NUMERO: 1281

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Genta

MATERIA: Elettrotecnica, Prof.Canavero

01/10/12

I LEZIONE

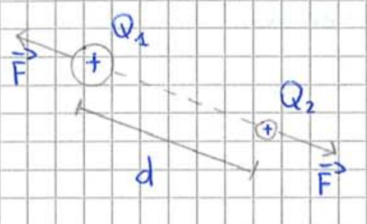
CONCETTI FONDAMENTALI

1) tutti i fenomeni elettrici sono basati sulla presenza di **CARICHE ELETTRICHE** di due specie ⊕ e ⊖, le cariche elettriche sono misurabili ma non visibili, la carica elementare è quella dell'elettrone $e^- = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$

N.B. Indicare SEMPRE l'unità di misura.

2) le cariche interagiscono fra loro, se sono della stessa specie si respingono, se sono di specie diversa si attraggono.

LEGGE DI INTERAZIONE (di Coulomb)

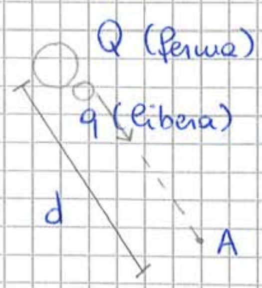


prese due cariche Q_1 e Q_2 si esercita tra loro una forza con direzione lungo la congiungente e con verso repulsivo, se dello stesso segno, attrattivo, se di segno opposto.

Il modulo è dato da: $F = k \dfrac{Q_1 Q_2}{d^2}$

k → coeff. di proporzionalità $\left(9 \times 10^9 \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}\right)$

Tale forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra queste.



$\mathcal{L} = F \cdot d$ **LAVORO**, u.m. J (Joule)

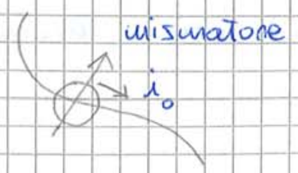
nel caso unidimensionale non si considerano i vettori

POTENZIALE: $\phi = \dfrac{\mathcal{L}}{q} = k \dfrac{Q q}{d^2} \cdot \dfrac{d}{q} = k \dfrac{Q}{d}$ → carica che genera l'interazione

Il potenziale è il lavoro normalizzato indipendente dall'esperimento eseguito.

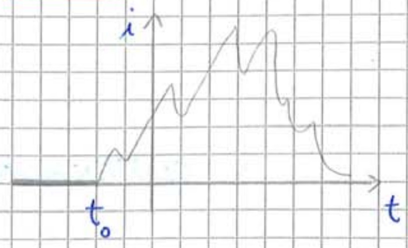
u.m. J/C o V (volt)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 106



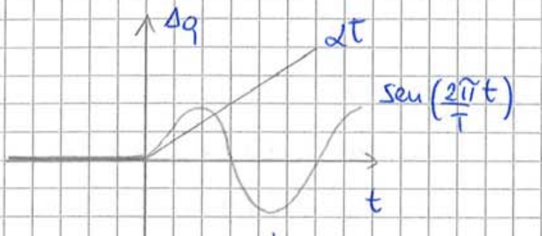
$$q = \int_{-\infty}^{t} i_o \, dt$$

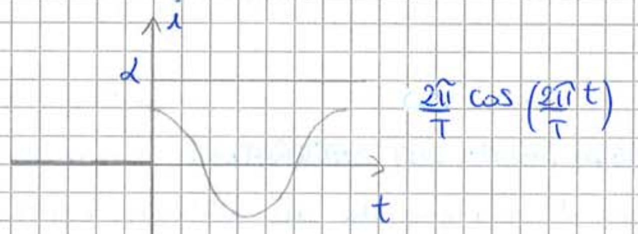
ESEMPI:



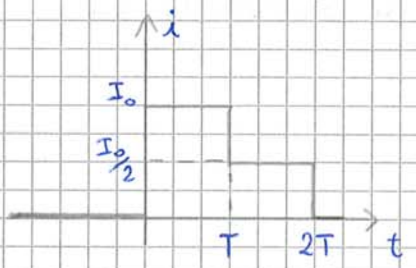
$$\int_{-\infty}^{t} = \cancel{\int_{-\infty}^{t_o}} + \int_{t_o}^{t} = \int_{t_o}^{t}$$

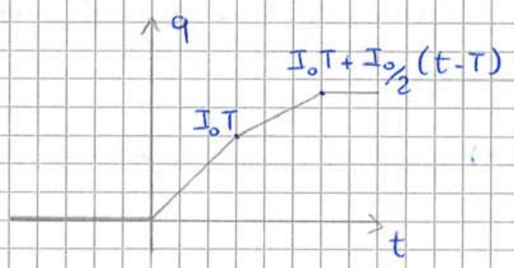
$\downarrow$
0





$\downarrow$
andamento pulsante
o alternato





$0 < t < T \qquad q = \int_0^t I_o \, dt = I_o t$

$T < t < 2T \qquad q = \int_0^T I_o \, dt + \int_T^t \frac{I_o}{2} dt = I_o T + \frac{I_o}{2}(t - T)$

$t > 2T \qquad q = \int_0^T I_o \, dt + \int_T^{2T} \frac{I_o}{2} dt + \int_{2T}^t 0 \, dt = I_o T + \frac{I_o}{2} T$

03/10/12

LEZIONE II:

L'interazione fra cariche elettriche si chiama **CAMPO ELETTRICO**.

$V_{AB} = \phi_A - \phi_B = \frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta q} > 0$ poiché $\phi_A > \phi_B$

Una differenza di potenziale implica una variazione di energia, siccome non si può dissipare, la quantità di energia persa si è convertita in energia

$i_1 + i_3 = i_2$ LEGGE del BILANCIAMENTO delle CORRENTI

entrante uscente o

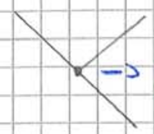
LEGGE di KIRCHHOFF (KCL)

KCL_1: ipotesi -> superficie chiusa attraversata da correnti

tesi -> $\sum_n i_n = \sum_m i_m$ n = correnti entranti

m = correnti uscenti

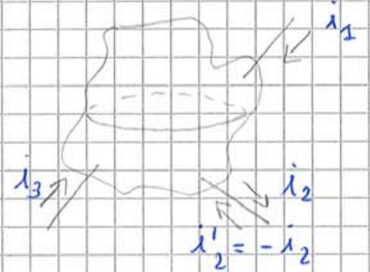
Caso particolare: vale anche se la superficie chiusa tende ad un punto.



-> NODO: punto che collega due o più conduttori

$i_1 + i_3 - i_2 = 0$

$i_1 + i_3 + (-i_2) = 0$



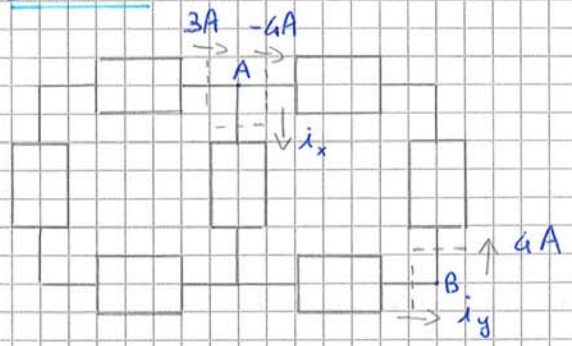
=> KCL_2: ipotesi -> sup. chiusa con corrente

tesi -> $\sum_k i_k = 0$ k = corr. entranti

=> la somma delle correnti entranti è = 0

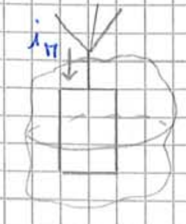
[si può anche dire che la somma delle correnti uscenti è = 0]

ESEMPIO:



applico KCL_1 in A: $3 = -4 + i_x$ $i_x = 7$ A

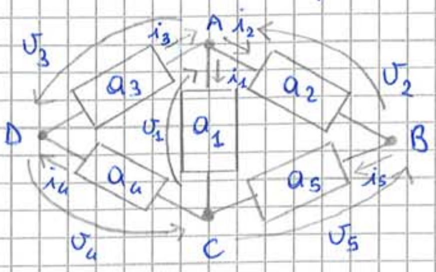
applico KCL_1 in B: $i_y = 4$ A



Gli elementi che hanno un solo filo che esce vengono chiamati MONOPOLO

KCL -> $i_M = 0$

Sistema elettrico, CIRCUITO, insieme di elementi elettrici collegati fra loro.



LATO: elemento elettrico nel circuito

ESEMPIO:

$i_2 = 2\,A$

$i_1 = 3\,A$

applico KCL_1 in A : $i_3 = i_2 + i_1 = 5\,A$

per proprietà bipolo : $i_5 = 2\,A$

per proprietà bipolo : $i_4 = 5\,A$

verifico con KCL_1 C : $i_1 + i_5 = i_4$, $3 + 2 = 5$ ✓

Nei circuiti bisogna escludere sempre un nodo per fare la verifica.

$v_1 = 5\,V$

$v_2 = 7\,V$ $\quad v_3 = 2V$

percorso chiuso A->B->C->A, applico KVL_2 : $v_1 = v_2 + v_5$, $v_5 = -2\,V$

percorso chiuso A->D->C->A, applico KVL_2 : $v_1 + v_3 + v_4 = 0$, $v_4 = -7\,V$

N.B: il verso delle tensioni va confrontato con il verso del percorso scelto.

su a_1 : $p_1 = v_1 i_1 = 5 \cdot 3 = 15\,W$ (potenza utilizzata)

su a_2 : $p_2 = v_2 i_2 = 7 \cdot 2 = 14\,W$

su a_3 : $p_3 = v_3 i_3 = 2 \cdot 5 = 10\,W$

su a_4 : $p_4 = v_4 i_4 = -7 \cdot 5 = -35\,W$ (potenza generata)

su a_5 : $p_5 = v_5 i_5 = -2 \cdot 2 = -4\,W$

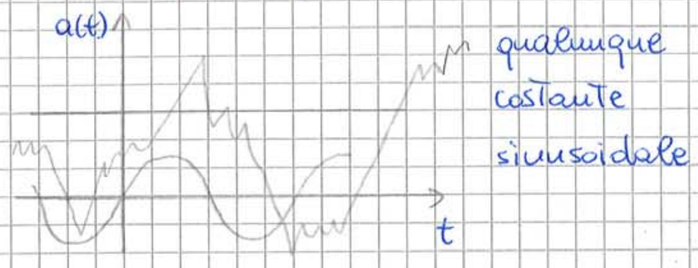
$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0$

LEGGE DI TELLEGEN: ipotesi -> tensioni e correnti soddisfano leggi di Kirchhoff.

tesi -> $\sum_j p_j = 0$ $\quad$ j = elementi del circuito

Esprime la legge della conservazione dell'energia.

$i = a(t), \forall v$ grandezza impressa ($a(t)$), eq. di funzionamento

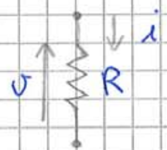


Un esempio di generatore di corrente è il caricabatteria.

simbolo alternativo

Qualunque sia la tensione il generatore continua a produrre corrente.

3) RESISTORE



$v = Ri$ eq. di funzionamento **LEGGE DI OHM**

R = coeff. di proporzionalità (dipende dal materiale)

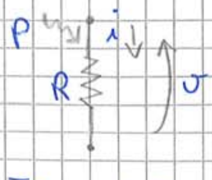
Nel resistore è fondamentale utilizzare la convenzione degli utilizzatori poiché ci sono sia la tensione che la corrente, mentre nel caso dei generatori una era indipendente dall'altra.

R non è un numero puro, u.m. $\frac{V}{A} = \Omega$ (OHM)

R viene chiamato anche **RESISTENZA**

N.B. Attenzione a non confondere resistenza con resistore. Il resistore indica il bipolo cioè l'elemento elettrico, la resistenza il suo valore.

POTENZA ASSORBITA DAL RESISTORE



$p = vi = (Ri)i = R(\overset{>0}{i^2}) > 0$ per definizione

$\Rightarrow$ R deve essere un numero positivo

Il resistore è un elemento metallico che oppone una resistenza alle cariche nel passare al suo interno $\Rightarrow$ viene convertita energia in calore.

EQUIVALENZA: per avere le stesse correnti nei due circuiti

$R' = R_1 + R_2 + R_3$

resistenza equivalente

Si dice che R_1, R_2, R_3 sono collegate **IN SERIE**, cioè sono percorse dalla stessa corrente.

REGOLA DELLE RESISTENZE IN SERIE

ipotesi → percorso chiuso con stessa corrente

⇒ posso sostituire più resistori in serie con un resistore equivalente, la resistenza equivalente è uguale a:

$$R_{eq} = \sum_k R_k \qquad k = \text{resistori in serie}$$

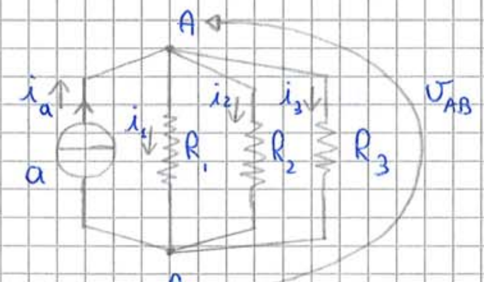
REGOLA DEL PARTITORE DI TENSIONE

ipotesi → percorso chiuso con 1 generatore di tensione e resistori in serie

⇒ tensione parziale sul resistore k: $v_k = e \underbrace{\frac{R_k}{\sum_m R_m}}_{\text{fattore di partizione}} = e \frac{R_k}{R_{eq}}$

m = resistori totali

ESEMPIO NOTEVOLE:



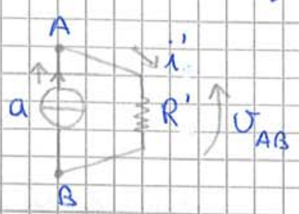
v_{AB} è stata scelta arbitrariamente

sup. chiusa in A ⇒ applico KCL in A → $i_a = i_1 + i_2 + i_3$

$$a = \frac{v_{AB}}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_3}$$

$$a = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_{AB} \qquad v_{AB} = \frac{a}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$i_3 = \frac{v_{AB}}{R_3} = \left(\frac{a}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}\right) \cdot \frac{1}{R_3}$$



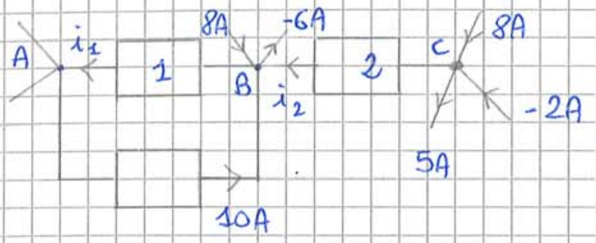
$v_{AB} = R' i' = R' a$

10/10/12

I ESERCITAZIONE:

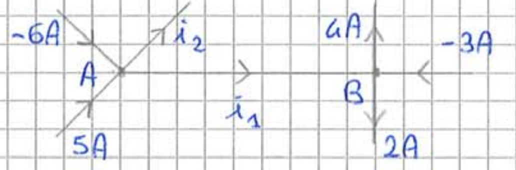
MAGLIA: percorso chiuso

1.1) Calcolare le correnti del circuito.



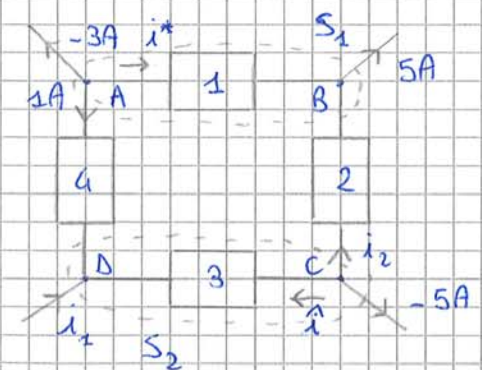
in C applico KCL_1: $8-2=i_2+5 \Rightarrow i_2=1\,A$
in B applico KCL_1: $i_2+8+10=-6+i_1 \Rightarrow i_1=25\,A$

1.2) Calcolare le correnti del circuito.



in B applico KCL_1: $i_1-3=4+2 \Rightarrow i_1=9\,A$
in A applico KCL_1: $-6+5=i_2+i_1 \Rightarrow i_2=-10\,A$

1.3) Calcolare le correnti del circuito.



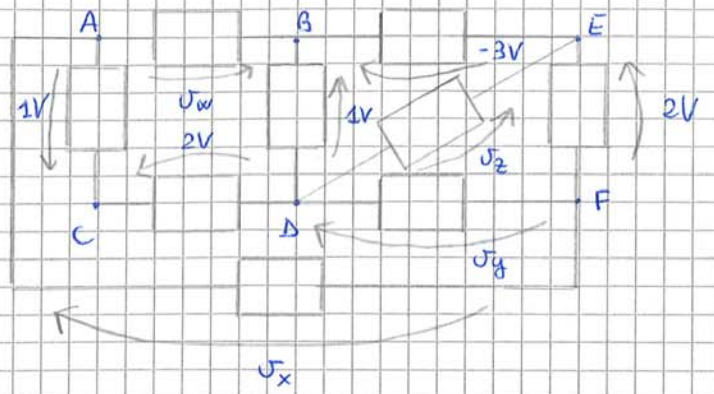
Scelgo un verso arbitrario della corrente dell'elemento 1 in A.

in A applico KCL_2: $i^*-3+1=0 \Rightarrow i^*=2A$
in B applico KCL_1: $i^*+i_2=5 \Rightarrow i_2=3A$

Scelgo un verso arbitrario della corrente dell'elemento 3 in C.

in C applico KCL_2: $\hat{i}+i_2-5=0 \Rightarrow \hat{i}=2A$
in D applico KCL_2: $i_1+\hat{i}+1=0 \Rightarrow i_1=-3A$

1.6) Calcolare le tensioni del circuito.



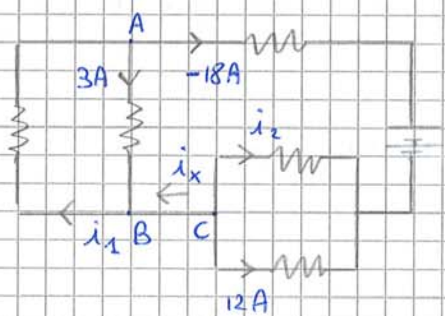
su ABDCA applico KVL_2 : $v_w + 2V = 1V + 1V \Rightarrow v_w = 0V$

su BEDB applico KVL_2 : $-3 + v_z = 1 \Rightarrow v_z = 4V$

su EFDE applico KVL_2 : $2 = v_y + v_z \Rightarrow v_y = -2V$

su FDCAF applico KVL_2 : $v_y + 2 = 1 + v_x \Rightarrow v_x = -1V$

1.7) Calcolare le correnti

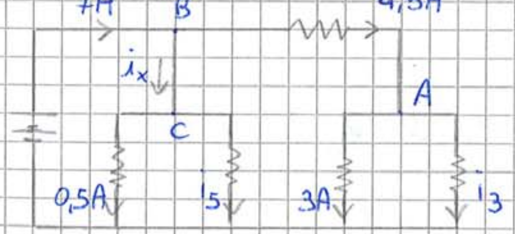


Applico KCL_1 in A : $i_1 = -18A + 3A = -15A$

Applico KCL_1 in B : $-15A = i_x + 3A \Rightarrow i_x = -18A$

Applico KCL_1 in C : $i_2 = 18 - 12 = 6A$

1.8) Calcolare le correnti

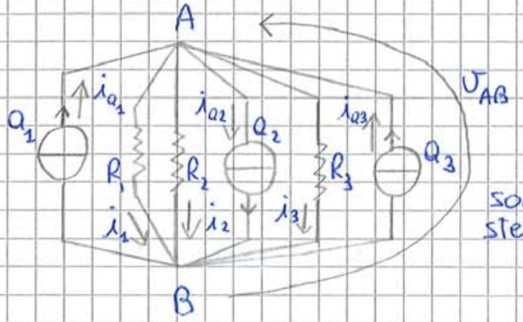


Applico in A KCL : $4{,}5 = 3 + i_3 \Rightarrow i_3 = 1{,}5A$

Applico in B KCL : $i_x + 4{,}5 = 7 \Rightarrow i_x = 2{,}5A$

Applico in C KCL : $i_x = 0{,}5 + i_5 \Rightarrow i_5 = 2A$

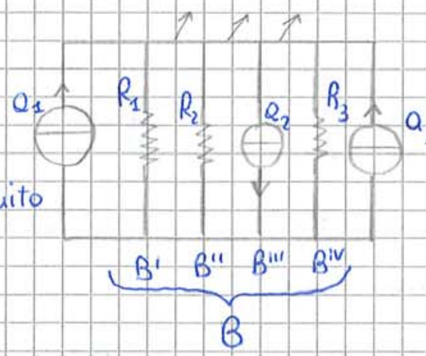
CIRCUITI IN PARALLELO



=

sono lo stesso circuito

sono tutti corto-circuiti ($v=0$)

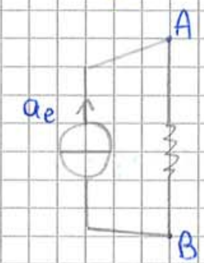


Applico KCL in A:

$i_{a1} + (-i_1) + (-i_2) + (-i_{a2}) + (-i_3) + i_{a3} = 0$

$\underbrace{a_1 - a_2 + a_3}_{a_e} = i_2 + i_1 + i_3$

$a_e = \frac{v_{AB}}{R_2} + \frac{v_{AB}}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_3} \Rightarrow a_e = v_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = v_{AB} \cdot \frac{1}{R_{//}}$



Il verso della freccia deve essere coerente con quello scelto precedentemente.

COROLLARIO: In un circuito in parallelo con più generatori:
(4)

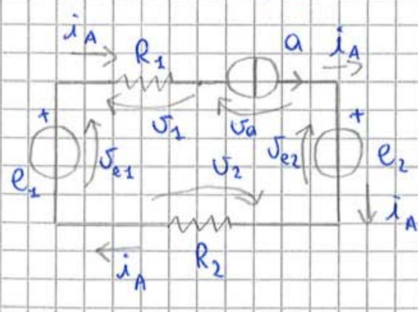
$a_e = \sum_k a_k$ K = correnti equiverse

Se $R_j \ll R_k$ $(K \neq j)$ $\Rightarrow R_{//} = \frac{1}{\sum_m \frac{1}{R_m}} \approx R_j$, $R_{//} \leq R_j$

COROLLARIO: Se $R_j \ll R_k$, $K \neq j$ $\Rightarrow R_{//} \leq R_j$ (5)

Se un R del parallelo è un corto-circuito $(R=0)$ $\Rightarrow R_{//} = 0$

CIRCUITO IN SERIE CON GENERATORE DI CORRENTE



KVL ↻ v_a la scelgo come voglio

$v_{e1} + (-v_1) + (-v_a) + (-v_{e2}) + (-v_2) = 0$

$e_1 + (-R_1 i_A) + (-v_a) + (-e_2) + (-R_2 i_A) = 0$

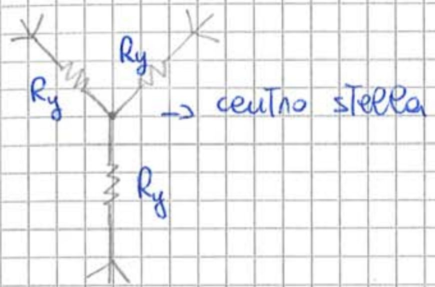
$v_A = e_1 - e_2 - R_1 a - R_2 a$

ATTENZIONE!!

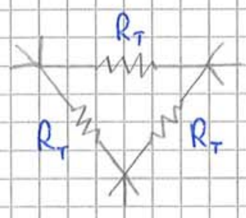
In questi circuiti <u>non si può applicare</u> la regola del partitore di tensione!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 106

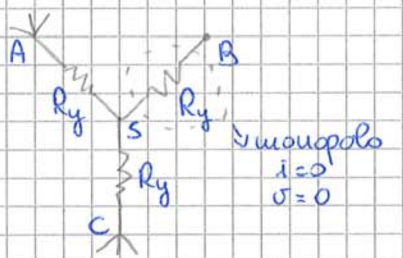
COLLEGAMENTO A STELLA (o a Y)

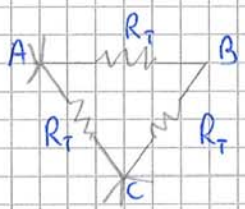


COLLEGAMENTO A TRIANGOLO (o a Δ)



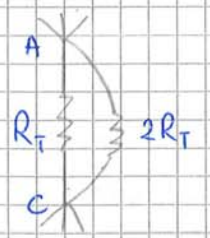
CASO PARTICOLARE : $R_1 = R_2 = R_3$





Suppongo che in B non ci sono più collegamenti.
Tra BS non c'è né corrente né tensione => posso eliminarlo
=> AC è un collegamento in serie.

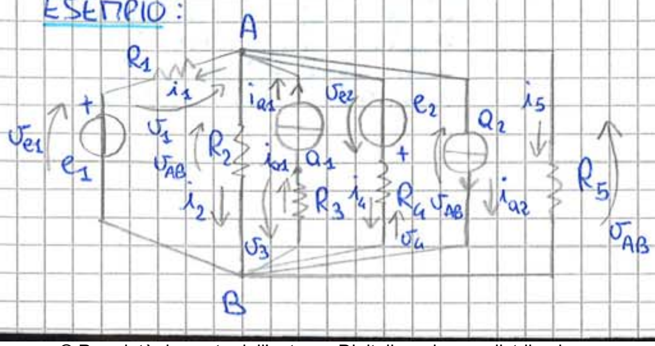
$R_{eq_{AC}} = 2R_y$



$$R_{eq_{AC}} = \frac{R_T \cdot 2R_T}{R_T + 2R_T} = \frac{2}{3} R_T$$

EQUIVALENZA: $2R_y = \frac{2}{3} R_T \Rightarrow 3R_y = R_T$

ESEMPIO:



Dimostrazione di Millman

i_1 e i_4 sono stati scelti arbitraria=mente

ATTENZIONE!

$$v_{HK} = \frac{-\frac{e_0}{R_1} + a_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}} \quad \text{SI} \qquad \cancel{v_{HK} = \frac{-\frac{e_0}{R_1} + a_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad \text{NO}$$

Pongo $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = G_e$

$$v_{AB} = \frac{e_1}{G_E R_1} + \frac{a_1}{G_e} - \frac{e_2}{G_e R_4} - \frac{a_2}{G_E} = \left(\frac{1}{G_E R_1}\right) e_1 + \left(\frac{1}{G_E}\right) a_1 + \left(-\frac{1}{G_E R_4}\right) e_2 + \left(-\frac{1}{G_E}\right) a_2$$

combinazione lineare dei generatori

In qualsiasi circuito vale la combinazione lineare dei generatori.

REGOLA: ipotesi $\rightarrow$ bipoli lineari ($\equiv$ eq. funzionamento $v = ki$)

$\Rightarrow$ $\forall$ circuito, ogni variabile elettrica (v, i) è una combinazione lineare di tutti i generatori

$y = \begin{cases} v \\ i \end{cases} \qquad y = \sum_j k_j g_j \qquad$ essendo $g = \begin{cases} a \\ e \end{cases}$

$v_{AB} = K_1 e_1 + K_2 a_1 + K_3 e_2 + K_4 a_2$

REGOLA di calcolo dei circuiti per SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI

Se $a_1 = 0$, $e_2 = 0$, $a_2 = 0$ $\Rightarrow$ $v_{AB}| = K_1 e_1 = v_{AB}'$

con certe condizioni

per $e = 0$ $\Rightarrow$ corto circuito

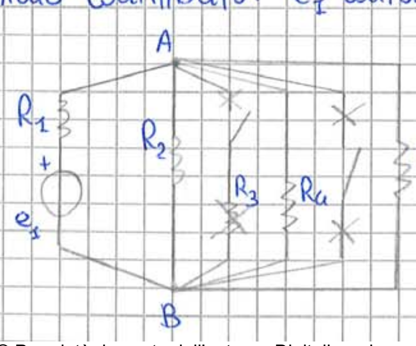
per $a = 0$ $\Rightarrow$ circuito aperto

Se $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $a_2 = 0$ $\Rightarrow$ $v_{AB}| = K_2 a_1 = v_{AB}''$

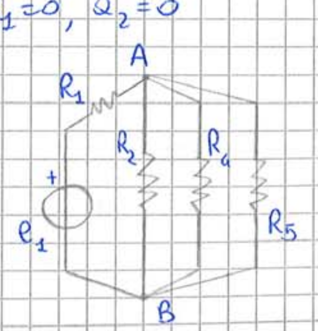
N.B. Questo metodo è sconsigliato per risolvere gli esercizi.

ESEMPIO:

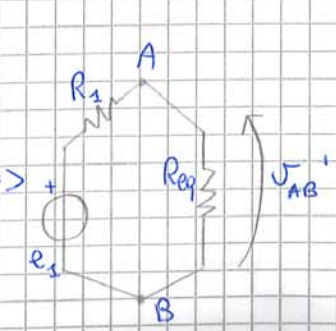
primo contributo: e_1 attivo, $e_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$



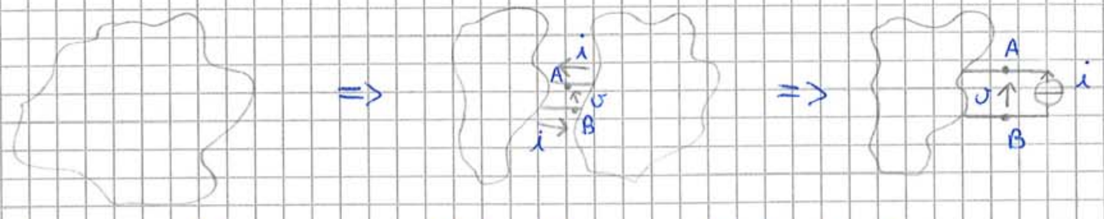
$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



TEOREMA di THEVENIN



ipotesi → 2 sottocircuiti connessi solo attraverso due conduttori ≡ bipolo

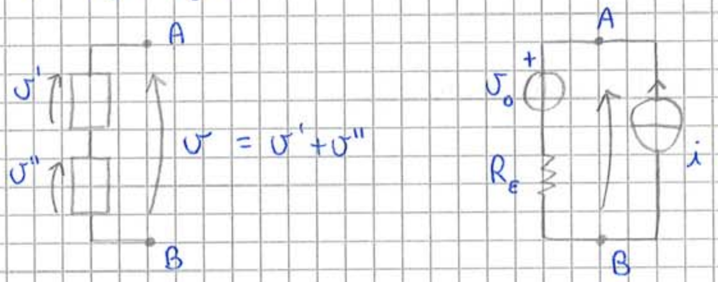
$v = K_1 e_1 + K_2 e_2 + K_3 a_1 + K_4 a_2 + K_5 i$ combinazione lineare dei generatori

K_5 ha le dimensioni di una resistenza => $K_5 = R_E$

$K_1 e_1 + K_2 e_2 + K_3 a_1 + K_4 a_2 = v_0$ contributo interno

↳ è sicuramente una tensione

$v = v_0 + R_E i$



v è dato dalla somma di due elementi => questi sono in serie

v_0 è una tensione

R_E è un resistore poiché è proporzionale alla corrente

=> 1) ogni sottocircuito è equivalente (è rappresentabile) alla serie di un generatore di tensione e un resistore.

v_0 rappresenta la tensione tra A e B quando i è un circuito aperto.

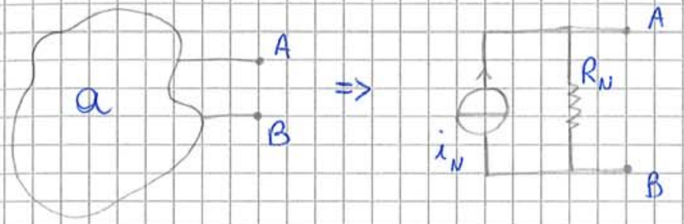
2) v_0 viene chiamata **TENSIONE A VUOTO**, tensione del sottocircuito con uscita in circuito aperto;

R_E si chiama **RESISTENZA EQUIVALENTE**, resistenza del sottocircuito vista dai punti A e B, con generatori annullati.

29/10/12

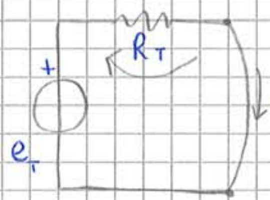
VI LEZIONE:

TEOREMA DI NORTON: → dim esame



i_N = corrente di corto circuito del sottocircuito a in AB
R_N = resistenza equivalente di a

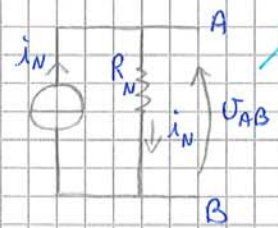
Equivalente di Thevenin <=> Equivalente di Norton



la corrente di Norton è la corrente di corto circuito

$e_T = R_T i_N \Rightarrow i_N = \frac{e_T}{R_T}$

La resistenza equivalente si calcola spegnendo tutti i generatori interni
$\Rightarrow R_T = R_N$



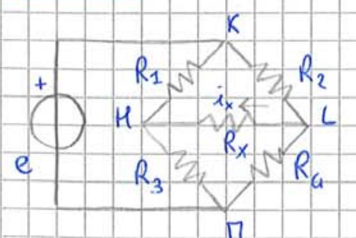
la tensione di Thevenin è la tensione a vuoto (circuito aperto)

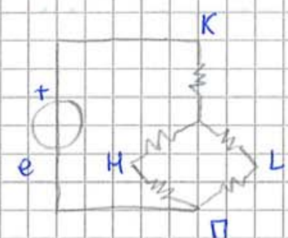
$v_{AB} = R_N i_N = e_T$

$R_N = R_T$

$i_N = \frac{e_T}{R_T} \Rightarrow R_T = \frac{e_T}{i_N} = \frac{\text{tensione a vuoto}}{\text{corrente di corto circuito}}$

ESEMPIO:





Sostituendo il triangolo con una stella scompare il ramo in cui si vuole calcolare la corrente.

=> l'unica soluzione è applicare Norton

GENERATORI DIPENDENTI (PILOTATI)

costante, adimensionale

$\hat{e} = \alpha v_x$ dipende da un'altra tensione

gen. dipendente di tensione

$\hat{e} = r_m i_x$ dipende da una corrente

costante, dim. di Ω

costante adimensionale

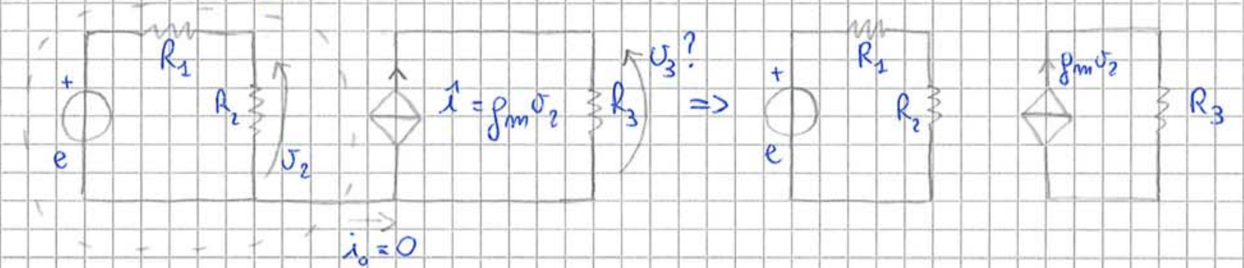
$\hat{i} = \beta i_x$ dipende da un'altra corrente

gen. dipendente di corrente

$\hat{i} = g_m v_x$ dipende da una tensione

costante, dim. di S

v_x e i_x vengono chiamate **QUANTITÀ PILOTANTI**



Non devono per forza essere a contatto il generatore dipendente con la quantità pilotante, si tratta di interazioni a distanza.

$v_2 = e \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow \hat{i} = g_m e \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

$v_3 = g_m e \dfrac{R_2 R_3}{R_1+R_2}$

REGOLA:

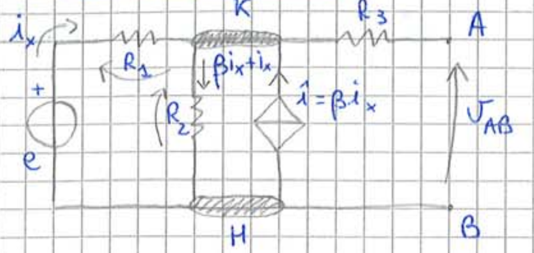
La risoluzione di questi circuiti avviene sempre in 3 passi:
1) trovare la quantità pilotante con gen. pilotato come indipendente;
2) gen. dipendente diventa noto => diventa un generatore indipendente;
3) trovare l'incognita del circuito.

Questa regola vale anche nel caso in cui ci siano più generatori pilotati.

31/10/12

VII LEZIONE:

ESEMPIO NOTEVOLE



Si vuole calcolare l'equivalente di Thevenin.

1) Calcolo e_T (tensione a vuoto tra A e B) -> v_{AB} a vuoto

1a) calcolo la quantità pilotante i_x

$\beta i_x + i_x$ è stato calcolato con KCL non considerando il monopolo di R_3

$v_2 = R_2 i_x (\beta + 1)$

$v_1 = R_1 i_x$

Applico KVL sul quadrato in cui è presente il generatore di tensione

$e = R_1 i_x + R_2 i_x (\beta + 1)$

$\Rightarrow \; i_x = \dfrac{e}{R_1 + R_2(\beta+1)}$

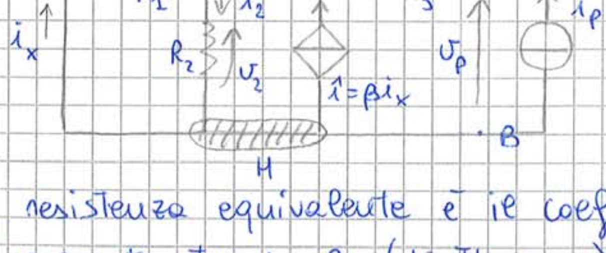
1b) $\hat{i} = \beta \dfrac{e}{R_1 + R_2(\beta+1)}$

1c) In R_3 non c'è corrente $\Rightarrow v = 0$

quindi $v_{AB} = v_{KB} = v_{KH} = v_2$

$e_T = \dfrac{R_2 e}{R_1 + R_2(\beta+1)} (\beta + 1)$

2)



Calcolo R_T

La resistenza equivalente è il coefficiente che moltiplica il generatore di corrente tra A e B (di Thevenin), quindi nel circuito, anche con i generatori spenti (interni), circola lo stesso corrente

$\Rightarrow$ i generatori dipendenti non si spengono (in questo caso perché $i_x \neq 0$).

percorso chiuso $0 \to K \to m \to 0$, applico KVL: $v_K = v_1 + v_m$

$$\begin{cases} v_1 = v_K - v_m \\ v_1 = R_1 i_1 \end{cases} \Rightarrow i_1 = \frac{v_K - v_m}{R_1}$$

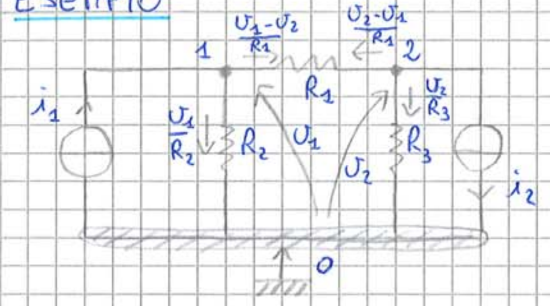
percorso chiuso $0 \to K \to p \to 0$, applico KVL: $v_K = v_2 + v_p$

$$\begin{cases} v_2 = v_K - v_p \\ v_2 = R_2 i_2 \end{cases} \Rightarrow i_2 = \frac{v_K - v_p}{R_2}$$

Applico KCL su K: $i_0 = i_1 + i_2 = \frac{v_K - v_m}{R_1} + \frac{v_K - v_p}{R_2}$

Applicando KCL su tutti i nodi tranne quello di riferimento si ottiene un sistema lineare di $N-1$ incognite con $N-1$ equazioni.
Questa regola vale per qualsiasi circuito.

ESEMPIO



$N = 3$

2 tensioni nodali

↓

sistema 2×2

Applico KCL su (1): $i_1 = \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_2}{R_1}$

Applico KCL su (2): $i_2 + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_1}{R_1} = 0$

se le correnti sono uscenti le tensioni hanno la freccia verso il nodo

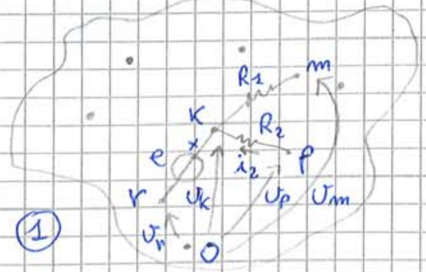
Le correnti, non dei generatori che sono date, vanno prese uscenti.
La differenza di tensioni segue la freccia della corrente (1) $\xleftarrow{i}$ (2) $v_2 - v_1$.

Sistema:

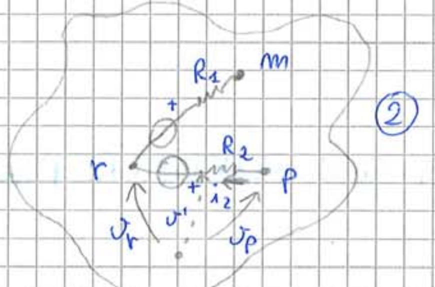
$$\begin{cases} v_1\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_1}\right) = i_1 \\ v_1\left(-\frac{1}{R_1}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1}\right) = -i_2 \end{cases}$$

si scrive un sistema $N-1 \times N-1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}}_{\text{matrice dei coeff. } \underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{\text{vett. incognite } \underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}}_{\text{vett. termini noti } \underline{b}}$$



=>



percorso chiuso $0 \to r \to K \to 0$, applico KVL: $v_r + e = v_K \Rightarrow e = v_K - v_r$

Con un generatore di tensione non si possono più scrivere N-1 equazioni poiché e è una quantità nota, quindi $v_K - v_r$ non è più indipendente. Si deve ridurre di un nodo il circuito per ogni generatore di tensione.

t = n° generatori di tensione $\Rightarrow$ N-1-T = n° di equazioni

n° equazioni con gen. di tensione

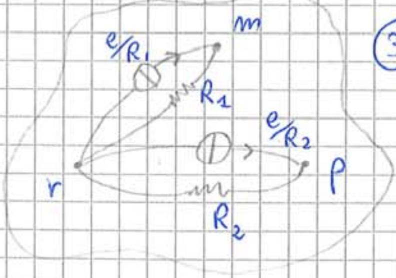
$$i_2 = \frac{v_p - v'}{R_2}$$

$$v' = v_r + e$$

$$i_2 = \frac{v_p - (v_r + e)}{R_2} \quad ②$$

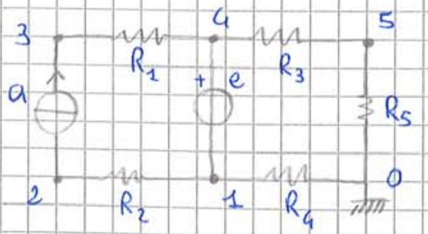
$$i_2 = \frac{v_p - v_K}{R_2} = \frac{v_p - (v_r + e)}{R_2} \quad ①$$

sono uguali $\Rightarrow$ ① è equivalente a ②

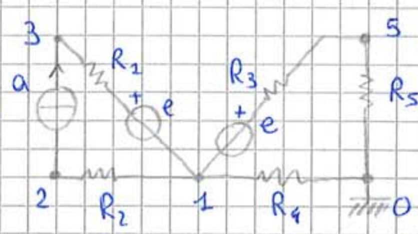


③ equivalente di Norton

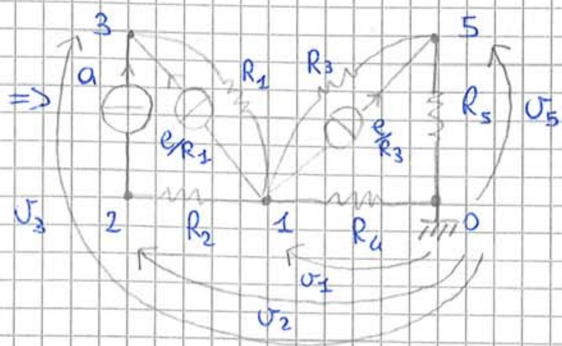
ESEMPIO:



=>



=>



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & 0 & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{e}{R_1}-\frac{e}{R_3} \\ -a \\ a+\frac{e}{R_1} \\ \frac{e}{R_3} \end{bmatrix}$$

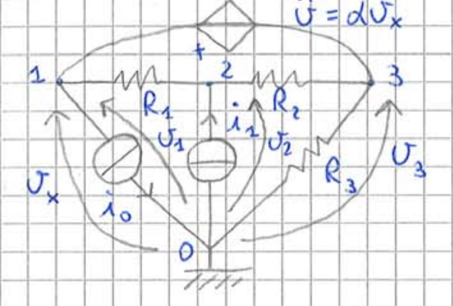
$$\hat{i} = g_m(v_2 - v_3)$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)v_1 - \frac{1}{R_1}v_2 - \frac{1}{R_4}v_3 = g_m(v_2 - v_3)$$

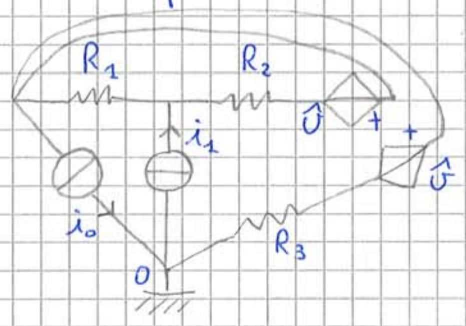
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+g_m\right)v_2 - \left(\frac{1}{R_4}-g_m\right)v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4} & -\left(\frac{1}{R_1}+g_m\right) & -\left(\frac{1}{R_4}-g_m\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

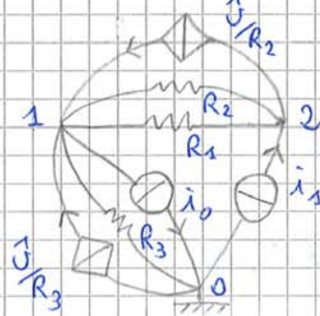
Prendiamo un circuito con un generatore dipendente di tensione.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ trasformo con Norton



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v}}{R_3} - i_0 + \frac{\hat{v}}{R_2} \\ i_1 - \frac{\hat{v}}{R_2} \end{bmatrix}$$

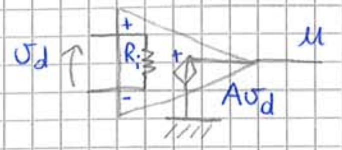
$$v_x = v_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{v} = \alpha v_1$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_2 = \frac{\alpha v_1}{R_3} + \frac{\alpha v_1}{R_2} - i_0 \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_1 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_2 = i_1 - \frac{\alpha v_1}{R_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{\alpha}{R_3}-\frac{\alpha}{R_2}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_2 = -i_0 \\ -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{\alpha}{R_2}\right)v_1 + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_2 = i_1 \end{cases}$$

$v_d = v_+ - v_-$ (applico KVL)

Per convenzione sui terminali + e - si prende la corrente entrante, sul terminale u uscente.

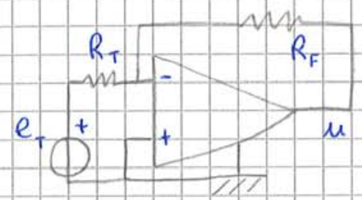


All'interno lo schematizziamo in questo modo.

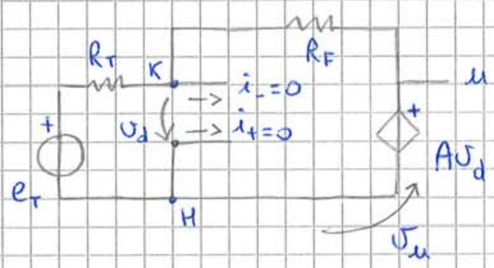
$A \approx 10^5 \div 10^8 \approx \infty$

$R_i \approx 10^6 \div 10^{13} \approx \infty$

=> Tra + e - possiamo considerare un circuito aperto ($i_+ = 0$, $i_- = 0$)



=>



u non è collegato a niente

Applico Millman tra K e H.

$$v_{KH} = -v_d = \frac{e_T/R_T + \hat{v}/R_F}{1/R_T + 1/R_F} = \frac{e_T/R_T + \frac{Av_d}{R_F}}{1/R_T + 1/R_F}$$

$$-v_d\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_F}\right) = \frac{e_T}{R_T} + A\frac{v_d}{R_F}$$

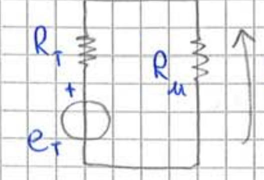
$$-v_d\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_F} + \frac{A}{R_F}\right) = \frac{e_T}{R_T} \quad \Rightarrow \quad v_d = -\frac{e_T/R_T}{1/R_T + 1/R_F + A/R_F}$$

$$v_u = Av_d = -\frac{A e_T/R_T}{1/R_T + 1/R_F + A/R_F} \approx -\frac{A e_T/R_T}{A/R_F} \approx -e_T \frac{R_F}{R_T} \quad \text{poiché } A \to \infty$$

$$\boxed{v_u \cong -e_T \frac{R_F}{R_T}}$$

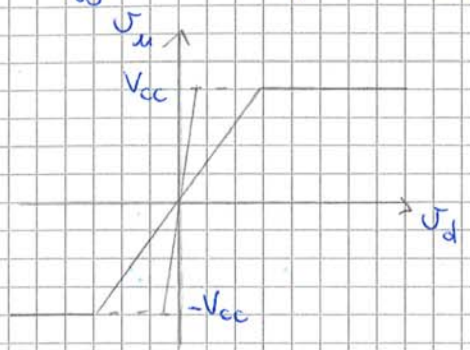
CONFIGURAZIONE INVERTENTE

Se $R_F > R_T \Rightarrow v_u > e_T$ si è amplificata la tensione



$v_u = e_T \frac{R_u}{R_u + R_T}$ => v_u sempre più piccola di e_T nei circuiti senza OpAmp.

In realtà la caratteristica vale solo fino al valore di V_{cc}, infatti in questi dispositivi non è possibile che la tensione in uscita sia maggiore di quella fornita dalla batteria.



essendo $A \to \infty$ la retta è molto più inclinata (quasi verticale)

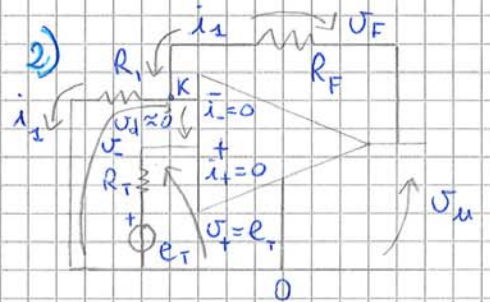
Anche se $A \to \infty$, v_u non può andare all'infinito, una tensione cioè una differenza di energie non può essere infinita.

$\Rightarrow$ l'unica soluzione è che $v_d \to 0$

CONFIGURAZIONI DELL'OP.AMP

1) configurazione invertente $\boxed{v_u = -e_T \frac{R_F}{R_T}}$

2)



$v_+ = e_T$ poiché non c'è corrente nel ramo $\Rightarrow$ non c'è tensione in R_T

$v_- = e_T$

$i_1 = v_- / R_1 = \frac{e_T}{R_1}$

$v_F = R_F i_1$

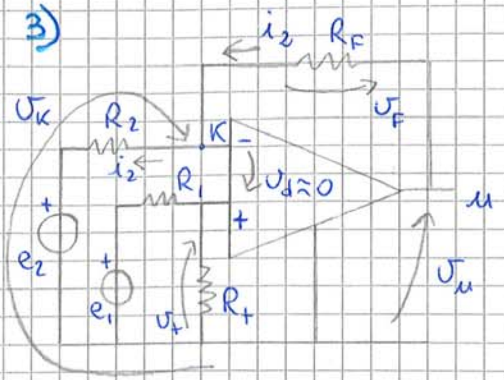
Sul percorso chiuso $u \xrightarrow{R_F} K \to 0 \to u$ applico KVL:

$v_u = v_F + e_T = R_F \frac{e_T}{R_1} + e_T = e_T \left(\frac{R_F}{R_1} + 1\right)$

configurazione non invertente $\boxed{v_u = e_T \underbrace{\left(\frac{R_F}{R_1} + 1\right)}_{> 1}}$

v_u è sempre maggiore o uguale (nel caso in cui $R_F = 0$) a e_T

3)



$v_+ = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+}$ nel monopolo + $i_+ = 0 \Rightarrow R_1$ e R_+ sono in serie

$v_K = v_+$

scelgo i_2 in modo arbitrario

$e_2 + v_2 = v_K \Rightarrow v_K = R_2 i_2 + e_2 \Rightarrow i_2 = \frac{v_K - e_2}{R_2} = \frac{e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2}$

Applico KVL: $v_u = v_F + v_K = i_2 R_F + R_2 i_2 + e_2$

$$v_u = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} + R_F \frac{e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - e_2}{R_2} = e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} + \frac{R_F}{R_2} \cdot e_1 \frac{R_+}{R_1+R_+} - \frac{e_2 R_F}{R_2} =$$

$= e_1 \cdot \frac{\cancel{R_+}(1 + R_F/R_2)}{\cancel{R_+}(1 + R_1/R_+)} - \frac{R_F}{R_2} e_2 \Rightarrow v_u$ è una differenza tra e_1 e e_2

R_F e R_+ sono scelti dal costruttore se scelgo:

$$1 + \frac{R_F}{R_2} = \left(1 + \frac{R_1}{R_+}\right)\frac{R_F}{R_2} \Rightarrow v_u = \frac{R_F}{R_2} e_1 - \frac{R_F}{R_2} e_2 = \frac{R_F}{R_2}(e_1 - e_2)$$

$$\frac{R_2 + R_F}{\cancel{R_2}} = \frac{(R_+ + R_1) R_F}{R_+ \cancel{R_2}} \qquad \cancel{R_F}\left(1 + \frac{R_2}{R_F}\right) = \cancel{R_+} \frac{(1 + R_1/R_+)}{\cancel{R_+}} \cancel{R_F}$$

$\cancel{1} + \frac{R_2}{R_F} = \cancel{1} + \frac{R_1}{R_+} \Rightarrow \frac{R_2}{R_F} = \frac{R_1}{R_+}$ condizione da scegliere

$\boxed{v_u = \frac{R_F}{R_2}(e_1 - e_2)}$ configurazione differenziale

Questo sistema si utilizza per confrontare due segnali.
(ad esempio i segnali dei due ventricoli del cuore)

$(e_1, e_2, e_3) = (1,1,0) \Rightarrow |v_u| = \frac{R_F}{R_1} + \frac{R_F}{R_2}$ $\quad (1,1,0) \rightarrow 3$

scelgo $\frac{R_F}{R_1} = 1$, $\frac{R_F}{R_2} = 2$, $\frac{R_F}{R_3} = 4$ $\Rightarrow R_1 = R_F$, $R_2 = \frac{R_F}{2}$, $R_3 = \frac{R_F}{4}$

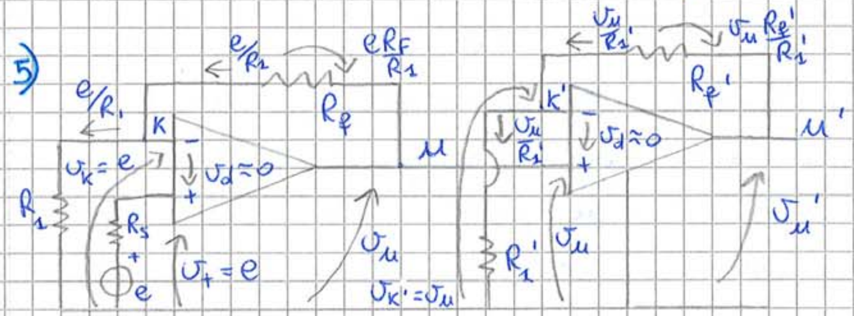
$(0,0,1) = 4 \rightarrow |v_u| = \frac{R_F}{R_3}$

$(1,0,1) = 5 \rightarrow |v_u| = \frac{R_F}{R_1} + \frac{R_F}{R_3}$

$(0,0,0)$ meno significativo 2^0 2^1 2^2 più significativo

Questo caso particolare rappresenta un convertitore digitale -> analogico, tutte le trasmissioni da strumenti elettronici (cellulare, i-Pod...) a noi (voce, musica) avviene tramite questi convertitori.

5)



Quando due OpAmp sono collegati uscita del 1° -> entrata del 2° si dice che sono collegati a cascata.

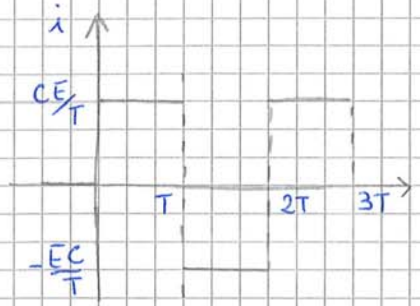
$v_u = e + e\frac{R_F}{R_1} = e\left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right)$

$v_u' = v_u + v_u\frac{R_f'}{R_1'} = v_u\left(1 + \frac{R_f'}{R_1'}\right)$

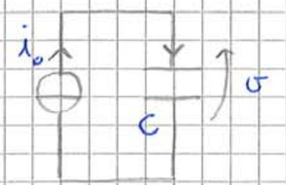
La tensione al fondo della cascata è uguale a quella dell'OpAmp precedente moltiplicata per il fattore della combinazione non invertente.

Lo stesso ragionamento si può applicare ai circuiti invertenti.

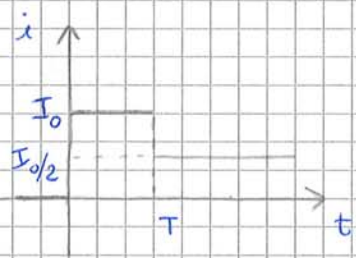
$v \equiv e$



Da una tensione triangolare abbiamo ottenuto una corrente squadrata. L'andamento della tensione non è più uguale a quello della corrente, come accadeva per i resistori.



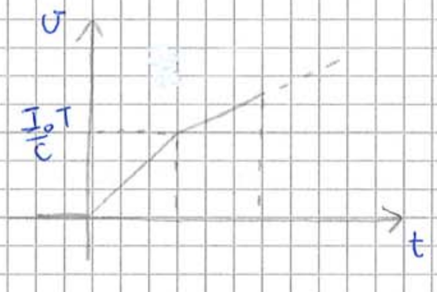
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \frac{i}{C}\, dt' \;\rightarrow\; \boxed{v - v_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt'}$$ II FORMA



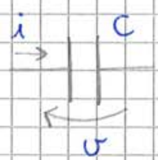
se $t<0$ $\quad v = v_0$ ma per $t<0 \rightarrow i=0 \Rightarrow$ anche $v=0 \Rightarrow v_0 = 0$

se $0<t<T$ $\quad v - v_0 = \frac{I_0}{C}t$ $\quad$ ma $v_0 = 0 \Rightarrow v = \frac{I_0}{C}t$

se $t>T$ $\quad v = \frac{I_0}{C}T + \frac{I_0}{2C}(t-T) = \frac{1}{C}\left(\frac{I_0}{2}T + \frac{I_0}{2}t\right)$



Anche in questo caso i due andamenti sono differenti.

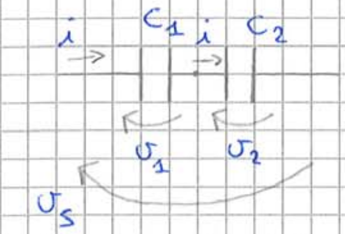


$$v(t) - v_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\, dt' \quad (1)$$

Calcoliamo la tensione in un istante $t+\Delta t$

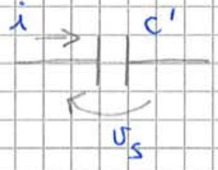
$$v(t+\Delta t) - v_0 = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i(t')\, dt' \quad (2)$$

CONDENSATORI IN SERIE: sono attraversati dalla stessa corrente



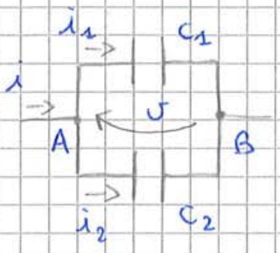
$$v_s = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt'$$



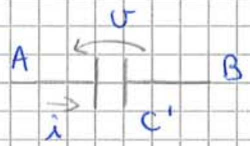
$$\boxed{\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

CONDENSATORI IN PARALLELO:



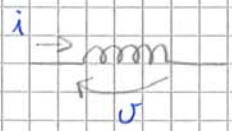
KCL in A $\Rightarrow i = i_1 + i_2$

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}(C_1 + C_2)$$



$i = C' \dfrac{dv}{dt}$ dove $\boxed{C' = C_1 + C_2}$

INDUTTORE (le dimostrazioni sono uguali a quelle dei condensatori) ESAME



i e v sono presi secondo la convenzione degli utilizzatori

$\boxed{v = L \dfrac{di}{dt}}$ **I FORMA** eq. di funzionamento

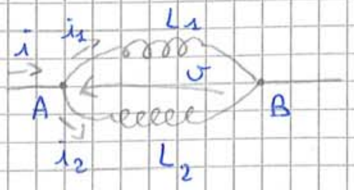
coeff. di proporzionalità costante e positiva

u.m. $[L] = \dfrac{V}{A/s} = H$ (Henry) si chiama **INDUTTANZA**

$$\boxed{i = i_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'}$$ **II FORMA**

La corrente dipende dall'integrale della tensione $\Rightarrow$ l'induttore mantiene memoria della tensione.

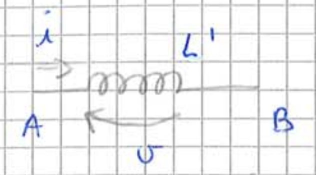
INDUTTORI IN PARALLELO



KCL in A : $i = i_1 + i_2$

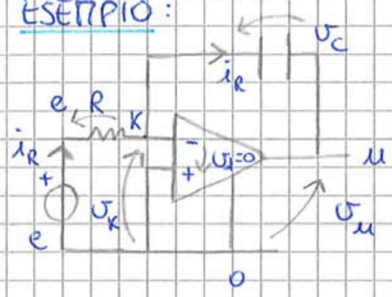
$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t')dt' + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t')dt' =$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$



$$\boxed{\frac{1}{L'} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

ESEMPIO:



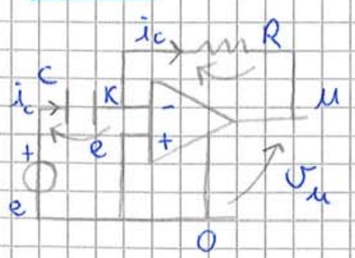
$$i_R = \frac{e}{R}$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_R\,dt' = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} \frac{e}{R}\,dt' = \frac{1}{CR}\int_{t_0}^{t} e\,dt'$$

KVL su $0 \to u \xrightarrow{(c)} K \to 0$

$$v_u + v_C - \underbrace{\cancel{v_C}}_{\to 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_u = -v_C = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e\,dt'$$ CIRCUITO INTEGRATORE

ESEMPIO:



$v_K = 0 \Rightarrow$ la tensione su C è e

$$i_C = C\frac{de}{dt}$$

$$v_u = -v_R = -R i_C = -RC\frac{de}{dt}$$ CIRCUITO DERIVATORE

Circuito base dei Tachimetri (da una lunghezza si ottiene una velocità).

SOLUZIONE GENERALE

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{s}{\tau}$$

$x(t) = x_o(t) + x_p(t)$

$x_o(t)$: soluz. omogenea associata $\rightarrow \frac{dx_o}{dt} + \frac{x_o}{\tau} = 0$

$x_p(t)$: soluz. particolare dello stesso tipo del termine noto

 $\begin{cases} x = v_C \\ \tau = R_T C \\ s = e_T \end{cases}$

 $\begin{cases} x = i_L \\ \tau = L/R_N \\ s = i_N \end{cases}$

$x_o = K e^{at} \quad K \neq 0$

$aKe^{at} + \frac{Ke^{at}}{\tau} = 0 \quad e^{at}(Ka + K/\tau) = 0 \quad \Rightarrow Ka + K/\tau = 0 \quad K(a + \frac{1}{\tau}) = 0$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{\tau}$

$x_o = Ke^{at} = Ke^{-t/\tau}, \quad K \neq 0$

τ è sempre una quantità positiva poiché dipende da L, C e R_N (R_T).

$\Rightarrow t \to \infty, \; x_o \to 0$

Se $s(t) = A\cos(\alpha t + \beta) \Rightarrow x_p = K_1 \cos(\alpha t + \beta_1)$

$s(t)$: dipende dai generatori del circuito

Se $s(t) = S$ (costante) $\Rightarrow x_p = K_0$

Se $s(t)$ è costante significa che i generatori all'interno dei circuiti sono costanti.

Soluzione $\Rightarrow x(t) = Ke^{-t/\tau} + K_0$

Per trovare i valori di K c'è bisogno di una condizione iniziale:

per $t = 0 \Rightarrow x(t=0) = x_0$

$x_0 = K + K_0 \rightarrow K = x_0 - K_0 \Rightarrow x(t) = (x_0 - K_0)e^{-t/\tau} + K_0$ per $t \geq 0$

per $t \to \infty \quad x(t \to \infty) = K_0$

$$\boxed{x(t) = (x_0 - \underbrace{x(t \to \infty)}_{x(\infty)})e^{-t/\tau} + x(t \to \infty), \quad \text{per } t \geq 0}$$

x_0 = cond. iniziale

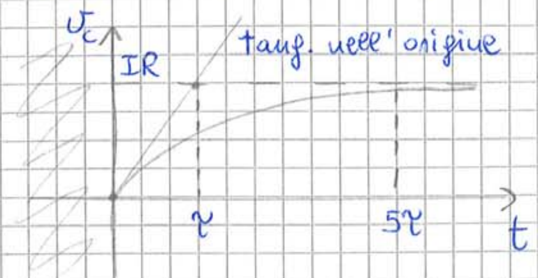
$x(\infty)$ = cond. finale

IMPORTANTE

$v_c(\infty) = IR$

$$v_c(t) = \left[0 - IR\right] e^{-t/CR} + IR, \quad \text{per } t \geq 0$$

$$v_c(t) = IR\left(1 - e^{-t/CR}\right), \quad \text{per } t \geq 0$$



in $t=0$, $v=0$ si può controllare per verifica nell'eq. finale

tang nell'origine: $\frac{dv_c(0)}{dt}$

cioè $\frac{dv_c}{dt} = \frac{IR}{RC} e^{-t/CR}$ $\quad t=0 \Rightarrow \frac{IR}{RC} = \frac{IR}{\tau}$

$$e^{-t/\tau}\Big|_{t=5\tau} = e^{-5} \approx 0{,}007$$

τ = <u>COSTANTE DI TEMPO</u>

<u>N.B.</u> Quando viene richiesto il grafico bisogna fornire tutti i dati relativi (IR, τ, 5τ ...).

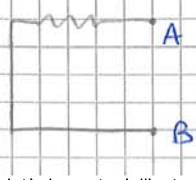
L'esponenziale dopo un certo periodo muore perché il condensatore non può più accogliere cariche, ovvero è carico e dopo ciò la corrente non passa più, è per questo che diventa un circuito aperto.

2)

Soddisfa le ipotesi della regola precedente (bipolo con memoria, gen. costanti)

$$i_L(t) = \left[i_L(0) - i_L(\infty)\right] e^{-t/\tau} + i_L(\infty), \quad \text{per } t \geq 0$$

- Calcolare $\tau = L/R_N = L/R_T$

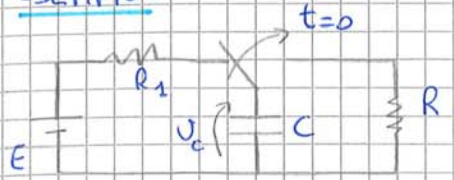


$R_T = R \Rightarrow \tau = L/R$

19/11/12

XII LEZIONE:

ESEMPIO:



Per $t<0$ il condensatore è legato alla parte sinistra all'istante $t=0$ si lega a destra. Si chiama COMMUTATORE.

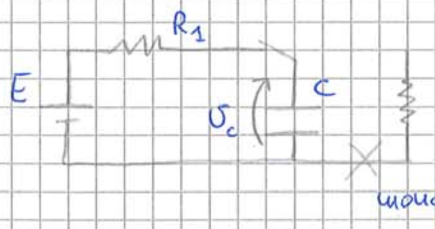
$$v_c(t) = \left(v_c(0) - v_c(\infty)\right)e^{-t/\tau} + v_c(\infty) \qquad t\geq 0$$

a. calcolo $\tau = C R_{eq}$

$t \geq 0$

$R_{eq} = R \implies \tau = CR$

b. calcolo condizione iniziale $v_c(0^+)$
poiché v_c è continua $v_c(0^+) = v_c(0^-)$, siccome non possiamo conoscere $v_c(0^+)$ cerchiamo $v_c(0^-)$.



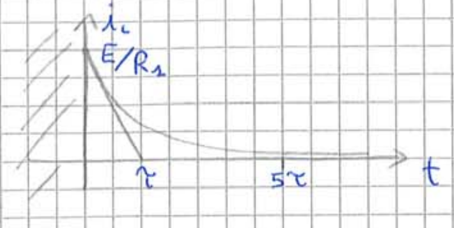
A meno che non sia diversamente specificato, supponiamo che l'interruttore sia a sinistra da tempo infinito $\implies$ tutte le grandezze sono costanti poiché l'esponenziale è morto.
Questa condizione viene definita STAZIONARIA.

Se v_c è costante $\implies i_c = 0$ quindi c'è un circuito aperto.

$v_c = E$ poiché non circola corrente nel circuito $\implies$ non c'è tensione su R_1

$v_c(0^-) = E = v_c(0^+)$

Soluzione: $i_L(t) = E/R_1 \, e^{-tR/L}$, $t \geq 0$

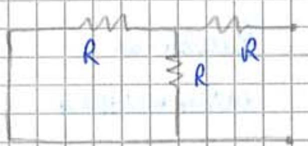


ESEMPIO 3:

funzione GRADINO

Possiamo trasformare il circuito in questo modo, così possiamo utilizzare l'eq. della soluzione poiché e(t) è diventata costante.

a. Calcolo $\tau = CR_{eq}$



$R_{eq} = (R // R) + R = \frac{3}{2}R \Rightarrow \tau = \frac{3RC}{2}$

b. calcolo $v_c(0^+)$

essendo v_c continua calcolo $v_c(0^-) = 0$ poiché per $t<0$ il circuito è inerte $\Rightarrow v_c(0^+) = 0$

c. calcolo $v_c(\infty)$

per $t \to \infty$ tutte le grandezze sono costanti $\Rightarrow i_c = 0$ condizioni stazionarie

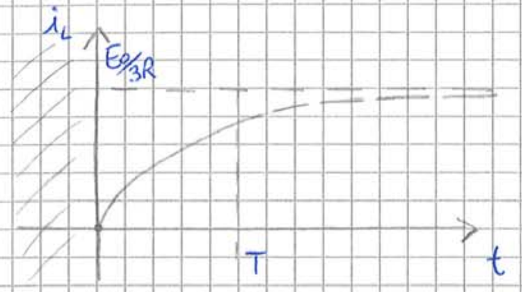
$v_c(\infty) = v_{AB}$

$v_{AB} = \frac{E_0}{2} \Rightarrow v_c(\infty) = E_0/2$

Soluzione: $v_c(t) = E_0/2 \left(1 - e^{-\frac{2t}{3CR}}\right)$, $t \geq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 106

$$i_L(t) = \frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3Rt}{2L}}\right), \quad 0 \le t < T$$



2) $t \geq T$

facciamo un cambiamento di variabile $t' = t - T$

$$i_L(t') = \left(i_L(0) - i_L(\infty)\right) e^{-t'/\tau} + i_L(\infty), \quad t' \geq 0$$

$$\tau = \frac{2L}{3R}$$

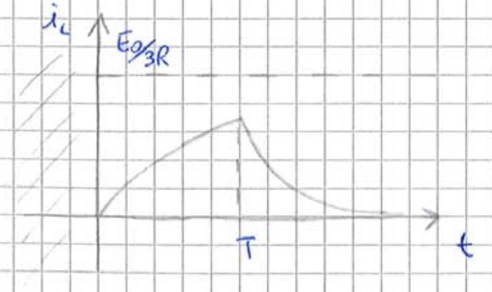
la condizione iniziale $i_L(t'=0^+) = i_L(t'=0^-)$

$$i_L(t'=0^-) = \frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3RT}{2L}}\right)$$

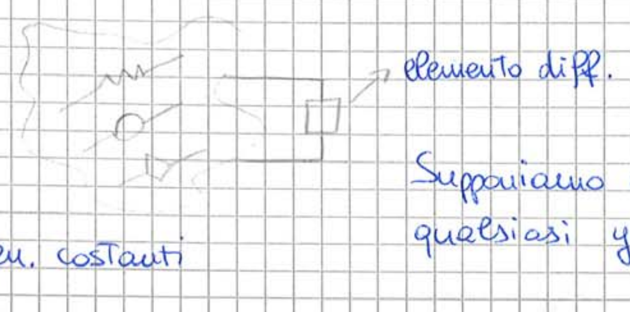
In ogni intervallo la condizione iniziale è uguale al valore dell'ultimo istante di tempo dell'intervallo precedente. N.B.

la condizione finale $i(t' \to \infty) = 0$.

$$i_L(t') = \underbrace{\frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3RT}{2L}}\right)}_{\text{è un numero}} e^{-t'/\tau}, \quad t' \geq 0$$



RISOLUZIONE DI CIRCUITI DEL PRIMO ORDINE PER VARIABILI QUALSIASI



Supponiamo di voler trovare una variabile qualsiasi y all'interno del circuito.

ESEMPIO:

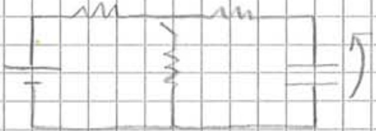
$$i_x(t) = [i_x(0^+) - i_x(\infty)]e^{-t/\tau} + i_x(\infty) \quad , \quad t \geq 0$$

a. calcolo τ (facendo sempre l'equivalente di Thevenin su C)

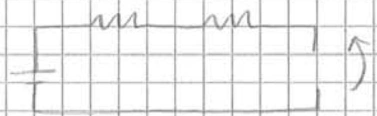
τ è lo stesso

$R_{eq} = \frac{3}{2}R \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{3}{2}RC$

b. calcolo la condizione iniziale $i_x(0^+)$



per $t<0$ siamo in regime stazionario $\Rightarrow v_c = \cos T \Rightarrow i_c = 0$



$v_c(0^-) = E_0$

per $t = 0^+$

per la continuità della tensione $v_c(0^+) = E_0$
$\Rightarrow$ posso sostituirlo con una batteria

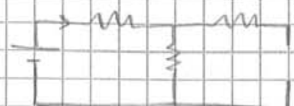
Solo a questo punto si può calcolare $i_x(0^+)$

Applico Millman tra A e B : $v_{AB} = \dfrac{E_0/R + E_0/R}{1/R + 1/R + 1/R} = \dfrac{2E_0}{3}$

KVL : $E_0 = Ri_x + v_{AB}$

$i_x = \left(E_0 - \frac{2}{3}E_0\right) \cdot \frac{1}{R} = \frac{E_0}{3R}$

c. calcolo $i_x(\infty)$



condizioni stazionarie

$v_c(0^-) = E_0 = v_c(0^+)$

per $t = 0^+$

// corto circuito

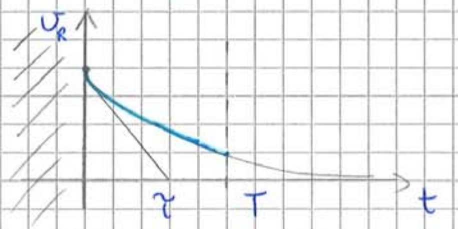
$v_R(0^+) = E_0 \frac{R}{3R} = E_0/3$

c. Calcolo $v_R(\infty)$:

$v_R(\infty) = 0$ circuito inerte

Per ora, avendo considerato $0 \le t < T$, anche quando si calcola $v_c(\infty)$ non si considera l'interruttore che si chiude quando $t = T$.

$v_R(t) = \frac{E_0}{3} e^{-\frac{t}{3RC}}$ soluzione per $0 \le t < T$



Supponiamo che $T = 6CR$

Consideriamo ora $t \ge T$

Poniamo $t' = t - T$

$v_c(t') = \left(v_R(0^+) - v_R(\infty)\right) e^{-\frac{t'}{\tau'}} + v_R(\infty)$, $0 \le t' < \infty$

a'. Calcolo $\tau' = CR_{eq}$:

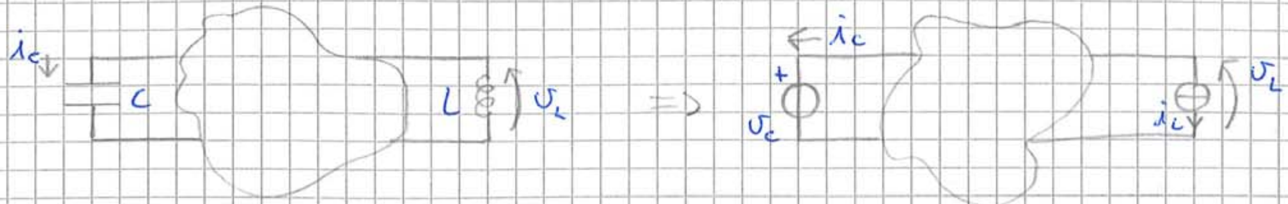
$R_{eq} = (2R // R) + R = \frac{5}{3}R \Rightarrow \tau' = \frac{5}{3}CR$

b'. Calcolo $v_R(0^+)$:

calcolo prima $v_c(0^-) = v_c(0^+)$

$t' = 0^- \Rightarrow t = T$

CIRCUITI CON 2 ELEMENTI DIFFERENZIALI



Dimostriamo nel caso in cui ci sia un condensatore e un induttore (si può fare anche con due condensatori o due induttori). ESAME

Considero le variabili complementari e ipotizzo di conoscere la soluzione per v_C e i_L. Le incognite sono v_L e i_C.
Utilizziamo la sovrapposizione degli effetti.

$$i_C = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \beta_1 \hat{i}_1 + \beta_2 \hat{i}_2 + \dots + m_{11} v_C + m_{12} i_L$$

$$v_L = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \dots + \beta_1' \hat{i}_1 + \beta_2' \hat{i}_2 + \dots + m_{21} v_C + m_{22} i_L$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad e \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = u_1 + m_{11} v_C + m_{12} i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = u_2 + m_{21} v_C + m_{22} i_L$$

u_1 e u_2 contributi dei gen. interni

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{m_{11}}{C} v_C + \dfrac{m_{12}}{C} i_L + \dfrac{u_1}{C} \\ \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{m_{21}}{L} v_C + \dfrac{m_{22}}{L} i_L + \dfrac{u_2}{L} \end{cases}$$

Sistema di due eq. differenziali di I ordine, a coeff. costanti, non omogenee.

Il numero di eq. differenziali è uguale al numero di elementi differenziali presenti nel circuito.

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{s}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{A}} = \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ \left[\begin{matrix} \dfrac{m_{11}}{C} \\[2ex] \dfrac{m_{21}}{L} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} \dfrac{m_{12}}{C} \\[2ex] \dfrac{m_{22}}{L} \end{matrix}\right] \\ a_{21} & a_{22} \end{array} ; \quad \underline{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{u_1}{C} \\[2ex] \dfrac{u_2}{L} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

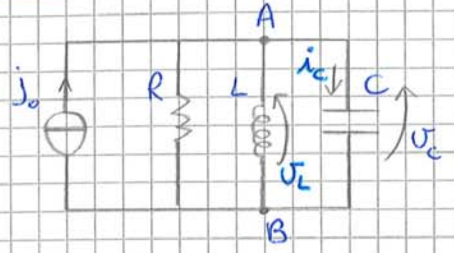
Anche in questo caso i generatori interni li prendiamo COSTANTI

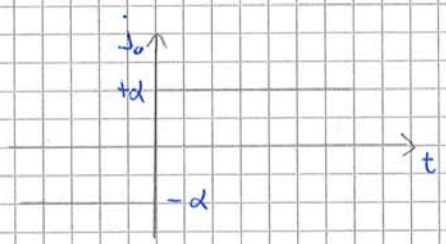
3) K_1 e K_2 dal sistema finale
e.

Soluzione del circuito del II ordine:

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + x_1(\infty) \\ x_2(t) = K_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} + x_2(\infty) \end{cases} , \quad t \geq 0}$$

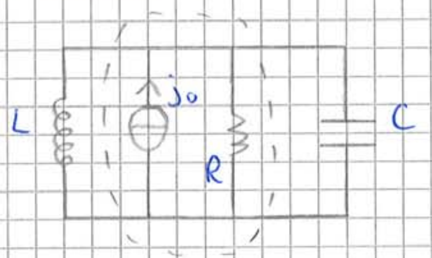
ESEMPIO:





$$\underline{X} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

1ª strada:



con sovrapposizione degli effetti trovo il sistema differenziale (come nella dimostrazione)

2ª strada:

per ogni elemento differenziale guardo la variabile complementare:

- se è una corrente => applico KCL al nodo dell'elemento diff.

KCL in A: $j_0 = \frac{v_C}{R} + i_L + i_C \Rightarrow j_0 = \frac{v_C}{R} + i_L + C\frac{dv_C}{dt}$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} - \frac{1}{C} i_L + \frac{j_0}{C}$$

- se è una tensione => applico KVL su un percorso chiuso che include l'elemento diff.

KVL su B->A->B: $v_C = v_L \Rightarrow v_C = L\frac{di_L}{dt}$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_0/C \\ 0 \end{bmatrix}$$

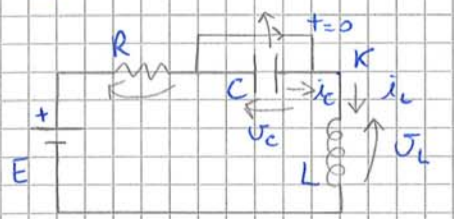
$$\begin{cases} K_1 = -K_2 \\ -2\alpha = K_2\left(\cancel{\frac{1}{R}} + \lambda_1 C - \cancel{\frac{1}{R}} - \lambda_2 C\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -K_2 \\ K_2 = \dfrac{-2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)} \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} v_C(t) = \dfrac{2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)} e^{\lambda_1 t} - \dfrac{2\alpha}{C(\lambda_1-\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \\ i_L(t) = \dfrac{-2\alpha}{\cancel{C}(\lambda_1-\lambda_2)} \cancel{C}\left(\dfrac{1}{RC}+\lambda_1\right) e^{\lambda_1 t} + \dfrac{2\alpha}{\cancel{C}(\lambda_1-\lambda_2)} \cancel{C}\left(\dfrac{1}{RC}+\lambda_2\right) e^{\lambda_2 t} + \alpha \end{cases}, \quad t \geq 0$$

26/11/12

XIV LEZIONE:



KCL in K: $i_C = i_L$ $\quad C\dfrac{dv_C}{dt} = i_L$

KVL nel circuito: $E = Ri_L + v_C + v_L = Ri_L + v_C + L\dfrac{di_L}{dt}$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = i_L/C \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{R}{L} i_L - \dfrac{v_C}{L} + E/L \end{cases}$$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$ $\qquad \dfrac{d}{dt}\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ E/L \end{bmatrix}$ per $t \geq 0$

contiene sempre variabili di stato

a. Calcolo autovalori

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1/C \\ -1/L & -R/L-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda\left(-R/L - \lambda\right) + \frac{1}{CL} = 0 \qquad \lambda^2 + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\lambda + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Se $\alpha^2 > \omega_0^2 \longrightarrow$ $\lambda_1 = -\alpha_1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_1 < \alpha$

$\lambda_2 = -\alpha_2, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_2 > \alpha$ $\qquad$ reali e negativi

Sono gli autovalori che influenzano l'andamento nel tempo delle soluzioni.

IMPORTANTE: in base agli autovalori si possono avere tre tipi di grafici diversi

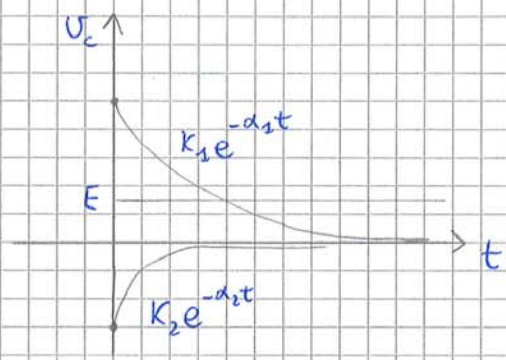
Se $\alpha^2 > \omega_0^2$: $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2$ ①

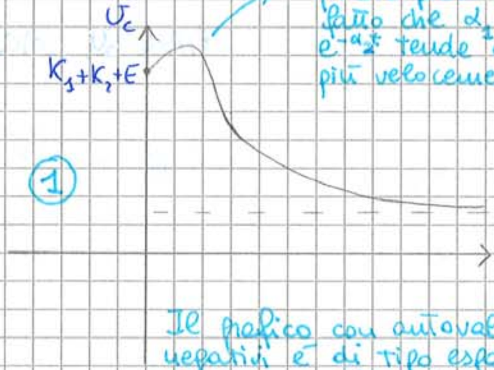
$$\begin{cases} v_c(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t} + E \\ i_L(t) = -K_1 C\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} - K_2 C\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \end{cases}$$

$$K_1 = \frac{E(1/R - C\alpha_2)}{C(-\alpha_1+\alpha_2)} \quad , \quad K_2 = -\frac{E(1/R - C\alpha_1)}{C(-\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$K_1 = \frac{E(1/R - C\alpha_2)}{C\Delta\alpha} \qquad K_2 = -\frac{E(1/R - C\alpha_1)}{C\Delta\alpha}$$

Si può dimostrare che $1/R - C\alpha_2$ e $1/R - C\alpha_1$ sono positivi $\Rightarrow$ K_1 e K_2 hanno segno opposto.





questo picco è dovuto al fatto che $\alpha_1 < \alpha_2$ e quindi $e^{-\alpha_2 t}$ tende a zero molto più velocemente

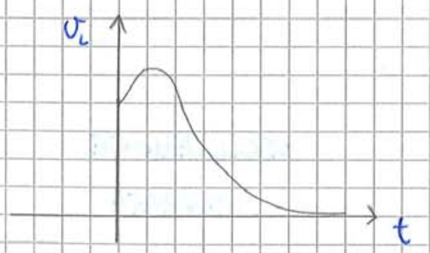
①

Il grafico con autovalori reali e negativi è di tipo esponenziale e presenta un picco vicino a 0.

Se si volesse calcolare una variabile qualunque (non di stato) si trovano prima le variabili di stato in questo modo e poi si calcola l'incognita.

Se volessimo trovare $v_L(t)$:

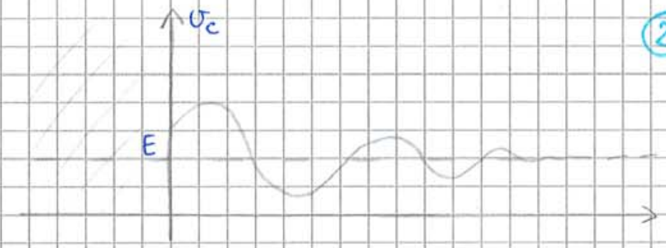
$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\left[K_1 C\alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} + K_2 C\alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t}\right]$$



Il picco di tensione fa scoccare la scintilla che infiamma la benzina.

Questo circuito è il tradizionale circuito di accensione del motore, l'interruttore è la puntina e l'induttore è la bobina. Le cariche che prima circolavano nell'interruttore ora vanno a caricare il condensatore.

Supponendo E positivo il grafico finale è:



② nel caso di autovalori complessi il grafico è dato da un oscillazione smorzata esponenzialmente attorno al valore $x(\infty)$

Se i valori degli autovalori sono complessi l'andamento è oscillatorio.

Per la corrente si ha un'oscillazione smorzata attorno a zero.

Se $\alpha^2 = \omega_0^2$ ③ autovalori coincidenti $\Rightarrow$ andamento esponenziale senza picco

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ autovalori coincidenti

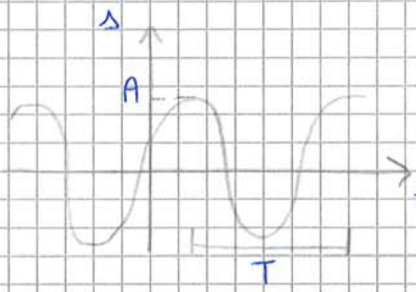
Anche in questo caso, come nel primo, l'andamento è di tipo esponenziale.

CIRCUITI SINUSOIDALI

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{s(t)}{\tau} \qquad x = x_o + x_p$$

$$x_o \to e^{-t/\tau}$$

Supponiamo che il generatore sia sinusoidale cioè $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Se ci sono più generatori, questi devono avere tutti la stessa frequenza.

In questo caso anche la soluzione particolare deve essere sinusoidale:

$x_p = K_p \cos(\omega t + \varphi)$

Nei sistemi elettrici τ è molto piccolo (dell'ordine dei millisecondi o meno) perciò $x_o \to 0$ molto rapidamente.

Concentriamoci quindi su x_p.

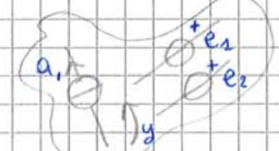
x_p deve soddisfare la equazione differenziale.

funzioni sinusoidali $\begin{cases} s(t) = \dfrac{\hat{S}e^{j\omega t} + \hat{S}^* e^{-j\omega t}}{2} \\ s(t) = \mathrm{Re}\{\hat{S}e^{j\omega t}\} \end{cases}$ numeri complessi

$\hat{S}$ prende il nome di **FASORE** (in esso non si considera ω)

Nel momento in cui i generatori sono sinusoidali, si utilizzano i numeri complessi, cioè il metodo dei fasori. Ovviamente questo è un artefìcio che ci permette di trovare la soluzione. Se si vuole la soluzione reale si deve ritornare alle funzioni sinusoidali.

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \beta_1 a_1 + \dots$

Supponiamo che i generatori siano sinusoidali con la stessa frequenza.

$e_1 = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ $\quad e_2 = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ $\quad a_1 = A_1 \cos(\omega t + \theta_1)$

$\downarrow$

$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_1}$ $\quad \hat{E}_2 = E_2 e^{j\varphi_2}$ $\quad \hat{A}_1 = A_1 e^{j\theta_1}$

$y = Y \cos(\omega t + \psi)$

$\downarrow$

$\hat{Y} = Y e^{j\psi}$

Tutte le grandezze hanno la stessa frequenza (ω).

$$\underbrace{\mathrm{Re}\{\hat{Y}e^{j\omega t}\}}_{y} = \alpha_1 \underbrace{\mathrm{Re}\{\hat{E}_1 e^{j\omega t}\}}_{e_1} + \alpha_2 \underbrace{\mathrm{Re}\{\hat{E}_2 e^{j\omega t}\}}_{e_2} + \dots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ sono sicuramente valori reali poiché dipendono dai resistori, elementi differenziali, gen. pilotati $\Rightarrow$ posso portarli dentro le parentesi graffe.

$$\mathrm{Re}\{\hat{Y}e^{j\omega t} - \alpha_1 \hat{E}_1 e^{j\omega t} - \alpha_2 \hat{E}_2 e^{j\omega t} + \dots\} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{Y}\cancel{e^{j\omega t}} - \alpha_1 \hat{E}_1 \cancel{e^{j\omega t}} - \alpha_2 \hat{E}_2 \cancel{e^{j\omega t}} + \dots = 0$$

$\hat{Y} = \alpha_1 \hat{E}_1 + \alpha_2 \hat{E}_2 + \dots$ la sovrapposizione degli effetti vale anche per i fasori $\Rightarrow$ valgono tutte le regole dei circuiti.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 106

Prodotto:

$$\hat{z}_p = \hat{z}_1 \hat{z}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + j a_1 b_2 + j a_2 b_1 + j^2 b_1 b_2 =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Per il prodotto si usa la rappresentazione polare (prodotto dei moduli e somma delle fasi).

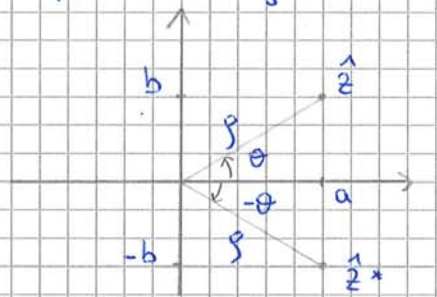
Rapporto:

$$\hat{z}_r = \frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1 a_2 + j b_1 a_2 - j b_2 a_1 + b_1 b_2}{a_2^2 - j a_2 b_2 + j a_2 b_2 + b_2^2} = \dots\dots =$$

$$= \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j\theta_1} e^{-j\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Per il rapporto si usa la rappresentazione polare (rapporto dei moduli e differenza tra le fasi)

Complessi coniugati:



$$\hat{z} = a + jb = \rho e^{j\theta}$$

$$\hat{z}^* = a - jb = \rho e^{-j\theta}$$

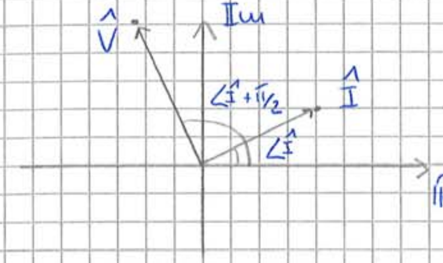
Per costruire il complesso coniugato si cambia segno solo alla parte immaginaria (rappr. cartesiana) o alla fase (rappr. polare).

$$\hat{z}\hat{z}^* = \rho e^{j\theta} \rho e^{-j\theta} = \rho^2$$

Analogamente per il condensatore: 

$i = C\frac{dv}{dt}$ esame

Si ottiene: $\hat{I} = j\omega C\hat{V}$



$\hat{V} = j\omega L\hat{I}$ induttore

$|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} = e^{j\pi/2}\omega L|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}$

$|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} = \omega L|\hat{I}|e^{j(\angle\hat{I}+\pi/2)}$

$\Downarrow$

$\hat{V} = |\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}$ $\qquad$ $\hat{I} = |\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}$

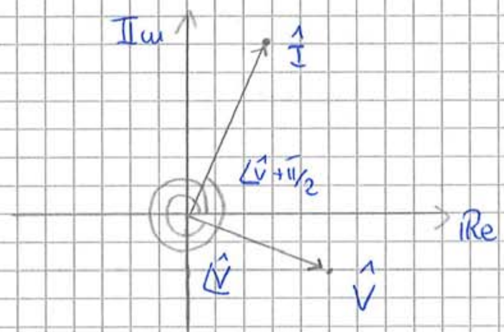
↓ simbolo per indicare la fase

$$\begin{cases} |\hat{V}| = \omega L|\hat{I}| \\ \angle\hat{V} = \angle\hat{I} + \pi/2 \end{cases}$$

$\hat{V}$ è in anticipo su $\hat{I}$

Il modulo è cambiato, aumenta o diminuisce in base al valore di ωL.

Mentre nel resistore il fasore della tensione e della corrente sono paralleli, nell'induttore sono a 90° gradi ovvero sono in **QUADRATURA**, il fasore che ha la fase maggiore (in questo caso $\hat{V}$) si dice che è in **ANTICIPO**.



$\hat{I} = j\omega C\hat{V}$ condensatore

$|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}} = e^{j\pi/2}\omega C|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}$

$|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}} = \omega C|\hat{V}|e^{j(\angle\hat{V}+\pi/2)}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} |\hat{I}| = \omega C|\hat{V}| \\ \angle\hat{I} = \angle\hat{V} + \pi/2 \end{cases}$$

$\hat{V}$ è in ritardo su $\hat{I}$

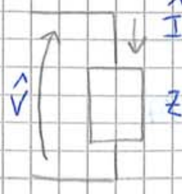
Anche per il condensatore i due fasori sono in **QUADRATURA**.
Al contrario dell'induttore è la corrente ad essere in **ANTICIPO**.

$\hat{V} = R\hat{I}$ $\qquad$ $\hat{V} = j\omega L\hat{I}$ $\qquad$ $\hat{I} = j\omega C\hat{V} \Rightarrow \hat{V} = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}$

$\hat{V} = Z\hat{I}$ $\qquad$ Z = **IMPEDENZA** coefficiente di proporzionalità tra $\hat{V}$ e $\hat{I}$
(moltiplica $\hat{I}$ per dare $\hat{V}$)

Y = **AMMETTENZA** coefficiente di proporzionalità che moltiplica $\hat{V}$ per dare $\hat{I}$

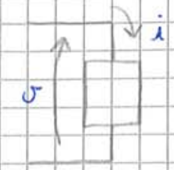
RESISTORE: $Z = R$, $Y = 1/R$ $\qquad$ **INDUTTORE**: $Z = j\omega L$, $Y = \frac{1}{j\omega L}$ $\qquad$ **CONDENSATORE**: $Z = \frac{1}{j\omega C}$, $Y = j\omega C$



$$\hat{V} = Z\hat{I}$$

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}}{|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}} = \underbrace{\frac{|\hat{V}|}{|\hat{I}|}}_{|Z|} e^{j\overbrace{(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}^{\angle Z}}$$

$$v(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\{\hat{V}e^{j\omega t}\} \\ \dfrac{\hat{V}e^{j\omega t}+\hat{V}^*e^{-j\omega t}}{2} \end{cases} \qquad i(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\{\hat{I}e^{j\omega t}\} \\ \dfrac{\hat{I}e^{j\omega t}+\hat{I}^*e^{-j\omega t}}{2} \end{cases}$$



Calcolo della potenza assorbita dal bipolo in regime sinusoidale

$$p = vi = \frac{\hat{V}e^{j\omega t}+\hat{V}^*e^{-j\omega t}}{2}\,\frac{\hat{I}e^{j\omega t}+\hat{I}^*e^{-j\omega t}}{2} = \frac{|\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}}e^{j\omega t}+|\hat{V}|e^{-j\angle\hat{V}}e^{-j\omega t}}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{|\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}}e^{j\omega t}+|\hat{I}|e^{-j\angle\hat{I}}e^{-j\omega t}}{2} = \frac{1}{4}\Big\{|\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}e^{2j\omega t}+|\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}+$$

$$+|\hat{V}||\hat{I}|e^{j(\angle\hat{I}-\angle\hat{V})}+|\hat{V}||\hat{I}|e^{-j(\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}e^{-2j\omega t}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{|\hat{V}||\hat{I}|\left(e^{j(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}+e^{-j(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}\right)+|\hat{V}||\hat{I}|\left(e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}+e^{-j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}\right)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\underbrace{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t+\angle\hat{V}+\angle\hat{I})}_{\text{variabile e sinusoidale}}+\underbrace{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}_{\text{costante}}\Big\}$$

La potenza oscilla al doppio della frequenza della tensione (corrente).

$$\cos(2\omega t+\angle\hat{V}+\underbrace{\angle\hat{I}+\angle\hat{I}-\angle\hat{I}}_{\text{aggiungo e tolgo }\angle\hat{I}}) = \cos(\underbrace{2\omega t+2\angle\hat{I}}_{\alpha}+\underbrace{\angle\hat{V}-\angle\hat{I}}_{\beta}) = \cos(\alpha+\beta) =$$

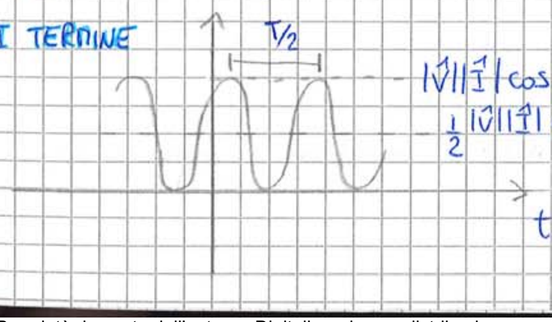
$$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(2\omega t+2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) - \operatorname{sen}(2\omega t+2\angle\hat{I})\operatorname{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big\{|\hat{V}||\hat{I}|\cos(2\omega t+2\angle\hat{I})\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) - |\hat{V}||\hat{I}|\operatorname{sen}(2\omega t+2\angle\hat{I})\operatorname{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})+$$

$$+|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\Big\} = \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})\left(1+\cos(2\omega t+2\angle\hat{I})\right)+$$

$$-\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\operatorname{sen}(2\omega t+2\angle\hat{I})\operatorname{sen}(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$$

I TERMINE



$|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$ massimo

$\frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})$ media

POTENZA ATTIVA

Sempre ≥ 0 se $\cos(\angle\hat{V}-\angle\hat{I}) \geq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 106

$p = \frac{1}{2} |\hat{V}||\hat{I}| \sin(2\omega t + 2\angle\hat{I})$ e $P_c = 0$

Il condensatore e l'induttore hanno potenze opposte ciò significa che se in un circuito ci sono un induttore e un condensatore mentre uno assorbe l'altro eroga e viceversa.

$\angle \dot{Z} = \angle\hat{V} - \angle\hat{I}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \angle \dot{Z} \leq \frac{\pi}{2}$ condizione di passività

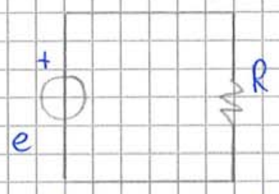
Se vale la condizione di passività allora $\cos(\angle\hat{V} - \angle\hat{I}) \geq 0$ e la potenza attiva è sempre ≥ 0.

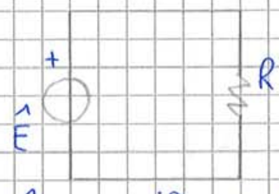
12/12/12

XVIII LEZIONE:

ESEMPIO:

1)





$e = E_0 \cos(\omega t + \theta)$ $\hat{E} = E_0 e^{j\theta}$ (ω)

$$P = \bar{p} = \frac{1}{2} |\hat{V}||\hat{I}| \cos(\underbrace{\angle\hat{V} - \angle\hat{I}}_{\angle \dot{Z}})$$

Siccome R è un numero reale $\angle \dot{Z} = 0$

$$P_R = \frac{1}{2} |\hat{E}| \left|\frac{\hat{E}}{R}\right| \cos 0 = \frac{1}{2} \frac{|\hat{E}|^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{R}$$

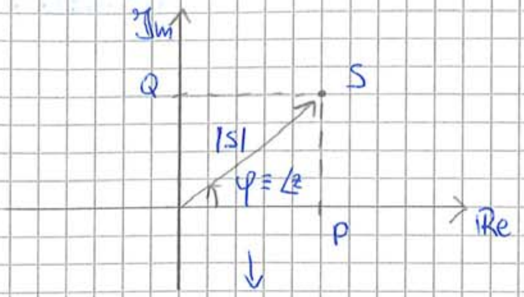
$$P_b = vi = E \cdot \frac{E}{R} = \frac{E^2}{R}$$

Per avere lo stesso effetto su R (luce, calore, ...) le potenze devono essere uguali

$$P_R = P_b \qquad \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{R} = \frac{E^2}{R} \Rightarrow E_0 = \sqrt{2} E \quad \text{oppure} \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Per avere lo stesso effetto sulla resistenza dobbiamo prendere una batteria che è al 70 % della sinusoide

Nei dispositivi elettrici ci sono sempre tre dati che sono: il valore efficace, la potenza media che consuma, il fattore di potenza.



triangolo delle potenze

$$|S| = \frac{P}{\cos\varphi}$$

$$Q = |S|\sin\varphi \qquad Q = P\,\mathrm{tg}\varphi$$

$$|\hat{V}| = \sqrt{2}\,V_{eff}$$

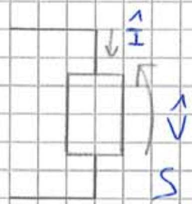
$$|\hat{I}| = \frac{2P}{\sqrt{2}\,V_{eff}\cos\varphi}$$

$$\hat{V} = Z\hat{I} \qquad Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{|\hat{V}|}{|\hat{I}|}e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})} = \frac{\sqrt{2}\,V_{eff}\sqrt{2}\,V_{eff}\cos\varphi}{2P}e^{j\varphi}$$

$$|Z| = \frac{V_{eff}^2\cos\varphi}{P}$$

$$Z = R + jX \qquad R = |Z|\cos\varphi = \frac{V_{eff}^2\cos^2\varphi}{P} \qquad X = |Z|\sin\varphi = \frac{V_{eff}^2\cos\varphi\sin\varphi}{P}$$

In questo modo, dati i tre valori sulla targhetta, si trovano tutti gli altri dati.

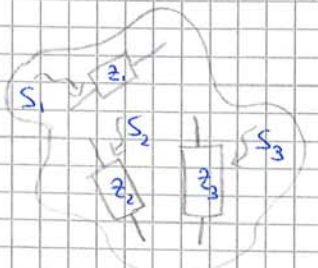


S potenza complessa assorbita $\quad S = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^*$

Se utilizzo il fasore con il valore efficace:

$$\hat{V} = |\hat{V}|e^{j\angle\hat{V}} = \sqrt{2}\,V_{eff}\,e^{j\angle\hat{V}}$$
$$\hat{I} = |\hat{I}|e^{j\angle\hat{I}} = \sqrt{2}\,I_{eff}\,e^{j\angle\hat{V}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,V_{eff}\,e^{j\angle\hat{V}}\sqrt{2}\,I_{eff}\,e^{-j\angle\hat{I}} = V_{eff}I_{eff}\,e^{j(\angle\hat{V}-\angle\hat{I})}$$



In base alla conservazione fisica dell'energia:

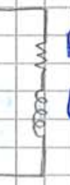
$$\sum_k S_k = 0$$

k = elementi su tutto il circuito

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 106

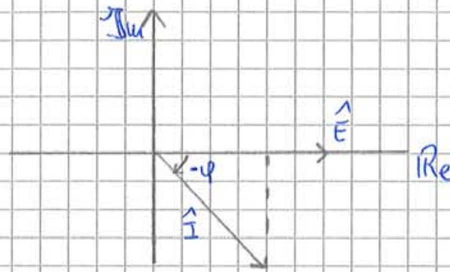
2° CASO : $Z = R + jX$ (maggior parte dei motori degli elettrodomestici)

Normalmente X è un induttanza



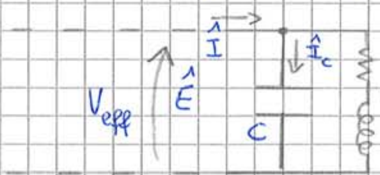
Dati di targa: $\begin{cases} V_{eff} \\ P \\ \cos\varphi \neq 1 \end{cases}$

$|\hat{I}| = \dfrac{\sqrt{2}P}{V_{eff}\cos\varphi}$ siccome $\cos\varphi < 1$ $|\hat{I}|$ è maggiore rispetto al 1° caso

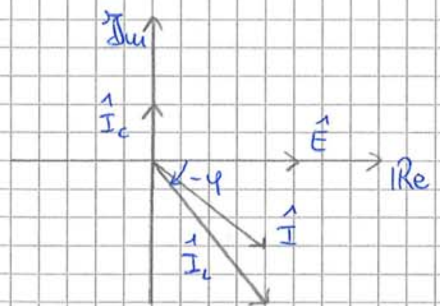


$P^{(2)}_{diss} > P^{(1)}_{diss}$

Sul contratto del fornitore di energia c'è scritto che $\cos\varphi > 0.9$
Ovvero non si può richiedere una corrente troppo alta altrimenti ci sarebbe troppa energia dissipata a spese del fornitore.
Come si fa a rispettare questa regola?



$\hat{I}_c = j\omega C\hat{E}$



$\hat{I} = \hat{I}_c + \hat{I}_L$

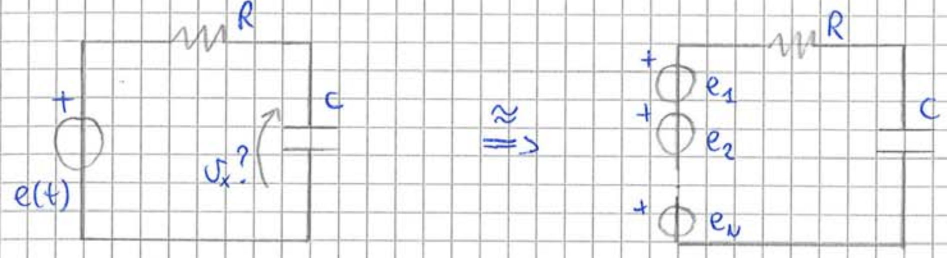
In questo modo, mettendo un condensatore, diminuisce la corrente e anche la fase φ che deve essere $< 26°$.

Il condensatore serve per dare energia all'induttore quando serve in modo che questa energia non venga chiesta alla centrale.
Il condensatore viene chiamato di **RIFASAMENTO**.
La potenza del condensatore reattiva Q_c deve bilanciare quella dell'induttore

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{Q_L}{P}$

Questi generatori differiscono per la fase, la frequenza e l'ampiezza. Siccome i generatori hanno anche frequenza diversa non si può scrivere un solo fasore, si può risolvere il circuito solo con sovrapposizione degli effetti.

ESEMPIO:



Per sovrapposizione degli effetti:

$\hat E_1 = E_1 e^{j\varphi_1}$ $\qquad$ $\hat E_2 = E_2 e^{j\varphi_2}$ $\qquad$ $\hat E_N = E_N e^{j\varphi_N}$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad$ $\omega_2 = 2\cdot\frac{2\pi}{T}$ $\qquad$ $\omega_N = N\frac{2\pi}{T}$

$$\hat V_{x1} = \hat E_1 \frac{Z_{c1}}{R+Z_{c1}} = \hat E_1 \frac{\frac{1}{j\omega_1 C}}{R+\frac{1}{j\omega_1 C}} = \hat E_1 \frac{1}{j\omega_1 CR+1}$$

$f = \frac{1}{T}$ $\qquad$ $\omega_1 = 2\pi f$

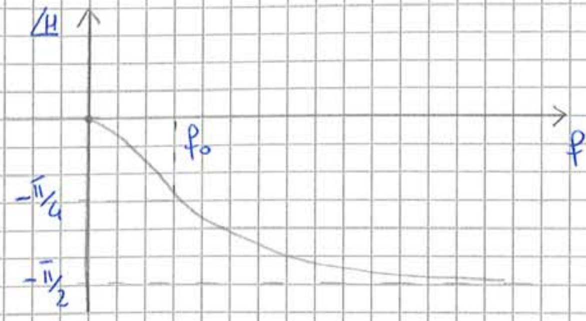
$$\Rightarrow \hat V_{x1} = \hat E_1 \frac{1}{j2\pi f CR+1} = \hat E_1 \frac{1}{2\pi CR\left(\underbrace{\frac{1}{2\pi CR}}_{f_0}+jf\right)} = \hat E_1 \frac{f_0}{f_0+jf} = \hat E_1 \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$$

$$\hat V_{x2} = \hat E_2 \frac{Z_{c2}}{Z_{c2}+R} = \dots = \hat E_2 \frac{1}{1+j\frac{2f}{f_0}}$$

$\vdots$

$$\hat V_{xN} = \hat E_N \frac{Z_{cN}}{Z_{cN}+R} = \dots = \hat E_N \underbrace{\frac{1}{1+j\,Nf/f_0}}_{\text{FATTORE DI TRASFERIMENTO}}$$

Ad esempio la frequenza del telefoni a milioni di Hz, scelto $f_0 = 1 Hz$ il valore risultante è infinitesimo e non passa.



fase di FdT

DEFINIZIONE: $A \longrightarrow dB$ (deci Bel) $\quad A_{dB} = 20 \log_{10} A$ rappresentazione in decibel

se $A = 1 \rightarrow A_{dB} = 0$ dB $\qquad A = \sqrt{2} \rightarrow A_{dB} = 3$ dB

se $A = 10 \rightarrow A_{dB} = 20$ dB $\qquad A = 2 \rightarrow A_{dB} = 6$ dB

se $A = 100 \rightarrow A_{dB} = 40$ dB

Si utilizza questa scala per problemi di rappresentazione.

Consideriamo il modulo di H e trasformiamolo in decibel:

$$|H(f')| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2}} \rightarrow |H|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2}} =$$

$$= \underbrace{\cancel{20 \log_{10} 1}}_{0} - 20 \log_{10} \sqrt{1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2} = -20 \cdot \frac{1}{2} \log_{10}\left(1+\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2\right)$$

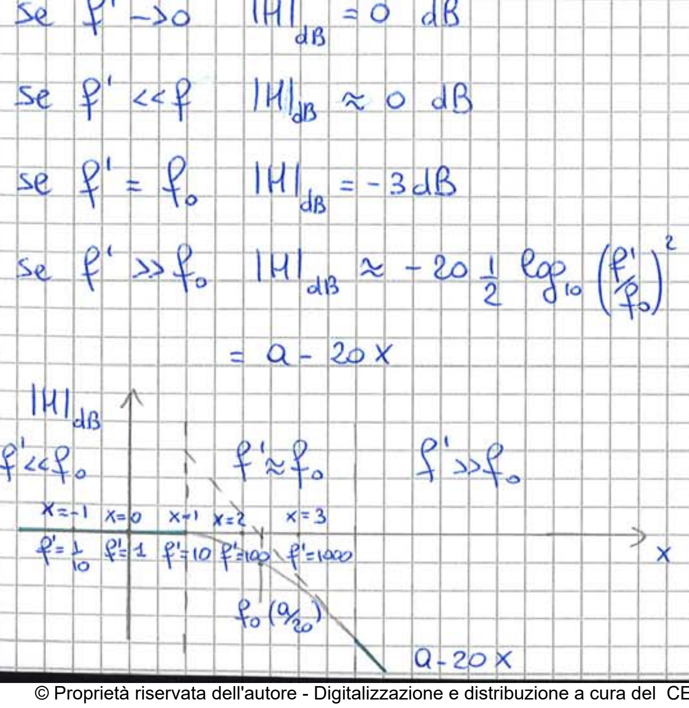
se $f' \rightarrow 0 \quad |H|_{dB} = 0$ dB

se $f' << f \quad |H|_{dB} \approx 0$ dB

se $f' = f_0 \quad |H|_{dB} = -3$ dB

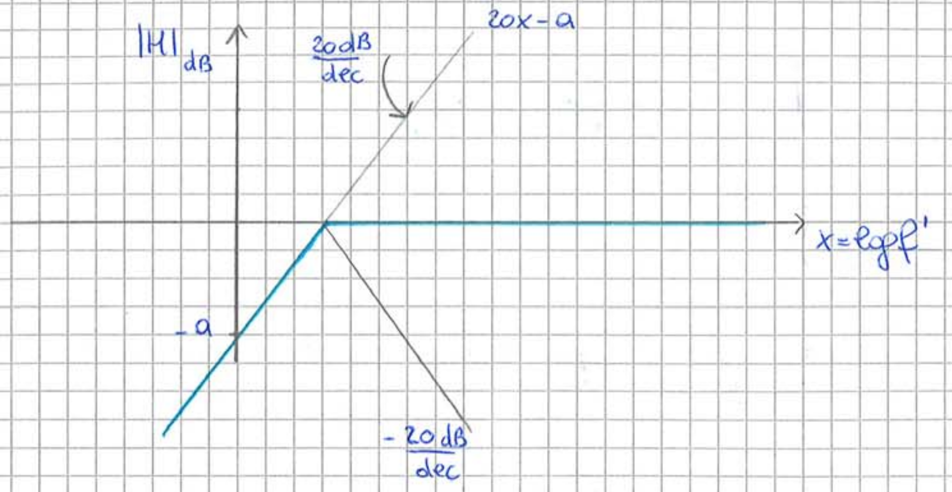
se $f' >> f_0 \quad |H|_{dB} \approx -20 \frac{1}{2} \log_{10}\left(\frac{f'}{f_0}\right)^2 = -20 \log_{10} \frac{f'}{f_0} = -20 \underbrace{\log_{10} f'}_{x} + \underbrace{20 \log_{10} f_0}_{a \text{ (numero)}} =$

$= a - 20x$



$x = \log_{10} f' \Rightarrow$ può assumere tutti i valori in $\mathbb{R}$

Prendiamo $f_0 > 100$ Hz

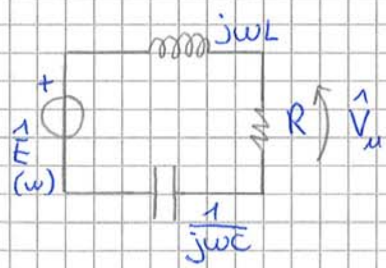


Per valori più piccoli di f_0 $|H|_{dB}$ è negativa, ovvero il modulo è piccolissimo, per valori maggiori di f_0 il modulo è zero quindi fa passare solo frequenze alte.
Questo è un filtro **PASSA-ALTO**

07/01/13

XX LEZIONE:

FILTRI DEL SECONDO ORDINE



$H = \frac{\hat{V}_u}{\hat{E}}$ F.d.T.

$Z = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} =$ impedenza totale

$= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

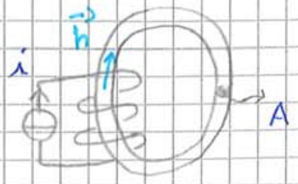
Anche se ω, L, C sono valori positivi, siccome è presente una differenza ci sarà un valore ω_0 per cui $\Im m\{Z\} = 0$

$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ **PULSAZIONE DI RISONANZA**

Si considera solo il termine positivo poiché ω_0 è sempre positivo, la pulsazione di risonanza è tale per cui l'impedenza è completamente reale ed è uguale ad R.

$\hat{V}_u = \hat{E}\frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow$ F.d.T $H = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$

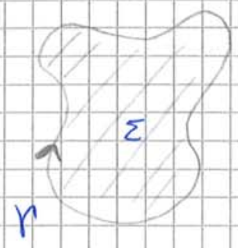
SISTEMI MAGNETICI



Anello con alta permeabilità magnetica $\mu \gg \mu_0$

La corrente i genera un campo magnetico $\perp$ al piano della spira, inoltre essendo il materiale ad alta permeabilità magnetica il campo magnetico rimane tutto confinato nell'anello.

Se seguo un percorso chiuso lungo il campo magnetico (circuitazione), questa è uguale alla corrente passante moltiplicata per μ.



Per la LEGGE DI AMPÈRE:

$$\oint_\gamma \vec{h} \cdot d\vec{\ell} = \int_\Sigma j \, d\Sigma$$

In questo caso γ è l'anello di materiale magnetico.
$\mathcal{L}$ è la lunghezza dell'anello, inoltre consideriamo $\vec{h}$ costante

$$\Rightarrow \oint \vec{h} \cdot d\vec{\ell} = |h| \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma j \, d\Sigma = Ni \qquad N = \text{numero di spire}$$

In questo caso la legge di Ampere è: $|H| \mathcal{L} = Ni$

È presente anche un'induzione magnetica $b = \mu h$

$$\Rightarrow b = \mu \frac{Ni}{\mathcal{L}}$$

Considero tutta l'induzione che passa per l'anello ovvero il flusso.

$$\phi = bA = \mu \frac{ANi}{\mathcal{L}}$$

Legge di Faraday dell'induzione: Tensione su una spira che circonda un flusso di induzione = derivata del flusso nel tempo

$$v = (-) \frac{d\phi}{dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 106