NUMERO: 1280 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Genta

MATERIA: Analisi Matematica II, Prof.Lancelotti

06/10/12

I LEZIONE:

RICHIAMI DI TOPOLOGIA di $\mathbb{R}^n$

A, B insiemi,

$f: A \to B$ oppure $A \xrightarrow{f} B$ si intende una funzione che associa ad ogni elemento di A uno e uno solo elemento di B

A è il DOMINIO della funzione

B è il CODOMINIO della funzione

Sia n un numero naturale ≥ 1.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ldots \times\mathbb{R}}_{n\text{-volte}} = \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{vettori}} : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$.

$$e_i = (\overset{1}{0}, 0, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \ldots, \overset{n}{0})$$

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

Se $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = (v_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, v_n) =$

$= v_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + v_n(0, 0, \ldots, 1) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$

PRODOTTO SCALARE

Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

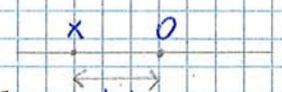
$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

$\|x\| = |x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

norma di x (modulo)

$\|x\| = \|x - 0\|$

$n = 1$ $\|x\| = |x| = \sqrt{x^2}$



$n = 2$ $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

in $\mathbb{R}^n$ $\|x\|$ è la distanza di x da 0 di $\mathbb{R}^n$.

detto che $x_0 \in \Omega$

$\Omega = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

0 è di accumulazione per Ω

- FRONTIERA se $\forall r > 0$ si ha che $\Omega \cap B_r(x_0) \neq 0$, $C\Omega \cap B_r(x_0) \neq 0$, dove $C\Omega$ è il complementare di Ω cioè $C\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, non è detto che $x_0 \in \Omega$, l'insieme si indica $Fr(\Omega)$ o $\partial\Omega$

OSSERVAZIONE: il bordo di Ω, $\partial\Omega = \partial(C\Omega)$

ES. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$, $C\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \vee y \notin \mathbb{Q}\}$

$\partial\Omega = \Omega \cup C\Omega = \mathbb{R}^2$, tutto il piano è il bordo

DEFINIZIONE: sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, diciamo che Ω è

- APERTO se ogni punto di Ω è interno a Ω, cioè $int(\Omega) = \Omega$
- CHIUSO se $C\Omega$ è aperto
- LIMITATO se $\exists r > 0 : \Omega \subseteq B_r(0)$
- COMPATTO se è chiuso e limitato

Per convenzione $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.

OSSERVAZIONE: Ω è chiuso $\Leftrightarrow \partial\Omega \subseteq \Omega$

Ω è aperto $\Leftrightarrow \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$

Ω è chiuso $\Rightarrow \bar{\Omega} = \Omega$

Si chiama CHIUSURA di Ω l'insieme $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

05/10/12

II LEZIONE:

PROPOSIZIONE: Valgono i seguenti fatti:

1) l'unione qualunque di insiemi aperti è un insieme aperto;
2) l'intersezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto;
3) l'unione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso;
4) l'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso

PROPRIETÀ: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora si ha che: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \in \mathbb{R}$

In tal caso L è detta DIFFERENZIALE di f in x_0 e si denota con $df(x_0)$ oppure $d_{x_0}f$.

$df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0) = o(\|x-x_0\|) \quad x \to x_0$

$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \quad x \to x_0$

PROPRIETÀ: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Allora si ha che:

1) f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0;

2) se f è differenziabile in $x_0 \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e si ha che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$. In particolare se $v = e_i$ allora $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$. Quindi se $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1e_1 + \dots + v_ne_n$

si può fare per le prop. delle appl. lineari (somma, prodotto)

allora $df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1e_1 + \dots + v_ne_n) =$
$= v_1\, df(x_0)(e_1) + \dots + v_n\, df(x_0)(e_n) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^m$

CASO SPECIALE $m=1$:

$df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v$, dove $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$

3) se f ammette tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in Ω e se queste derivate sono continue in $x_0 \Rightarrow f$ è differenziabile in x_0

OSSERVAZIONE: Se $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ $\Rightarrow \exists\, df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare. Rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^m$ si associa a $df(x_0)$ una matrice, detta matrice Jacobiana, $J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$f = (f_1, \dots, f_m)$

$f_1, \dots, f_m : \Omega \to \mathbb{R}$ sono le componenti di f

Si ha che se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $df(x_0)(v) = J_f(x_0)v$

CASO SPECIALE $m=1$:

$\forall i = 1, \dots, n$ sia $dx_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare così definita

$dx_i(e_i) = 1$, $dx_i(e_j) = 0$ se $i \neq j$

Sia $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1e_1 + \dots + v_ne_n \Rightarrow df(x_0)v = \nabla f(x_0) \cdot v =$

08/10/12

III LEZIONE:

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$

f differenziabile in x_0
g differenziabile in $f(x_0)$.
(supposto che siano componibili)

$\Rightarrow g \circ f$ è differenziabile in x_0 e $d(g\circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))(df(x_0)(x))$

in una variabile $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

$df(x_0) \longleftrightarrow J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$dg(f(x_0)) \longleftrightarrow J_g(f(x_0)) \in \mathbb{R}^{k,m}$

$dg\circ f(x_0) \longleftrightarrow J_{g\circ f}(x_0) \in \mathbb{R}^{k,n} \Rightarrow J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$

DERIVATA PARZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

CASO PARTICOLARE

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

f differenziabile in x_0
g differenziabile in $f(x_0)$

$x = (x_1, \dots, x_n) \qquad y = (y_1, \dots, y_m)$

$\forall i = 1, \dots, n \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$

dove $f = (f_1, \dots, f_m)$ sono le componenti di f

$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_0) + \dots\dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0)) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)$

CASI SPECIALI:

1) $m = 1$

$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

2) $n = 1$

$(g\circ f)'(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0))\, f_j'(x_0) = \nabla g(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

$\nabla g(f(x_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0))\right), \quad f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$

DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile, diciamo che Ω è TRASCURABILE se $m_m(\Omega) = 0$.

TEOREMA: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ limitato, non vuoto, allora Ω è misurabile se e solo se $\partial\Omega$ è trascurabile

ESEMPIO:

$\Omega = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$

$m(\partial\Omega) = 1 \neq 0 \Rightarrow \Omega$ non è misurabile

INTEGRALE MULTIPLO DI RIEMANN

NOTAZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile (limitato e non vuoto) e f continua e limitata.

Si chiama integrale (multiplo) di Riemann di f su Ω il numero reale che rappresentiamo con:

$$\int_\Omega f \quad , \quad \int_\Omega f(x)dx \quad , \quad x=(x_1,\dots,x_m) \quad \int_\Omega f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m$$

$$\underbrace{\int\dots\int_\Omega}_{m \text{ volte}} f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m$$

$m=2 \Rightarrow$ integrale doppio $\Rightarrow \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$

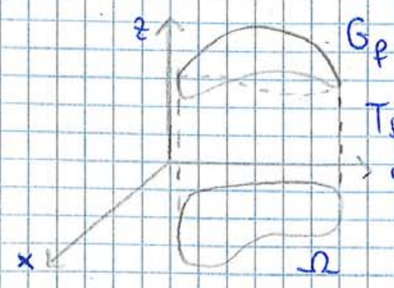
$m=3 \Rightarrow$ integrale triplo $\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$

Ω è detto DOMINIO di INTEGRAZIONE

Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$ allora $\int_\Omega f(x)dx$ è il volume $m+1$ dimensionale del trapezoide di f cioè $T_f = \{(x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}, x=(x_1,\dots,x_m)\in\Omega, 0 \leq x_{m+1} \leq f(x)\}$

ESEMPIO:

$m=2$



$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = m_3(T_f)$$

11/10/12

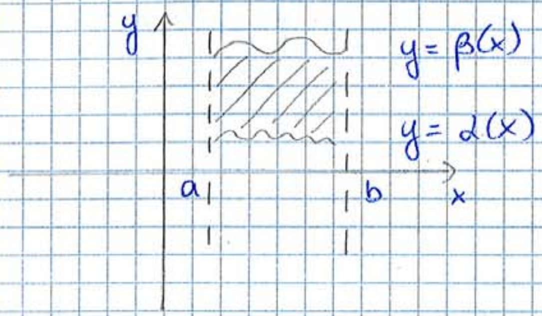
IV LEZIONE:

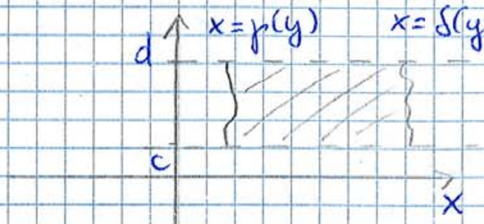
CALCOLO INTEGRALI DOPPI

DEFINIZIONE: sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, diciamo che Ω è y-SEMPLICE oppure VERTICALMENTE CONVESSO se Ω è della forma

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.
$\forall x \in [a,b]$, $\alpha(x) \le \beta(x)$



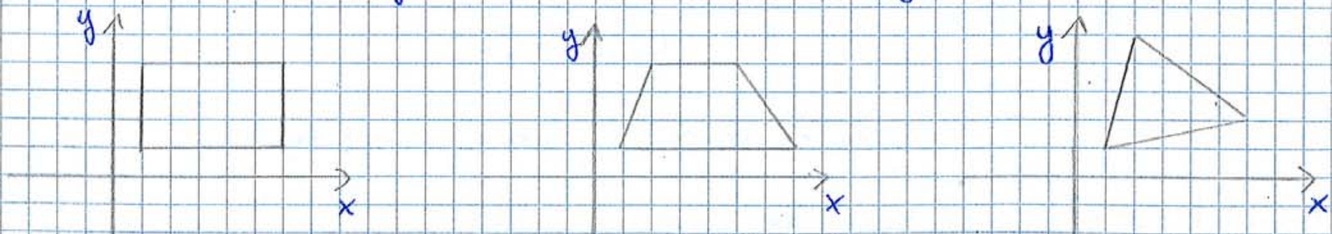


Diciamo che Ω è X-SEMPLICE o ORIZZONTALMENTE CONVESSO se Ω è della forma:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$

dove $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue

OSSERVAZIONE: Questi insiemi sono misurabili.
Un rettangolo è sia x-semplice che y-semplice.



TEOREMA di integrazione su insiemi x-semplici e y-semplici (di riduzione)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme y-semplice, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ con $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua allora:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

TEOREMA del cambiamento di variabile

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti, misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che:

1) ϕ è biettiva;
2) ϕ è di classe C^1 su Ω' con $\det J_\phi(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in \Omega'$.

Allora si ha che $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \left| \det J_\phi(u,v) \right| du\,dv$

$n=1$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ con $\begin{array}{l} a = \varphi(\alpha) \\ b = \varphi(\beta) \end{array}$

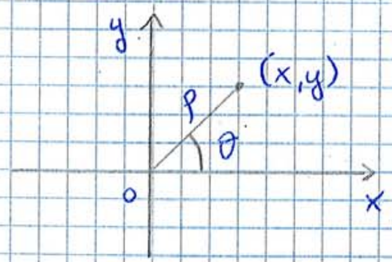
OSSERVAZIONE: Se ϕ non è iniettiva su $A \subseteq \Omega'$ di misura nulla oppure se $\det\phi = 0$ su $A \subseteq \Omega'$ di misura nulla, si può applicare ugualmente la formula.

CAMBIAMENTI DI COORDINATE NOTEVOLI NEL PIANO

1) COORDINATE POLARI

$\phi: \underset{\rho}{[0,+\infty)} \times \underset{\theta}{[0,2\pi]} \to \mathbb{R}^2$ è $\phi(\rho,\theta) = (x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\sin\theta)$

Se $(x_0,y_0) = (0,0)$ allora $\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$



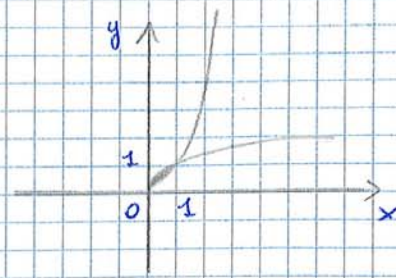
$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$|\det J_\phi(\rho,\theta)| = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = |\rho| = \rho$ poiché $\rho \geq 0$ per definizione

Per $\rho = 0 \Rightarrow \det J_\phi = 0$ su $\{0\} \times [0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ diventa un insieme di misura nulla, che per osservazione precedente non conta quindi si può applicare lo stesso la formula.

3) $\int_\Omega xy\,dxdy \quad , \quad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$



$x^2 \le \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^4 \le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x(x^3-1) \le 0 \end{cases}$ per trovare l'intervallo in cui varia x

$\begin{matrix} x\ge 0 \\ x^3-1 \ge 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \ge 0 \\ x \ge 1 \end{matrix}$

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; 0\le x\le 1 , \; x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ y-semplice

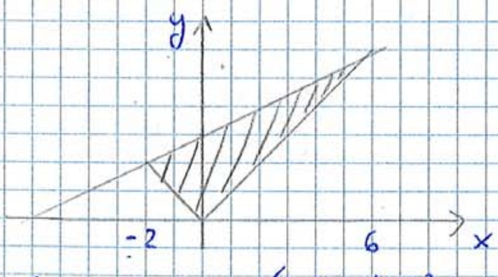
$\int_\Omega xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{2}\cdot y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right) dx =$

$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

4) $\int_\Omega xy\,dxdy \quad , \quad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; |x| \le y \le \frac{1}{2}x+3\}$

$|x| \le \frac{1}{2}x + 3 \qquad \begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{1}{2}x \le 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \le 0 \\ \frac{3}{2}x + 3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 6 \end{cases} \cup \begin{cases} x\le 0 \\ x \ge -2 \end{cases}$

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; -2 \le x \le 6 , \; |x| \le y \le \frac{1}{2}x+3\}$



Ω è y-semplice

posso non separare perché c'è y^2

$\int_\Omega xy\,dxdy = \int_{-2}^{6} \left[\int_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} xy\,dy\right] dx = \int_{-2}^{6} \left[\frac{x}{2}\,y^2\right]_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} dx = \int_{-2}^{6} \left(\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx =$

$= \int_{-2}^{6} \left(\frac{x^3}{8} + \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx = \int_{-2}^{6} \left(-\frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right) dx =$

$= \left[-\frac{3}{32}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2\right]_{-2}^{6} = -\frac{243}{2} + 108 + 81 + \frac{3}{2} + 4 - 9 = \frac{-243+216+162+3+8-18}{2} =$

$= 64$

15/10/12

V LEZIONE:

COORDINATE ELLITTICHE

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e siano $a, b > 0$.

$\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \phi(\rho, \theta) = (x_0 + a\rho\cos\theta,\ y_0 + b\rho\operatorname{sen}\theta)$

$(x_0, y_0) = (0,0) \qquad \phi(\rho, \theta) = (a\rho\cos\theta,\ b\rho\operatorname{sen}\theta)$

$$J_\phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} \qquad |\det J_\phi(\rho,\theta)| = |ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta| = ab\rho$$

$\rho = 0 \Rightarrow \det J_\phi = 0$ ma è un insieme di misura nulla

$\rho = 0 \Rightarrow \phi$ non è iniettiva ma sempre su un insieme di misura nulla

$\theta = 0,\ \theta = 2\pi \Rightarrow \phi$ non è iniettiva

$A' = [0, +\infty) \times \{2\pi\} \Rightarrow m(A') = 0$

OSSERVAZIONE: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω è simmetrico rispetto all'asse x se:
$\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(x,-y) \in \Omega$
Ω è simmetrico rispetto all'asse y se:
$\forall (x,y) \in \Omega$ anche $(-x,y) \in \Omega$

CASI:

1) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile e simmetrico rispetto all'asse x e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata tale che $\forall (x,y) \in \Omega : f(x,-y) = f(x,y)$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove } \Omega' = \{(x,y) \in \Omega : y \geq 0\}$$

2) Ω simmetrico rispetto all'asse x e $f : \Omega \to \mathbb{R} : \forall (x,y) \in \Omega : f(x,-y) = -f(x,y)$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

3) Ω simmetrico rispetto all'asse y e $f : \Omega \to \mathbb{R} : \forall (x,y) \in \Omega : f(-x,y) = f(x,y)$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove } \Omega' = \{(x,y) \in \Omega : x \geq 0\}$$

4) Ω simmetrico rispetto all'asse y e $f : \Omega \to \mathbb{R} : \forall (x,y) \in \Omega : f(-x,y) = -f(x,y)$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

- PIANO xy

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b,\ (x,y) \in \Omega_z\}$ dove $\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\}$, $\forall z \in [a,b]$, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata, se $\forall z \in [a,b]$ risulta che Ω_z è misurabile, allora:

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz$$

OSSERVAZIONE: Se Ω è un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi cartesiani $\Rightarrow \Omega = [a,b]\times[c,d]\times[h,k]$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è $f(x,y,z) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)$ con $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, $f_3 : [h,k] \to \mathbb{R}$ continue.
Allora $\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)\left(\int_h^k f_3(z)\,dz\right)$

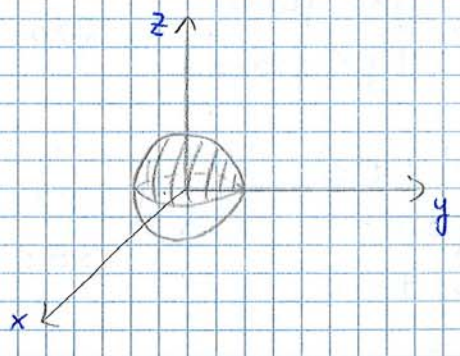
ESEMPIO:

1) $\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$

$x^2+y^2+z^2 \le 1$ $\quad \begin{cases} z^2 \le 1-x^2-y^2 \\ z \ge 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 1-x^2-y^2 \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{matrix} 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \le 1 \end{matrix}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$
dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$



Applichiamo fili // asse z

$$\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dz\,dy = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz\right] dx\,dy$$

$$= \int_D (x^2+y^2)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy = \frac{1}{2}\int_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

coordinate polari nel piano xy

$\phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $\quad \rho \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, $|\det J_\phi(\rho,\theta)| = \rho$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 106

18/10/12

VI LEZIONE:

TEOREMA (del cambiamento di variabile negli integrali tripli)

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti, misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\Phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che:

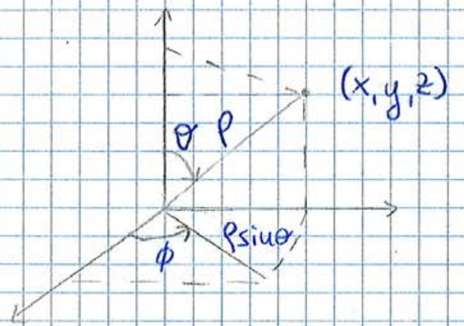
1) Φ è biettiva
2) Φ è di classe C^1 su Ω' con $\det J_\Phi(u,v,w) \neq 0 \quad \forall (u,v,w) \in \Omega'$

Allora $\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$

$(x,y,z) = \phi(u,v,w)$

OSSERVAZIONE: Se Φ non è iniettiva su $A \subseteq \Omega'$ con $m(A)=0$ oppure se $\det J_\Phi = 0$ su $A \subseteq \Omega'$ con $m(A)=0$, allora la formula continua a valere.

COORDINATE POLARI (o SFERICHE)



$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
θ = colatitudine
ϕ = longitudine

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Sia $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\Phi: [0,+\infty] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Phi(\rho,\theta,\phi) = (x_0 + \rho\sin\theta\cos\phi,\ y_0 + \rho\sin\theta\sin\phi,\ z_0 + \rho\cos\theta)$

$$J_\Phi(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta,\phi)| = |\cos\theta(\rho^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi + \rho^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi) + \rho\sin\theta(\rho\sin^2\theta\cos^2\phi + \rho\sin^2\theta\sin^2\phi)| = |\rho^2\sin\theta\cos^2\theta + \rho^2\sin\theta\sin^2\theta| \underset{0\le\theta\le\pi \,\to\, \sin\theta\ge 0}{=} |\rho^2\sin\theta| = \rho^2\sin\theta$$

$$\Phi = \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ |\det J_\Phi(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_{\Omega'} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi} \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho d\theta d\phi =$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\rho^2\operatorname{sen}\theta\, d\rho d\theta d\phi = \int_{\Omega'} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\cos^2\phi\, d\rho d\theta d\phi$$

$$\Phi(\Omega') = \Omega \qquad (x,y,z) \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 2 \\ \rho^2\operatorname{sen}^2\theta \leq \rho^2\cos^2\theta \\ \rho\cos\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ \operatorname{sen}^2\theta \leq \cos^2\theta \\ \cos\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ \operatorname{sen}\theta \leq \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \Omega' = \left\{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\right\}$$

$$= \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi\right) = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{1}{2}(\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2}) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{2}-6)$$

OSSERVAZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ diciamo che Ω è simmetrico rispetto al:
- piano xy se $\forall (x,y,z) \in \Omega$ anche $(x,y,-z) \in \Omega$.
- piano xz se $\forall (x,y,z) \in \Omega$ anche $(x,-y,z) \in \Omega$
- piano yz se $\forall (x,y,z) \in \Omega$ anche $(-x,y,z) \in \Omega$

Ci sono sei casi:

1) Ω simmetrico rispetto al piano xy, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\forall (x,y,z) \in \Omega$: $f(x,y,-z) = f(x,y,z)$

allora $\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = 2\int_{\Omega'} f(x,y,z)\,dxdydz$, $\Omega' = \{(x,y,z) \in \Omega : z \geq 0\}$

2) Ω simmetrico rispetto al piano xy, $f: \Omega \to \mathbb{R}$: $\forall (x,y,z) \in \Omega$: $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$

allora $\int_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = 0$

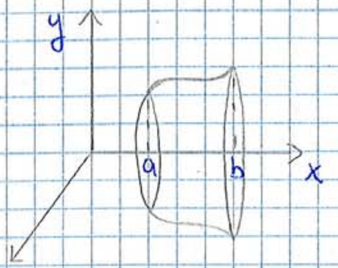
Il volume del TORO è: $(2\pi y_0)\pi R^2$

Il volume si ottiene moltiplicando l'area del cerchio per la circonferenza di raggio y_0 rispetto all'asse z.

ESEMPIO:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua con $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$,

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ e Ω ottenuto dalla rotazione completa di S attorno all'asse x.



$$m(\Omega)=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

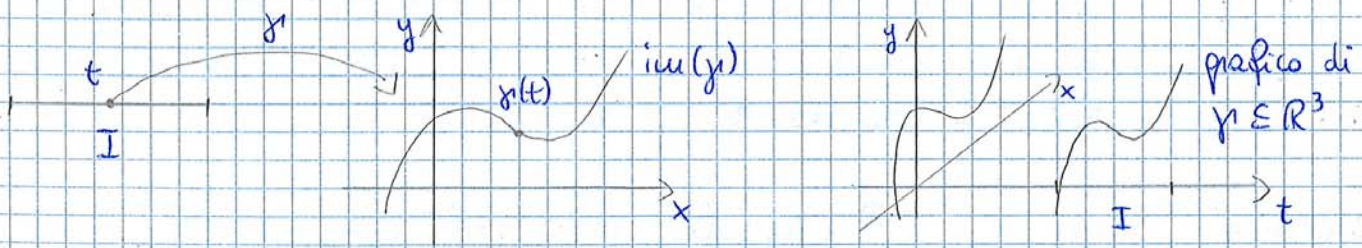
DIMOSTRAZIONE: $$m(\Omega)=2\pi\int_S y\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ y\text{-semplice}}}{=} 2\pi\int_a^b\left[\int_0^{f(x)} y\,dy\right]dx = 2\pi\int_a^b\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{f(x)}dx =$$

$$=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

INTEGRALI CURVILINEI

RICHIAMI SULLE CURVE PARAMETRICHE

DEFINIZIONE: Sia $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervallo, si chiama CURVA PARAMETRICA una funzione continua $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$;
si chiama SOSTEGNO di γ l'immagine di γ.



Diciamo che γ è semplice se $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ implica $t_1=t_2$ oppure che t_1 e t_2 sono gli estremi di I, se I contiene i suoi estremi (ovvero non si interseca mai).
Se γ è semplice induce sul sostegno un verso di percorrenza ovvero un orientamento.

$\forall \tau \in J : \eta'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)$

Inoltre γ è regolare $\Leftrightarrow$ η è regolare;

d) γ e η inducono lo stesso orientamento sul sostegno.

PROPRIETÀ 2: Siano $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ e $\eta: J \to \mathbb{R}^n$ curve e sia $\alpha: J \to I$ come nella def. precedente tranne che per il segno di α' e supponiamo che $\alpha'(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in J$.
Allora valgono a), b), c) e
d') γ e η inducono versi opposti di percorrenza sul sostegno.

25/10/12

VIII LEZIONE:

DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, diciamo che Ω è CONNESSO per ARCHI se $\forall x, y \in \Omega$ esiste una curva parametrica $\gamma: [a,b] \to \Omega : \gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

2 punti generici di Ω

INTEGRALI CURVILINEI

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare. Si chiama INTEGRALE CURVILINEO (di prima specie) di f lungo γ il numero reale:

$$\boxed{\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt}$$

Se $f = 1$, allora $\int_\gamma f = \ell_\gamma$ dove ℓ_γ è la lunghezza di γ.

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare. Si chiama INTEGRALE CURVILINEO di II SPECIE o INTEGRALE DI LINEA di F lungo γ il numero reale:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \underbrace{\cdot}_{\text{prodotto scalare}} \gamma'(t) \, dt}$$

Somma di $F(\gamma(t))$ modulo in ogni punto, lungo la direzione della curva considerata

È il lavoro compiuto dal campo di forze per trasferire la grandezza fisica in oggetto da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ lungo la curva γ.

$\eta(t) = \gamma(2\pi t) = \gamma(\alpha(t)) = (\gamma \circ \alpha)(t) \qquad 0 \le t \le 1$

$\alpha(t) = 2\pi t$

$\alpha'(t) = 2\pi > 0 \qquad \alpha([0,1]) = [0, 2\pi] \Rightarrow \eta$ e γ sono equivalenti

TEOREMA (dipendenza dell'integrale di linea dal verso indotto dalla parametrizzazione sulla curva)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ e $\eta: [c,d] \to \Omega$ due curve parametriche semplici e regolari. Allora si ha che:

1) se γ e η sono equivalenti allora $\int_\gamma F \cdot dP = \int_\eta F \cdot dP$

2) se esiste $\alpha: [c,d] \to [a,b]$ biettiva, di classe C^1 su $[c,d]$ con $\alpha'(\tau) < 0$ $\forall \tau \in [c,d]$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$ allora

$$\int_\gamma F \cdot dP = - \int_\eta F \cdot dP$$

DIMOSTRAZIONE: 2) $\eta(\tau) = \gamma(\alpha(\tau))$, $\eta'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau) \quad \forall \tau \in [c,d]$

$$\int_\eta F \cdot dP = \int_c^d F(\eta(\tau)) \cdot \eta'(\tau)\, d\tau = \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau))) \cdot \gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)\, d\tau =$$

$t = \alpha(\tau) \quad dt = \alpha'(\tau) d\tau \qquad \alpha(c) = b \quad \alpha(d) = a$ (perché $\alpha'(\tau) < 0$)

$$= \int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = - \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = - \int_\gamma F \cdot dP$$

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Conformemente alla definizione di curva regolare a tratti, siano $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ tali che $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ è regolare, $\forall k = 1, \dots, m$.
Si chiama integrale di linea di F lungo γ il numero reale

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \dots + \int_{t_{m-1}}^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Si dice che σ è SEMPLICE se σ è iniettiva.
Si dice che σ è REGOLARE se σ è di classe C^1 su A e il rango della matrice Jacobiana di σ in ogni $(u,v) \in A$ è massimo, cioè 2.
Si chiama CALOTTA REGOLARE la restrizione di una superficie parametrica semplice e regolare ad un compatto $K \subseteq A$ tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti.

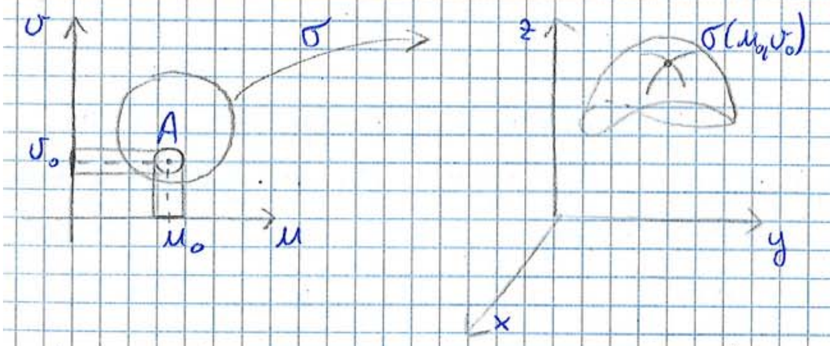
$\sigma : A \to \mathbb{R}^3$

$\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

rango $J_\sigma(u,v)$ è 2 $\iff$ le colonne sono linearmente indipendenti

$\iff$ $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$ sono linearmente indipendenti.



$\gamma(u) = \sigma(u, v_0)$

$\eta(v) = \sigma(u_0, v)$

$\gamma'(u) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v_0) \to \gamma'(u_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$

$\eta'(v) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v) \to \eta'(v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$

Data questa indipendenza $\Rightarrow$ in ogni punto della superficie esiste il piano tangente. Una superficie è regolare se $\forall P \in \sigma$ esiste piano tangente. Superfici con spigoli non sono regolari (cono, cubo ...).

$$\begin{cases} x = \rho\cos v \\ y = \rho\sin v \\ z = u \end{cases} \quad \text{dove } u \in \mathbb{R},\ v \in (0, 2\pi)$$

$x^2+y^2=\rho^2$

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=\rho^2,\ z \in \mathbb{R}\} \setminus \{(\rho, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

$v \neq 0, 2\pi \Rightarrow x \neq \rho,\ y \neq 0 \rightarrow$ Tutto il cilindro tranne una generatrice

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & -\rho\sin v \\ 0 & \rho\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(J_\sigma(u,v)) = 2 \Rightarrow \sigma \text{ è regolare}$$

2) Siano $\rho>0$ fissato, $\sigma : (0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u,v) = (\rho\sin u\cos v,\ \rho\sin u\sin v,\ \rho\cos u)$ SFERA

$\Sigma = \operatorname{im}(\sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \sigma(u,v),\ 0<u<\pi,\ 0<v<2\pi\}$

$(x,y,z) = \sigma(u,v) = (\rho\sin u\cos v,\ \rho\sin u\sin v,\ \rho\cos u)$

$$\begin{cases} x = \rho\sin u\cos v \\ y = \rho\sin u\sin v \\ z = \rho\cos u \end{cases} \quad 0<u<\pi,\ 0<v<2\pi$$

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=\rho^2\} \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2=\rho^2,\ x>0\}$

$v \neq 0, 2\pi \Rightarrow x \neq \rho\sin u,\ y \neq 0,\ z \neq \rho\cos u \Rightarrow x^2+z^2=\rho^2$

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \rho\cos u\cos v & -\rho\sin u\sin v \\ \rho\cos u\sin v & \rho\sin u\cos v \\ -\rho\sin u & 0 \end{pmatrix} \qquad r(J_\sigma(u,v)) = 2 \Rightarrow \sigma \text{ è regolare}$$

3) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(x,y) = (x, y, f(x,y))$ GRAFICO

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \sigma(x,y),\ (x,y) \in A\}$

$(x,y,z) = \sigma(x,y) = (x, y, f(x,y))$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 106

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial}(x,y) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\vec{j} + \vec{k} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)$$

Se $y = g(x,z) \Rightarrow \sigma(x,z) = (x, g(x,z), z) \Rightarrow N(x,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial g}{\partial z}(x,z) =$
$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,z), -1, \frac{\partial g}{\partial z}(x,z)\right)$

Se $x = g(y,z) \Rightarrow \sigma(y,z) = (g(y,z), y, z) \Rightarrow N(y,z) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) =$
$= \left(1, -\frac{\partial g}{\partial y}(y,z), -\frac{\partial g}{\partial z}(y,z)\right)$

ESEMPIO: Calcolare l'area del grafico di una funzione.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, connesso per archi, $K \subseteq A$ compatto tale che ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K \text{ e } z = f(x,y)\}$.
Calcolare l'area della superficie Σ.

$\Sigma = G_{f|K} \Rightarrow \sigma(x,y) = (x, y, f(x,y))$

L'area di Σ: $A_\Sigma = \int_\Sigma 1 \, d\sigma = \int_K 1 \cdot \|N(x,y)\| \, dx dy$

dove $N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)$

$\|N(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}$

Quindi $A_\Sigma = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} \, dx dy$

$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 8\}$

$\Rightarrow \sigma(x) = (x, y, f(x,y)) = \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$

$N(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-x, -y, 1)$

$\|N(x,y)\| = \sqrt{1+x^2+y^2}$

TEOREMA (indipendenza dell'integrale di superficie dalla parametrizzazione)

Siano $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ e $\tau: K' \to \mathbb{R}^3$ due calotte regolari equivalenti, $\Sigma = \sigma(K) = \tau(K')$ il loro comune sostegno e $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua allora:

$$\int_\sigma f = \int_\tau f$$

Se $\tau = \sigma \circ \alpha$ con α biettiva, di classe C^1 e $\det J_\alpha < 0$ (cioè σ e τ hanno verso di attraversamento opposto) allora:

$$\int_\sigma f = \int_\tau f$$ poiché nella formula si considera la $\|N\|$

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare e $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ. Si chiama flusso del campo F attraverso σ (o Σ) il numero reale:

$$\boxed{\int_\sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv}$$

prodotto scalare

Altri simboli sono $\int_\Sigma F \cdot n$, $\int_\sigma F \cdot n\, d\sigma$, $\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma$

dove $N(u,v) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$

Σ

OSSERVAZIONE: $\Sigma = \partial D$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ compatto con $\mathrm{int}(D) \neq \emptyset$

$\Sigma = \sigma(K)$, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$

$N(u,v) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$

N è entrante o uscente da Σ?

Consideriamo un qualunque punto (u_0, v_0) interno a K e controlliamo se $N(u_0,v_0)$ è entrante o uscente da D.

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_{\Sigma_1} F \cdot n + \int_{\Sigma_2} F \cdot n$$

1°) $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2<1$ $\Rightarrow \Sigma_1$

2°) $z=1$, $x^2+y^2<1$ $\Rightarrow \Sigma_2$

$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2 , x^2+y^2<1\}$

$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=1, x^2+y^2<1\}$

$\int_{\Sigma_1} F \cdot n = \int_{K_1} F(\sigma(x,y)) \cdot N_1(x,y)\, dxdy$ N_1 esterno a D

$\Sigma_1 = \sigma_1(K_1)$, $\sigma_1 : K_1 \to \mathbb{R}^3$ è $\sigma_1(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$

$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = (-2x, -2y, 1)$

$(x_0,y_0) = (0,0) \Rightarrow N(x_0,y_0) = (0,0,1)$

$\sigma_1(x_0,y_0) = \sigma_1(0,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ dal disegno si vede che N è entrante

un vettore uscente è $N_1(x,y) = -N(x,y) = (2x, 2y, -1)$

$F(\sigma_1(x,y)) \cdot N(x,y) = F(x,y,x^2+y^2) \cdot (2x,2y,-1) = (x^2, y^2, x^2+y^2) \cdot (2x, 2y, -1) =$
$= 2x^3+2y^3-x^2-y^2$

$\int_{\Sigma_1} F \cdot n = \int_{K_1} (2x^3+2y^3-x^2-y^2)\, dxdy = \int_{K_1'} (2\rho^3\cos^3\theta + 2\rho^3\sin^3\theta - \rho^2)\, \rho\, d\rho d\theta =$

$= \int_{K_1'} [2\rho^4(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - \rho^3]\, d\rho d\theta$

$K_1' = [0,1) \times [0, 2\pi]$

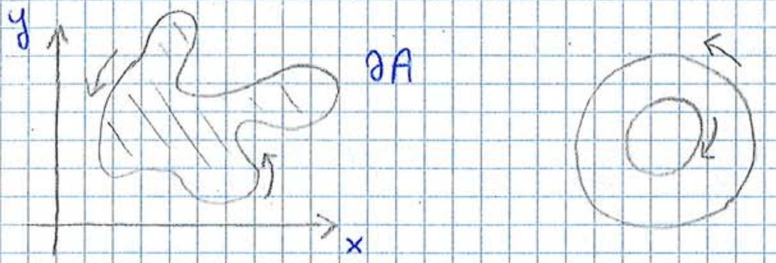
$= \left(\int_0^1 2\rho^4 d\rho\right) \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} (\cos^3\theta + \sin^3\theta) d\theta\right)}_{0} - 2\pi \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) = -2\pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}$

TEOREMI DI GREEN, STOKES E GAUSS

Sono uguaglianze di integrali in diverse dimensioni.

TEOREMA DI GREEN

DEFINIZIONE: Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, limitato, non vuoto tale che ∂A è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti. Diciamo che ∂A è orientato positivamente se la curva induce su di esso un verso di percorrenza antiorario. Cioè ∂A è orientato positivamente se percorrendo idealmente ∂A si vedono i punti interni di A alla propria sinistra.



Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2)$, $A \subseteq \Omega$ un aperto, limitato, non vuoto tale che $\partial A \subseteq \Omega$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice, regolare a tratti. Supponiamo che ∂A sia orientato positivamente.

Allora:
$$\boxed{\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy}$$

COROLLARIO: Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, limitato, non vuoto tale che ∂A è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice, regolare a tratti che induce su di esso un orientamento positivo e $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo di classe C^1, $F = (f_1, f_2)$ tale che
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1$$

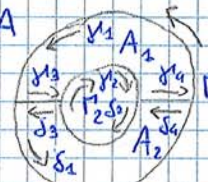
Allora $m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP$

OSSERVAZIONE: $\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \Gamma_m$, dove Γ_i $i = 1, \dots, m$ è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice, regolare a tratti.
Se ∂A è orientato positivamente, allora:

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \dots + \int_{\Gamma_m} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

· $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_m$ devono essere a 2 a 2 disgiunti

DIMOSTRAZIONE (cenni): A



$A = A_1 \cup A_2$

$$\int_A = \int_{A_1} + \int_{A_2} = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \cancel{\int_{\gamma_3} F \cdot dP} + \cancel{\int_{\gamma_4} F \cdot dP} + \int_{\delta_1} F \cdot dP + \int_{\delta_2} F \cdot dP +$$

$$+ \cancel{\int_{\delta_3} F \cdot dP} + \cancel{\int_{\delta_4} F \cdot dP} = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP$$

ESEMPIO:

3) Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y) = (x^2 y^3, y)$ lungo il bordo di $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ orientato positivamente.

Due modi:

1) $\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP$

2) Green $\Rightarrow \oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A (0 - 3x^2y^2)\,dxdy = -3 \int_{A'} \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\, d\rho\, d\theta$

$A' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \rho < 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$= -3 \left(\int_1^2 \rho^5 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta \right) = -3 \left[\frac{1}{6} \rho^6 \right]_1^2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta \right)_0^{2\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{8} 63 \cdot \frac{1}{4} 4\pi = -\frac{63}{8}\pi$$

12/11/12

XIII LEZIONE:

TEOREMA DI STOKES (o del rotore)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, limitato, connesso per archi tale che ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a due a due disgiunti di curve parametriche chiuse, semplici, regolari a tratti, $K = \bar{A}$ e $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare con $\partial\sigma$ orientato positivamente.

Allora: $\boxed{\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot n \, d\sigma}$ flusso del rotore

dove $\text{rot}F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è il campo vettoriale definito da, $\forall (x,y,z) \in \Omega$:

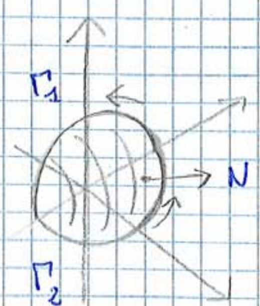
$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z), \right.$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \right)$$

$\left(\begin{matrix} 3 & 2 \\ y & z \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 3 \\ z & x \end{matrix} \to \begin{matrix} 2 & 1 \\ x & y \end{matrix} \right)$

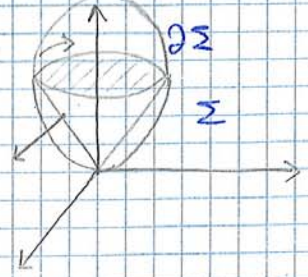
ESEMPIO:

1) Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y,z) = (x, 0, y)$ lungo il bordo di $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ z \geq 0\}$ orientato positivamente rispetto al vettore normale uscente dalla sfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.



$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

1° modo: $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP$

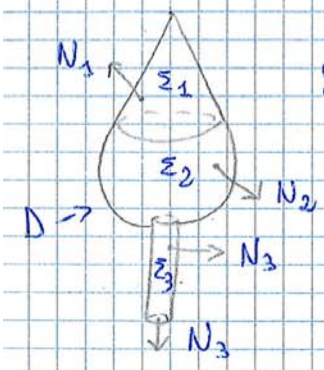


$z = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 \le R^2$
$R \geq 0$

Si possono considerare tutte le superfici che hanno come bordo la circonferenza, sia con il paraboloide, la sfera, il cono, il cerchio, il risultato dell'integrale del flusso del rotore (Stokes) è sempre uguale.

TEOREMA DI GAUSS

DEFINIZIONE: Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto, limitato, connesso per archi. Si dice che D è un aperto con bordo se ∂D è l'unione di un numero finito di sostegni di calotte semplici e regolari orientate secondo il verso uscente da D e aventi a 2 a 2 al più in comune sostegni di curve parametriche semplici regolari a tratti.



$$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

TEOREMA DI GAUSS (o della divergenza)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$ e $D \subseteq \Omega$ un aperto con bordo tale che $\partial D \subseteq \Omega$. Allora il flusso uscente di F da ∂D è

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

dove $\operatorname{div} F: \Omega \to \mathbb{R}$ è $\forall (x,y,z) \in \Omega$:

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \nabla f(x) = F(x) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = f_2(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = f_n(x) \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

OSSERVAZIONE: $\forall c \in \mathbb{R}, \ \nabla c = 0$

$\nabla(f+c) = \nabla(f) + \nabla c = \nabla f$

Se F è conservativo, allora F ammette infiniti potenziali.

Per $n=1$ significa che ammette primitiva.

ESEMPIO

1) $F(x,y) = (0,0)$ è conservativo

$f(x,y) = c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

2) $G(x,y) = (1,2)$ è conservativo

$g(x,y) = x + 2y$

3) $F(x,y) = (2xy + y^2, 2xy + x^2)$ è conservativo

$f(x,y) = x^2y + xy^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$$

DEFINIZIONE: Siano $0 \le a < b \le +\infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \|x\| < b\}$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è RADIALE se F è della forma:

$F(x) = \varphi(\|x\|)x$, dove $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione

ESEMPIO:

Il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta in $(0,0,0)$ è

$$F(x,y,z) = -\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$\varphi(t) = -\frac{1}{t^3}$

$\Phi'(t) = t\varphi(t) = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = \Phi(\|(x,y,z)\|) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

ESEMPIO:

1) $F(x,y) = \left((x^2+y^2)x, (x^2+y^2)y\right)$ è conservativo?

$= (x^2+y^2)(x,y)$

$(x^2+y^2) = \left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^2 = \|(x,y)\|^2(x,y) = \varphi(\|(x,y)\|)(x,y)$

$\Rightarrow$ F è radiale e continuo $\Rightarrow$ è conservativo

DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Diciamo che Ω è connesso per archi se $\forall x, y \in \Omega$ esiste una curva parametrica $\gamma: [a,b] \to \Omega$ tali che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

OSSERVAZIONE: Se Ω è connesso per archi allora $\forall x, y \in \Omega$ e $x \neq y$, esiste una curva parametrica semplice e regolare a tratti $\gamma: [a,b] \to \Omega$ tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

PROPOSIZIONE (proprietà dei potenziali)
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, connesso per archi, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo e $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su Ω. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c$, $\forall x \in \Omega$.

DIMOSTRAZIONE: $f - g: \Omega \to \mathbb{R}$

f e g sono differenziabili in Ω con $\nabla f(x) = F(x)$, $\nabla g(x) = F(x)$, $\forall (x) \in \Omega \Rightarrow f-g$ è differenziabile in Ω con

$\nabla(f-g)(x) = \nabla f(x) - \nabla g(x) = F(x) - F(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Poiché Ω è connesso per archi risulta che $f-g$ è costante in Ω.
Infatti, siano $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$, proviamo che $(f-g)(x) = (f-g)(y)$

Sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ semplice e regolare a tratti tale che

TEOREMA (sull'integrale di linea di un campo conservativo)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Allora:

$$\int_\gamma F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Inoltre se γ è chiusa allora: $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

13/11/12

XV LEZIONE:

DIMOSTRAZIONE: Siano $t_0 = a < t_1 < t_2 \dots < t_m = b$ tale che γ è di classe $\mathcal{C}^1$ su (t_{k-1}, t_k) $\forall k = 1, \dots, m$ con $\gamma' \neq 0$ e in t_k esistono le derivate laterali di γ, $\forall k = 0, \dots, m$.

Per definizione $\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

Sia $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(t) = f(\gamma(t))$

$$[a,b] \longrightarrow \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) \longmapsto f(\gamma(t)) = \varphi(t)$$

F continuo e $\nabla f = F \Rightarrow f$ è di classe $\mathcal{C}^1$

φ è di classe $\mathcal{C}^1$ in ogni (t_{k-1}, t_k) $\forall k = 1, \dots, m$

con $\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

$\forall t \in (t_{k-1}, t_k)$, $\forall k = 1, \dots, m$

Quindi $\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\, dt \underset{\varphi' \text{ continua}}{=} \sum_{k=1}^{m} \left[\varphi(t)\right]_{t_{k-1}}^{t_k} =$

$= \sum_{k=1}^{m} \left[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right] = (\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_2) - \varphi(t_1)) + \dots$

$+ (\varphi(t_{m-1}) - \varphi(t_{m-2})) + (\varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1})) = -\varphi(t_0) + \varphi(t_m) =$

$= \varphi(t_m) - \varphi(t_0) = \varphi(b) - \varphi(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

In particolare se γ è chiusa allora $\gamma(a) = \gamma(b)$ e

quindi $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$ ∎

$= \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP \implies \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

b) $\Rightarrow$ a)

Per dimostrare che F è conservativo proviamo che esiste un potenziale f di F su Ω, cioè una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$, cioè se $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $\forall j = 1, \dots, m$ e $\forall x \in \Omega$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$

Sia $x_0 \in \Omega$ fissato e sia $x \in \Omega$ qualunque. Poiché Ω è connesso per archi, sia $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$.

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita da: $\forall x \in \Omega$, $f(x) = \int_\gamma F \cdot dP$

Per l'ipotesi b) questa definizione è ben posta, cioè non dipende dalla scelta della curva γ.

Dimostriamo che f è un potenziale di F su Ω, cioè che f è differenziabile in Ω e $\forall j = 1, \dots, m$ e $\forall x \in \Omega$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$.

Consideriamo $j = 1$.

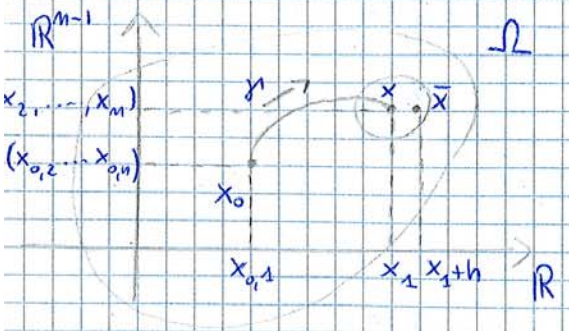
$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h, x_2 \dots x_m) - f(x_1, x_2, \dots x_m)}{h}$

se $\exists$ in $\mathbb{R}$

$x = (x_1, \dots, x_m)$

$x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,m})$ $\implies \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h}$

$\bar{x} = (x_1 + h, \dots, x_m)$



Poiché Ω è aperto e $x \in \Omega$, $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq \Omega$

Sia $0 < h < r$ e consideriamo $\bar{x} = (x_1 + h, x_2, \dots, x_m)$, $\bar{x} \in B_r(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 106

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$, $\forall j = 1, \dots, m$, $\forall x \in \Omega$

F è continuo $\Rightarrow f_j$ continua $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}$ continua $\Rightarrow f$ è differenziabile in Ω con $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = F(x)$

$\Rightarrow f$ è un potenziale di F su $\Omega \Rightarrow F$ è conservativo. ∎

22/11/12

XVI LEZIONE:

TEOREMA (condizione necessaria per i campi di classe C^1)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Se F è conservativo allora $\forall x \in \Omega$ e $\forall i, j = 1, \dots, m$ si ha che:

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)}$$

DIMOSTRAZIONE: F è conservativo $\Rightarrow \exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = F(x)$ $\forall x \in \Omega$, cioè $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall x \in \Omega$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$

F è di classe $C^1 \Rightarrow f_1$ è $C^1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ è $C^1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ è continua $\forall i, \forall j \Rightarrow f$ è di classe C^2

Siano $i, j = 1, \dots, m$ e $x \in \Omega$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \underset{\text{Shwartz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

OSSERVAZIONE: F conservativo $\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$

$\cancel{\Leftarrow}$

$\exists i, j = 1, \dots, m$: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \Rightarrow F$ NON è conservativo

Per $m = 3$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ $\forall i, j = 1, 2, 3 \iff \text{rot} F = \vec{0}$

infatti $\text{rot} F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$

TEOREMA (condizione sufficiente per i campi di classe $\mathcal{C}^1$)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$, $F = (f_1, \dots f_n)$. Se Ω è semplicemente connesso e $\forall x \in \Omega$ e $\forall i,j = 1, \dots, n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ allora F è conservativo.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una qualunque curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti.

Dimostriamo che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$

$n=2$ Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow$ la parte di piano racchiusa nel sostegno di γ è contenuta in Ω. Sia A questo insieme $A \subseteq \Omega$ e $\partial A = im(\gamma) \subseteq \Omega$.

C.N. $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$

$\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y), \ \forall (x,y) \in A$

Se γ induce sul suo sostegno $im(\gamma) = \partial A$ un verso antiorario, allora

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP \underset{\text{Green}}{=} \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx dy = 0$$

Se γ induce un verso di percorrenza orario su $im(\gamma) = \partial A$ allora

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP = -\int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx dy = 0$$

Per il teorema di equivalenza F è conservativo.

$n=3$ Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow \exists \sigma : K \to \Omega$ calotta regolare tale che $\partial\sigma = im(\gamma)$

C.N. $rot F(x,y,z) = \vec{0}$, $\forall (x,y,z) \in \Omega$

poiché $\sigma(K) = im(\sigma) \subseteq \Omega \Rightarrow rot F(x,y,z) = \vec{0}$, $\forall (x,y,z) \in \sigma(K)$

Se γ induce sul $\partial\sigma$ un orientamento positivo, allora

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial\sigma} F \cdot dP \underset{\text{Stokes}}{=} \int_\sigma rot F \cdot n \, d\sigma = 0$$

Se γ induce su $\partial\sigma$ un orientamento non positivo, allora

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = -\int_\sigma rot F \cdot n \, d\sigma = 0$$

Per il teorema di equivalenza F è conservativo. ∎

26/11/12

XVII LEZIONE:

RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI

Una successione è $a: A \to \mathbb{R}$, A sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con $\sup A = +\infty$
$n \longmapsto a_n$

le successioni sono funzioni continue ma non derivabili, l'unico punto di accumulazione è $+\infty$.

DEFINIZIONE: Sia (a_n) una successione reale e sia $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, diciamo che (a_n) ha limite ℓ per n che tende a $+\infty$ se per ogni intorno $I(\ell)$ di ℓ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $a_n \in I(\ell)$. In tal caso scriviamo:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \quad \text{oppure} \quad \lim_n a_n = \ell$$

- Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora $I(\ell) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

$$\lim_n a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon$$

- Se $\ell = +\infty$ $(-\infty)$ allora $I(\ell) = (b, +\infty)$ $(I(\ell) = (-\infty, b))$, $b \in \mathbb{R}$

$$\lim_n a_n = +\infty \ (-\infty) \iff \forall b \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b \ (a_n < b)$$

Diciamo che (a_n) è **CONVERGENTE** se $\lim_n a_n \in \mathbb{R}$.

Diciamo che (a_n) è **POSITIVAMENTE (NEGATIVAMENTE) DIVERGENTE** se $\lim_n a_n = +\infty \ (-\infty)$

Diciamo che (a_n) è **INDETERMINATA** se $\nexists \lim_n a_n$

ESEMPIO:

1) $a_n = \frac{2n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ converge

2) $a_n = n! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ diverge positivamente

3) $a_n = -n^3 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ diverge negativamente

4) $a_n = (-1)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \nexists$ è indeterminata

8') $a^n = o(n!)$, $n \to +\infty$ $\forall a > 0$

9') $n! = o(n^n)$, $n \to +\infty$

FORMULA DI STIRLING: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $n \to +\infty$

DEFINIZIONE: Sia (a_n) una successione. Diciamo che una successione (b_n) è una SOTTOSUCCESSIONE di (a_n) se $\exists\ \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $b_n = a_{\varphi(n)}$.
In generale si denota che a_{n_k}

ESEMPIO:
$(a_n) \Rightarrow$ sono sottosuccessioni di a_n:

$b_n = a_{n+1}$, $c_n = a_{n-1}$, $d_n = a_{n^2}$, $e_n = a_{n^3+1}$

Non sono sottosuccessioni di a_n

$f_n = a_{\log(n)}$, $g_n = a_{71-n}$ non è crescente
non è a valori in $\mathbb{N}$

TEOREMA: Sia (a_n) una successione, supponiamo che $\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Allora ogni sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) ha lo stesso limite ℓ
cioè $\lim_k a_{n_k} = \ell$

TEOREMA (di BOLZANO - WEIERSTRASS)
Sia (a_n) una successione reale limitata, allora (a_n) ammette almeno una sottosuccessione convergente.
$|a_n| \leq M,\ \forall n$

TEOREMA (criterio del rapporto per le successioni)
Sia $(a_n) \geq 0$ $\forall n$, supponiamo che esista

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora si ha che:
1) se $\ell < 1$, allora $\lim_n a_n = 0$
2) se $\ell > 1$ (anche $\ell = +\infty$), allora $\lim_n a_n = +\infty$

OSSERVAZIONE: se $\ell = 1$ non si può dire nulla

Diciamo che la serie di a_n converge **ASSOLUTAMENTE** se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

RICAPITOLANDO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad , \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge positivamente} \\ -\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge negativamente} \\ \nexists \Rightarrow \sum a_n \text{ è indeterminata} \end{cases}$$

ESEMPI: serie notevoli

1) Serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, $a \in \mathbb{R}$ convenzione $0^0 = 1$

a: ragione della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n : \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{1-a} \text{ se } |a|<1 \\ \text{diverge positivamente se } a \geq 1 \\ \text{è indeterminata se } a \leq -1 \end{cases}$$

Infatti sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$

OSSERVAZIONE: $(1-a)(1+a+a^2+\dots+a^n) = 1+a+a^2+\dots+a^n - a - a^2 - \dots - a^n - a^{n+1} =$
$= 1 - a^{n+1}$

Se $a \neq 1 \Rightarrow S_n = 1 + a + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Se $a = 1 \Rightarrow S_n = n+1 \Rightarrow \lim_n S_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ div. pos.

Se $a \neq 1 \Rightarrow S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$

$$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n \left(\frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{se } |a|<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 106

CRITERI DI CONVERGENZA

PROPOSIZIONE: Il carattere di una serie non cambia se si aggiunge, si elimina o si modifica un numero finito di termini della serie.

OSSERVAZIONE: Se $\sum a_n$ converge e modifichiamo, eliminiamo, aggiungiamo un numero finito di termini, allora la somma della serie risultante potrebbe cambiare.

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$$

$p \geq 1$

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}) = S - (a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

serie geometrica con ragione $a = \frac{1}{2}$

TEOREMA DELL'ALGEBRA DELLE SERIE

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora si ha che:

1) se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono, allora $\sum (a_n + b_n)$ e $\sum (\lambda a_n)$ convergono e si ha che $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ e $\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum (a_n)$;

2) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergono entrambe positivamente (negativamente), allora $\sum (a_n + b_n)$ diverge positivamente (negativamente);

3) se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge positivamente (negativamente), allora $\sum (a_n + b_n)$ diverge positivamente (negativamente)

TEOREMA (condizione necessaria per la convergenza)

Sia (a_n) una successione reale, se $\sum a_n$ converge allora

$$\lim_n a_n = 0$$

DIMOSTRAZIONE: $\sum a_n$ converge, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\Downarrow$

$\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$

(S_{n-1}) è una sottosuccessione di $S_n \Rightarrow \lim_n S_{n-1} = S$

OSSERVAZIONE: Se $a_n \geq 0$ e $\lim_n a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente

TEOREMA (Criterio del confronto)
Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n$, allora:

1) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$;

2) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Casi scoperti:

3) $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow$ non si può dire nulla su $\sum a_n$

4) $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ non si può dire nulla su $\sum b_n$

ESEMPIO:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$n^2 \geq n^2 - n \quad \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n} \quad \forall n \geq 2$

$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{1^2} \leq 2$

03/12/12

XIX LEZIONE:

ESEMPIO:

2) la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Si ha che $\forall n \geq 1 \quad \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

Infatti, sia $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x) - x$

$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$

$$\frac{1}{5n+3} \leq \frac{1}{5n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ diverge perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$$\frac{1}{5n+3} \sim \frac{1}{5n} \quad n \to +\infty$$

$\sum \frac{1}{5n}$ diverge $\Rightarrow$ per il c. confronto asintotico $\sum \frac{1}{5n+3}$ diverge.

TEOREMA (criterio della radice)

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0$ $\forall n$. Supponiamo che esista $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Allora si ha che:

1) se $\ell < 1$, allora $\sum a_n$ converge;
2) se $\ell > 1$, allora $\sum a_n$ diverge;
3) se $\ell = 1$ non si può concludere nulla.

ESEMPIO:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ è ≥ 0

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

TEOREMA (criterio del rapporto)

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0$ $\forall n$. Supponiamo che esista $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Allora si ha che:

1) se $\ell < 1$, $\sum a_n$ converge;
2) se $\ell > 1$, $\sum a_n$ diverge;
3) se $\ell = 1$ non si può concludere nulla.

ESEMPIO:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ è ≥ 0

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Se $\sum(-a_n)$ converge e $S \geq 0$ allora $\sum(a_n) = -\sum(-a_n) = -S$
Se $\sum(-a_n)$ diverge positivamente $\Rightarrow \sum(a_n)$ div. negativamente

CRITERI PER LE SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

TEOREMA (criterio della convergenza assoluta)
Sia (a_n) una successione reale, se $\sum a_n$ converge assolutamente (cioè $\sum|a_n|$ converge), allora $\sum a_n$ converge e in tal caso si ha che:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

OSSERVAZIONE: $\sum|a_n|$ converge $\not\Leftarrow \sum a_n$ converge

CRITERIO PER LE SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

DEFINIZIONE: Una serie è a termini di segno alterno se è della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \text{con } b_n \geq 0 \ \forall n$$

$$a_n = (-1)^n b_n : \begin{cases} = b_n \geq 0 & n \text{ pari} \\ = -b_n \leq 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

CRITERIO DI LEIBNIZ
Sia (b_n) una successione tale che $b_n \geq 0 \ \forall n$. Supponiamo che:

1) $\lim_n b_n = 0$

2) (b_n) sia decrescente

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge e posto $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$ e S la somma della serie si ha che $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \ \forall n$ e $|S - S_n| \leq b_{n+1} \ \forall n$.

06/12/12

XX LEZIONE:

Calcolare $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con un errore minore di 10^{-10} si può usare $|S - S_n| \leq b_{n+1} < 10^{-10}$.

ESEMPIO

1) Serie armonica a termini di segno alterno: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Allora la serie prodotto di Cauchy delle serie di a_n e di b_n converge a AB, cioè:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

ESEMPIO:

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$$ verifica se conv. ass.

$$\frac{1}{(n+1)^{1/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}} \qquad \frac{1}{n^{1/2}} \text{ div. pos}$$

$\Rightarrow$ per il criterio confronto asintotico anche $\sum \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$ div. $\Rightarrow$ non conv. ass.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\geq 0}$$

1) $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ✓

2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ è decrescente ✓ $\quad \sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

$\Rightarrow$ per il criterio di Leibniz la serie $\sum a_n$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(-k+n+1)}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$$|c_n| = \left|(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$\forall\, 0 \leq k \leq n \quad (k+1)(n-k+1) \leq (n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq n+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1$$

$\Rightarrow \forall n \geq 0 \quad |c_n| \geq 1 \Rightarrow \lim_n |c_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_n c_n \neq 0 \Rightarrow$ non vale la cond. necessaria $\Rightarrow$ la $\sum c_n$ non converge.

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$f_n(x) = \frac{x^n}{n} + (\operatorname{sen}^2 n)^x$

$f_n(x,y) = \left(x^{2n} + y^{2n}\right)^{1/n}$

$f_n(x,y,z) = nx + \frac{1}{n}y + z^{-n}$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che (f_n) CONVERGE PUNTUALMENTE a f in Ω se $\forall x \in \Omega$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ e in tal caso scriviamo $\lim\limits_{n} f_n = f$ oppure $f_n \to f$ e diciamo che f è il limite PUNTUALE di f_n in Ω.

Equivalentemente $\lim\limits_{n} f_n = f \iff \lim\limits_{n} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \Omega$

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che (f_n) CONVERGE UNIFORMEMENTE a f in Ω se

$\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, dove $\underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\text{successione numerica che non dipende da } x} = \sup\limits_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)|$

OSSERVAZIONE: $\forall f: \Omega \to \mathbb{R}$ limitata, $\|f\|_\infty$ NORMA di f INFINITO oppure NORMA del SUP di f.

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ è un compatto, non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è continua allora

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| = \max\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ per Weierstrass

10/12/12

XXI LEZIONE:

$\lim\limits_{n} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in \Omega \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

$\lim\limits_{n} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha che $\forall x \in \Omega$ $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

2) $f_n(x) = x^n \quad , \forall x \in [0,a] \qquad 0<a<1$

$\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n = 0 = f(x)$

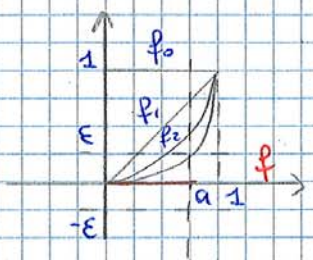
(f_n) converge unif. a f? cioè $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$,

dove $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)|$

$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n$

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = \max_{x\in[0,a]} x^n = a^n$

$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n a^n = 0 \implies f_n$ conv. unif. a f su $[0,a]$



PROPRIETÀ: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Se (f_n) converge uniformemente a f in Ω allora (f_n) converge puntualmente a f in Ω.

DIMOSTRAZIONE: $\forall x \in \Omega: \quad 0 \le |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$

Se (f_n) conv. unif. a f in Ω, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\implies \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \Omega$

$\implies (f_n)$ conv. punt. a f in Ω.

PROPRIETÀ: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) una successione di funzioni continue e limitate convergente uniformemente ad una funzione f su Ω. Allora f è continua.

$f_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1]$

$f_n \to f \quad , f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

f_n sono continue, f è discontinua $\implies f_n$ non conv. unif.

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **CONVERGE ASSOLUTAMENTE** in Ω se converge puntualmente in Ω la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$.

OSSERVAZIONE: Conv. assoluta $\Rightarrow$ conv. puntuale

DEFINIZIONE: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione e (S_n) la successione delle somme parziali della serie di f_n.

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **converge uniformemente** a f in Ω se (S_n) converge uniformemente a f in Ω, cioè se $\lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0$, dove $\|S_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |S_n(x) - f(x)|$

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **converge totalmente** (o normalmente) in Ω se converge (in $\mathbb{R}$) la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$, dove $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)|$

TEOREMA: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) una successione di funzioni limitata da Ω in $\mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti implicazioni fra i quattro tipi di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{CONV. TOTALE} & \Rightarrow & \text{CONV. UNIFORME} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{CONV. ASSOLUTA} & \Rightarrow & \text{CONV. PUNTUALE} \end{array}$$

(questa vale in ogni caso) anche se le funzioni non sono limitate

OSSERVAZIONE: $f_n(x) = a_n \quad \forall x$

$\sum f_n(x) = \sum a_n$ serie numerica

Conv. uniforme $\equiv$ convergenza

Conv. totale $\equiv$ convergenza assoluta

Infatti: $\sum \|f_n\|_\infty$, $\|f_n\|_\infty = \sup_x |f_n(x)| = \sup_x |a_n| = |a_n|$

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty = \sum |a_n|$

$\sum f_n(x)$ conv. unif a f se $\lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0$, dove $\|S_n - f\|_\infty = \sup_x |S_n(x) - f(x)| =$

$= \sup_x |S_n - f| = |S_n - f| \Rightarrow \lim_n |S_n - f| = 0 \iff \lim_n S_n = f \Rightarrow$ convergente

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

TEOREMA (Criterio di Weierstrass)
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$.
Supponiamo che esiste una successione reale (M_n) tale che:

1) $\forall x \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| \leq M_n$; (per questo fatto sono limitate)
2) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converga.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE in Ω e quindi converge uniformemente, assolutamente, puntualmente in Ω.

DIMOSTRAZIONE: 1) $0 \leq \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)| \leq M_n$

2) $\Rightarrow \sum M_n$ converge

Per il crit. del confronto $\sum \|f_n\|_\infty$ converge $\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge totalmente in Ω.

TEOREMA (di integrazione termine a termine)
Sia (f_n) una successione di funzioni continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$, poniamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente ad una funzione f su $[a,b]$.

Allora $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$

TEOREMA (di derivazione termine a termine)
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e (f_n) una successione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ da I in $\mathbb{R}$. Supponiamo che:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga puntualmente ad una funzione f su I;
2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converga uniformemente ad una funzione g su ogni $[a,b] \subseteq I$

Allora f è di classe $\mathcal{C}^1$ su I e $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in I$, cioè:
$\forall x \in I$: $f'(x) \Rightarrow D\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(D f_n(x)\right)$

TEOREMA (di Abel)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0,+\infty)$ il suo raggio di convergenza.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x=R$ (risp. in $x=-R$), allora converge uniformemente in ogni intervallo $[-K,R]$ (risp. in $[-R,K]$) con $0<K<R$.

In particolare se converge in $x=\pm R$, allora converge uniformemente in $[-R,R]$.

OSSERVAZIONE: Dire che la serie converge in $[-K,K]$ è solo un fatto elegante poiché vale che per ogni $[a,b]$ la serie converge (con $-R<a<b<R$)

ESEMPI:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n = 1 \quad \forall n \geq 0$

$\downarrow$

converge se e solo se $|x|<1$ e in tal caso $\frac{1}{1-x}$

$R = \sup\{x \in \mathbb{R} : \sum x^n \text{ converge}\} = \sup(-1,1) = 1$

Per il teorema sull'insieme di conv.

$\sum x^n$ converge ass. e punt. in $(-1,1)$ e conv. unif in $[-K,K]$, $\forall 0<K<1$

conv. punt a $\frac{1}{1-x}$ su $(-1,1)$

conv. ass a $\frac{1}{1-|x|}$ su $(-1,1)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

se $x>0$ la serie è a termini positivi

se $x=0$ la serie è nulla

se $x<0$ la serie è a termini alterni

$\sum \left|\frac{x^n}{n}\right| = \sum \frac{|x|^n}{n} \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_n \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$

se $|x|<1 \Rightarrow \sum \frac{|x|^n}{n}$ conv $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n}$ conv. ass. $\Rightarrow$ conv.

se $|x|>1 \Rightarrow \sum \frac{|x|^n}{n}$ div $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n}$ non conv. ass $\Rightarrow$?

$\lim_n \frac{x^n}{n} = \begin{cases} +\infty & x>1 \\ \nexists & x<-1 \end{cases} \neq 0 \Rightarrow$ non vale C.N. $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n}$ non converge

ESEMPI

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)x^n$

$a_n = 2^n + 3^n$

$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|2^n+3^n|} = \lim_n \sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim_n \sqrt[n]{3^n\left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)} = \lim_n 3\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}+1} = 3$

$\Rightarrow R = 1/3$

la serie conv. assolutamente in $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e conv. uniformemente in $[-k, k]$ con $0<k<1/3$.

$x = 1/3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]$

$\lim_n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right] = 1 \Rightarrow$ non vale C.N $\Rightarrow$ in $x=\frac{1}{3}$ la serie non converge

$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)\frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]$

$\lim_n (-1)^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right] = \nexists \Rightarrow$ non vale C.N $\Rightarrow$ in $x=-\frac{1}{3}$ la serie non converge

la serie di partenza conv ass in $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, conv. punt. in $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, conv. unif. in $[-k, k]$ con $0<k<1/3$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$

$a_n = n!$

$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{|(n+1)!|}{|n!|} = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_n \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = \lim_n (n+1) = +\infty$

$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow$ la serie converge solo in $x=0$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n$

$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot \left|\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_n \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} =$

$= \lim_n \frac{2}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow$ la serie conv. ass. e quindi punt. su $\mathbb{R}$ e conv. unif. su $[-k, k]$ con $k>0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 106

Inoltre se $\sum a_n (x-x_0)^n$ converge in $x = x_0+R$ (risp. in $x = x_0-R$) allora converge uniformemente in $[a, x_0+R]$ per ogni $x_0-R < a < x_0+R$ (risp. in $[x_0-R, b]$, $\forall\ x_0-R<b<x_0+R$).
In particolare se converge in $x=x_0 \pm R$ allora converge uniformemente in $[x_0-R, x_0+R]$.

Per risolvere le serie non centrate in 0 si può anche fare un cambiamento di variabile.

ESEMPIO:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)} (x-1)^n \underset{t=x-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)} t^n$$

$$a_n = \frac{1}{2^n \log(n+1)} \geq 0$$

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \log(n+1)}} = \lim_n \frac{1}{2 \sqrt[n]{\log(n+1)}} = \lim_n \frac{1}{2\,[\log(n+1)]^{1/n}} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{2\, e^{\log[\log(n+1)]^{1/n}}} = \lim_n \frac{1}{2} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\log[\log(n+1)]}} = \frac{1}{2}$$

Vale sempre che $\lim_n \sqrt[n]{\log(n+1)} = 1$

$\Rightarrow R = 2$

La serie centrata in 0 conv. ass. in $(-2, 2)$ e conv. unif in $[-k, k]$ con $0<k<2$.

$$t = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

$$\log(n+1) = o(n+1) \quad n \to +\infty$$

$$o\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right) = \frac{1}{n+1} \quad n \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \text{ diverge}$$

$$t = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \log(n+1)} (-1)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\log(n+1)} \text{ decrescente}$$

$$\lim_n b_n = 0 \Rightarrow \text{per leibniz converge}$$

TEOREMA (sul prodotto di Cauchy di serie di potenze)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ due serie di potenze aventi raggio di convergenza rispettivamente R_1 e R_2.

Allora la serie di potenze prodotto di Cauchy delle serie $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$, cioè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\forall n \geq 0$, ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ si ha che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

TEOREMA (di derivazione termine a termine)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e sia $R \in (0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R e $\forall x \in (-R, R)$:

$$D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} D\left(a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

TEOREMA (di integrazione termine a termine)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e sia $R \in (0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.

Allora la $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ ha raggio di convergenza R e per ogni x appartenente all'intervallo di convergenza puntuale si ha che:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 106

$f(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^4} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = 0$$

per calcolare $f'(x)$ in $x=0$ o si utilizza la definizione o si fa il limite della derivata prima per $x \neq 0$!

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\left(\frac{4}{x^6} - \frac{6x^2}{x^6}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$\forall n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} R(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$R(x)$ è una funzione razionale fratta

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x) \quad \forall x \neq 0$$

DEFINIZIONE: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ su I.
Diciamo che f è **SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR** in x_0 (oppure che f è **ANALITICA** in x_0) se esiste $\delta > 0$ tale che la serie di Taylor di f centrata in x_0 converge puntualmente a f nell'intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, cioè

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Diciamo che f è analitica nell'intervallo I se f è analitica in ogni punto dell'intervallo I.

La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ non è analitica in 0

ESEMPIO:

1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è analitica in 0

Calcoliamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ e troviamo che coincide con $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in un intorno $(-\delta, \delta)$ di 0. $f \in C^\infty(a,b) \ \forall a < 0 < b < 1$

$f^{(0)}(0) = f(0) = 1 = 0!$

$f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1 = 1!$

2) $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad x \to 0 \qquad R = +\infty$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ è analitica infatti tutte le derivate sono limitate da $\Pi = 1$

3) $f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}) \quad x \to 0 \qquad R = +\infty$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{(2n+1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad R = +\infty$

5) $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad R = +\infty$

6) $\forall x \in (-1, 1] : \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad R = 1$

$\forall x \in (-1, 1) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$\forall x \in (-1, 1) \quad \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt$

$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\log(1-t)\right]_0^x = -\log(1-x)$

$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\forall x \in (-1, 1) \quad \log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$-x \longmapsto x \quad \log(1+x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-x)^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

$k = n+1$

Osserviamo che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ converge in $x = 1$ per Leibniz

Sia $g : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ la somma della serie cioè $\forall x \in (-1, 1]$:

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$. Si ha che: 1) $\forall x \in (-1, 1) : g(x) = \log(1+x)$

2) g è continua in $(-1, 1]$

$\overset{2)}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$

$\lim_{x \to 1^-} \log(1+x) = \log 2$

$\Rightarrow g(1) = \log 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2$