NUMERO: 1282

ANNO: 2014

APPUNTI

STUDENTE: Genta

MATERIA: Fisica II, Prof.Barbero

02/10/12

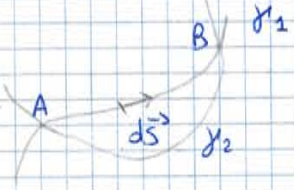
I LEZIONE:

CONCETTO DI FORZA

la forza è quell'agente capace di indurre un'accelerazione, dipende dalla posizione dell'oggetto: $\vec{F}(\vec{r})$

$\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \vec{F}(\vec{r}) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}$ $\quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}$

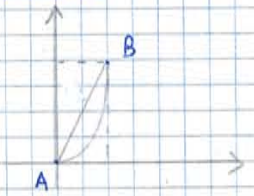


la forza totale è sempre diretta verso la concavità essendo proporzionale all'accelerazione.

LAVORO: $W^{(\gamma)}_{A \to B} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

In genere: $W^{(\gamma_1)}_{A\to B} \neq W^{(\gamma_2)}_{A\to B}$ ovvero l'integrale di linea dipende dal percorso

ESEMPIO:



$A\ (0,0) \quad B\ (2,4)$

$\gamma_1 : y = 2x \quad \gamma_2 : y = x^2$

$\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{u}_x + 3xy\vec{u}_y$

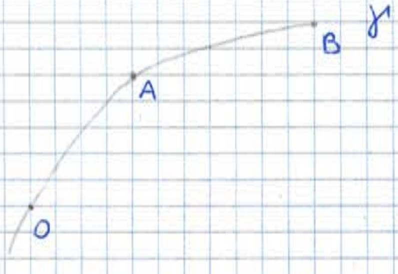
$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_x \implies \vec{F}\cdot d\vec{s} = (y^2-x^2)dx + 3xy\,dy$

$W^{(\gamma)}_{A\to B} = \int_{A\,\gamma}^{B} \left\{ (y^2-x^2)dx + 3xy\,dy \right\}_{\gamma}$ lavoro generico su un percorso γ

$$W^{(\gamma_1)}_{A\to B} = \int_A^B \left\{(y^2-x^2)dx + 3xy\,dy\right\}_{y=2x} = \int_0^2 \left\{(4x^2-x^2)dx + 6x^2 \cdot 2dx\right\} =$$

$$= \int_0^2 15x^2 dx = 15\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 40$$

$$W^{(\gamma_2)}_{A\to B} = \int_A^B \left\{(y^2-x^2)dx + 3xy\,dy\right\}_{y=x^2} = \int_0^2 \left\{(x^4-x^2)dx + 3x^3 \cdot 2x\,dx\right. =$$



$$W^{(\gamma)}_{O\to B} = \int_{O\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{O\,\gamma}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= W^{(\gamma)}_{O\to A} + W^{(\gamma)}_{A\to B}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\Rightarrow W^{(\gamma)}_{O\to B} = W^{(\gamma)}_{O\to A} + W^{(\gamma)}_{A\to B}$$

Se il campo è conservativo (ipotesi) il lavoro non dipende da γ

$$\Rightarrow W_{O\to B} = W_{O\to A} + W_{A\to B}$$

$$f(O,B) = f(O,A) + f(A,B) \quad \Rightarrow \quad f(A,B) = f(O,B) - f(O,A)$$

facendo la sottrazione scompare la dipendenza da O,

$\Rightarrow$ f è del tipo: $W_{x\to y} = f(x,y) = u(x) - u(y)$

$$\Rightarrow f(O,B) - f(O,A) = u(O) - u(B) - [u(O) - u(A)] = \cancel{u(O)} - u(B) - \cancel{u(O)} + u(A) = u(A) - u(B)$$

Questa proprietà è il potenziale (en. potenziale, pot. elettrico ...).

$$W_{A\to B} = u(A) - u(B) \qquad \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B du$$

$$\Rightarrow \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s} + du) = 0 \quad \forall (A,B) \quad \forall \gamma$$

Se l'integrale è nullo per ogni percorso $\Rightarrow$ la funzione è nulla.

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{s} + du = 0$$

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z + \vec{u}_z \qquad d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$

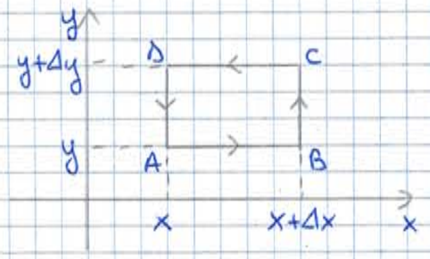
$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dy \qquad du(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\left(F_x + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(F_y + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(F_z + \frac{\partial u}{\partial z}\right)dz = 0 \quad \forall (dx, dy, dz)$$

Se $dy = dz = 0$, $dx = dy = 0$, $dx = dz = 0$

$$\Rightarrow F_x + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad F_z + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad F_y + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

↗ poiché dx, dy, dz sono linearmente indipendenti



Supponiamo che le misure siano piccole.

I punti dell'integrale vanno presi concordi con gli assi, dal più piccolo al più grande.

$A(x,y)$ $B(x+\Delta x, y)$ $C(x+\Delta x, y+\Delta y)$ $D(x, y+\Delta y)$

$\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\vec{u}_x + F_y(x,y)\vec{u}_y$ dipende dal punto considerato

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{s}_{A\to B}}_{\vec{u}_x dx} + \int_B^C \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{s}_{B\to C}}_{\vec{u}_y dy} + \int_D^C \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{s}_{C\to D}}_{-\vec{u}_x dx} + \int_A^D \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{s}_{D\to A}}_{-\vec{u}_y dy} =$$

$$= \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy - \int_D^C F_x dx - \int_A^D F_y dy = \langle F_x \rangle_{AB} \Delta x + \langle F_y \rangle_{BC} \Delta y - \langle F_x \rangle_{DC} \Delta x - \langle F_y \rangle_{AD} \Delta y =$$

$$= \left(\langle F_x \rangle_{AB} - \langle F_x \rangle_{DC} \right) \Delta x + \left(\langle F_x \rangle_{BC} - \langle F_y \rangle_{AD} \right) \Delta y$$

$$\langle F_x \rangle_{AB} = \frac{F_x(A) + F_x(B)}{2} = \frac{F_x(x,y) + F_x(x+\Delta x, y)}{2} = F_x(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x$$

$$F_x(x+\Delta x, y) = F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x$$

$$\langle F_x \rangle_{DC} = \frac{F_x(D) + F_x(C)}{2} = \frac{F_x(x, y+\Delta y) + F_x(x+\Delta x, y+\Delta y)}{2} = F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x$$

$$F_x(x+\Delta x, y) \swarrow \quad F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y \qquad\qquad \searrow \quad F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y$$

$$\langle F_x \rangle_{AB} - \langle F_x \rangle_{DC} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y$$

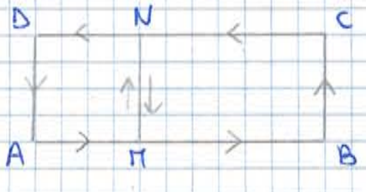
$$\langle F_y \rangle_{BC} - \langle F_y \rangle_{AD} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x$$

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta a$$

$\Delta a = \Delta x \Delta y$ (area del poligono che delimita il circuito chiuso)

↓

se si considera un triangolo $\Delta a = \frac{1}{2}\Delta x \Delta y$



$$\int_{ABCD} = \int_{AMND} + \int_{MBCN}$$

$$\vec\nabla \times \vec F = \begin{vmatrix} \vec u_x & \vec u_y & \vec u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec u_x \underbrace{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)}_{R_x} + \vec u_y \underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)}_{R_y} + \vec u_z \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)}_{R_z}$$

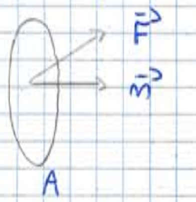
ROTORE

$$\oint_\gamma \vec F \cdot d\vec s = \int_S (R_z da_z + R_x da_x + R_y da_y) = \int_{S(\gamma)} \vec R \cdot d\vec a$$

$$\boxed{\oint_\gamma \vec F \cdot d\vec s = \iint_{S(\gamma)} (\vec\nabla \times \vec F) \cdot d\vec a}$$ TEOREMA DI STOKES

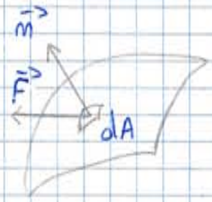
Se $\vec F$ è conservativa il rotore è nullo.

Il flusso del vettore costante $\vec F$ attraverso una superficie piana è il prodotto di $\vec F$ per la normale della superficie.



$$\phi_A(\vec F) = \vec F \cdot \vec n A$$

A = piana
$\vec F$ = costante



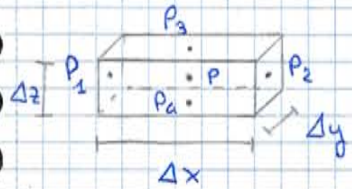
$$\phi_A(\vec F) = \int_A \vec F \cdot \vec n \, dA = \int_A \vec F \cdot d\vec A$$

In caso di sup. chiusa il verso della normale è quello uscente.

TEOREMA DI STOKES: la circuitazione di un campo vettoriale lungo γ è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie delimitata da γ (linea chiusa).

05/10/12

III LEZIONE:



$P(x, y, z)$
$P_1(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$
$P_2(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$

scatola di lati piccoli centrata in P

$$\Delta\phi_x = \vec F(P_1) \cdot \vec n_1 \Delta y \Delta z + \vec F(P_2) \cdot \vec n_2 \Delta y \cdot \Delta z =$$
$$= - F_x(P_1) \Delta y \Delta z + F_x(P_2) \Delta y \Delta z$$

$\vec n_1 = - \vec u_x$ $\vec n_2 = \vec u_x$

$$\phi_S(\vec{F}) = \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\phi_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})_i\,\Delta\tau_i = \int_{\tau(S)}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\cdot d\tau$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} n\to\infty \\ \Delta\tau\to 0 \end{matrix}$$

$\Delta\phi_i$ = flusso uscente dalla scatola

TEOREMA DI GAUSS: il flusso del campo attraverso una superficie chiusa S è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso da S.

$$\boxed{\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\tau(S)}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,d\tau}$$

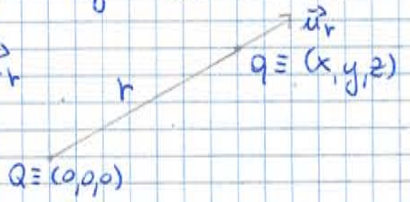
TEOREMA DI GAUSS (o della divergenza)

ESEMPIO:

1) $\vec{F} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ determinare la divergenza

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

2) $\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$ determinare la divergenza



$$\vec{F} = kQq\frac{r\vec{u}_r}{r^3} = kQq\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$F_x = kQq\frac{x}{r^3} \qquad F_y = kQq\frac{y}{r^3} \qquad F_z = kQq\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kQq\frac{x}{r^3}\right) = kQq\frac{\partial}{\partial x}\left(x r^{-3}\right) = kQq\left(r^{-3}+(-3)r^{-4}x\frac{\partial}{\partial x}r\right)$$

↓ r è in funzione di (x, y, z)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = kQq\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\right) = kQq\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) = \frac{kQq}{r^5}\left(r^2 - 3x^2\right)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = k\frac{Qq}{r^5}\left(r^2 - 3y^2\right)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{kQq}{r^5}\left(r^2 - 3z^2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{kQq}{r^5}\left(3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2\right) = 0$$

DEFINIZIONE: se $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ viene chiamato SOLENOIDALE: ovvero ha divergenza nulla

$$\phi_S(\vec{F}) = \iiint_{\tau(S)}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,d\tau = 0$$

08/10/12

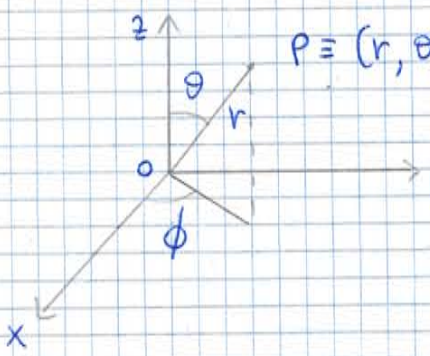
IV LEZIONE:

Quando un campo è conservativo:

$$W_{A\to B} = U(A) - u(B)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u = -\vec{u}_x \frac{\partial u}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial u}{\partial y} - \vec{u}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

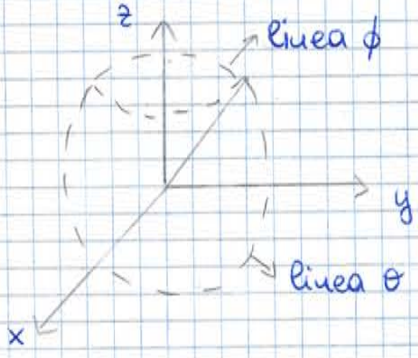
COORDINATE POLARI SFERICHE



$P \equiv (r, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Una linea viene chiamata COORDINATA quando lungo essa cambia solo una coordinata. Nella linea RADIALE cambia solo r e ϕ e θ rimangono costanti. La linea coordinata θ sono cerchi con centro nell'origine.



In coordinate cartesiane l'elemento di linea è $d\vec{s} = \vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy + \vec{u}_z dz$

$$dx = dr\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\, d\theta\cos\phi - r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\, d\phi$$
$$dy = dr\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\, d\theta\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi\, d\phi$$
$$dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta$$

$$d\vec{s} = dr\left\{\sin\theta(\vec{u}_x\cos\phi + \vec{u}_y\operatorname{sen}\phi) + \cos\theta\,\vec{u}_z\right\} + r\left\{\cos\theta\cos\phi\,\vec{u}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\vec{u}_y - \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_z\right\}d\theta + r\operatorname{sen}\theta\left\{-\vec{u}_x\operatorname{sen}\phi + \vec{u}_y\cos\phi\right\}d\phi$$

L'elemento di linea è legato alla variazione di r, θ, ϕ.

=> devono essere linearmente indipendenti.

$$F_r = -\frac{\partial u}{\partial r} \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad F_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\vec{F} = -\left(\vec{u}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = -\vec{\nabla} u$$

$$\vec{\nabla} u = \vec{u}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi}$$ gradiente di u in coordinate sferiche

Si chiama CAMPO CENTRALE un campo tale che la forza gode di:

$\vec{F} = f(r)\vec{u}_r$ il modulo dipende dalla distanza dal centro,
la direzione è radiale

Quando $\vec{F}$ è positiva è una forza repulsiva, quando è negativa è attrattiva.

- Si vuole dimostrare che tutte le forze centrali sono conservative.

Si può dimostrare con il rotore oppure:

$$W^{(\gamma)}_{A\to B} = \int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{A\,\gamma}^{B} f(r)\vec{u}_r \cdot \{dr\,\vec{u}_r + r\,\vec{u}_\theta d\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\phi\,d\phi\} =$$

$= \int_{A\,\gamma}^{B} f(r)\,dr$ non dipende più da θ e ϕ ma solo da r
=> dipende solo dal punto iniziale e finale non da γ

- Si vuole dimostrare che l'energia potenziale di un campo centrale dipende solo da r.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u$$

$$f(r)\vec{u}_r = -\vec{u}_r \frac{\partial u}{\partial r} - \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \vec{u}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

Uguagliando i due vettori le componenti devono essere uguali.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(r) = -\dfrac{\partial u}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \phi} \end{cases} \Rightarrow u = u(r)$$ dipende solo da r

Quando le cariche sono puntiformi vale il principio di sovrapposizione.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k \frac{qQ_1}{r_1^2} \vec{u}_1 + k \frac{qQ_2}{r_2^2} \vec{u}_2$$

q = carica di prova, usata per misurare la forza esercitata dalle altre

$$\vec{F} = q \left\{ k \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_1 + k \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_2 \right\}$$

$$\frac{\vec{F}}{q} = k \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_1 + k \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_2$$

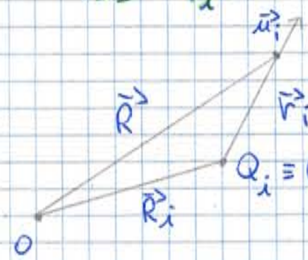
il campo ESCE dalle cariche positive e ENTRA in quelle negative. !

$$\vec{E} = k \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_1 + k \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_2$$

CAMPO ELETTROSTATICO generato da due cariche

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} k \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

N CARICHE PUNTIFORMI



$P(x,y,z)$ PUNTO CAMPO

$Q_i = (x_i, y_i, z_i)$ PUNTO SORGENTE

$$\vec{R} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$\vec{R}_i = x_i\vec{u}_x + y_i\vec{u}_y + z_i\vec{u}_z$$

$$\vec{r}_i = (x-x_i)\vec{u}_x + (y-y_i)\vec{u}_y + (z-z_i)\vec{u}_z$$

$$\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{r}_i \qquad \vec{r}_i = \vec{R} - \vec{R}_i$$

$\vec{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$ versore $\qquad r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \Rightarrow \vec{E}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k Q_i \frac{(x-x_i)\vec{u}_x + (y-y_i)\vec{u}_y + (z-z_i)\vec{u}_z}{\left\{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right\}^{3/2}}$$

$$E_x(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} kQ_i \frac{x-x_i}{r_i^3}$$

$$E_y(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} kQ_i \frac{y-y_i}{r_i^3}$$

$$E_z(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} kQ_i \frac{z-z_i}{r_i^3}$$

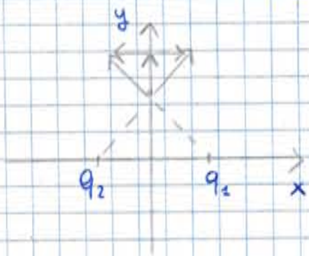
Si verifica che il rotore di $\vec{E}$ è nullo => $\vec{E}$ viene detto IRROTAZIONALE.
Tutti i vettori che hanno rotore nullo si chiamano IRROTAZIONALI.

$[E] = \frac{N}{C}$ unità di misura

Se $P \in y$, $x=0$

$$\vec{E}(0,y) = kq \left\{ \frac{\frac{L}{2}\vec{u}_x + y\vec{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{-\frac{L}{2}\vec{u}_x + y\vec{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}} \right\} = \boxed{kq \frac{2y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{3/2}}\vec{u}_y}$$

← punto sull'asse y



le componenti di x si semplificano.
Il campo è diretto lungo l'asse y.

Se $y \gg L$

$$\vec{E}(y \gg L) \approx kq \frac{2y}{y^3}\vec{u}_y = k\frac{2q}{y^2}\vec{u}_y$$

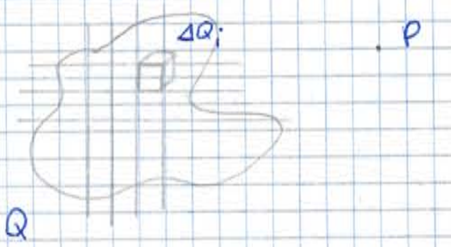
Il sistema si comporta come se ci fosse una carica 2q nel suo centro.

Se $y \ll L$

$$\vec{E}(y \ll L) \approx kq \frac{2y}{(L/2)^3}\vec{u}_y$$

In punti molto distanti il campo va con $\frac{1}{r^2}$ (se la carica non è nulla).
In punti vicini la legge può essere molto diversa.

DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICHE



$$\vec{E}(\vec{R}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} k\,\Delta Q_i \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \int_Q k \frac{\vec{u}}{r^2}\, dQ$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \int_Q k \frac{\vec{R}-\vec{R}_i}{|\vec{R}-\vec{R}_i|^3}\, dQ$$

I CASO: il corpo ha tre dimensioni (volumico)
II CASO: il corpo ha due dimensioni (superficiale)
III CASO: il corpo ha una dimensione (lineare)

$r\cos\theta = y \qquad r = \frac{y}{\cos\theta}$

$x = y\,tg\theta \qquad dx = d(y\,tg\theta) = y\,d(tg\theta) = y\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ (y è fissato)

$d\vec{E} = 2k\lambda\frac{\cos^2\theta}{y^2}\cdot y\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,\vec{u}_y \qquad d\vec{E} = 2k\lambda\frac{\cos\theta\,d\theta}{y}\vec{u}_y$

$\vec{E} = \int_0^\theta 2k\lambda\frac{\cos\theta\,d\theta}{y}\vec{u}_y = 2k\lambda\frac{\sin\theta}{y}\vec{u}_y$ rispetto a θ

$\vec{E}(y) = 2k\lambda\frac{\sin\theta}{y}\vec{u}_y$

θ dipende da y -> $y\,tg\theta = \frac{L}{2} \qquad tg\theta = \frac{L}{2y} \qquad \sin\theta = \frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \frac{\frac{L}{2y}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{2y}\right)^2}}$

$\vec{E}(y) = 2k\lambda\frac{1}{y}\frac{\frac{L}{2y}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{2y}\right)^2}}\vec{u}_y$ rispetto a y

Se $y \gg L$

$\vec{E}(y\gg L) \approx \cancel{2}k\lambda\frac{1}{y}\frac{L}{\cancel{2}y}\vec{u}_y = k\frac{\lambda L}{y^2}\vec{u}_y = k\frac{Q}{y^2}\vec{u}_y$

In punti lontani il campo si comporta come se la barra fosse nel centro.

Se $y \ll L$, $y \to 0$ $\theta \to \frac{\pi}{2}$

$\vec{E}(y\ll L) \approx 2k\lambda\frac{1}{y}\vec{u}_y$ il campo diverge (si ricava da $\vec{E}$ rispetto a θ)

$\vec{E}(y\ll L) = 2k\lambda\frac{1}{y}\cdot\frac{L/2y}{L/2y}\vec{u}_y = 2k\lambda\frac{1}{y}\vec{u}_y$

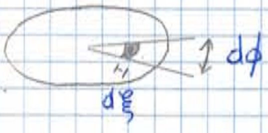
Se $L \to \infty$ filo infinito di carica

$\vec{E}(y) = 2k\lambda\frac{1}{y}\vec{u}_y$

Quando un punto è molto vicino ad un filo, il filo si può considerare infinito.

DISCO CARICO IN MODO UNIFORME

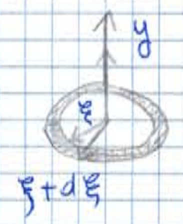
Sistema bidimensionale



$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ = COSTANTE (perché uniforme)

Si può pensare che il disco sia ottenuto mettendo assieme tanti anelli concentrici di raggio ξ.

$0 \le \xi \le R$ raggio di un anello spesso $d\xi$ con i quali approssimo il disco



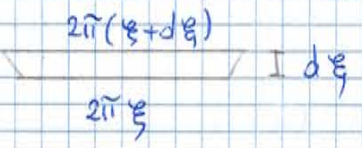
Il campo creato dall'anello di raggio ξ, spessore $d\xi$ nel punto y.

$$d\vec{E} = K\, dQ \frac{y}{(\xi^2+y^2)^{3/2}} \vec{u}_y$$

$dQ = \sigma dA \qquad dA = 2\pi \xi d\xi$

$dQ = \sigma 2\pi \xi d\xi \qquad \Rightarrow d\vec{E} = K 2\pi \sigma y \frac{\xi d\xi}{(\xi^2+y^2)^{3/2}} \vec{u}_y$ campo creato da ogni anello di raggio ξ

dA è stata approssimata ad un rettangolo



sarebbe un trapezio

$$\vec{E} = \int_0^R K 2\pi \sigma y \frac{\xi d\xi}{(\xi^2+y^2)^{3/2}} \vec{u}_y = K 2\pi \sigma y \left\{ \int_0^R \frac{\xi d\xi}{(\xi^2+y^2)^{3/2}} \right\} \vec{u}_y.$$

$$\int_0^R \frac{\xi d\xi}{(\xi^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d\xi^2}{(\xi^2+y^2)^{3/2}} \overset{d(\xi)^2 = 2\xi d\xi}{=} \frac{1}{2} \int_{\eta(0)}^{\eta(R)} \frac{d\eta}{\eta^{3/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} \left[\eta^{-\frac{3}{2}+1} \right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} = - \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} =$$

$$= - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2+y^2}} \right\}_0^R = - \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{y^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

essendo $\eta = \xi^2 + y^2$, $\eta(0) = y^2$, $\eta(R) = R^2 + y^2$ ↖ si può fare anche senza sostituire

$$\vec{E}(y) = K 2\pi \sigma y \cdot \left\{ \frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} \right\} \vec{u}_y$$

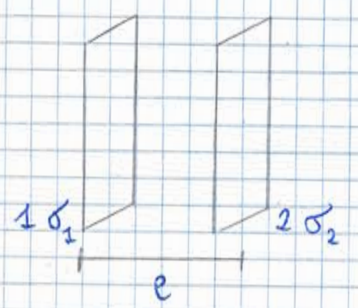
C'è il modulo perché il campo si può calcolare sopra e sotto il disco.

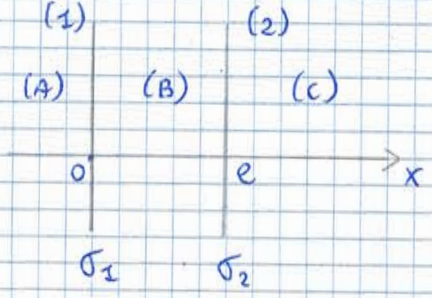
$\vec{E}(y>0) = 2\pi\sigma K\vec{u}_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_y$ Il campo è COSTANTE

$\vec{E}(y<0) = -2\pi\sigma K\vec{u}_y = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_y$

Quando un punto è molto vicino al disco è come se fosse un piano infinito di carica.

DUE PIANI INFINITI UNIFORMI





$$\vec{E}_1 = \begin{cases} 2\pi\sigma_1 K\vec{u}_x & (x>0) \\ -2\pi\sigma_1 K\vec{u}_x & (x<0) \end{cases} \qquad \vec{E}_2 = \begin{cases} 2\pi\sigma_2 K\vec{u}_x & (x>e) \\ -2\pi\sigma_2 K\vec{u}_x & (x<e) \end{cases}$$

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\pi K(\sigma_1+\sigma_2)\vec{u}_x$ (C)

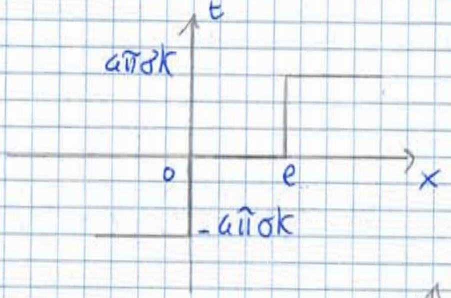
$\vec{E} = 2\pi K(\sigma_1-\sigma_2)\vec{u}_x$ (B)

$\vec{E} = -2\pi K(\sigma_1+\sigma_2)\vec{u}_x$ (A)

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ $x>e$ $\vec{E} = 4\pi\sigma K = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$0<x<e$ $\vec{E} = 0$

$x<0$ $\vec{E} = -4\pi\sigma K = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

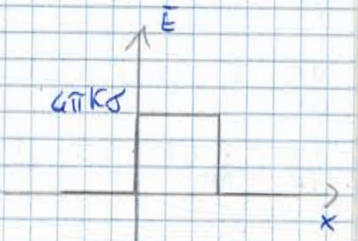


$\sigma_1 = \sigma > 0$ $\sigma_2 = -\sigma$

$x>e$ $E=0$

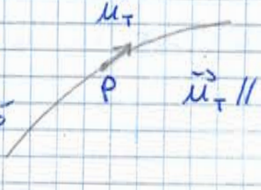
$0<x<e$ $E = 4\pi\sigma K$ Il campo elettrico è confinato

$x<0$ $E=0$



LINEA DI FORZA: linea geometrica che ha per tangente un vettore parallelo al campo, in ogni punto. le linee di forza si chiudono all'∞.

⇒ due linee di forza non si possono mai incontrare



$\vec{u}_T \parallel \vec{E}(P)$

Se una particella viene lasciata libera, questa non può muoversi su una linea di forza se non è rettilinea.

16/10/12

VII LEZIONE:

- Si vuole dimostrare che il campo elettrostatico è conservativo.

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{FORMA LOCALE}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{FORMA INTEGRALE}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R} - \vec{R}_i = (x-x_i, y-y_i, z-z_i) \qquad r_i = \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{1/2}$$

$$E_x(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{m} K Q_i \frac{x-x_i}{r_i^3}$$ considero n particelle cariche e puntiformi

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_{i=1}^{m} K Q_i \frac{x-x_i}{r_i^3}\right\} = \sum_{i=1}^{m} K Q_i \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{x-x_i}{r_i^3}\right\} = \sum_{i=1}^{m} K Q_i (x-x_i)(-3 r_i^{-4}) \frac{\partial r_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{-1/2} \cdot 2(y-y_i) = \frac{y-y_i}{r_i}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -3 \sum_{i=1}^{m} K Q_i \frac{(x-x_i)(y-y_i)}{r_i^5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -3 \sum_{i=1}^{m} K Q_i \frac{(y-y_i)(x-x_i)}{r_i^5}$$

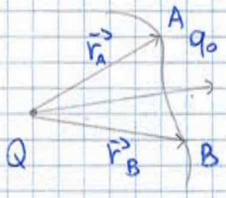
|| Sono uguali

Si può anche dimostrare usando $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ e il teorema di Swhartz.

Se il campo è conservativo anche le forze è conservativa.

CONSERVATIVITÀ di $\vec{E}$ => CONSERVATIVITÀ DI $\vec{F}$

$W_{A \to B} = u(A) - u(B)$ se $\vec{F}$ è conservativa



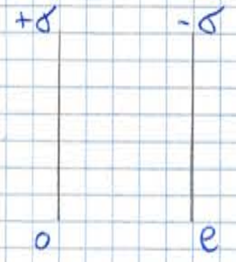
$$\vec{F} = k \frac{Q q_0}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{centrale}$$

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B k \frac{Q q_0}{r^2} \vec{u}_r \left(dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta \, d\phi \, \vec{u}_\phi\right) =$$

$$= \int_A^B k \frac{Q q_0}{r^2} dr = -k Q q_0 \left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = k Q q_0 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = k \frac{Q q_0}{r_A} - \frac{k Q q_0}{r_B}.$$

$$\Rightarrow u = k \frac{Q q_0}{r} \quad \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

POTENZIALE TRA DUE PIANI INFINITI DI CARICA



$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x & , 0<x<\ell \\ 0 & , x>\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \begin{cases} \alpha & x<0 \\ \beta & x>\ell \end{cases}$$

OSS: Nel caso di distribuzioni continue il potenziale si calcola come:

$$V = k\int_\tau \frac{dq}{r}$$

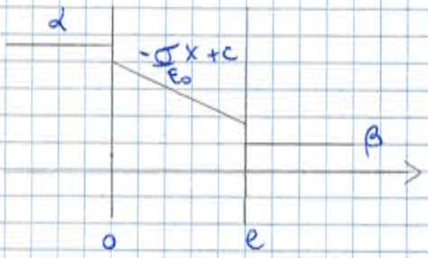
$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right] \Rightarrow$$ V dipende solo da x, $V = V(x)$ in ogni punto

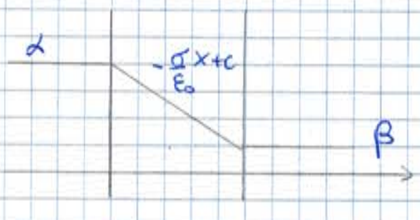
$$-\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad dV = -\frac{\sigma dx}{\varepsilon_0} \qquad V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + c$$

in un campo $\vec{E}$ uniforme parallelo a x il potenziale è definito come:

$V(x) = -Ex + C$ C = potenziale nell'origine



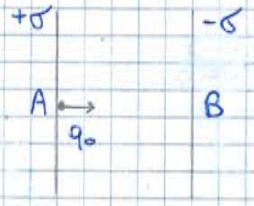
Questa potrebbe essere una rappresentazione ma presenta un'anomalia, in 0 e ℓ la derivata non esiste $\to \infty \Rightarrow \vec{\nabla}V \to \infty \Rightarrow \vec{E} \to \infty \Rightarrow \vec{F} \to \infty$ ciò non è possibile $\Rightarrow$ il potenziale deve essere CONTINUO



per $x=0$ $\alpha = c$

per $x=\ell$ $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ell + c = \beta$ $\Rightarrow$ funzione continua

VELOCITÀ DI UNA PARTICELLA



$E = E_K + U = \frac{1}{2}mv^2 + qV$ $E(A) = E(B)$ I MODO

⇓

si conserva l'energia poiché le forze sono conservative

$$\frac{1}{2}m\underbrace{v_A^2}_{\to 0} + qV(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV(B)$$

parte da ferma

Se la velocità è nulla o costante $\Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F}_{ext} + \vec{F} = 0 \; (m\vec{a}) \qquad \vec{F}_{ext} = -\vec{F}$

↳ forze del campo elettrostatico

$W^{(ext)}_{A \to B} = -\int_{A\,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -[U(A) - U(B)] = U(B) - U(A)$

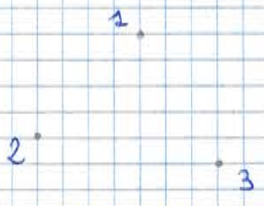
l'energia potenziale del sistema rappresenta il lavoro che deve essere fatto per portare le cariche all'infinito

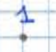
↳ questa forza è conservativa $\Rightarrow$ non dipende da γ

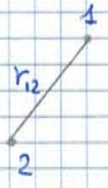
L'energia propria del sistema è data dall'energia potenziale nel punto finale meno quella nel punto iniziale.

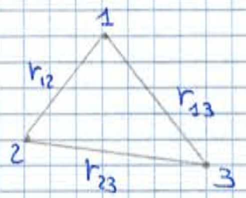
Se il sistema è limitato e A è all'infinito $\Rightarrow U(A) = 0$, quindi

$W_{A \to B} = U(B)$









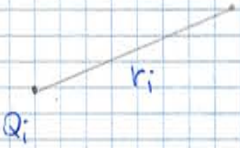
le cariche sono all'∞ $\qquad W_{\infty 1} = 0 \qquad W_{\infty 2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad W_{\infty 3} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$

$W = W_{\infty 1} + W_{\infty 2} + W_{\infty 3} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$

→ per non contare due volte i termini ij e ji uguali tra loro

$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j}{}' k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ ↖ $\quad ' \Rightarrow i \neq j$ lavoro che deve essere fatto dall'esterno per costruire il sistema

ENERGIA DI UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE (energia propria del sistema)



$V = \sum_{i=1}^{N} k\frac{Q_i}{r_i}$

Se si aggiungesse una carica q_0 l'energia potenziale complessiva è data da:

$U_e = U_e(\text{sistema}) + U_e(q_0)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\parallel}{\sum_{i=1}^{m} K\frac{q_i q_0}{r_i}}$

$V_j = \sum_{i=1}^{N}{}' k\frac{q_i}{r_{ij}}$

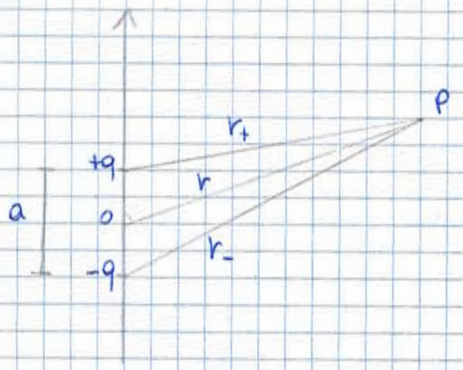
se le cariche del sistema sono fisse e si muove solo q_0 la variazione ΔU_e è dovuta alla variazione di q_0 ($\Delta U_e(q_0)$).

$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j V_j$ altro modo per scrivere l'energia propria

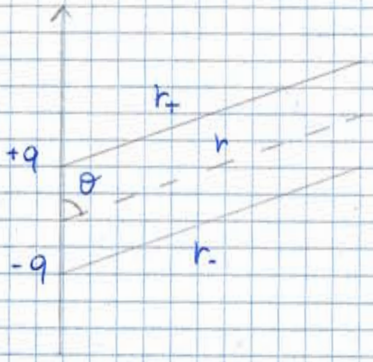
Le superfici dove il potenziale è costante si chiamano **EQUIPOTENZIALI**.

Il campo è ⊥ a queste e indica il verso in cui le superfici diminuiscono di valore.

Si parla di **APPROSSIMAZIONE DIPOLARE** quando r (distanza di P dal centro) $>> a$.



Se $\overline{OP} >> a$



$r - r_+ = \frac{a}{2}\cos\theta \qquad r_+ = r - \frac{a}{2}\cos\theta$

$r_- - r = \frac{a}{2}\cos\theta \qquad r_- = r + \frac{a}{2}\cos\theta$

$$V(r,\theta) = Kq\left\{\frac{1}{r-\frac{a}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r+\frac{a}{2}\cos\theta}\right\} = Kq\,\frac{r+\frac{a}{2}\cos\theta - r + \frac{a}{2}\cos\theta}{r^2 - \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2} =$$

$= Kq\,\frac{a\cos\theta}{r^2}$ $\quad$ [$\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2$ è trascurabile essendo $r >> a$]

$V(r,\theta) = Kq\,\frac{a\cos\theta}{r^2}$ **DIPOLO PUNTIFORME** -> simmetria cilindrica

$V(r) = k\,\frac{q}{r}$ **CARICA PUNTIFORME** -> simmetria sferica

qa prende il nome di momento di dipolo

$p = qa \qquad [p] = [q]\cdot[a] = C\cdot m = \text{Debye}$

1 Debye $= 10^{-30}$ C·m calcolata sull'atomo di idrogeno

$V(r,\theta) = k\,\frac{p\cos\theta}{r^2}$

A differenza della carica, nel dipolo il potenziale decresce molto più velocemente.

$\vec p = q\vec a \Rightarrow V = k\,\frac{\vec p\cdot\vec u_r}{r^2}$ formula generale

CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN DIPOLO (con approssimazione dipolare)

$$\vec E = -\vec\nabla V = -\vec u_x\frac{\partial V}{\partial x} - \vec u_y\frac{\partial V}{\partial y} - \vec u_z\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$V = k\,\frac{\vec p\cdot\vec u_r}{r^2} = k\,\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}$$

$\vec{E}(A_E) = -K\dfrac{\vec{p}}{r^3}$ poichè $\vec{u}_r = \vec{u}_x + \vec{u}_y$ che sono ⊥ a $\vec{u}_z$

nel piano mediano (passante per il centro del dipolo e ⊥ p) il campo è // e discorde a $\vec{p}$

- Altro modo per calcolare il campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\vec{u}_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$$ coordinate polari sferiche

$$V = K\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

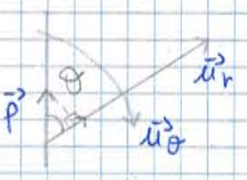
non dipende da ϕ

$$\vec{E} = -\vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{Kp\cos\theta}{r^2}\right\} - \vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{Kp\cos\theta}{r^2}\right\} - \vec{u}_\phi\cancel{\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}}\left\{\frac{Kp\cos\theta}{r^3}\right\} =$$

$$= -\vec{u}_r\,p\cos\theta K\left(-\frac{2}{r^3}\right) - \vec{u}_\theta\frac{1}{r^3}pK(-\sin\theta) = K\left\{2\frac{p\cos\theta\,\vec{u}_r}{r^3} + \frac{p\sin\theta\,\vec{u}_\theta}{r^3}\right\}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = K\frac{2p\cos\theta\,\vec{u}_r + p\sin\theta\,\vec{u}_\theta}{r^3}$$

$$\begin{cases} p_r = p\cos\theta \\ p_\theta = -p\sin\theta \end{cases}$$



$$\vec{p} = p_r\vec{u}_r + p_\theta\vec{u}_\theta = p\cos\theta\,\vec{u}_r - p\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$p\sin\theta\,\vec{u}_\theta = p\cos\theta\,\vec{u}_r - \vec{p} = (\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}$$

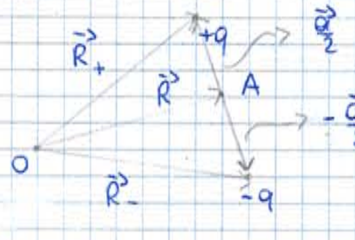
$$\vec{E}(r,\theta) = K\frac{2(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r + (p\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} = \frac{K}{r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}\right)$$

DIPOLO ASSEGNATO NON DEFORMABILE

Prendiamo un dipolo e lo mettiamo in un campo assegnato.

Se il campo è assegnato conosciamo il potenziale in ogni punto.

$V = V(x,y,z)$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$



$\vec{R}_+ = \vec{R} + \dfrac{\vec{a}}{2}$

$\vec{R}_- = \vec{R} - \dfrac{\vec{a}}{2}$

Vogliamo trovare una relazione tra campo $\vec{E}$ e energia potenziale.

$$U = U_+ + U_- = qV(\vec{R}_+) - qV(\vec{R}_-) = q\left\{V\left(\vec{R} + \frac{\vec{a}}{2}\right) - V\left(\vec{R} - \frac{\vec{a}}{2}\right)\right\} =$$

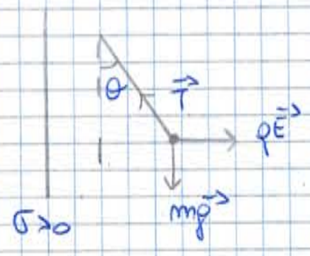
$$= q\left\{V\left(x + \frac{a_x}{2}, y + \frac{a_y}{2} + z + \frac{a_z}{2}\right) - V\left(x - \frac{a_x}{2}, y - \frac{a_y}{2}, z - \frac{a_z}{2}\right)\right\}$$

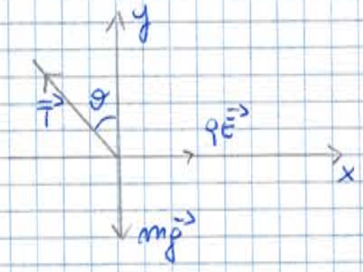
19/10/12

IX LEZIONE:

ESERCIZI

1) Quale sarà la posizione di equilibrio della pallina?





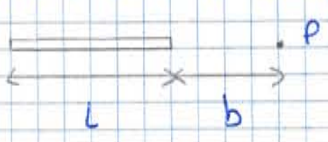
In equilibrio $\vec{T} + q\vec{E} + m\vec{g} = 0$

$x: \; qE - T\sin\theta = 0$ $\quad T\sin\theta = qE$

$y: \; T\cos\theta - mg = 0$ $\quad T\cos\theta = mg$

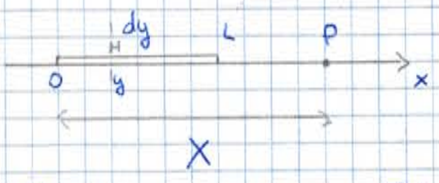
$\Rightarrow \; \mathrm{tg}\,\theta = \frac{qE}{mg}$ $\quad \Rightarrow \; T = \sqrt{(qE)^2 + (mg)^2}$

2) Quanto vale il campo in P? 1.18



è una barra omogenea $\Rightarrow \lambda = \frac{Q}{L}$ è costante

$$\vec{E} = \int_{\text{corpo}} k \frac{dQ}{r^2} \vec{u}$$



$X > L$

$dQ = \lambda dy$

$$d\vec{E} = k \frac{dQ}{(x-y)^2} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E}(x) = \int_0^L k \frac{\lambda dy}{(x-y)^2} \vec{u}_x = k\lambda \left\{ \int_0^L \frac{dy}{(x-y)^2} \right\} \vec{u}_x$$

$$\int_0^L \frac{dy}{(x-y)^2} = \int_0^L \frac{dy}{(y-x)^2} = -\left[\frac{1}{y-x}\right]_0^L = -\left[\frac{1}{L-x} - \frac{1}{-x}\right] = -\left(\frac{1}{L-x} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{x+L-x}{x(L-x)} =$$

$$= -\frac{L}{x(L-x)} = \frac{L}{x(x-L)}$$

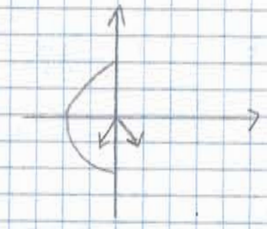
$$\vec{E} = k\lambda \frac{L}{x(x-L)} \vec{u}_x$$

se $x \gg L$ $\quad \vec{E}(x \gg L) = k\lambda \frac{L}{x^2} \vec{u}_x = k \frac{Q}{x^2} \vec{u}_x$

$$\vec{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{k\lambda_0}{R}\left(\sin\phi\,\vec{u}_x - \cos\phi\,\vec{u}_y\right)d\phi + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{k(-\lambda_0)}{R}\left(\sin\phi\,\vec{u}_x - \cos\phi\,\vec{u}_y\right)d\phi =$$

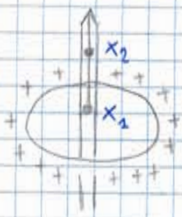
$$= -\frac{k\lambda_0}{R}\left[\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y\right]_0^{\pi/2} + \frac{k\lambda_0}{R}\left[\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= -\frac{k\lambda_0}{R}\left(-\vec{u}_x + \vec{u}_y\right) + \frac{k\lambda_0}{R}\left(-\vec{u}_x - \vec{u}_y\right) = -2\frac{k\lambda_0}{R}\vec{u}_y$$



3 CASO: $\lambda(\phi) = \lambda_0 \sin\phi$

5) Che velocità si ha quando raggiunge il punto 2R? 2.16

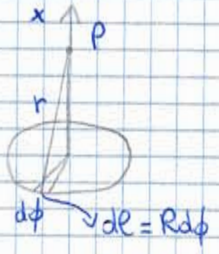


protone dentro un tubo
al centro dell'anello è in equilibrio instabile

$t=0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2R$

$E_p = q_p \cdot V$

$V = \int_{corpo} \frac{k\,dQ}{r}$



$V = \int_0^{2\pi} k \frac{\lambda R}{r} d\phi = \frac{k\lambda R}{r} 2\pi$

$V(x) = 2\pi k \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+x^2}}$

$E_T = E_K + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + q_p V$

$E_T(x=x_1) = 0 + q_p V(x_1) = 2\pi\lambda k q_p$

$E_T(x=x_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 + q_p V(x_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 + q_p\left(2\pi\frac{k\lambda}{\sqrt{5}}\right)$

$v_2 = \sqrt{\frac{2}{m} q_p 2\pi k\lambda\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

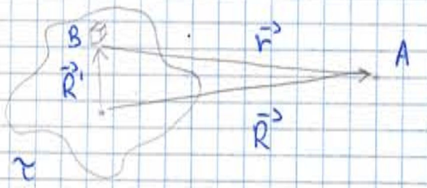
Con Newton:

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x$ (in questo caso)

$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\pi k\lambda R(R^2+x^2)^{-1/2}\right) = 2\pi k\lambda R\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(R^2+x^2)^{-3/2} \cdot \cancel{2}x$

23/10/12

X LEZIONE:



B = punto potenziante
A = punto potenziato
$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{r}$
$r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{(\vec{R}-\vec{R}')(\vec{R}-\vec{R}')} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{R}' + R'^2}$

$$V = \int_\tau K \frac{dQ}{r}$$

$dQ = \rho(\vec{R}')\,d\tau'$ si suppone ρ costante

$$V = \int_\tau k \frac{\rho(\vec{R}')d\tau'}{\sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{R}' + R'^2}} = \int_\tau K \frac{\rho(\vec{R}')}{R\sqrt{1 - 2\frac{\vec{R}\cdot\vec{R}'}{R^2} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2}}\,d\tau'$$

$$= \frac{k}{R}\int_\tau \frac{\rho(\vec{R}')}{\sqrt{1 - 2\frac{\vec{R}\cdot\vec{R}'}{R^2} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2}}\,d\tau'$$

R si può portare fuori perché è costante è uguale per ogni elementino $d\tau$

Se $R >> R'$ si parla di SVILUPPO MULTIPOLARE $\frac{R'}{R} << 1$

$$\varepsilon = -2\frac{\vec{R}\cdot\vec{R}'}{R^2} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

Se $R >> R' \Rightarrow \varepsilon \to 0$

$$V = \frac{K}{R}\int_\tau \frac{\rho(\vec{R}')\,d\tau'}{\sqrt{1+\varepsilon}} \qquad \sqrt{1+\varepsilon} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \ldots$$

$$V = \frac{K}{R}\int_\tau \rho(\vec{R}')\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)d\tau'$$

Limitiamo lo sviluppo di $\frac{R'}{R}$ al primo ordine

$$\varepsilon = -2\frac{\vec{R}\cdot\vec{R}'}{R^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{k}{R}\int_\tau \rho(\vec{R}')\left(1 + \frac{\vec{R}\cdot\vec{R}'}{R^2} + \ldots\right)d\tau' = \frac{K}{R}\underbrace{\int_\tau \rho(\vec{R}')\,d\tau'}_{Q} + \frac{k}{R^3}\vec{R}\underbrace{\int_\tau \rho(\vec{R}')\cdot\vec{R}'\,d\tau'}_{\vec{P}}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{u}_N \, d\Sigma + \oiint_{\Sigma_i} \vec{E}\cdot\vec{u}_{N_i} \, d\Sigma_i = 0$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = -\oiint_{\Sigma_i} \vec{E}\cdot\vec{u}_{N_i} \, d\Sigma_i$$

Σ_i è sferica di raggio R

$$\vec{E}(\Sigma_i) = Kq\frac{\vec{u}_r}{R^2} \Rightarrow \oiint_{\Sigma_i} \vec{E}\cdot\vec{u}_{N_i} \, d\Sigma_i = \oiint_{\Sigma_i} kq\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{N_i}}{R^2} \, d\Sigma_i =$$

$$= \frac{Kq}{R^2}\oiint_{\Sigma_i} -d\Sigma_i = -\frac{Kq}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = -4\pi kq = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

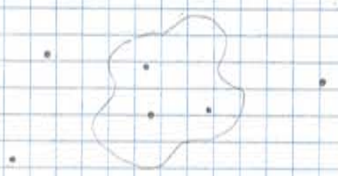
Data una carica q e una superficie chiusa Σ, il flusso vale:

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \notin \Sigma \\ \frac{q}{\varepsilon_0} & \text{se } q \in \Sigma \end{cases}$$

Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche interne a Σ, divisa per ε_0.

u.m. $[\phi_\Sigma(\vec{E})] = Vm$ $\vec{E}$ = campo risultante di tutte le cariche

Nel caso di più cariche si utilizza la sovrapposizione degli effetti.



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{u}_N \, d\Sigma = \oiint_{\Sigma} \left\{\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\right\} \vec{u}_N \, d\Sigma = \oiint_{\Sigma} \sum_{i=1}^{N} \left\{\vec{E}_i\cdot\vec{u}_N \, d\Sigma\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \oiint_{\Sigma} \vec{E}_i\cdot\vec{u}_N \, d\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \phi_\Sigma(\vec{E}_i) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$

Q = somma delle cariche interne

Solo le cariche interne danno contributo al flusso complessivo.

LEGGE DI GAUSS IN FORMA LOCALE

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{u}_N \, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} (\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) \, d\tau$$

In base al punto considerato si considera $\nabla^2 V = 0$ oppure $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Un punto di eq. stabile è un punto di minimo di energia potenziale mentre un punto di eq. instabile è un punto di massimo.

$\vec{F} = q_0 \vec{E}$ ← se è un punto di eq. stabile

$\phi_\Sigma(\vec{F}) = \oiint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma = q_0 \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma = q_0 \, \phi_\Sigma(\vec{E}) = 0$ non ci sono cariche interne

Se il punto fosse di eq. stabile la forza punterebbe verso il centro => $\vec{F} \cdot \vec{u}_N$ sarebbero negativi. Se invece il punto fosse di eq. instabile la forza punterebbe verso l'esterno => $\vec{F} \cdot \vec{u}_N$ sarebbero positivi.

=> Se si ha un campo elettrostatico non ci sono né punti di eq. stabile né punti di eq. instabile (il flusso di $\vec{F}$ è nullo)

$U = q_0 V$, una funzione armonica non può avere né punti di massimo né punti di minimo altrimenti esisterebbero punti stabili o instabili

25/10/12

XI LEZIONE:

Nel vuoto $\rho = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

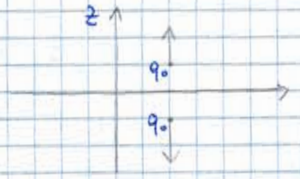
la soluzione $V=0$ non è sempre vera, vale solo se sono verificate le condizioni al contorno.

Per calcolare $\vec{E}$ con Gauss è utile conoscere le simmetrie del sistema.

CAMPO DI UN PIANO INDEFINITO (calcolato con Gauss)

Se il piano è indefinito e uniforme tutte le posizioni del campo sono equivalenti, quindi il campo non dipende né da x né da y.

Il campo non può essere inclinato poiché in questo caso ci sarebbero delle proprietà diverse a destra e a sinistra.



$\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$ inoltre $E(z) = -E(-z)$ è dispari

$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$, σ = costante

$\Sigma_i = \Sigma_s = A$ considero un cilindro

$\vec{AB} = \Delta l_T \, \vec{u}_T$ $\qquad$ $\vec{DA} = -\Delta l_n \, \vec{u}_N$

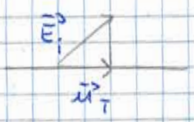
$\vec{CD} = -\Delta l_T \, \vec{u}_T$ $\qquad$ $\vec{BC} = \Delta l_n \, \vec{u}_n$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}_T + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s}_N + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{s}_T + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{s}_N =$$

$$= \vec{E}_i \cdot (\Delta l_T \, \vec{u}_T) + \vec{E}_{is} \cdot (\Delta l_N \, \vec{u}_N) + \vec{E}_s \cdot (-\Delta l_T \, \vec{u}_T) + \vec{E}_{si} \cdot (-\Delta l_N \, \vec{u}_N) =$$

$$= (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_T - \vec{E}_s \cdot \vec{u}_T)\Delta l_T + (\vec{E}_{is} \cdot \vec{u}_n - \vec{E}_{si} \cdot \vec{u}_n)\Delta l_N$$

$$\lim_{\Delta l_N \to 0} \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_T - \vec{E}_s \cdot \vec{u}_T)\Delta l_T = 0$$ poiché il campo è conservativo



$$\vec{E}_i \cdot \vec{u}_T - \vec{E}_s \cdot \vec{u}_T = 0$$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

E_{iT} $\qquad$ E_{sT}

$E_{iT} = E_{sT}$ la componente tangente del campo all'interfaccia è continua

cilindro retto

$Q(\Sigma) = \sigma \Delta A$ se ΔA è sufficientemente piccola si può considerare σ costante.

$\Sigma_L = 2\pi R(2\Delta h_n)$ se $\Delta h_n \to 0$ anche $\Sigma_L \to 0$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma = \Delta A_s + \Delta A_i + \Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma = \iint_{\Delta A_s} \vec{E}_s \cdot \vec{u}_{Ns} \, d\Sigma_s + \iint_{\Delta A_i} \vec{E}_i \cdot \vec{u}_{Ni} \cdot d\Sigma_i + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{u}_{NL} \, d\Sigma_L$$

$$\lim_{\Delta h_n \to 0} \phi_\Sigma(\vec{E}) = \iint_{\Delta A_s} \vec{E}_s \cdot \vec{u} \, d\Sigma_s + \iint_{\Delta A_i} \vec{E}_i (-\vec{u}) \, d\Sigma_i = \vec{E}_s \vec{u} \Delta A_s - \vec{E}_i \vec{u} \Delta A_i =$$

$$= (\vec{E}_s \vec{u} - \vec{E}_i \vec{u})\Delta A$$

$$(\vec{E}_s \vec{u} - \vec{E}_i \vec{u})\Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E}_s \vec{u}_N - \vec{E}_i \vec{u}_N = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\vec{u}_N$ = versore normale alla superficie del piano

$$E_{sN} - E_{iN} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La componente normale del campo all'interfaccia è discontinua tutte le volte che l'interfaccia è carica.

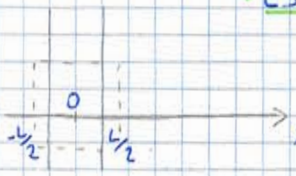
Anche la superficie è equipotenziale poiché non c'è movimento di cariche, inoltre il campo è perpendicolare poiché se ci fosse una componente tangente questa dovrebbe essere continua quindi presente sia dentro che fuori, ma dentro il campo è nullo.

Inoltre si è dimostrato che il campo è sempre perpendicolare alle sup. equipotenziali

26/10/12

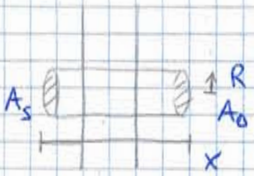
XII LEZIONE :

- **ESERCIZIO** : Calcolare il campo in ogni punto



$\vec{E} = E\vec{u}_x = E(x)\vec{u}_x$ poiché ρ_0 = costante

$E(x) = -E(-x)$ dispari



$$\begin{cases} x > L/2 \\ x < -L/2 \end{cases} \quad |x| > \frac{L}{2}$$

$A_S = A_D = \pi R^2$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\rho_0 \pi R^2 L}{\varepsilon_0}$$

$$Q(\Sigma) = \rho_0 \pi R^2 L$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma = \iint_{A_S} \vec{E}(-x) \cdot (-\vec{u}_x) d\Sigma + \iint_{A_D} \vec{E}(x) \cdot \vec{u}_x \, d\Sigma =$$

$$= \iint_{A_S} E(-x)\vec{u}_x \cdot (-\vec{u}_x) d\Sigma + \iint_{A_D} E(x)\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x \, d\Sigma = -E(-x)\iint_{A_S} d\Sigma + E(x)\iint_{A_D} d\Sigma =$$

$$= [-E(-x) + E(x)]\pi R^2 = 2E(x)\pi R^2$$

per $|x| > \frac{L}{2}$

$$2E(x)\cancel{\pi R^2} = \frac{\rho_0 \cancel{\pi R^2} L}{\varepsilon_0} \qquad E(x) = \frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0}$$

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0} \, , & x > L/2 \\ -\frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0} \, , & x < -L/2 \end{cases}$$

Consideriamo ora una superficie all'interno.

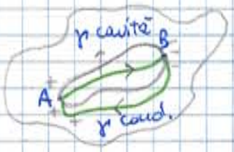
=> considero un cilindro

$$\phi_S(\vec E) = \frac{Q(S)}{\varepsilon_0}$$

$$\forall P \in S \quad \vec E = 0$$

$\phi_S(\vec E) = \oiint_S \vec E \cdot \vec u_N \, dS = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(S) = 0$ ovvero il numero di cariche positive è uguale a quelle negative

Ma questa situazione non è possibile.



$\oint \vec E \cdot d\vec s = 0$ poiché $\vec E$ è conservativo

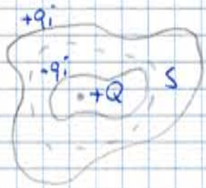
$\gamma = \gamma_{cavità} + \gamma_{cond.}$

$\int_{A\,\gamma cav}^{B} \vec E \cdot d\vec s + \int_{A\,\gamma cond}^{B} \vec E \cdot d\vec s = 0 \quad \Rightarrow$ ASSURDO

↳ $= 0$ poiché $\vec E = 0$

↳ > 0 poiché è presente la linea di campo (cioè $\vec E \neq 0$)

La carica è presente solo sulla superficie esterna. Ciò vale anche con cavità



$$\phi_S(\vec E) = \frac{Q - q_i}{\varepsilon_0}$$

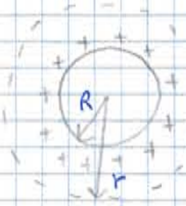
$$\forall P \in S \quad \vec E = 0$$

Mettendo una carica Q all'interno di una cavità vengono attratte delle cariche negative.

$\Rightarrow \phi_S(\vec E) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q - q_i = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = Q$

Cioè si riesce a schermare l'effetto di eventuali cariche elettriche rispetto all'esterno.

- Supponiamo di avere un corpo metallico di forma sferica e carica Q, carico, quanto vale E?



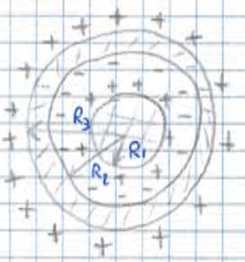
corpo cavo omogeneo

il campo è radiale poiché è l'unica direzione che mantiene la simmetria del corpo: $\vec E = E(r)\,\vec u_r$

$$\phi_\Sigma(\vec E) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_\Sigma(\vec E) = \oiint_\Sigma \vec E \cdot \vec u_N \, d\Sigma = \oiint_\Sigma E(r)\, \underbrace{\vec u_r \cdot \vec u_r}_{1} \, d\Sigma = E(r) \oiint_\Sigma d\Sigma = 4\pi r^2 E(r)$$

- Altro caso: conduttore metallico con cavità

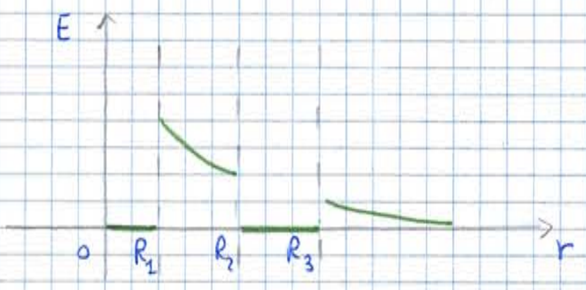


$r<R_1$ $\begin{cases} E_1 = E(r<R_1) = 0 \\ V_1 = V(r<R_1) = A \end{cases}$

$R_1<r<R_2$ $\begin{cases} E_2 = E(R_1<r<R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \\ V_2 = V(R_1<r<R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} + B \end{cases}$

$R_2<r<R_3$ $\begin{cases} E_3 = E(R_2<r<R_3) = 0 \\ V_3 = V(R_2<r<R_3) = C \end{cases}$

$r>R_3$ $\begin{cases} E_4 = E(r>R_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} \\ V_4 = V(r>R_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} + \Delta \end{cases}$



campo elettrico generato da due conduttori sferici concentrici

Poniamo $V=0$ per $r \to \infty$

$V_4(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}$

$V_3(R_3) = V_4(R_3) \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_3}$

$V_3(R_2) = V_2(R_2) \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2} + B$

$V_2(R_1) = V_1(R_1)$

$V(R_1<r<R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} + B$

$V_1 = V(r=R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_1} + B$

$V_2 = V(r=R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2} + B$

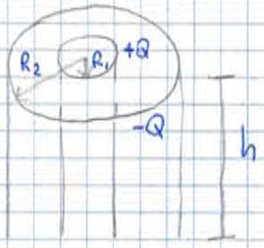
da punti a potenziale maggiore a punti a ↑ potenziale minore

differenza di potenziale tra conduttore interno e conduttore esterno ↗

$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$

↗ la carica è contenuta tutta nella cavità

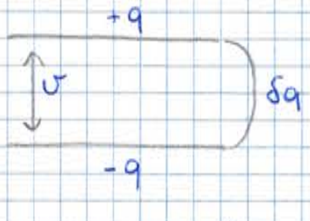
Conduttori in regime di induzione elettrica completa si chiamano **CONDENSATORI**.



Calcolare la capacità di un condensatore cilindrico.

ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Quanto vale l'energia per formare un condensatore carico?



q e v sono la carica e la differenza di potenziale in un istante δq

$\delta W_{ext} = dU = \delta q \cdot v$

↓ lavoro infinitesimo da fare dall'esterno (energia propria)

$$W_{ext} = \int_0^Q dU = \int_0^Q \delta q \cdot v = \int_0^Q \frac{q}{C}\delta q = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = \frac{q}{v} \Rightarrow v = \frac{q}{C}$$

$U = \frac{Q^2}{2C}$ energia immagazzinata in un condensatore

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}QV \\ U &= \frac{1}{2}CV^2 \end{aligned}\right\} \text{formule equivalenti sapendo che } C = \frac{Q}{V}$$

Per un condensatore piano:

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\Sigma}\right)\Sigma(Eh) = \frac{1}{2}\sigma E h \Sigma = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E E h \Sigma$$

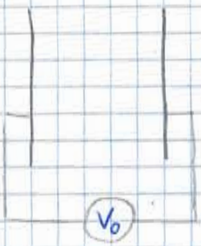
essendo $\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h = Eh$ se il campo è uniforme

$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tau \Rightarrow$ l'energia per unità di volume è: $\boxed{\frac{U}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

↓ energia in funzione del campo

↘ densità di energia elettrostatica

In generale $dU_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_\tau E^2 d\tau$



$$E = \frac{V_0}{x} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{x} \qquad \Rightarrow \sigma = \frac{V_0}{x}\varepsilon_0$$

SISTEMA NON ISOLATO

Spostando i piani cambia la densità di carica.

$dW_{ext} = dU$

$$dW_{ext} = F_{ext}\,\overset{\nearrow \text{spostamento}}{dx} + dqV_0 \xrightarrow{} \text{generatore}$$

$F_{ext}\,dx + dqV_0 = dU$ ①

$U = \frac{1}{2}CV_0^2 \qquad dU = d\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right) = \frac{1}{2}dCV_0^2$

$q = CV_0 \Rightarrow dq = (dC)V_0$

sostituendo in ①

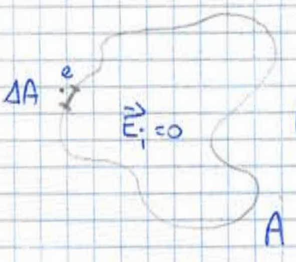
$-F_c\,dx + dC\,V_0^2 = \frac{1}{2}dC\,V_0^2$

$-F_c\,dx = -\frac{1}{2}dC\,V_0^2 \Rightarrow F_c = \frac{1}{2}\frac{dC}{dx}V_0^2$

$C = \varepsilon_0\frac{\Sigma}{x} \qquad \frac{dC}{dx} = -\varepsilon_0\frac{\Sigma}{x^2} \qquad \Rightarrow F_c = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\Sigma}{x^2}V_0^2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\Sigma E^2$

Tenendo costante la carica il sistema è isolato.
Tenendo costante il potenziale cambia il numero delle cariche e il generatore deve rimettere le cariche nel circuito.

PRESSIONE ELETTROSTATICA (forza elettrica che tende a deformare il corpo)



$\vec{E}_e = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_N$ $\downarrow$ per Coulomb

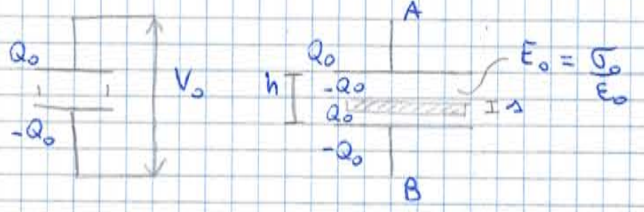
e = punto appena fuori

La forza che si esercita su ΔA è:

$$\Delta\vec{F} = \Delta q\,\underbrace{\vec{E}(A-\Delta A)}_{\text{parte rimanente del conduttore}}$$

$C_{eq} = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ più piccola della più piccola

Fino ad adesso all'interno dei condensatori c'era il vuoto.



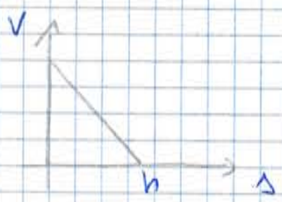
$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

s : CONDUTTORE

L'induzione completa su s è tale da annullare il campo all'interno di s. All'esterno, invece, rimane invariato.

$V = E_0(h-s) = \underbrace{E_0 h}_{V_0} \frac{h-s}{h} \Rightarrow V = V_0\left(1 - \frac{s}{h}\right) < V_0$

Il valore di V diminuisce all'aumentare di s (conduttore).



Nei conduttori c'è una carica libera che si può togliere con un campo esterno, cioè la carica indotta può essere asportata.

Se invece all'interno del condensatore ci fosse un isolante la carica non sarebbe asportabile.

Se s dell'isolante $= h$: $V = \frac{V_0}{K}$, $K > 1$ è una frazione

$K = \frac{V_0}{V}$ non dipende da h, non dipende dalle superfici, ma dal materiale si chiama **COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA**

$E = \frac{V}{h} = \frac{V_0}{Kh} = \frac{E_0}{K}$ il campo viene ridotto

$\Rightarrow \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{K}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow K(\sigma_0 - \sigma_p) = \sigma_0$ *

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\varepsilon_0}$

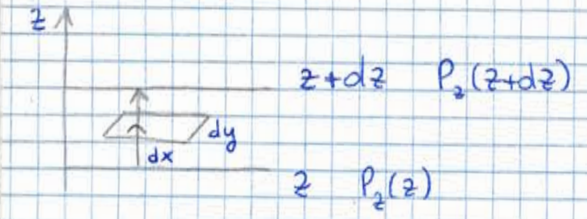
$\sigma_p = \frac{K-1}{K}\sigma_0$ $\sigma_p = \sigma$ di polarizzazione **DENSITÀ DI CARICA DI POLARIZZAZIONE**

Si genera una nuova densità di carica, questi materiali si chiamano **DIELETTRICI LINEARI**.

Se σ_0 fosse 0 anche σ_p sarebbe 0 $\Rightarrow$ questi fenomeni si possono osservare solo in presenza di un campo.

* $E_0 - E_K = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 K} = \frac{K-1}{K}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_K = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{K-1}{K}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$ variazione del campo

Il campo risultante è uguale al campo nel vuoto diminuito di una quantità dovuta alla densità σ_p del dielettrico con segno opposto a quella dell'armatura.



Supponiamo che la polarizzazione dipenda solo da z.

$$dq_p = P_z(z)dxdy$$
$$dq_m = -P_z(z+dz)dxdy \qquad \left(p = qh \,,\ q = P/h \,,\ q = \frac{P \cdot \Sigma h}{h} = P\Sigma \right)$$

$$dq = dq_p + dq_m = P_z(z)dxdy - P_z(z+dz)dxdy = \left[P_z(z) - P_z(z+dz)\right]dxdy \underset{\text{sviluppa}}{=}$$

$$= -\frac{\partial P_z}{\partial z}dxdydz$$

$$\Rightarrow dq = -\frac{\partial P_z}{\partial z}d\tau$$

Se la polarizzazione cambia in tutte le direzioni:

$$dq = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)d\tau = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,d\tau$$

$$\Rightarrow \rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

Sappiamo che $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

ρ è dovuta sia alle cariche libere che a quelle di polarizzazione.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_{lib} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) = \rho_{lib} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \rho_{lib}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_{lib}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ VETTORE D'INDUZIONE O DI SPOSTAMENTO

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{lib} \Rightarrow \phi_\Sigma(\vec{D}) = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{D}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \iiint_\tau \rho_{lib}\, d\tau = q_{lib}$

il flusso di $\vec{D}$ su una sup. chiusa è uguale alla somma delle cariche libere contenute all'interno

Nei mezzi dielettrici lineari isotropi:

$$\vec{p}_a = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

$\vec{P} = n\vec{p}_a = \varepsilon_0 n\alpha\vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ dove $\chi = n\alpha$ SUSCETTIVITÀ DEL DIELETTRICO

$$\iiint_{\tau_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, d\tau = \iiint_{\tau_c} \rho_{eib} \, d\tau$$

$$\lim_{\Delta h \to 0} \iiint_{\tau_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, d\tau = \lim_{\Delta h \to 0} \iiint_{\tau_c} \rho_{eib} \, d\tau$$

$$\iiint_{\tau_c} \rho_{eib} \, d\tau \le \iiint_{\tau_c} \rho_{\pi} \, d\tau = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{è costante} \\ \text{(finita)}}}{\rho_{\pi}} \iiint_{\tau_c} d\tau = \rho_{\pi} \Delta A \Delta h$$

è costante poiché non c'è carica localizzata in superficie (finita)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta h \to 0} \iiint_{\tau_c} \rho_{eib} \, d\tau \le \lim_{\Delta h \to 0} \rho_{\pi} \Delta A \Delta h = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta h \to 0} \iiint_{\tau_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, d\tau = 0$$

$$\lim_{\Delta h \to 0} \iiint_{\tau_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, d\tau \overset{\text{teorema di Gauss}}{=} \lim_{\Delta h \to 0} \left\{ \oiint \vec{D} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma \right\} = \lim_{\Delta h \to 0} \left\{ \iint_{\Delta A_2} \vec{D}_2 \cdot \vec{u}_{N_2} \, d\Sigma + \iint_{\Delta A_1} \vec{D}_1 \cdot \vec{u}_{N_1} \, d\Sigma + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\iint_{\Delta A_L} \vec{D} \cdot \vec{u}_{N_L} \, d\Sigma}_{\to 0 \ (\Delta h \to 0)} \right\} = \vec{D}_2 \cdot \vec{u}_{N_2} \Delta A + \vec{D}_1 \cdot \vec{u}_{N_1} \Delta A = \left(\vec{D}_2 \cdot \vec{u}_{N_2} + \vec{D}_1 \cdot \vec{u}_{N_1} \right) \Delta A$$

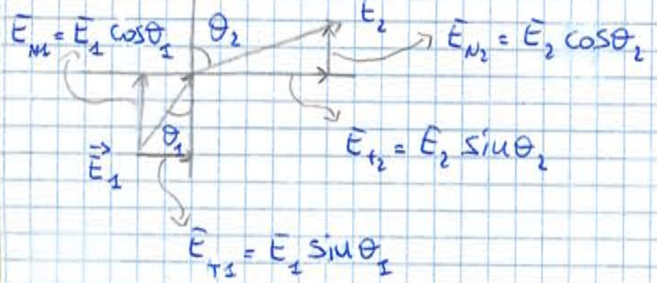
$$\vec{u}_{N_2} = \vec{u}_N \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_{N_1} = -\vec{u}_N$$

$$\left(\vec{D}_2 \vec{u}_N - \vec{D}_1 \vec{u}_N \right) \Delta A = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D}_2 \vec{u}_N = \vec{D}_1 \vec{u}_N$$

In un mezzo dielettrico la componente del vettore spostamento normale è continua all'interfaccia.

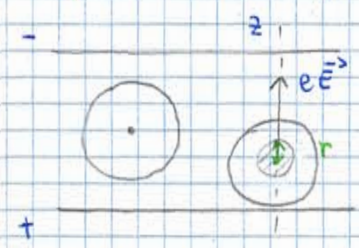
$$\begin{cases} E_{T_2} = E_{T_1} \\ D_{N_2} = D_{N_1} \end{cases}$$

Se il mezzo è lineare : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} E_{T_2} = E_{T_1} \\ \varepsilon_2 E_{N_2} = \varepsilon_1 E_{N_1} \end{cases}$



$\rho = -\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ densità di carica elettronica

Supponiamo di applicare un campo con due piastre:



la nube, inizialmente sferica, in teoria si deforma ma supponiamo che rimanga sferica.
la nube viene attratta dal piano positivo, il nucleo da quello negativo.

Il nucleo subisce la forza del campo e della nube.

$$\vec{F}_{ep} = e\vec{E}_e = e\left(-\frac{e}{\cancel{3}\frac{4}{\cancel{3}}\pi R^3}\cdot\frac{r}{\varepsilon_0}\right)\vec{u}_r = -\frac{e^2}{4\pi R^3}\frac{r}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

forza esercitata dalla nube sul nucleo

$E(r<R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$

$\vec{F}$ dovuta al campo esterno

$e\vec{E} + \vec{F}_{ep} = 0$ in equilibrio raggiunto

$$\Rightarrow eE\vec{u}_z - \frac{e^2}{4\varepsilon_0\pi R^3}r\vec{u}_z = 0$$

$\vec{u}_r$ in questo caso coincide con $\vec{u}_z$

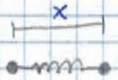
$$E = \frac{e}{4\varepsilon_0\pi R^3}r \Rightarrow r = 4\pi R^3\frac{E}{e}\varepsilon_0$$ deformazione

$p = er = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E$ ↗ momento di dipolo acquistato dall'atomo in presenza del campo applicato

$p_a = \varepsilon_0 \alpha E$

$$\Rightarrow \alpha = 4\pi R^3 = 3\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 3\tau_a$$

α è circa 3 volte il valore del volume atomico



Si può considerare l'atomo come una molla

$F = -kx$

$F_e = qE$

$F + F_e = 0 \Rightarrow -kx + qE = 0$

$x = \frac{qE}{k}$ deformazione atomica, k costante che si oppone alla deformazione

$p = qx = \frac{q^2 E}{k}$

$\varepsilon_0 \alpha = \frac{q^2}{k}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{q^2}{\varepsilon_0 k}$$

La carica totale al tempo t è:

$$Q = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho \, d\tau \qquad \rho = \frac{dQ}{d\tau}$$

La velocità di variazione di Q è:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_c = \frac{d}{dt}\iiint_{\tau(\Sigma)} \rho \, d\tau = \iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$ carica contenuta

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_u = -\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma$$ cariche uscite

Se le cariche escono, la carica Q diminuisce quindi $\frac{dQ}{dt} < 0$, è per questo che ci vuole il meno ($\vec{J} \cdot \vec{u}_N > 0$).

Se c'è conservazione di carica:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_c = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_u$$

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma$$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau$$

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau \Rightarrow \iiint_{\tau(\Sigma)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\right) d\tau = 0 \qquad \forall \Sigma$$

Se l'integrale è nullo per ogni superficie allora la funzione è nulla.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Nel caso stazionario ρ dipende dal punto ma non dal tempo.

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Se la divergenza di un vettore è nulla, il vettore è solenoidale e il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo.

$E_{ext} \approx \frac{5V}{1cm} = 5\cdot10^{2} \frac{V}{m}$ campi che applicava Ohm

$E_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}$ $R \approx 10^{-10}m$ nell'idrogeno

$E_{int} = 9\cdot10^{9}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{20} = 9\cdot1{,}6\cdot10^{10}\frac{V}{m} \approx 14\cdot10^{10}\frac{V}{m}$

Se $\vec{E}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{J} = 0$ poiché $\vec{v}_d = 0$

$\vec{J}$ dipende dal campo esterno $\Rightarrow \vec{J} = j(E_{ext})$

$j(E_{ext}) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{j(0)}} + \left(\frac{dj(0)}{dE_{ext}}\right)E_{ext} = \sigma E_{ext}$ sviluppo di Maclaurin

$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$ σ = conducibilità elettrica (proprietà del materiale)

$[\sigma] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{A}{m^2}\cdot\frac{m}{V} = \frac{A}{mV} = \frac{1}{m\Omega}$

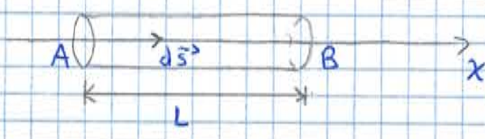
08/11/12

XVI LEZIONE:

$j = \sigma E$ è la legge locale di Ohm

Vale in sottoforma vettoriale $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ se il mezzo è ISOTROPO.

le linee di $\vec{J}$ sono // e concordi alle linee di $\vec{E}$



Consideriamo un conduttore cilindrico a sezione costante in regime stazionario.

$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J}$

$\frac{1}{\sigma} = \rho$ RESISTIVITÀ $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \rho\vec{J}}$

$$\rho \begin{cases} Ag & 1{,}6\cdot10^{-8}\ \Omega\cdot m \\ Ge & 0{,}46\ \Omega\cdot m \\ Vetro & 10^{10}\ \Omega\cdot m \end{cases}$$

Si vuole trovare un collegamento tra la legge di Ohm generale e quella locale.

$$\underset{\uparrow}{\alpha} = \frac{1}{T-T_0} \cdot \frac{\rho(T)-\rho_0}{\rho_0}$$

Rappresenta la variazione relativa di ρ rispetto alla temperatura.

- Considerazioni energetiche sulle legge di ohm:

$\vec F = q\vec E$ nel vuoto

$\vec a = \frac{\vec F}{m} = \frac{q}{m}\vec E$

$\vec v(t) = \vec v(0) + \frac{q}{m}\vec E t$ moto uniformemente accelerato

se $\vec E$ è uniforme l'accelerazione è proporzionale al campo

in un mezzo

$\vec J = \sigma \vec E$

$nq\vec v_d = \sigma \vec E$

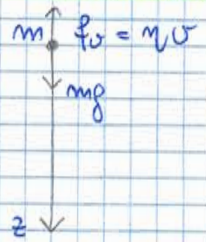
$$\Rightarrow \vec v_d = \frac{\sigma \vec E}{nq} = \overset{\nearrow \text{costante}}{\left(\frac{m\sigma}{nq^2}\right)} \cdot \frac{q\vec E}{m}$$

moto rettilineo uniforme

$\vec v_d$ è proporzionale ad $\vec E$

una particella che si muove in un mezzo ha la velocità proporzionale alla forza $\Rightarrow$ il mezzo crea un attrito che bilancia il moto che avrebbe nel vuoto e rende il moto lineare (dissipazione di energia).

- Consideriamo un corpo che cade in un mezzo:



$$m\frac{dv}{dt} = mg - \eta v$$

η dipende dalla forma del corpo e dalla viscosità del mezzo

Aumentando la velocità, la forza netta diminuisce.
Quando $v = \frac{mg}{\eta}$ la forza netta è nulla, questa velocità è la velocità limite.

$$v_{lim} = \frac{mg}{\eta}$$

Nel caso elettrico: $\vec v_d = \underbrace{\frac{\sigma}{nq^2}}_{\text{termine dissipativo}} \cdot \overbrace{q\vec E}^{\text{forza}}$

Essendoci dissipazione, l'energia non si conserva.

$$E_T = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$$

MODELLO CLASSICO DELLA CONDUZIONE ELETTRICA

Consideriamo un sale (NaCl) disciolto in H_2O, questo si dissocia in ioni e avviene il fenomeno dell'idratazione. Supponiamo di applicare un campo e studiamo come si muove l'agglomerato.

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \eta\vec{v}$ Trascuriamo la forza di gravità che supponiamo infinitesima.

$$\vec{v}_{lim} = \frac{q\vec{E}}{\eta}$$

$$\begin{cases} \vec{J} = nq\vec{v}_{lim} = \frac{nq^2\vec{E}}{\eta} \\ \vec{J} = \sigma\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \sigma = \frac{nq^2}{\eta}$$ conducibilità dell'elettrolita

Se il campo applicato è piccolo σ dipende dalla densità, dal quadrato della carica e da η proprietà del sale.
Questo modello vale per sistemi biologici, non per i metalli per i quali dobbiamo utilizzare il modello di DRUDE -> METALLI.

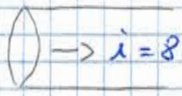
Nei gas perfetti vale il principio di equipartizione dell'energia, che dipende dai gradi di libertà.
Se prendiamo un elettrone con tre gradi di libertà:

$E_K = \frac{3}{2} K_B T$ $K_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} K_B T$ dove $\langle v^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3K_BT}{m}}$ velocità quadratica media $\langle v^2 \rangle$

$T = 300°K$, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg $\Rightarrow v = \langle v^2 \rangle^{1/2} \approx 10^5$ m/s   velocità di un elettrone in un metallo

Supponiamo di avere un conduttore calibro:



Consideriamo il rame in cui $n = 8{,}5 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^2}$, $\Sigma = 4\ mm^2$

$$j = \frac{i}{\Sigma} = \frac{8A}{4 \cdot 10^{-6}\ m^2} = 2 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}$$

$$j = nqv_d$$

$v_d = \frac{j}{nq} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m/s   velocità di deriva $v_d << v$

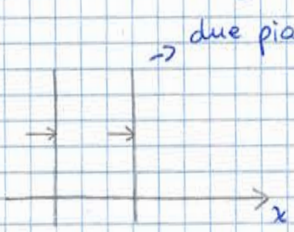
- Se un conduttore ohmico omogeneo è percorso da una corrente stazionaria allora il campo elettrico nel conduttore è solenoidale.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ poiché il regime è stazionario

$\vec{\nabla}\cdot(\sigma\vec{E})=0$ perché il conduttore è ohmico

$\sigma\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow$ il campo elettrico è solenoidale

ma $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ per l'eq. di Poisson $\Rightarrow \rho=0$ densità di carica netta



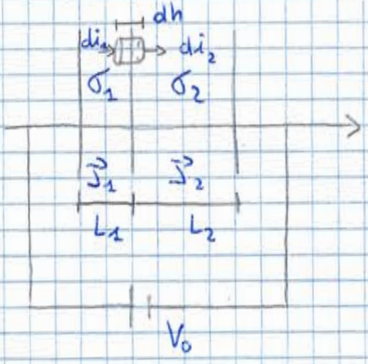
$\vec{J} // x$
$\vec{J}=\sigma\vec{E} \Rightarrow \vec{E}=E(x)\,\vec{u}_x$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$

ma siccome il campo dipende solo da x $\Rightarrow \frac{dE_x}{dx}=0$

Ciò significa che il campo è costante, la velocità è uguale nelle due piastre

- Siano date due piastre a contatto con conducibilità σ_1 e σ_2



$\vec{J}_1=\sigma_1\vec{E}_1$
$\vec{J}_2=\sigma_2\vec{E}_2$

in regime stazionario e con $\vec{J}$ costante

$di_1=j_1\,d\Sigma=\sigma_1E_1\,d\Sigma$
$di_2=\sigma_2E_2\,d\Sigma$

essendo in regime stazionario $di_1=di_2 \Rightarrow \sigma_1E_1\,d\Sigma=\sigma_2E_2\,d\Sigma$

$\sigma_1E_1=\sigma_2E_2$

legge di Ohm in presenza di un conduttore:

$$\int_{A\,\gamma_{out}}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{A\,\gamma_{out}}^{B} \vec{E}_s\cdot d\vec{s} = V_A - V_B = Ri$$

$$\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_B^A (\vec{E}_s + \vec{E}^*) d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}_s\cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{E}^*\cdot d\vec{s} = V_B - V_A + fem$$

$$\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = \underset{\uparrow}{\int_B^A} \rho\vec{J}\cdot d\vec{s} = \int_B^A \rho j ds = \int_B^A \rho \frac{i}{\Sigma} ds = \left(\int_B^A \rho \frac{ds}{\Sigma}\right) i = \underset{\downarrow}{r}\, i$$

$\vec{J} = \sigma\vec{E}$

$\vec{E} = \rho\vec{J}$

resistenza che le cariche incontrano nel generatore

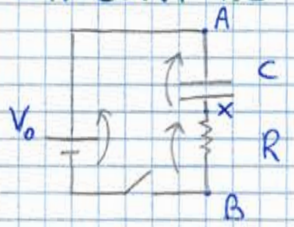
$ri = V_B - V_A + fem \Rightarrow fem = ri + V_A - V_B$

$fem = ri + Ri$ LEGGE DI OHM GENERALIZZATA

↓

differenza di potenziale ai capi del generatore quando il circuito è aperto

CIRCUITI RC (CARICA DI UN CONDENSATORE)



$C = \frac{q}{V}$, $u = \frac{q^2}{2C}$ $t<0$ circuito aperto

$V = Ri$, $P = Ri^2$ $t>0$ circuito chiuso

$V_0 = V_A - V_x + V_x - V_B = V_C + V_R = \frac{q}{C} + Ri$

Chiudendo il circuito $\Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$

$$V_0 = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$$

$q(t) = q_{om}(t) + q_p(t)$

La condizione iniziale è $q(0) = 0$

$$\frac{q_{om}}{C} + R\frac{dq_{om}}{dt} = 0$$

$$\frac{dq_{om}}{dt} + \frac{1}{RC} q_{om} = 0$$

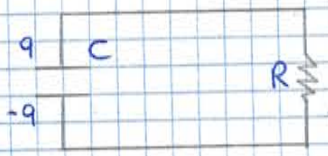
$[R] = \Omega = V/A$, $[C] = \text{Farad} = C/V$

$[RC] = V/A \cdot C/V = \frac{V\cdot s}{C} \cdot \frac{C}{V} = s$

$RC = \tau$ costante di tempo

SCARICA DEL CONDENSATORE

$0 = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$



la carica é tutta sul condensatore

$q = Ae^{-t/RC}$

$q(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0$

$q(t) = q_0\, e^{-t/RC}$

$i = q_0/RC \; e^{-t/RC}$

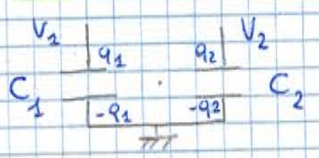
diminuiscono esponenzialmente nel tempo, tendono a 0
($i = -\frac{dq}{dt}$ poiché la carica diminuisce)

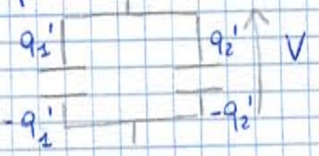
Cambia il bilancio energetico

$$\mathcal{E} = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) dt = -\left[\frac{q^2(\infty)}{2C} - \frac{q^2(0)}{2C}\right] = \frac{q_0^2}{2C}$$

Tutta l'energia contenuta nel condensatore viene dissipata in calore da R.

- Calcolare la variazione di potenziale, della carica sui condensatori, di E_p.





Esercizio 4.7 pag 81

$C = \frac{q}{V} \qquad q = CV$

$q_1 = C_1V_1 \qquad q_2 = C_2V_2 \qquad q = C_1V_1 + C_2V_2$ carica totale iniziale

$V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$

$q_1' = C_1V = C_1 \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$

$\delta q_1 = q_1' - q_1 = C_1 \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} - C_1V_1 = \frac{C_1^2V_1 + C_1C_2V_2 - C_1^2V_1 - C_2C_1V_1}{C_1 + C_2} =$

$= \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_2 - V_1)$

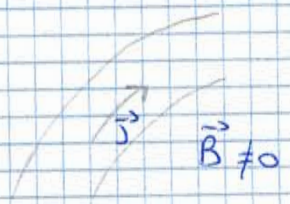
$\delta q_2 = q_2' - q_2 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_2) = -\delta q_1$

Se una particella si muove sotto l'azione del campo magnetico uniforme l'energia cinetica è costante, il modulo della velocità non cambia, la direzione si. *

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N}{C\cdot\frac{m}{s}} = \frac{N\,s}{C\cdot m} = \frac{N\cdot m\cdot s}{C\cdot m^2} = \frac{J\cdot s}{C\cdot m^2} = \frac{V\cdot s}{m^2} = \frac{Wb}{m^2} = \text{Tesla}$$

* la forza comunica solo un'acc centripeta e non tangenziale.

- Forza che si esercita su un conduttore:



ATTENZIONE: se $q>0$ il verso di $\vec{F}$ è dato dalla regola della mano destra
se $q<0$ il verso è opposto

n portatori di carica q per unità di volume

$\vec{J} = nq\vec{v}$

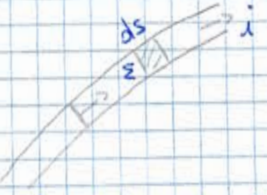
$\vec{f} = q\vec{v}\times\vec{B}$ forza esercitata su una carica

$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = n\vec{f} = nq\vec{v}\times\vec{B}$ forza per unità di volume

$d\vec{F} = \vec{J}\times\vec{B}\,d\tau$ forza infinitesima

$\vec{F} = \iiint_\tau \vec{J}\times\vec{B}\,d\tau$ forza totale magnetica su un conduttore percorso da corrente

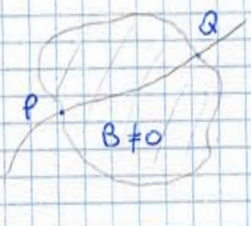
- In un conduttore filiforme in condizioni stazionarie:



$\vec{J} = \frac{i}{\Sigma}\vec{u}_T$ $\quad d\tau = \Sigma ds \quad d\vec{s} = ds\,\vec{u}_T$

$$d\vec{F} = \left(\frac{i}{\Sigma}\vec{u}_T\right)\times\vec{B}\,\Sigma ds = i\,d\vec{s}\times\vec{B}$$

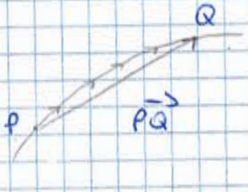
SECONDA LEGGE DI LAPLACE



$$\vec{F} = \int_P^Q i\,d\vec{s}\times\vec{B} = \underbrace{i}_{\text{i è costante}}\int_P^Q d\vec{s}\times\vec{B}$$

La forza magnetica su un filo percorso da corrente è ⊥ al filo e al campo magnetico.

Se $\vec{B}$ è uniforme $\Rightarrow \vec{F} = i\left(\int_P^Q d\vec{s}\right)\times\vec{B}$



$d\vec{F}_- = i\,d\vec{s}\times\vec{B} = i(dx\,\vec{u}_x)\times(B\vec{u}_y) = i\,dx\,B\vec{u}_z$

$d\vec{\Pi}_{0,-} = \vec{r}\times d\vec{F}_- = x\vec{u}_x \times i\,dx\,B\vec{u}_z = -i\,x\,dx\,B\vec{u}_y$

$\vec{\Pi}_{0,-} = \int_{-R}^{R} -i\,dx\,B\vec{u}_y\,x = -iB\vec{u}_y\int_{-R}^{R} x\,dx = 0$

la parte lineare non dà momento netto rispetto al polo 0.

$d\vec{\Pi}_{0,n} = \vec{r}\times d\vec{F}_n = R(\vec{u}_x\cos\theta + \vec{u}_y\sin\theta)\times\{-iRB\sin\theta\,d\theta\,\vec{u}_z\} =$

$= -iR^2B\{\cos\theta\sin\theta(\vec{u}_x\times\vec{u}_z) + \sin^2\theta(\vec{u}_y\times\vec{u}_z)\}d\theta = -iR^2B\{-\cos\theta\sin\theta\,\vec{u}_y +$

$+ \sin^2\theta\,\vec{u}_x\}\,d\theta$

$\vec{\Pi}_{0,n} = -iR^2B\left\{-\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta\,d\theta\,\vec{u}_y + \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta\,\vec{u}_x\right\} = -i\frac{\pi}{2}R^2B\vec{u}_x$

$\vec{\Pi} = -i\frac{\pi}{2}R^2B\vec{u}_x$ momento totale

$\Sigma = \frac{\pi}{2}R^2$ area del semicerchio

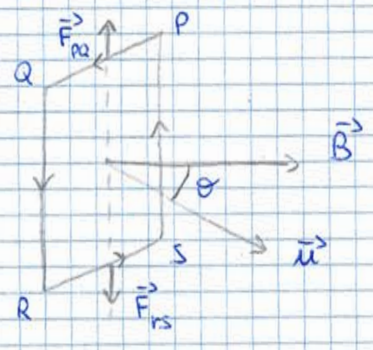
$m = i\Sigma$ momento di dipolo magnetico (modulo)

$\vec{m} = i\Sigma\vec{u}_z$ dove la direzione si trova con la regola della mano destra considerando la corrente sulle dita.

$\vec{m}\times\vec{B} = (i\Sigma\vec{u}_z)\times(B\vec{u}_y) = i\Sigma B(\vec{u}_z\times\vec{u}_y) = -i\Sigma B\vec{u}_x$

$\vec{\Pi} = \vec{m}\times\vec{B}$ questa formula vale se B è uniforme

- Cerchiamo di generalizzare queste formule, considerando un rettangolo.



$\overline{PS} = \overline{QR} = a$

$\overline{PQ} = \overline{RS} = b$

$\vec{B}$ uniforme

$\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{RS}$ uguali e contrarie e hanno la stessa retta d'azione => il braccio è nullo => il momento è nullo

distanza tra il polo e la retta d'azione

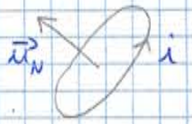
$\vec{F}_{SP} = i\,\vec{SP}\times\vec{B}$ => $|F_{SP}| = iaB$ $\quad |F_{QR}| = iaB$

queste due forze formano una coppia

15/11/12

XIX LEZIONE:

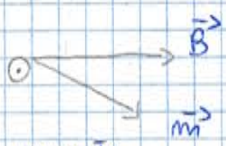
$\vec{m} = i \Sigma \vec{u}_N$



$\vec{\Pi} = \vec{m} \times \vec{B}$

$\Pi = mB \sin\theta$

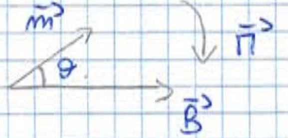
entrante

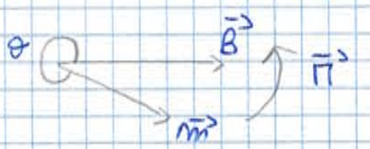


uscente

Per il verso di $\vec{\Pi}$ si mettono le dita della mano destra su $\vec{m}$ e si chiudono verso $\vec{B}$.

Quando il momento è negativo cerca di indurre un verso antiorario, se è positivo induce un verso orario. Il segno è dato da $\sin\theta$.





$\vec{m} // \vec{B}$ EQUILIBRIO STABILE (minimo di en. potenziale)

$\vec{m}$ antiparallelo $\vec{B}$ EQ. INSTABILE

Il momento cerca di orientare il bipolo verso il campo magnetico.

$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Pi}_0$ eq. di un corpo che ruota attorno ad un punto fisso.

$\frac{dL_z}{dt} = \Pi_z$

OSCILLAZIONI ATTORNO POSIZIONE STABILE DOVUTE AL MOMENTO MECCANICO

$L_z = I\omega = I \frac{d\theta}{dt}$

il meno indica che il momento è di richiamo

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I \frac{d\theta}{dt}\right) = \textcircled{-} mB\sin\theta \quad \Rightarrow \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} = - mB \sin\theta$$

questo eq. ci descrive il moto di un dipolo nel campo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mB}{I} \operatorname{sen}\theta = 0$$

se $\theta \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mB}{I}\theta = 0$$ eq. dell'oscillatore armonico

$\omega_0^2 = \frac{mB}{I}$ pulsazione propria del sistema.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

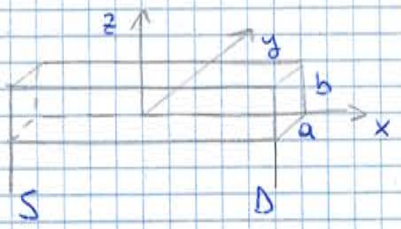
$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ il sistema esercita delle oscillazioni armoniche

A e δ dipendono dalle condizioni iniziali, ω no

EFFETTO HALL

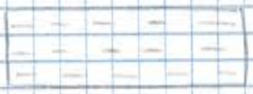
$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Consideriamo un circuito percorso da corrente.



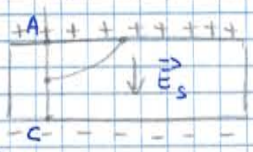
$\vec{J} = nq\vec{v}$ con $\vec{v} // x$ q positiva

In assenza di campi esterni una particella si muove con velocità di deriva proporzionale al campo, in regime stazionario il campo è costante quindi anche la velocità.



$B = 0$

Se $\exists$ $\vec{B} = B\vec{u}_y$



In questo modo si ha un accumulo di carica sul lato superiore => quello inferiore si carica negativamente

$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v\vec{u}_x) \times B\vec{u}_y = qvB\vec{u}_z$

Essendoci un accumulo di carica si forma un campo elettrico e quindi una particella non risente solo della forza magnetica.

$\vec{F}_E = q\vec{E}_s$

$\vec{F}_B + q\vec{E}_s = 0$ il fenomeno continua finché la forza totale non è nulla

$q\vec{E}_s + qvB\vec{u}_z = 0$ raggiungimento dell'equilibrio

$\vec{E}_s = -vB\vec{u}_z$

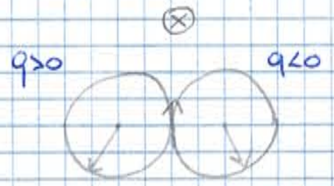
$\int_C^A \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = \int_C^A \vec{E}_s \cdot dz\vec{u}_z = V(C) - V(A)$

$d\vec{s} = dz\vec{u}_z$

$\int_C^A \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = \int_C^A (-vB\vec{u}_z) \cdot (dz\vec{u}_z) = -vB\left[z(A) - z(C)\right] = -vBb$

Quando la velocità è ⊥ al campo, la particella descrive una circonferenza di raggio R e v costante => MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Se la carica è positiva e il campo entrante, il verso è antiorario.
Se $q<0$ e B entrante il verso è orario.

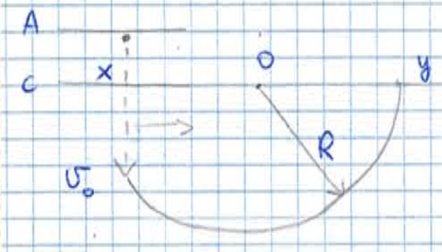


$$R = \frac{m v_0}{|q| B}$$

il raggio di curvatura è COSTANTE!
infatti m, q e B sono costanti e v non cambia in modulo poiché $\vec{F}$ è solo centripeta

SPETTROMETRO DI MASSA

Acceleriamo una carica q, inizialmente ferma, con una d.d.p.



⊗ campo magnetico entrante

$$v(A) = 0$$

$$E(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + qV(A) = qV(A)$$

$$E(C) = \frac{1}{2} m v_0^2 + qV(C)$$

$$E(A) = E(C) \Rightarrow qV(A) = \frac{1}{2} m v_0^2 + qV(C)$$ per la conservazione dell'energia

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{q}{m} [V(A) - V(C)]}$$

$$\Delta V = V(A) - V(C) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta V}$$

$$R = \frac{m}{qB} \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta V} = \frac{1}{B} \sqrt{2 \frac{m}{q} \Delta V}$$ la particella descrive un moto circolare uniforme

Se invece di una particella consideriamo un gas (ad esempio Uranio), ci sono particelle con massa diversa (isotopi)

$$R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_1 \Delta V}{q}} \qquad R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{2 \frac{m_2}{q} \Delta V}$$

In questo modo si riesce a stabilire la percentuale degli isotopi.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV(A) = \frac{1}{2}mv_3^2 + qV(C)$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + q(V(A)-V(C))$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + q\Delta V = 2q\Delta V$$

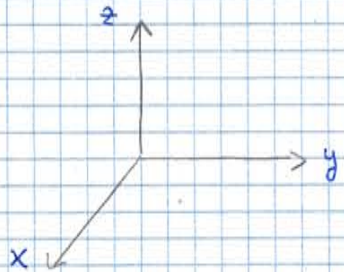
$v_3 = \sqrt{2\,\frac{2q\Delta V}{m}}$ la velocità è aumentata $v_3 = \sqrt{2}\,v_1$

$R_\pi = \frac{mv_\pi}{qB} \Rightarrow v_\pi = \frac{qBR_\pi}{m}$ Il tempo di percorrenza $t = \frac{\pi m}{qB}$ $\nearrow T/2$ è uguale per ogni orbita circolare cioè non dipende dalla velocità.

Abbiamo supposto in questo esperimento che la velocità fosse ⊥ al campo B.

- Come varia il moto di una particella in un campo uniforme in condizioni generali?

MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME CON VELOCITÀ QUALUNQUE



$\vec{B} = B\vec{u}_z$

$B \neq 0,\ z > 0$

$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$m\left\{\frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{u}_z\right\} = q(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z)\times B\vec{u}_z =$$

$$= qBv_x(\vec{u}_x\times\vec{u}_z) + qBv_y(\vec{u}_y\times\vec{u}_z) + 0 = -qBv_x\vec{u}_y + qBv_y\vec{u}_x$$

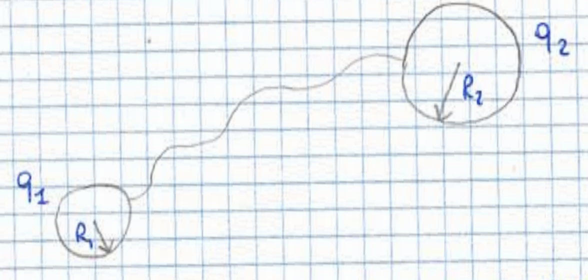
$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m\frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il moto avviene in modo tale che la velocità lungo la componente // al campo è costante $v_z = \text{cost.}$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \quad ① \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = \frac{1}{\omega}\frac{dv_x}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{dv_x}{dt}\right\} = -\omega v_x \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} v_x = -\frac{1}{\omega}\frac{dv_y}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{\omega}\frac{dv_y}{dt}\right\} = \omega v_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega}\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega v_x \qquad \frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0$$



$$\begin{cases} q = q_1 + q_2 & \text{conservazione della carica} \\ k\dfrac{q_1}{R_1} = k\dfrac{q_2}{R_2} & \text{il sistema si porta allo stesso potenziale} \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{R_1}{R_2} q_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) q_2 = q$$

$$\begin{cases} q_2 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} q \\ q_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} q \end{cases} \qquad \begin{cases} E_2 = k\dfrac{q_2}{R_2^2} = k\dfrac{q}{R_2(R_1+R_2)} \\ E_1 = k\dfrac{q_1}{R_1^2} = k\dfrac{q}{R_1(R_1+R_2)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Il campo è tanto più grande quanto R è piccolo.

Il campo è inversamente proporzionale al raggio.

Questo fenomeno si chiama **EFFETTO PUNTE** ovvero le cariche si concentrano di più dove il raggio di curvatura è minore.

ESERCIZIO:

1) Campo elettrico generato da un filo

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_N d\Sigma = \iint_{\Sigma_S} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{u}_N}_{\to 0} d\Sigma + \iint_{\Sigma_i} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{u}_N}_{\to 0} d\Sigma + \iint_{\Sigma_L} \vec{E}\cdot\vec{u}_N d\Sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma_L} E(r)\,\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r\, d\Sigma = E(r)\iint_{\Sigma_L} d\Sigma = E(r)\,2\pi r L$$

$$Q(\Sigma) = \lambda L \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = E(r)\,2\pi r L \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

TRAIETTORIA

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x = v_n \cos(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} = V_y = - v_n \sin(\omega t) \end{cases}$$

$\Downarrow$ integrando

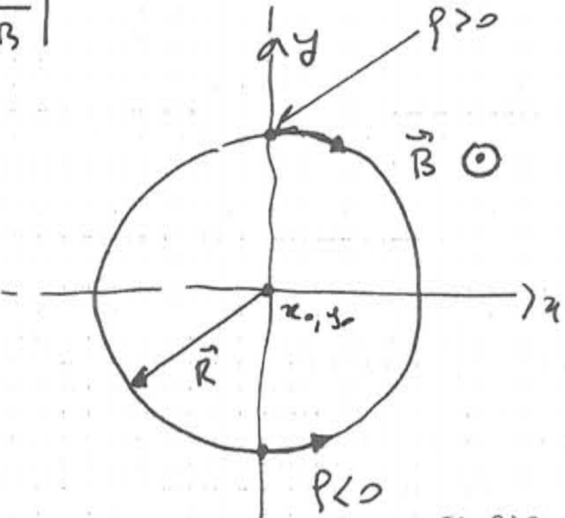
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_n}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) = y_0 + \frac{v_n}{\omega} \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$[x(t)-x_0]^2 + [y(t)-y_0]^2 = \left(\frac{v_n}{\omega}\right)^2$$

LA PROIEZIONE SUL PIANO (x,y) E' UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO

$$R = \left|\frac{v_n}{\omega}\right| = \left|\frac{m v_n}{qB}\right|$$

$\boxed{\text{SE } \ V_p = 0}$



$$\begin{cases} x(t) - x_0 = \frac{v_n}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) - y_0 = \frac{v_n}{\omega} \cos(\omega t) \end{cases}$$

se $q<0$ $\vec{\omega}$ è concorde a $\vec{B}$

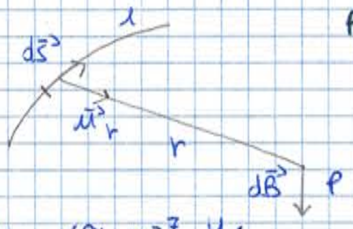
se $q>0$ $\vec{\omega}$ è discorde a $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}}$$

(da $q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{F} = m\vec{a}_c = m\,\vec{\omega} \times \vec{v} =$
$= -m\vec{v} \times \vec{\omega}$)

20/11/12

XXI LEZIONE :



PRIMA LEGGE DI LAPLACE

{ indica il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo di filo ds percorso dalla corrente i in un punto P distante r dall'elemento di filo

$$d\vec{B} = K_m\, i\, \frac{\vec{ds} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{ds} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$\vec{u}_r$: da $\vec{ds}$ a P

$\vec{u}_T$: tang. filo

$\vec{B}$ è $\perp$ $\vec{ds}$ e $\vec{u}_r$, proporzionale a i, inversamente proporzionale al quadrato della distanza

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$$[\mu_0] = \frac{[B]\cdot[r^2]}{[i]\,[ds]} = \frac{T \cdot m^2}{A \cdot m} = \frac{Wb}{m^2}\cdot\frac{1}{A}\cdot m = \frac{V\cdot S}{m}\,\frac{1}{A} = \frac{\Omega \cdot S}{m} = \frac{H}{m}$$

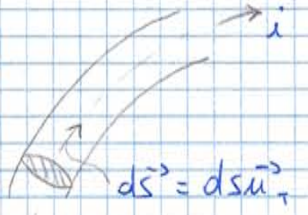
↘ permeabilità magnetica del vuoto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{\vec{ds} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

il verso di $\vec{ds}$ è preso concorde con i

↘ LEGGE DI AMPERE-LAPLACE : collega il campo $\vec{B}$ con le correnti che lo genera

- Determinare il campo magnetico creato da una particella carica con velocità v.



conduttore calibro

CAMPO MAGNETICO DI UNA CARICA IN MOTO

$\vec{ds} = ds\,\vec{u}_T$ $i = j\Sigma$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{ds} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} j \Sigma \frac{ds\, \vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} j\, d\tau \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$\vec{j} = nq\vec{v}$ n = densità di portatori

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\tau \frac{\vec{j} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} nq\, d\tau \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$dN = n\,d\tau$ = numero di portatori in $d\tau$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} dN$$ campo magnetico in $d\tau$

Se il campo è additivo ogni portatore genera un campo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$ campo prodotto da una singola carica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \vec{v} \times \left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r\right\}$$ moltiplica e divide per ε_0

$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$ il campo magnetico dipende dal moto delle cariche