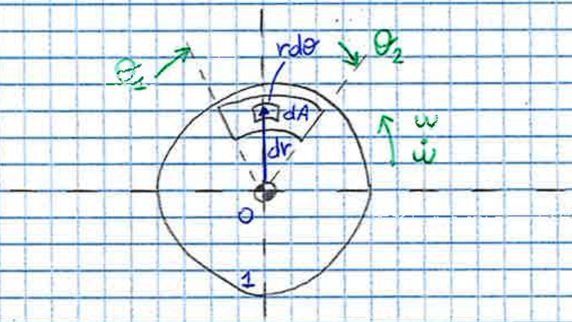
$|R| = |R_A|$

$B)_+ \quad Fa - R_A b = 0$

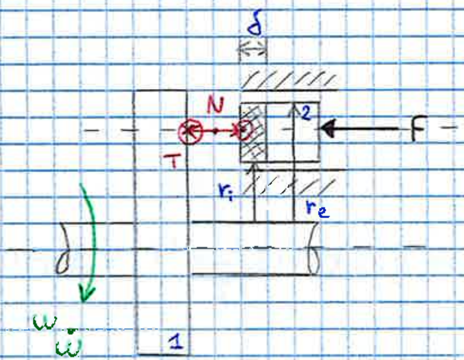
17/04/13

XVII LEZIONE :

5) FRENI A DISCO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO



$dA = r\,dr\,d\theta$



1 disco

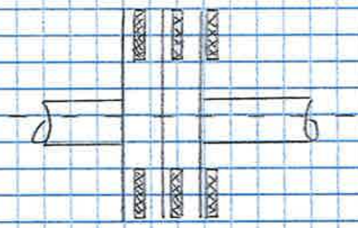
2 pastiglia

δ = cost = spessore di materiale asportato

T entrante nel disco

T uscente dalle pastiglie

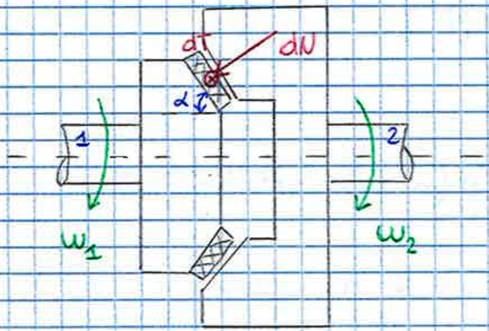
FRIZIONI PIANE MULTIPLE



n = n° superfici di contatto

$$C_{friz} = n f F \frac{(r_e + r_i)}{2}$$

FRIZIONE CONICA



dT entrante

Hp usura:

$p = \frac{k'}{r}$

$$C_{frizione} = \frac{f}{\operatorname{sen}\alpha} F \frac{(r_e + r_i)}{2} \qquad \text{(non ricavato)}$$

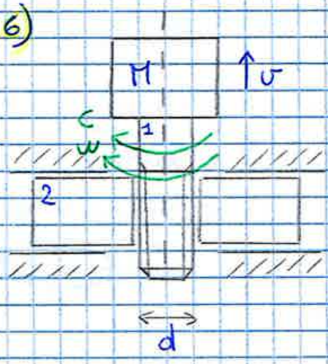
$f' > f$

Si riescono a trasmettere coppie maggiori => anche potenze maggiori

ESERCIZI

SISTEMA VITE MADREVITE

4.6)



1 vite

2 madrevite

$M = 100$ kg

$d = 30$ mm

$\alpha = 3°$

$\begin{cases} f = 0{,}1 \\ \varphi = 5{,}7° \end{cases}$

? C ? v $C' = 5$ Nm $> C$

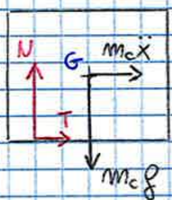
$v_0 = 50\ km/h = 13,88\ m/s$

$v(t) = v_0 + \ddot{x}t$

$x(t) = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$

$0 = v_0 + \ddot{x}t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = -\frac{v_0}{\ddot{x}} = 4,629\ s$

$x(t^*) = s^* = v_0 t^* + \frac{1}{2}\ddot{x}t^{*2} \quad \Rightarrow \quad s^* = 32,15\ m$



D.C.L cassa

$$\rightarrow \begin{cases} T + m_c\ddot{x} = 0 \\ N - m_c g = 0 \end{cases} \uparrow \qquad \begin{cases} T = -m_c\ddot{x} \\ N = m_c g \end{cases}$$

$T = f_a N \quad \Rightarrow \quad -m_c\ddot{x} = f_a m_c g \quad \Rightarrow \quad f_a = -\frac{\ddot{x}}{g} = 0,306$

Facciamo il diagramma di corpo rigido del sistema totale rispetto al baricentro G'.

forza peso e momento d'inerzia trascurabile, non vengono forniti dati

Solo le ruote posteriori sono frenanti.
Le forze totali considerano l'assale cioè le due ruote.

$O_1 \circlearrowleft \quad T_{A_{tot}} r = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{A_{tot}} = 0$

$O_2 \circlearrowleft \quad -M_{fr_{tot}} + T_{B_{tot}} r = 0 \qquad r = \frac{d}{2} = 0,4$

Sull'assemblato:

$\rightarrow \quad (m + m_c)\ddot{x} + T_{B_{tot}} + \underbrace{\cancel{T_{A_{tot}}}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{B_{tot}} = -(m + m_c)\ddot{x}$

$\uparrow \quad N_{A_{tot}} + N_{B_{tot}} - (m + m_c)g = 0$

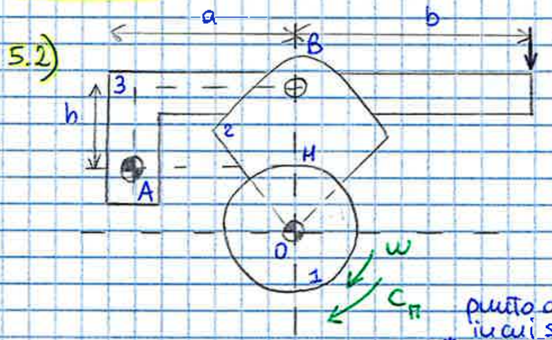
$\Rightarrow \quad M_{fr_{tot}} = T_{B_{tot}} r \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{fr_{tot}}}{2} = 2400\ Nm$ momento frenante sulla singola ruota

19/04/13

XVIII LEZIONE :

ESERCIZI

5.2)



$P = 98,1\ N$ $\quad \omega = cost$

$f = 0,4 \quad f_e = 0,6$

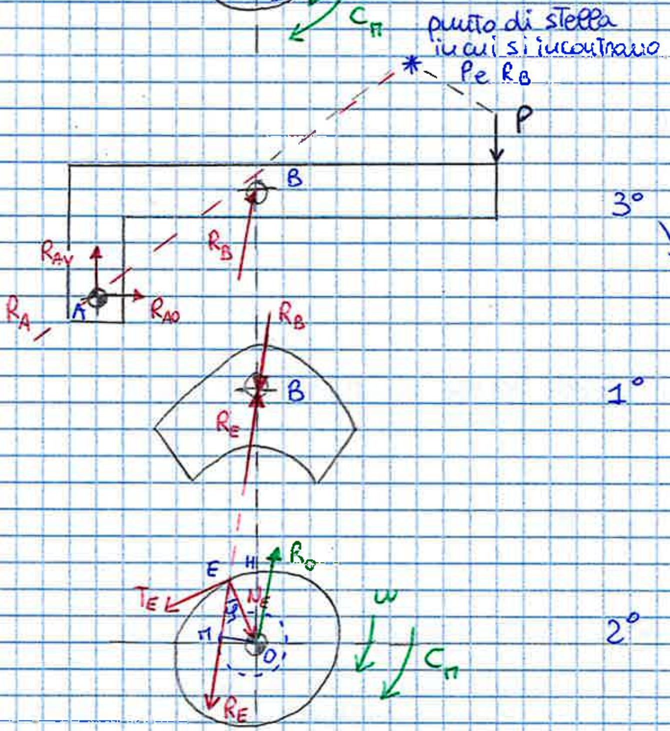
$a = 15\ cm$

$b = 30\ cm$

$d = 22\ cm$

$h = 5\ cm$

? C_π, R_o, R_A, R_B



3°

il verso di R_A si deve SEMPRE determinare con il poligono

1°

2°

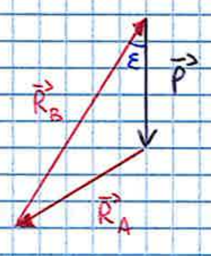
cerchio di attrito del tamburo

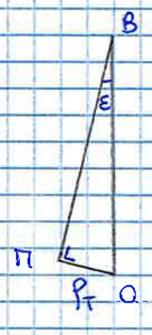
1 : raggio

$\rho_T = r_t \operatorname{sen}\varphi = \frac{d}{2} \operatorname{sen}\varphi = 0,041\ m$

$\varphi = 21,8°$

$R_E // R_o$





$BO = BH + HO = h + \frac{d}{2} = 0,16\ m$

$B\hat{O}\pi \Rightarrow \rho_T = BO \operatorname{sen}\varepsilon$

$\varepsilon = 14,8°$

O) $C_\pi - R_E\,\rho_T = 0$ (1)

$R_E = R_B = R_o$ (2)

A) $P(a+b) - (R_B \cos\varepsilon)a + (R_B \operatorname{sen}\varepsilon)h = 0$ (3)

$v(t) = v_0 + at$

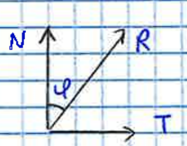
$0 = v_0 + at^* \implies t^* = -\frac{v_0}{a} = 5{,}56$ tempo di frenata

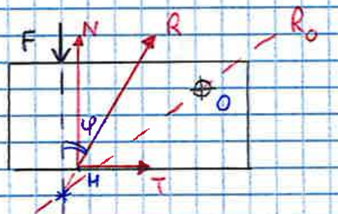
$x^*(t) = x_0 + v_0 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2} = 46{,}31\ m$

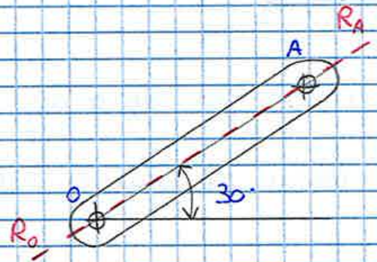
$\rightarrow \quad T + ma = 0 \implies T = 4500\ N$

$N = T/f = 23684{,}21\ N$

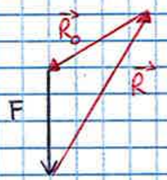
$R = N/\cos\varphi = 24108{,}08\ N$







asta scarica



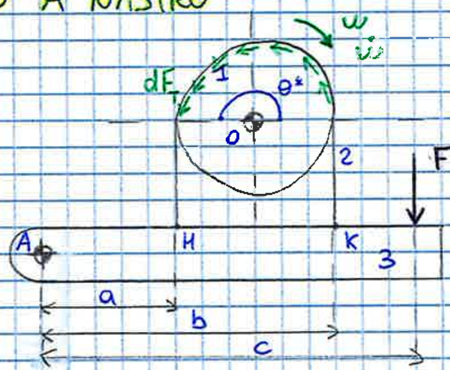
$\rightarrow \quad R\sin\varphi = R_{o_o} = R_o \cos 30°$

$\uparrow \quad -F + R\cos\varphi - R_o \sin 30° = 0$

$R_o = 5197{,}31\ N$

$F = 21085{,}63\ N$

FRENO A NASTRO



FRENO A NASTRO

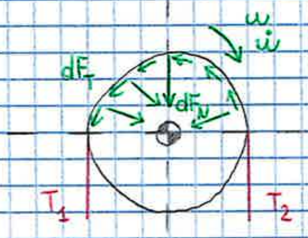
1 Tamburo

2 nastro

3 leva

θ^* angolo di avvolgimento in RADIANTI

Il nastro è fermo, ruota solo il tamburo



$T_1 > T_2$

Non viene messo il momento frenante poiché questo viene considerato mettendo le tensioni T_1 e T_2. Momento frenante e tensioni sono la stessa cosa, o si mette uno o l'altro.

$O)$ $(T_2 - T_1)\frac{d}{2} - I_0 \dot{\omega} = 0$

$\uparrow$ $T_1 + T_2 - F - R_{AV} = 0$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{f\theta^*}$$

FLESSIBILI

1) CINGHIE → PIANA / TRAPEZIA / DENTATA

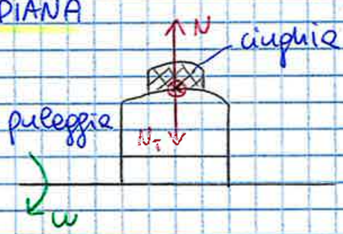
2) FUNI

3) CATENE

VANTAGGI	SVANTAGGI
• trasmettano con l'aderenza => innesti di sicurezza	• rapporto di trasmissione non costante
• trasmettono anche su grandi distanze	• capacità di carico limitata dall'aderenza
• smorzano le vibrazioni	

TIPOLOGIE DI CINGHIE

a) PIANA

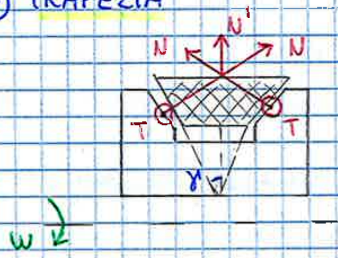


T_T entrante nel tamburo
T uscente dalla cinghia

$T = fN$

puleggia bombata

b) TRAPEZIA

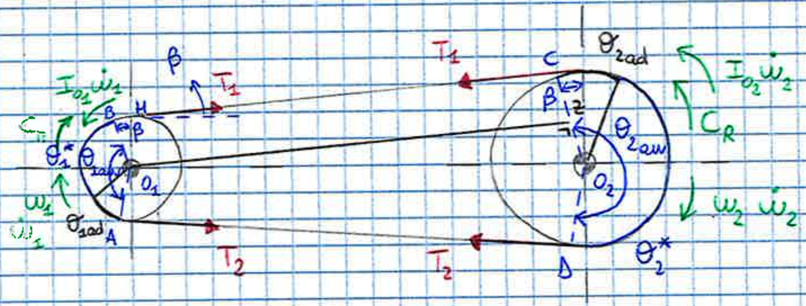


$$T_{tot} = \frac{f}{\operatorname{sen}\gamma} N$$

La cinghia lavora solo sui lati.

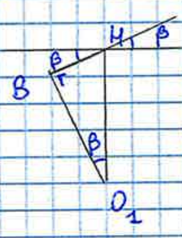
23/04/13

XIX LEZIONE:



$\theta_{1aw} = \pi - 2\beta$

$\theta_{2aw} = \pi + 2\beta$



$CO_2 = r_2$

$CZ = BO_1 = r_1$

$ZO_2 = CO_2 - CZ = r_2 - r_1$

$O_1\hat{Z}O_2$: $ZO_2 = O_1O_2 \operatorname{sen}\beta$

$r_2 - r_1 = a \operatorname{sen}\beta$ $\qquad$ a = interasse

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r_2 - r_1}{a}\right)$$

EQUAZIONE FLESSIBILI CON $v \neq 0$

$$\boxed{\frac{T_2 - qv^2}{T_1 - qv^2} = e^{f\theta_1^*}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} \cong e^{f\theta_1^*}$$

θ_1^* in radianti

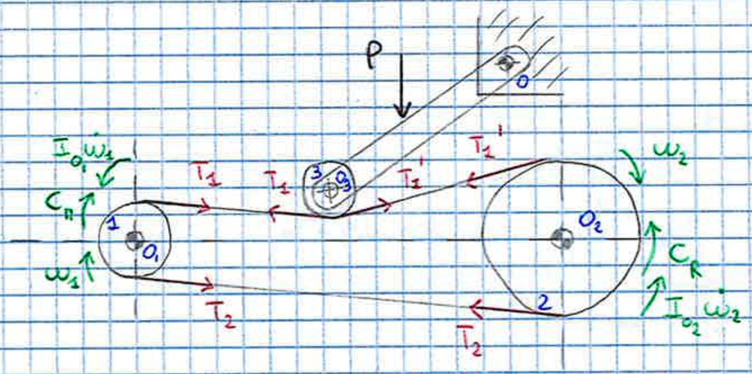
$T_2 > T_1$

q = massa cinghia

v = velocità cinghia

θ_1^* = angolo di strisciamento sulla puleggia motrice

L'angolo di aderenza precede sempre quello di strisciamento nella rotazione della puleggia.



1 puleggia motrice
2 puleggia condotta
3 galoppino

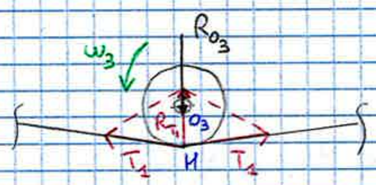
Si preferisce montare il galoppino sul ramo cedente dove $T_1 < T_2 \Rightarrow < P$

$T_1 = T_1'$ se sul galoppino non ci sono:

a) coppie esterne applicate

b) inerzie

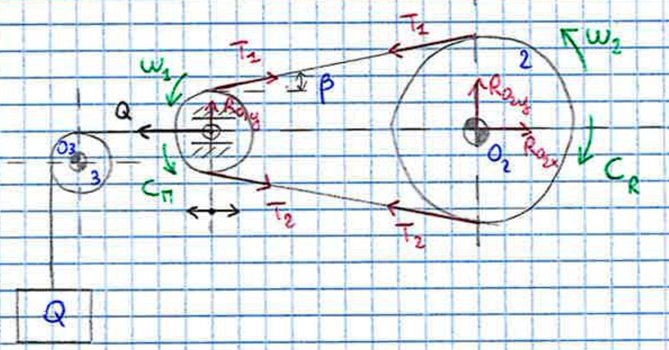
c) attrito al perno O_3



1° $R_{T_1} = R_{O_3}$

Se ci sono coppie esterne o inerzie si cade nella 2° regola, R_{T_1} e R_{O_3} non avranno le stesse rette d'azione. Analogamente se ci fosse attrito al perno.

2) Tenditore

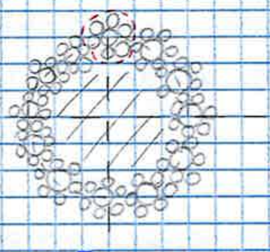


Il carico Q si trasmette inalterato sulla puleggia solo se:

- non esistono coppie esterne;
- non ci sono inerzie;
- non c'è attrito al perno.

$$\xrightarrow{+} \quad (T_1 + T_2)\cos\beta = Q$$

2) Funi a trefoli



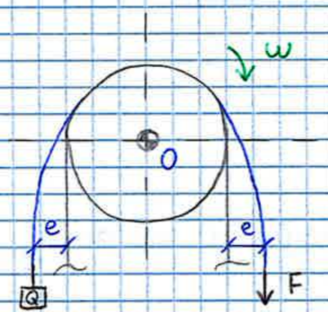
La fune può essere sagomata con una guaina esterna in modo da poter essere considerata un cilindro.

RIGIDEZZA DELLA FUNE (non esaminata nelle cinghie)

a) Rigidezza elastica (e [mm])

b) Rigidezza anelastica (e_1, e_2 [mm])

a)



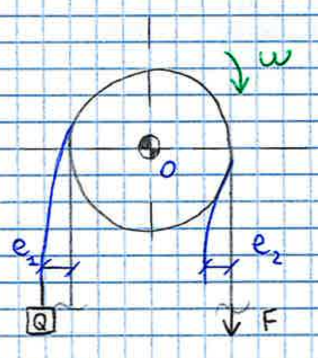
La rigidezza della fune fa sì che essa non sia perfettamente verticale quando esce dalla puleggia.

$O \circlearrowleft_+ \quad F(r+e) - Q(r+e) = 0 \quad \Rightarrow \quad F = Q$

Situazione ideale $\quad O \circlearrowleft_+ \quad Fr - Qr = 0$

La simmetria fa in modo che il risultato sia uguale.

b)



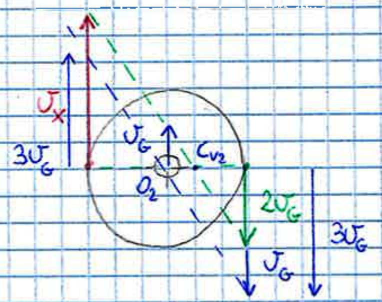
Scostamento verso l'esterno in ingresso alla puleggia, scostamento verso l'interno in uscita $\Rightarrow$ dipende da ω.

Il sistema non è più simmetrico. Ciò è dovuto all'attrito della fune.

il centro delle velocità è proprio il punto di contatto, supponendo aderenza cioè puro rotolamento.

La velocità tangente alla puleggia a è il doppio di quella del centro poiché le velocità sono proporzionali alla distanza dal c_v.
Nelle funi, essendo inestensibili, la velocità è uguale in tutti i punti.
Nella puleggia 2 il c_{v_2} non si trova in un punto particolare.

Il bozzello sale orizzontalmente con velocità v_G => anche le carrucole hanno velocità al centro pari a v_G.



Costruiamo una retta parallela alla distribuzione e passante per il centro
Le due rette hanno distanza pari a v_G.

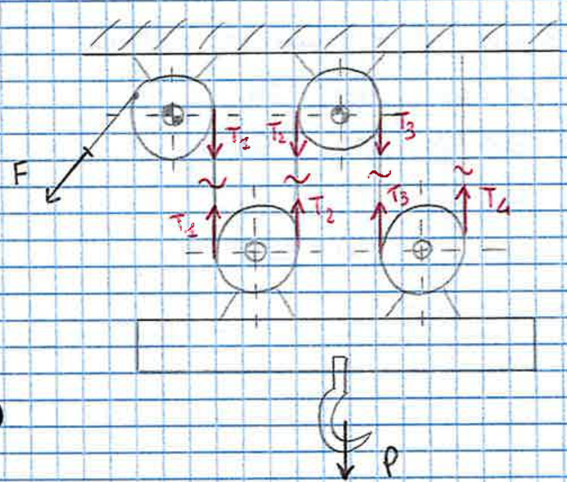
$$\Rightarrow v_x = 3v_G + v_G = 4v_G$$

Nella puleggia 1 la velocità d'uscita v_A è $4v_G$ poiché essendo una puleggia a centro fisso tutti i punti a uguale distanza dal c_v hanno la stessa velocità.

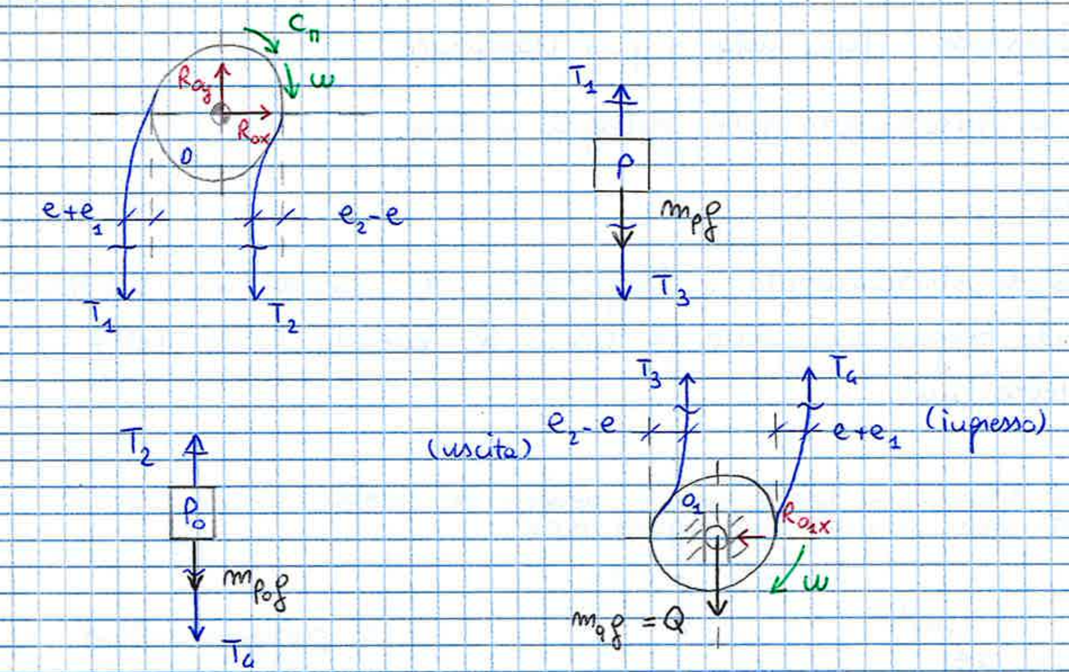
$v_A = 4v_G$

In generale: $\boxed{v_A = m v_G}$

m = numero di rami di fune applicati al bozzello.



Tagliando idealmente le funi analizziamo le tensioni.
Queste sono sempre uscenti ed essendo le funi inestensibili sono uguali su ciascuna fune.



Siccome non sono richieste le reazioni vincolari facciamo l'equilibrio intorno ad O

O) $C_m + T_2(R-(e_2-e)) - T_1(R+e+e_1) = 0$

↑ $T_1 = m_p g + T_3$

↑ $T_2 = m_{P_0} g + T_4$

↑ $T_3 + T_4 - Q = 0$

O_1) $T_4(R+e+e_1) - T_3(R-(e_2-e)) = 0$

$v = \omega R \Rightarrow \omega = 2\ rad/s$ (aderenza fune/puleggia)

$T_1 = 13389{,}6\ N$

$T_2 = 10154{,}3\ N$

$T_3 = 7503{,}6\ N$

$T_4 = 7211{,}3\ N$

$C_m = 1118{,}32\ Nm$

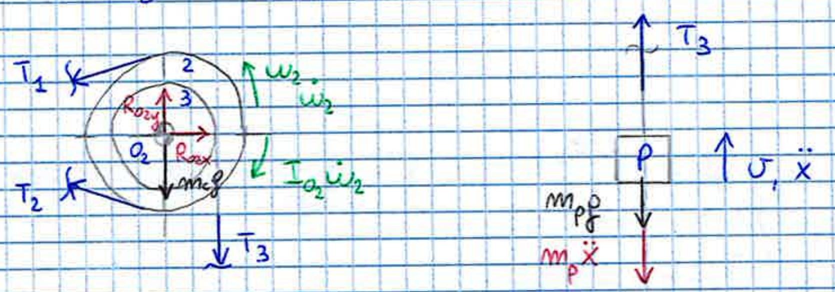
$P_m = C_m \omega = 2236{,}64\ W$

L'equazione dei flessibili va sempre applicata sulla puleggia motrice

$$\frac{T_1 - qv^2}{T_2 - qv^2} = e^{f\theta_1^*}$$

$O_1 \circlearrowleft \quad C_\pi - I_{O_1}\dot{\omega}_1 - T_1\frac{d_1}{2} + T_2\frac{d_1}{2} = 0$

$(T_1 - T_2)\frac{d_1}{2} + I_{O1}\dot{\omega}_1 = C_\pi$ (1)



Nel diagramma di corpo libero delle pulegge condotte vanno messe le reazioni vincolari altrimenti non si bilancerebbero le forze

$O_2 \circlearrowleft \quad (T_1 - T_2)\frac{d_2}{2} = T_3\frac{d_T}{2} + I_2\dot{\omega}_2$ (2)

$\uparrow \quad T_3 = m_p(\ddot{x} + g)$ (3)

INCOGNITE: $(T_1 - T_2),\ T_3,\ \dot{\omega}_1,\ \dot{\omega}_2,\ \ddot{x}$

$$\eta_{cinghia} \cong 1 = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R^{(2,3)}\,\omega_2}{C_\pi^{(\pi,1)}\,\omega_1} = \frac{\cancel{(T_1-T_2)}\frac{d_2}{2}\,\omega_2}{\cancel{(T_1-T_2)}\frac{d_1}{2}\,\omega_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2 R_2}{\omega_1 R_1} \approx 1$$

ipotesi fatta da noi visto che non viene dato nessun dato sul rendimento

derivando $\dot{\omega}_1\frac{d_1}{2} = \dot{\omega}_2\frac{d_2}{2}$ (4)

solo per le cinghie, non di tutto il sistema!!!

Nel caso del rendimento della cinghia questa ipotesi può essere sempre fatta, a meno che non venga specificato il rendimento nei dati.

Hp: in H c'è sempre aderenza (H = uscita della fune)

$\ddot{x} = \frac{d_T}{2}\dot{\omega}_2$ (5)

$\dot{\omega}_2 = 67{,}31\ rad/s^2$

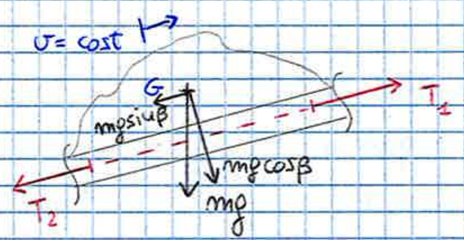
$\dot{\omega}_1 = 96{,}62\ rad/s^2$

$\ddot{x} = 9{,}46\ m/s^2$

$(T_1 - T_2) = 4762\ N$

Nel diagramma di corpo libero dell'assemblato non si vedono C_π (coppia motrice) e C_R (coppia resistente) poiché risultano reazioni interne tra la puleggia 1 e il motore π (C_π) e la puleggia 2 e la puleggia 3 (C_R).

Facendo l'equilibrio sull'assemblato si ha:



$m = \frac{m}{L} \cdot L = 400\ kg$

$\eta_{TOT} = \frac{P_u}{P_m} \cong 1$ poiché stiamo trascurando ogni forma di dissipazione

$\Rightarrow P_u \cong P_m$

$P_u = mg\sin\beta\ v = 1223{,}77\ W \cong P_m$

La potenza utile si ricava dallo scopo del sistema, cioè da quello che deve fare l'assemblato (in questo caso trasportare il carico).

Sulla puleggia motrice $\begin{cases} \frac{T_1}{T_3} \cong e^{f\theta_1^*} \\ \theta_1^* = \theta_{1aw} \Rightarrow Q_{mw} \text{ condizioni limiti} \end{cases}$

$\theta_{1aw} \Downarrow 200°$

Se l'angolo di avvolgimento non viene dato si ricava dalla geometria del sistema (in questo caso se non fosse stato dato si sarebbe assunto 180°).

$\theta_1)\ C_m - T_1 R + T_3 R = 0$ ①

$(3)\uparrow\ 2T_3 = Q_{mw}$ ②

$O_2)\ -\cancel{C_R}_{0} + T_2 R - T_3 R = 0$ ③

$\swarrow\ T_2 - T_1 + mg\sin\beta = 0$ ④

$T_1/T_3 = e^{f\theta_{1aw}}$ ⑤

Da ③ ho $T_2 = T_3$, da ④ $T_2 = T_1 - mg\sin\beta$, da ⑤ $T_1 = T_3 e^{f\theta_{1aw}}$

$\Rightarrow T_3 = 268{,}46\ N$

$\Rightarrow Q_{mw} = 2T_3 = 536{,}92\ N$