



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1279

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Genta

MATERIA: Analisi dei Segnali, Prof.Visintin

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

07/03/13

I LEZIONE: SEGNALI

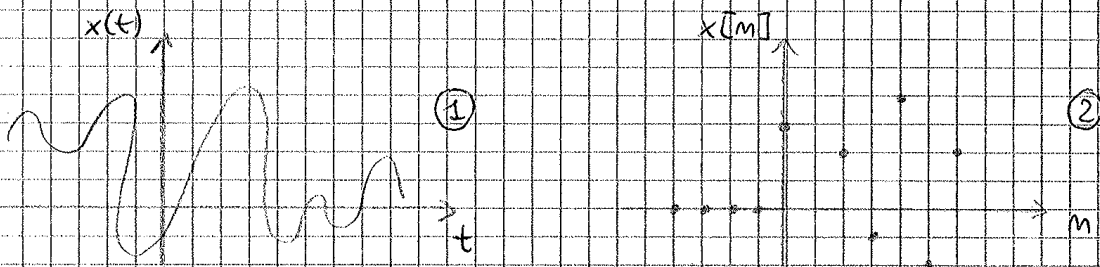
● **SEGNALE**: grandezza fisica che varia nel tempo (funzione del tempo), il segnale ha in questo caso una misura poiché esprime una grandezza fisica ($t \in \mathbb{R}$).

CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

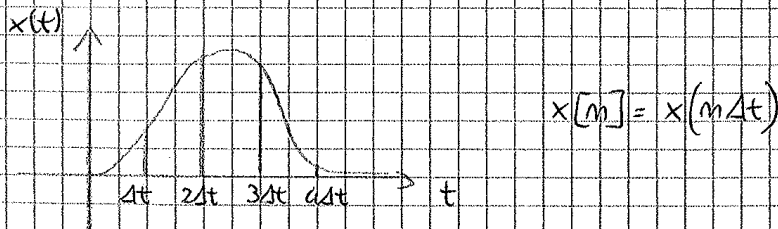
SEGNALI
 / DETERMINATI (tutti i parametri sono noti, niente di aleatorio)
 \ CASUALI (processi casuali)

● Per i segnali determinati esiste un'espressione matematica del segnale, mentre per i processi casuali è impossibile scrivere un'equazione poiché dipende da troppi fattori, non è prevedibile (es. la voce).

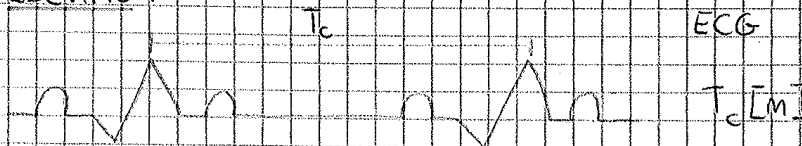
SEGNALI
 / tempo CONTINUO (dipendono da $t \in \mathbb{R}$) ①
 \ tempo DISCRETO (dipendono da $m \in \mathbb{Z}$) ②



● Quando si fa il campionamento si passa da un segnale a tempo continuo ad un segnale a tempo discreto, si trova una sequenza di numeri con cadenza costante.



ESEMPIO:

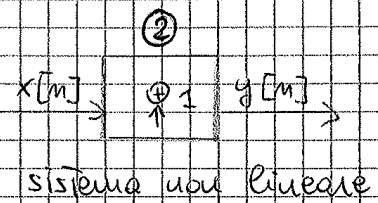
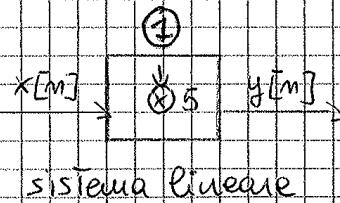
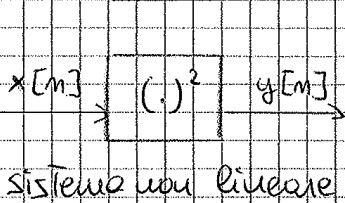
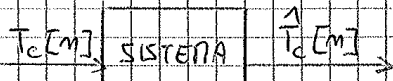


Singoli tempi si considera la media (mobile cioè fatta dagli ultimi N campioni).

$T_c [m]$ (es. tempo tra due massimi)

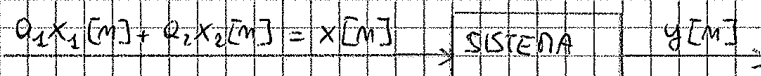
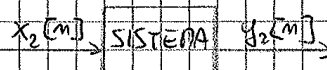
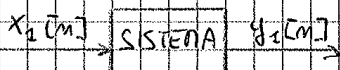
$$\hat{T}_c [m] = \frac{T_c [m] + T_c [m-1] + T_c [m-2]}{3}$$

in questo modo diminuisce il rumore



Un sistema viene definito LINEARE, se vale la sovraposizione degli effetti.

Dato un sistema (non noto), dimostrare se è lineare o no.



Il sistema è lineare se: $y [m] = q_1 y_1 [m] + q_2 y_2 [m]$

Analizziamo i sistemi precedenti:

② $y_1 [m] = x_1 [m] + 1$ $y_2 [m] = x_2 [m] + 1$
 $y [m] = x [m] + 1 = q_1 x_1 [m] + q_2 x_2 [m] + 1 \neq q_1 y_1 [m] + q_2 y_2 [m] =$
 $= q_1 x_1 [m] + q_2 x_2 [m] + q_1 + q_2$

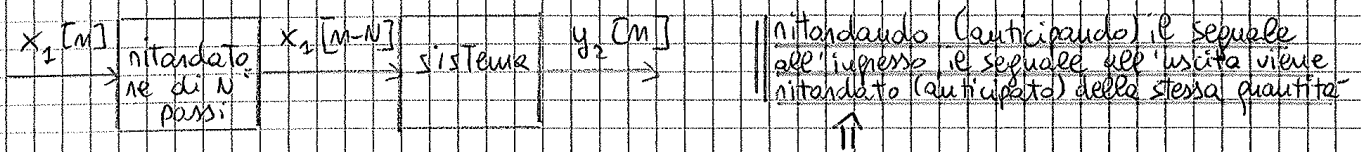
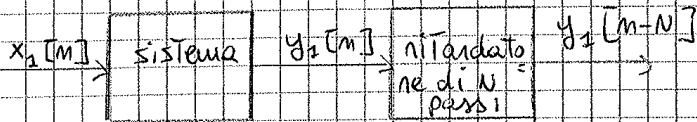
ci sono dei valori per cui le due equazioni sono uguali, ma un sistema per essere lineare deve valere $\forall q_1, q_2$.

① $y_1 [m] = 5x_1 [m]$ $y_2 [m] = 5x_2 [m]$
 $y [m] = 5x [m] = 5q_1 x_1 [m] + 5q_2 x_2 [m] = q_1 y_1 [m] + q_2 y_2 [m]$

Il sistema dal punto di vista matematico si indica con \mathcal{G} che significa TRASFORMAZIONE.

$y_1 [m] = \mathcal{G} \{ x_1 [m] \}$ $y_2 [m] = \mathcal{G} \{ x_2 [m] \}$ $y [m]$ $y_1 [m]$ $y_2 [m]$

Il sistema è lineare se e solo se: $\mathcal{G} \{ q_1 x_1 [m] + q_2 x_2 [m] \} = q_1 \mathcal{G} \{ x_1 [m] \} + q_2 \mathcal{G} \{ x_2 [m] \}$



Il sistema è tempo invariante se $y_2[m] = y_1[m-N]$

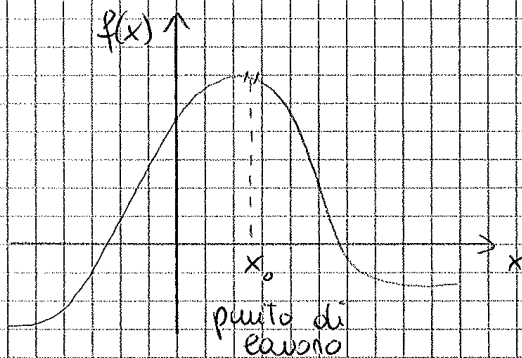
Il sistema è tempo invariante se è possibile scambiare le posizioni relative di ritardatore e sistema senza che l'uscita cambi.

$$y_2[m] = \mathcal{G}\{x_1[m]\}$$

$$y_2[m] = \mathcal{G}\{x_1[m-N]\}$$

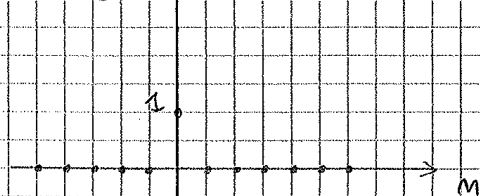
Il sistema è tempo invariante se $y_2[m] = y_1[m-N]$

Tutte le volte bisogna verificare che il sistema sia tempo invariante.



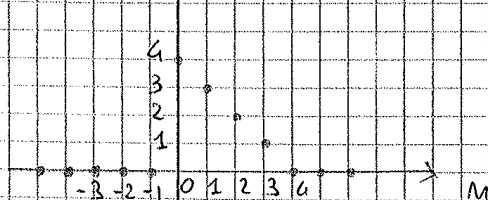
Se si considera un intervallo infinitesimo, il segnale può essere considerato lineare

$$\delta[m]$$



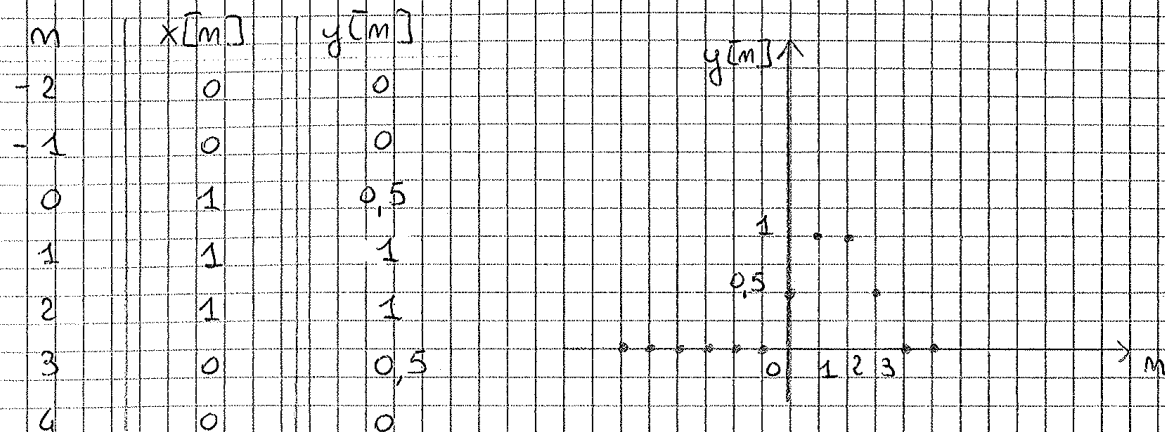
$$\delta[m] = \begin{cases} 1 & \text{se } m=0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \quad \text{DELTA DI KRONECKER}$$

$$x[m]$$



$$\begin{aligned} x[m] &= 4\delta[m] + 3\delta[m-1] + 2\delta[m-2] + \delta[m-3] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-k] \end{aligned}$$

Per qualsiasi segnale si può scrivere che $x[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-k]$



In tutti i sistemi lineari a Tempo invariante la risposta all'impulso $h[m]$ è sempre zero per $m < 0$, infatti $h[m]$ è l'effetto di $\delta[m]$ che inizia solo da $m=0$.

$y[m]$ si può calcolare anche come convoluzione di $x[m]$ e $h[m]$

$$y[m] = x[m] * h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[m-k]$$

per $m=0$ $y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[-k] = \sum_{k=0}^2 x[k] h[-k] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] = 0,5$

per $m=1$ $y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[1-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] = 1$

per $m=2$ $y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[2-k] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 1$

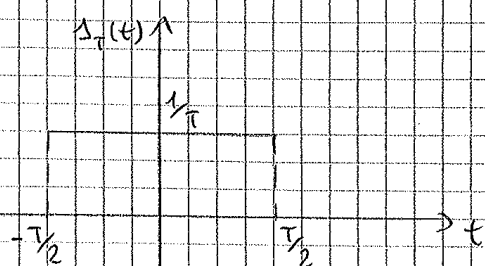
13/03/13

II LEZIONE: SEGNALI A TEMPO CONTINUO

DELTA DI DIRAC (corrisponde alle delta dei segnali discreti)

$\delta(t)$ segnale a tempo continuo

Definiamo il segnale $\Delta_T(t)$:



$$\Delta_T(t) = \begin{cases} 1/T & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In GENERALE $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

$x[m]\delta[m-k] = x[k]\delta[m-k]$ (nei segnali discreti)

Non si può scrivere $x[m]\delta[m-k] = x[k]$ poiché così non otterremo un segnale ma un numero. Invece deve sempre esserci una funzione di m .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

$$\int x(\tau)\delta(t_0-\tau) d\tau = \int x(\tau)\delta(\tau-t_0) d\tau = x(t_0) \int \delta(t_0-\tau) d\tau = x(t_0)$$

$$\Rightarrow x(t) = \int x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau \quad \text{La variabile è } \tau$$

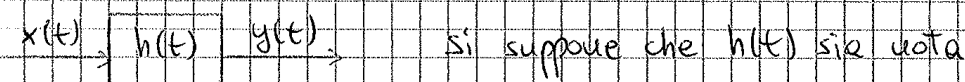
Questa formula corrisponde a quella nel tempo discreto:

$$x[m] = \sum x[k]\delta[m-k]$$

Supponiamo di avere un sistema a tempo continuo, lineare, tempo invariante.



$h(t)$ = risposta all'impulso esiste solo per sistemi lineari, tempo invariante



si suppone che $h(t)$ sia nota

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{x(\tau)\delta(t-\tau)\} d\tau$$

↑
lineare

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

↑
t. invariante

↓
CONVOLUZIONE

↑
lineare
(la trasformazione e funz. di t, e' integrale di t)

È la stessa impostazione dei segnali discreti.

Attenzione: la risposta all'impulso è definita solo per sistemi lineari, tempo invariante

Se si pone $s = j2\pi f$ si ottiene la TRASFORMATA DI FOURIER

$$f \in \mathbb{R} \Rightarrow w_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

$$w_f(t) * h(t) = \int h(\tau) w_f(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi ft} \underbrace{\int h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{H(f)}$$

$$= w_f(t) H(f)$$

$H(f)$ = TRASFORMATA DI FOURIER di $h(t)$

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad H(f) \in \mathbb{C}$$

$$H(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$H(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

f è la frequenza

Se f è positiva i numeri sul piano complesso girano in senso orario, se f è negativa girano in senso antiorario sulle circonferenza.

La trasformata di Fourier serve per analizzare i sistemi LTI a tempo continuo.

RICHIAMO DELLE FORMULE PRINCIPALI:

$$- x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$$

$$- \int \delta(t) dt = 1$$

$$- x(t) * h(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$- H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

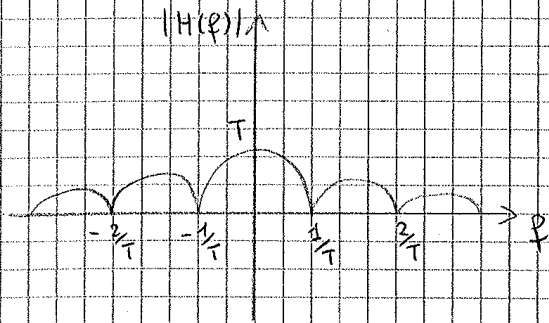
ESEMPIO:

$$x(t) \xrightarrow{n(t, t_0)} y(t) = x(t-t_0)$$

$h(t) = \delta(t-t_0)$ la risposta all'impulso è l'uscita del sistema quando all'ingresso c'è $\delta(t)$

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int \delta(t-t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \int \delta(t-t_0) e^{j2\pi ft_0} dt = e^{-j2\pi ft_0}$$

↓
funzione complessa con variabile f



TRASFORMATE DI FOURIER

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{trasformata di Fourier di un qualunque segnale}$$

La trasformata di Fourier gode delle seguenti proprietà:

- LINEARITÀ: $\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$

- se $x(t)$ è reale, allora $X^*(f) = X(-f)$

POSSIBILE DOMANDA D'ESAME

$$X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X^*(f) = \left[\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = \int x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = \int x(t) e^{j2\pi ft} dt = X(-f)$$

$x(t)$ è reale

$|X(f)| = |X(-f)|$ funzione pari

$\angle X(f) = -\angle X(-f)$ funzione dispari

$X(f) = |X(f)| e^{j\psi(f)}$ dove $|X(f)| = |H(f)|$ e $\psi(f) = \angle X(f)$

$$|X(-f)| e^{j\psi(-f)} = \left[|X(f)| e^{j\psi(f)} \right]^* = |X(f)| e^{-j\psi(f)}$$

Applichiamo siano uguali: $|X(f)| = |X(-f)|$

$\psi(-f) = -\psi(f)$

Essendo $x(t)$ reale: $\text{Re}\{X(f)\}$ è pari e $\text{Im}\{X(f)\}$ è dispari

$$X(f) = X_R(f) + jX_I(f) \quad X^*(f) = X_R(f) - jX_I(f)$$

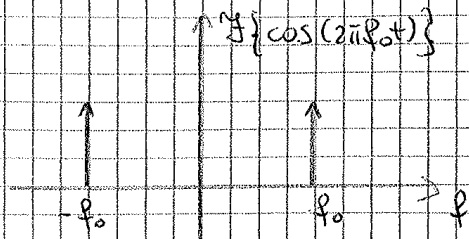
$$X(-f) = X_R(-f) + jX_I(-f) = X_R(f) - jX_I(f)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} X_R(-f) &= X_R(f) \\ X_I(-f) &= -X_I(f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \int e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \delta(f-f_0)$$

$$\mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f+f_0)$$

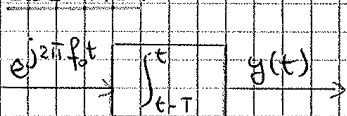
$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$



$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2}\right\} = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\theta} e^{-j2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2} [e^{j\theta} \delta(f-f_0) + e^{-j\theta} \delta(f+f_0)] \end{aligned}$$

ESEMPIO:



$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

non si può usare $x(t+\theta)$ deve avere solo il nome $2\pi f_0 t$

$$H(f) = e^{-j\pi f T} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$X(f) = \delta(f-f_0)$$

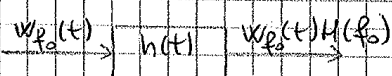
$$Y(f) = X(f)H(f) = \delta(f-f_0)H(f) = H(f_0)\delta(f-f_0)$$

$$y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

Nei sistemi lineari $e^{j2\pi f_0 t}$ è un'autofunzione.

20/03/13

IV LEZIONE:



$$\begin{aligned} w_{f_0}(t) \text{ è un'autofunzione nei sistemi lineari } w_{f_0}(t) &= e^{j2\pi f_0 t} = \\ &= \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$$x(t) = \int X(f) e^{j2\pi ft} df = \int \left[\int x(u) e^{-j2\pi fu} du \right] e^{j2\pi ft} df =$$

$$= \int x(u) \left[\int e^{-j2\pi fu} e^{j2\pi ft} df \right] du = \int x(u) \left[\int e^{j2\pi f(t-u)} df \right] du =$$

$$= \int x(u) \delta(t-u) du = x(t)$$

si può anche scrivere $\delta(u-t)$ tanto è una funzione pari

DERIVAZIONE

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$ si conosce la trasformata di $x(t)$

$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$Y(f) = \int y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int x'(t) e^{-j2\pi ft} dt = x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int x(t) \frac{d}{dt} (e^{-j2\pi ft}) dt$$

per parti

Hp: $x(t) = 0 \quad t = \pm \infty$

$$Y(f) = - \int x(t) (-j2\pi f) e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f X(f)$$

$x(t) \rightarrow \left[\frac{d}{dt} \right] y(t) \rightarrow Y(f) = X(f) j2\pi f = X(f) H(f)$

$\Rightarrow H(f) = j2\pi f$

la funzione di trasferimento di un derivatore (calcola la deriva dell'ingresso) è $H(f) = j2\pi f$.

Nelle trasformate di Laplace: $\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = s \mathcal{L} \{ x(t) \}$

INTEGRAZIONE

$x(t) \rightarrow \left[\int_{-\infty}^t \right] y(t) \rightarrow$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

$h(t) \uparrow$

se all'entrata c'è $\delta(t)$, $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

$u(t) = \text{GRADINO UNITARIO}$

1

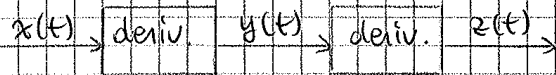
0

t

Noi considereremo sempre la funzione di trasferimento dell'integratore:

$$H(\omega) = \frac{1}{j2\pi\omega}$$

Metto in cascata due derivatori:



$$Z(\omega) = j2\pi\omega Y(\omega) = (j2\pi\omega)^2 X(\omega)$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} = (j2\pi\omega)^2 X(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \left\{ \frac{d^N}{dt^N} x(t) \right\} = (j2\pi\omega)^N X(\omega)$$

21/03/13

V LEZIONE:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(\omega)? \quad \text{quanto vale } Z(\omega)?$$

$$Z(\omega) = \int z(t) e^{-j2\pi\omega t} dt = \int x(t)y(t) e^{-j2\pi\omega t} dt$$

$$x(t) = \int X(\omega_1) e^{j2\pi\omega_1 t} d\omega_1 \quad y(t) = \int Y(\omega_2) e^{j2\pi\omega_2 t} d\omega_2 \quad \text{autintasponiate}$$

$$Z(\omega) = \int \int \int X(\omega_1) e^{j2\pi\omega_1 t} \cdot Y(\omega_2) e^{j2\pi\omega_2 t} \cdot e^{-j2\pi\omega t} d\omega_1 d\omega_2 dt =$$

$$= \int \int X(\omega_1) Y(\omega_2) \left[\int e^{-j2\pi t(\omega - \omega_1 - \omega_2)} dt \right] d\omega_1 d\omega_2 =$$

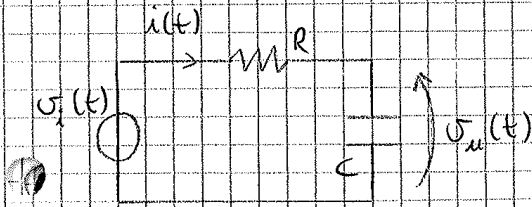
$$\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$$

$$= \int \int X(\omega_1) Y(\omega_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \int X(\omega_1) \left[\int Y(\omega_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_2 \right] d\omega_1 =$$

$$= \int X(\omega_1) \left[\int Y(\omega - \omega_1) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_2 \right] d\omega_1 = \int X(\omega_1) Y(\omega - \omega_1) \left[\int \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_2 \right] d\omega_1 =$$

$$= \int X(\omega_1) Y(\omega - \omega_1) d\omega_1 = X(\omega) * Y(\omega) \quad \text{INTEGRALE DI CONVOLUZIONE}$$

in frequenza

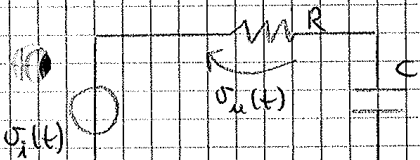


$$I(p) = \frac{V_i(p)}{R + \frac{1}{j2\pi fC}}$$

$$V_u(p) = \frac{1}{2\pi jfC} I(p) = \frac{1}{j2\pi fC} \cdot \frac{V_i(p)}{R + \frac{1}{j2\pi fC}}$$

$$V_u(p) = V_i(p) \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

$$H_1(p) = \frac{V_u(p)}{V_i(p)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$



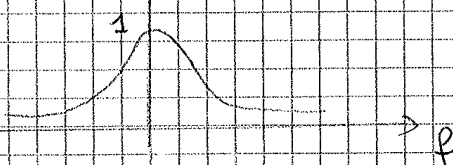
$$V_u(p) = R I(p) = R \frac{V_i(p)}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} V_i(p)$$

$$H_2(p) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1 + j2\pi fRC - 1}{1 + j2\pi fRC} = 1 - \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = 1 - H_1(p)$$

$$|H_1(p)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

considero il quadrato per non fare le radici

$$|H_1(p)|^2 \uparrow$$

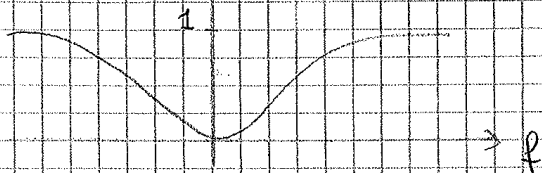


FILTRO PASSA-BASSO

lascia passare le basse frequenze ed elimina le alte frequenze

$$|H_2(p)|^2 = \frac{(2\pi fRC)^2}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

$$|H_2(p)|^2 \uparrow$$

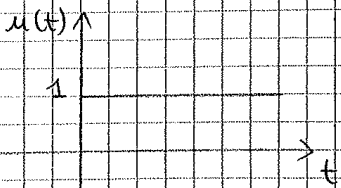


FILTRO PASSA-ALTO

lascia passare solo le alte frequenze ed elimina le basse frequenze

$$H_2(f) = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC}$$

$$h_2(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{RC}{1 + j2\pi f RC} \right\} = \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ e^{-t/RC} u(t) \right\} =$$



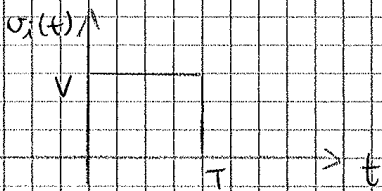
La derivata di $u(t)$ è la $\delta(t)$ infatti l'integrale della $\delta(t)$ è proprio $u(t)$.

Tutte le volte che derivo una funzione con una discontinuità c'è una $\delta(t)$.

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

$$= -\frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + e^{-t/RC} \delta(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

Se $v_i(t)$ genera un segnale porta:

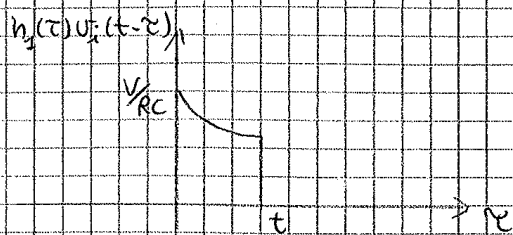
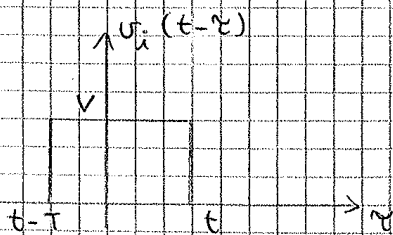
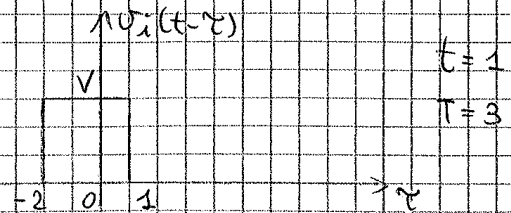
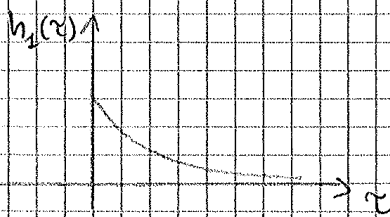


$$h_1(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

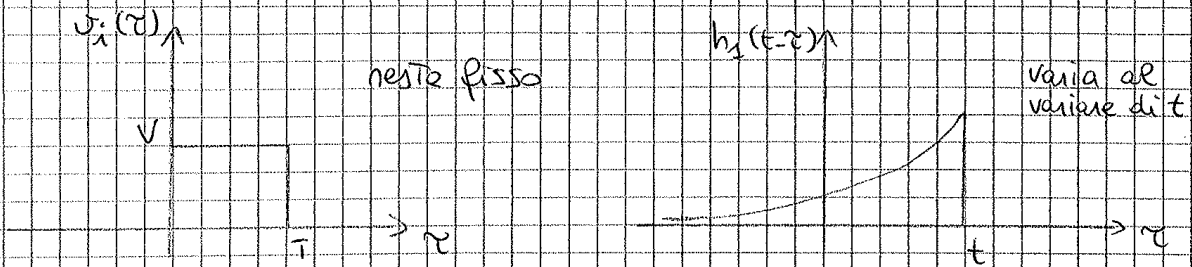
consideriamo il filtro passa-basso (1)

$$v_{u_1}(t) = v_i(t) * h_1(t)$$

$$v_{u_1}(t) = \int h_1(\tau) v_i(t-\tau) d\tau \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

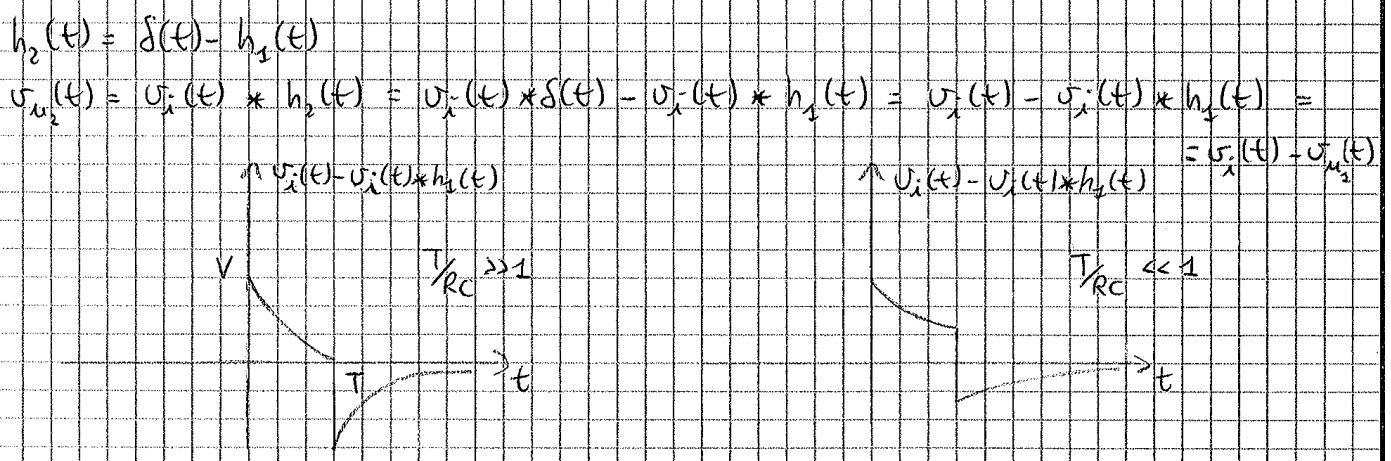


$$v_{u_1}(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} u(\tau) V d\tau = \frac{V}{RC} \left[\frac{e^{-\tau/RC}}{-1/RC} \right]_0^t = V \left(1 - e^{-t/RC} \right) \quad 0 < t < T$$



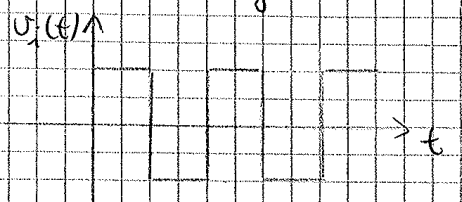
se $t < 0$ $\sigma_{u_1}(t) = 0$
 se $0 < t < T$ $\sigma_{u_1}(t) = \int_0^t \sigma_i(\tau) h_1(t-\tau) d\tau = \int_0^t V \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} u(t-\tau) d\tau =$
 $= \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau = \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \left[\frac{e^{\frac{\tau}{RC}}}{\frac{1}{RC}} \right]_0^t = V e^{-\frac{t}{RC}} (e^{\frac{t}{RC}} - 1)$
 se $t > T$ $\sigma_{u_1}(t) = \int_0^T \sigma_i(\tau) h_1(t-\tau) d\tau = V \int_0^T \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} u(t-\tau) d\tau =$
 $= \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^T e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau = V e^{-\frac{t}{RC}} (e^{\frac{T}{RC}} - 1)$

Consideriamo ora il filtro passa-alto: (2)



Il passa-alto lascia passare le discontinuità mentre annulla i valori costanti. Al contrario nel passa-basso il fronte ripido non passa mentre fa transitare i valori costanti.
 Il passa-basso elimina le discontinuità e le variazioni veloci, invece il passa-alto le fa passare. I valori costanti sono conservati dal passa-basso e eliminati dal passa-alto.

Cambiando il segnale d'ingresso:



La risposta all'impulso di un sistema LTI è l'uscita $h(t)$ del sistema quando l'ingresso è $\delta(t)$.

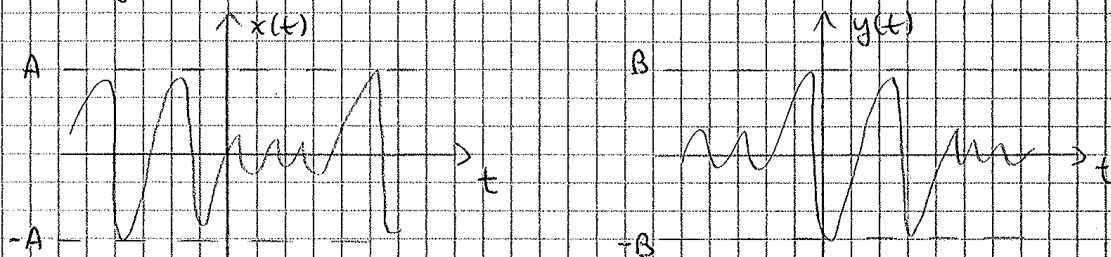
La funzione di trasferimento o risposta in frequenza di un sistema LTI è $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$.

Un sistema è fisicamente realizzabile se gode delle seguenti proprietà:

- 1) $h(t) = 0$ per $t < 0$
- 2) $h(t) \in \mathbb{R}$

Un sistema LTI è STABILE in senso BIBO (Bounded Input Bounded Output)

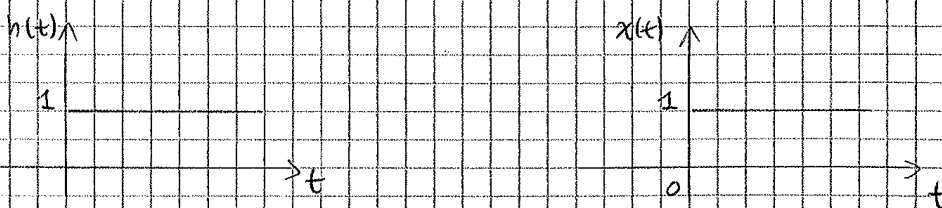
se per ogni ingresso $x(t)$ limitato in ampiezza, cioè tale per cui $|x(t)| \leq A < \infty$, l'uscita $y(t)$ è anch'essa sempre limitata in ampiezza cioè $|y(t)| \leq B < \infty$



ESEMPIO:

Esempio di sistema NON stabile in senso BIBO: l'integratore.

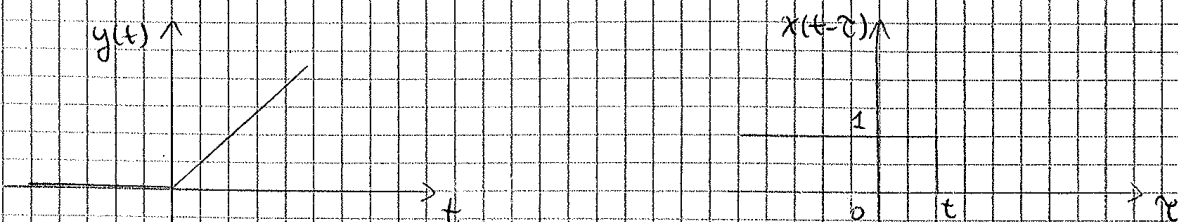
Per dimostrare che non è stabile in senso BIBO basta trovare un solo ingresso per cui l'uscita non sia limitata



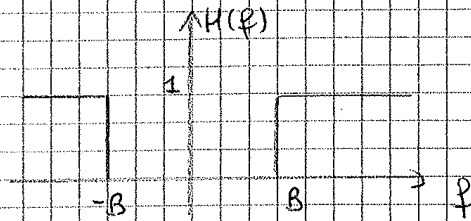
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$y(t) = t \quad \text{per } t > 0$$

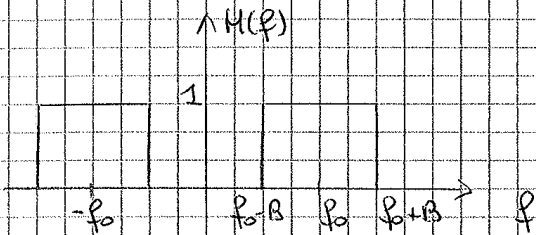


FILTRO PASSA ALTO IDEALE



$B =$ frequenza di taglio

FILTRO PASSA BANDA IDEALE

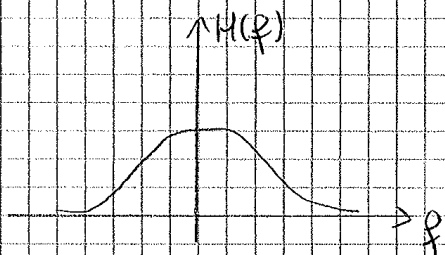


Filtro passa banda ideale con frequenza centrale f_0 e banda $2B$.

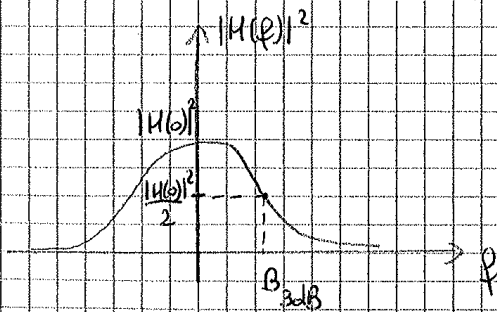
06/04/13

VIII LEZIONE:

FILTRO PASSA-BASSO IDEALE



Per i filtri ideali c'è un valore determinato, la banda, per il quale il filtro è zero. Se si considera un filtro reale questo va a zero solo per $f \rightarrow \infty$. Per convenzione si è scelto un valore che si chiama: banda a 3 dB del filtro



Si considera $|H(f)|^2$, si calcola $|H(0)|^2$ e poi si trova il valore delle ordinate corrispondente a $\frac{|H(0)|^2}{2}$, a questo valore corrisponde un valore delle ascisse che è proprio B_{3dB}

$$|H(B_{3dB})|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2$$

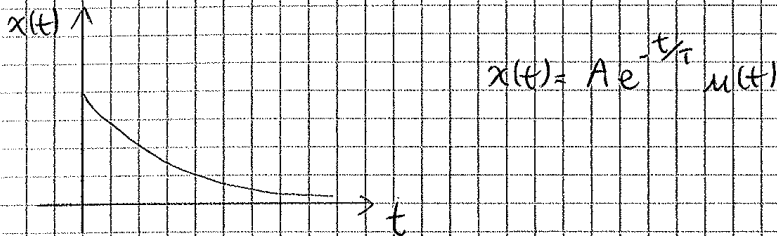
in generale $|H(B_{xdB})|^2 = \frac{|H(0)|^2}{(10)^{x/10}}$

In questo caso si considera $|H(f)|^2$ poiché $10 \log_{10} 2 = 3$, dove 3 è la banda in decibel che si era scelta.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^T A^2 dt = A^2 T$$

- dim di $E_x = \text{Joule}$
dim di $A = \sqrt{\text{Watt}}$

ESEMPIO 2:



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} A^2 e^{-2t/T} dt = A^2 \left. \frac{e^{-2t/T}}{-2/T} \right|_0^{\infty} = \frac{A^2 T}{2}$$

L'energia deve essere **SEMPRE** positiva, non può essere negativa poiché è l'integrale di una funzione positiva.

TEOREMA DI PARSEVAL o UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(\omega)|^2 d\omega \quad \text{IN GENERALE} \quad \int x(t)y^*(t) dt = \int X(\omega)Y^*(\omega) d\omega$$

L'energia del segnale si può calcolare nel dominio del tempo o in frequenza.

Dimostrazione: da sapere

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega)$$

$$Y(\omega) = \int y(t)e^{-j\omega t} dt \quad Y(\omega) = \int y(t) dt$$

Se l'integrale di $y(t)$ è zero (ad esempio un periodo del seno/coseno) allora $Y(\omega) = 0$, serve per controllare nei calcoli.

$$y(t) = x^2(t) \quad x(t) \text{ reale}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) * X(\omega) = \int X(u)X(\omega-u) du$$

$$E_x = \int |x(t)|^2 dt = \int x^2(t) dt = \int y(t) dt = Y(0) = \int X(u)X(-u) du = \int X(u)X^*(u) du = \int |X(u)|^2 du = \int |X(\omega)|^2 d\omega$$

↑
 $x(t)$ è reale

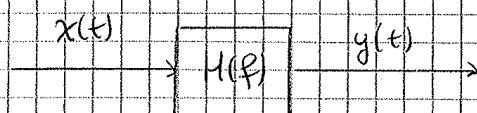
$$E_y = \int |y(f)|^2 df = \int |x(f)|^2 |H(f)|^2 df = \int_{f_0-B}^{f_0+B} |x(f)|^2 df + \int_{-f_0-B}^{-f_0+B} |x(f)|^2 df$$

L'energia di $y(t)$ coincide con la porzione di energia di $x(t)$ contenuta nell'intervallo di frequenza $[f_0-B, f_0+B]$.

$|X(f)|^2$ dice come l'energia di $x(t)$ è distribuita in frequenza

$$\Rightarrow |X(f)|^2 = \text{SPETTRO DI ENERGIA} = S_x(f)$$

PROPRIETÀ



$$S_y(f) = |y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = S_x(f) |H(f)|^2$$

Questa formula vale per qualunque tipo di spettro (energia, potenze...)

Solo per i segnali ad energia finita si definisce $S_x(f) = |X(f)|^2$

Quindi per i segnali sinusoidali che hanno energia infinita non ha senso calcolare $|X(f)|^2$ poiché si ottiene una $\delta^2(f)$ che non ha significato.

Cosa succede se si calcola l'autotrasformata dello spettro?

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \longrightarrow |X(f)|^2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_x(\tau)$$

$R_x(\tau)$ = FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI $x(t)$

definite come autotrasformata di Fourier dello spettro di energia

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ |X(f)|^2 \} = \mathcal{F}^{-1} \{ X(f) X^*(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ X(f) \} * \mathcal{F}^{-1} \{ X^*(f) \}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ X(f) \} = x(\tau) = \int X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

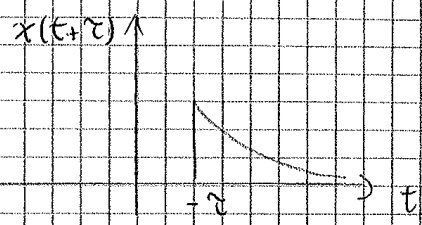
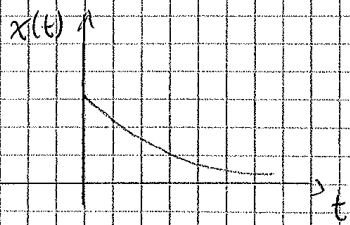
$$\mathcal{F}^{-1} \{ X^*(f) \} = \int X^*(f) e^{j2\pi f\tau} df = \left[\int X(f) e^{-j2\pi f\tau} df \right]^* = [x(-\tau)]^*$$

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$x(t) * h(t) = \int h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int h(u) x(t-u) du$$

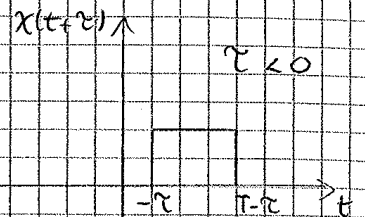
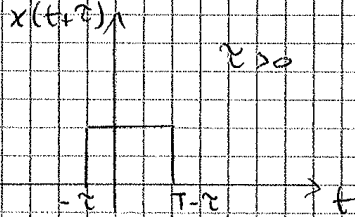
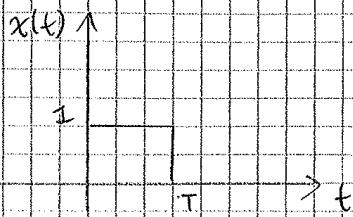
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-u) x(\tau-u) du = \int_{+\infty}^{-\infty} X^*(t) x(\tau+t) (-dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) x(\tau+t) dt$$

\swarrow
 $-u = t$



ESEMPIO 2

Calcolare la funzione di autocorrelazione di $x(t) = p_{\tau}(t - \frac{T}{2})$



$$R_x(\tau) = \int x(t)x(t+\tau) dt$$

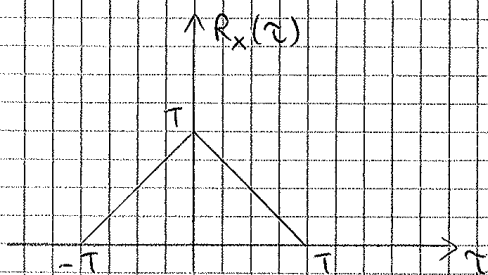
$$0 \leq \tau < T \quad R_x(\tau) = \int_0^{T-\tau} dt = T - \tau$$

$$\tau \geq T \quad R_x(\tau) = 0$$

$$-T \leq \tau < 0 \quad R_x(\tau) = \int_{-\tau}^T dt = T + \tau$$

$$\tau \leq -T \quad R_x(\tau) = 0$$

$$R_x(0) = T = E_x \quad (\text{area del rettangolo})$$



L'autocorrelazione di un rettangolo è un triangolo.

Si definisce il **PRODOTTI SCALARE** tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ a energia finita, la seguente quantità:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x^*(t)y(t) dt$$

$$\langle x(t), y(t) \rangle \approx \sum x^*(k\Delta t)y(k\Delta t)\Delta t$$

VIII LEZIONE:

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt = \mathcal{F}^{-1} \{ S_x(f) \}$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2 \quad \text{SPETTRO DI ENERGIA}$$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$\left| \int f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int |f(t)|^2 dt \int |g(t)|^2 dt$$

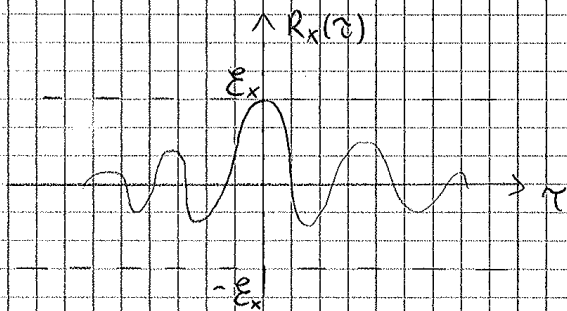
Il massimo si ha quando $f(t)$ e $g(t)$

$$|R_x(\tau)|^2 = \left| \int x(t)x(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \int |x(t+\tau)|^2 dt = E_x^2$$

\Rightarrow si ottiene il massimo se $\tau = 0$

$$\text{Infatti } R_x(0) = \int x(t)x(t) dt = \int x^2(t) dt = E_x$$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = E_x$$



$R_x(\tau)$ è compresa tra $-E_x$ e E_x

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad \text{se } x(t) \text{ è reale}$$

$$R_x(-\tau) = \int x(t)x(t-\tau) dt = \int x(u+\tau)x(u) du = \int x(t)x(t+\tau) dt = R_x(\tau)$$

\Rightarrow se $x(t)$ è reale la funzione di autocorrelazione è una funzione PARI

Definisco il segnale: $e(t) = x(t) - x(t+\tau)$ segnali reali

$$E_e = \int e^2(t) dt = \int [x(t) - x(t+\tau)]^2 dt = \int [x^2(t) + x^2(t+\tau) - 2x(t)x(t+\tau)] dt$$

$$= E_x + E_x - 2R_x(\tau)$$

$$R_z(\tau) = \int z(t) z(t+\tau) dt = \int (\alpha x(t) + \beta y(t)) (\alpha x(t+\tau) + \beta y(t+\tau)) dt =$$

$$= \alpha\beta \int y(t) x(t+\tau) dt + \alpha\beta \int x(t) y(t+\tau) dt + \alpha^2 \int x(t) x(t+\tau) dt + \beta^2 \int y(t) y(t+\tau) dt$$

$$= \alpha^2 R_x(\tau) + \beta^2 R_y(\tau) + \alpha\beta \int x(t) y(t+\tau) dt + \alpha\beta \int y(t) x(t+\tau) dt$$

FUNZIONI DI MUTUA CORRELAZIONE (CROSS CORRELATION)

$$R_{yx}(\tau) = \int x(t) y(t+\tau) dt \quad R_{xy} = \int y(t) x(t+\tau) dt$$

La somma delle funzioni di autocorrelazione non è uguale alle funzione di autocorrelazione della somma.

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

$$z(p) = \alpha x(p) + \beta y(p) \quad \text{per la linearità}$$

$$S_z(p) = |z(p)|^2 = z(p) z^*(p) = [\alpha x(p) + \beta y(p)] [\alpha x^*(p) + \beta y^*(p)] =$$

$$= \alpha^2 |x(p)|^2 + \beta^2 |y(p)|^2 + \alpha\beta x(p) y^*(p) + \alpha\beta y(p) x^*(p) =$$

$$= \alpha^2 S_x(p) + \beta^2 S_y(p) + \alpha\beta S_{xy}(p) + \alpha\beta S_{yx}(p)$$

$$S_{yx}(p) = x^*(p) y(p) = \mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\}$$

MUTUI SPETTRI

$$S_{xy}(p) = x(p) y^*(p) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

$$\mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\int x(t) y(t+\tau) dt\right\} = \int_{\tau} \left[\int_t x(t) y(t+\tau) dt \right] e^{-j2\pi p\tau} d\tau =$$

$$= \int_t x(t) \left[\int_u y(u) e^{-j2\pi p(u-t)} du \right] dt = \int_t x(t) e^{j2\pi p t} \left[\int_u y(u) e^{-j2\pi p u} du \right] dt =$$

$$= y(p) \int_t x(t) e^{j2\pi p t} dt = y(p) X^*(p) = S_{yx}(p)$$

ECOGRAFIA

Viene mandato un segnale ad ultrasuoni ($1 \text{ MHz} \div 18 \text{ MHz}$), quando incontra un discontinuità il segnale viene riflesso e torna indietro.

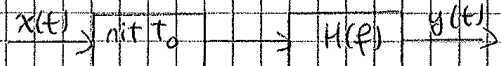
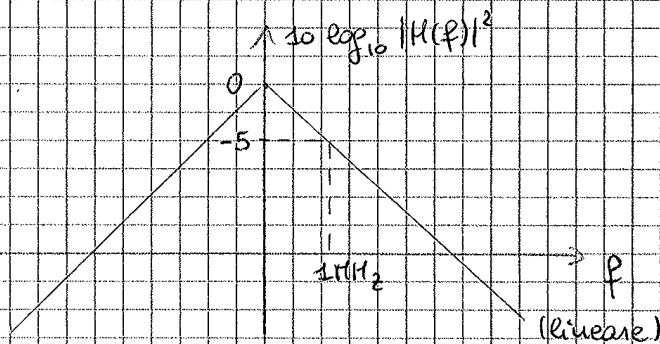
Viene trasmesso il segnale $x(t)$ e si riceve il segnale $y(t) = \alpha x(t-t_0)$, α è un coefficiente di riduzione $\Rightarrow \alpha < 1$.

Per semplicità ora consideriamo $\alpha = 1$.

Tessuto	Attenuazione	$\frac{dB}{cm \cdot MHz}$	@ 1 MHz (misurati ad 1 MHz questi valori)
sangue	0,18		
grasso	0,6		
cervello	0,85		
carcio	20		
polmone	40		
acqua	0,0022		

L'attenuazione media è $0,5 \frac{dB}{cm \cdot MHz}$

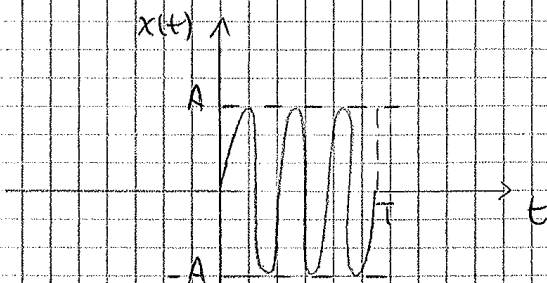
Aumentando i MHz aumenta anche l'attenuazione.



Per avere un'attenuazione minima bisognerebbe utilizzare basse frequenze, ma a basse frequenze la risoluzione è minore e quindi non si riescono a vedere gli oggetti più piccoli poiché la lunghezza d'onda del segnale è troppo grande. Bisogna ottenere un compromesso.

Il segnale che viene utilizzato è un modello di:

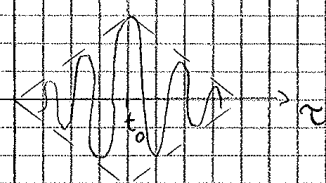
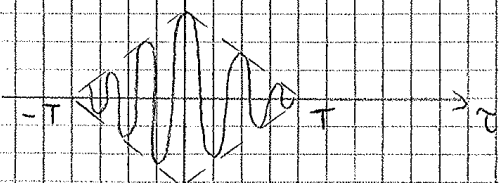
$$x(t) = A \sin 2\pi f_0 t \cdot p_T(t - \frac{T}{2}) \quad \text{modello del segnale utilizzato}$$



3 periodi del seno in un intervallo T

$\uparrow R_x(\tau)$ autocorrelazione

$\uparrow R_{yx}(\tau)$ mutua correlazione



Il satellite invia un segnale $x(t)$ e questo viene ricevuto con un ritardo t_0 , ovvero si riceve $x(t-t_0)$

In questo caso la distanza è solo di andata.

$$d = ct_0 \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{i segnali dei satelliti sono onde p.u.}$$

La posizione si ricava interpolando i dati di quattro satelliti diversi che permettono di trovare le 4 incognite x_0, y_0, z_0 e il tempo Δt , che è l'errore rispetto al tempo dell'orologio del navigatore che non ha la stessa precisione di quelli dei satelliti.

I 4 satelliti mandano 4 segnali $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, il ricevitore riceve i segnali sommati con un coefficiente di attenuazione diverso per ogni satellite (dipende dalla distanza).

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) + \alpha_4 x_4(t)$$

I ricevitori calcolano i prodotti scalari:

$$\langle y(t), x_1(t-\tau) \rangle = \alpha_1 R_{x_1}(\tau-t_1) + \dots$$

$$\langle y(t), x_2(t-\tau) \rangle$$

⋮

C'è sicuramente interferenza e rumore ma questi sono minimi.

SEGNALI AD ENERGIA FINITA



$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \text{vale sempre}$$

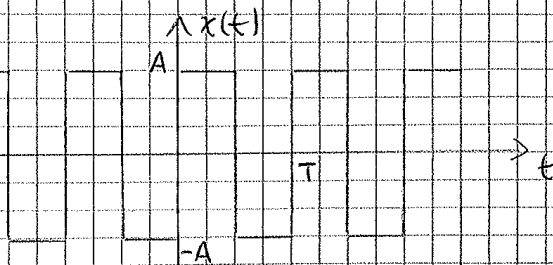
$$S_y(\omega) = |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 = S_x(\omega) |H(\omega)|^2$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ S_y(\omega) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ S_x(\omega) |H(\omega)|^2 \} = \mathcal{F}^{-1} \{ S_x(\omega) \} * \mathcal{F}^{-1} \{ |H(\omega)|^2 \} = R_x(\tau) * \mathcal{F}^{-1} \{ |H(\omega)|^2 \}$$

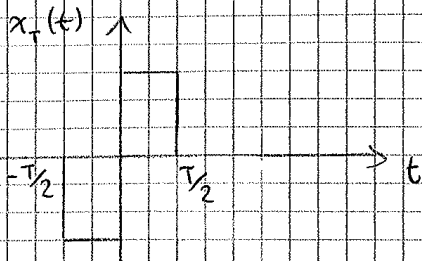
$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) \rightarrow |H(\omega)|^2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_h(\tau)$$

$$R_h(\tau) = \text{autocorrelazione di } h(t) = \int h(t)h(t+\tau) dt$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$



Segnale periodico di periodo T con duty cycle 50% (cioè metà positivo e metà negativo)



$x(t)$ TRONCATO
 $x_T(t) = x(t) p_T(t)$

$$\Psi_k(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi k t / T} \quad p_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right] p_T(t)$$

$\uparrow \text{Re}\{\Psi_k(t)\}$

per $t < -T/2$ e $t > T/2$ vale 0



$$\begin{aligned} \langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle &= \int \Psi_k(t) \Psi_e^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi k t / T} e^{-j2\pi e t / T} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi (k-e) t / T} dt \end{aligned}$$

se $k=e$ $\langle \Psi_k(t), \Psi_k(t) \rangle = 1$ l'energia del segnale vale 1

$$\text{se } k \neq e \quad \langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle = \frac{1}{T} \frac{e^{j2\pi (k-e) T / T} - e^{-j2\pi (k-e) T / T}}{j2\pi (k-e) / T} = \frac{1}{T} \frac{e^{j2\pi (k-e)} - e^{-j2\pi (k-e)}}{j2\pi (k-e) / T}$$

$$e^{j2\pi (k-e)} = (-1)^{k-e}$$

$$\Rightarrow \langle \Psi_k(t), \Psi_e(t) \rangle = \frac{1}{T} \frac{(-1)^{k-e} - (-1)^{k-e}}{j2\pi (k-e) / T} = 0$$

$$B = \left\{ \Psi_k(t) \right\}_{k=-\infty}^{\infty} \quad k \text{ intero}$$

L'insieme dei segnali B è una base ORTONORMALE (il prodotto scalare del segnale per se stesso fa 1, il prodotto scalare di un segnale per un altro fa zero).

$x_T(t)$ è scrivibile "esattamente" come combinazione lineare dei segnali della base B

• Sicuramente si può scrivere: $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \psi_k(t)$

$\Rightarrow e(t) = x_T(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \psi_k(t) = 0$ segnale nullo

Calcoliamo $\langle x_T(t), \psi_e(t) \rangle$

$$\langle x_T(t), \psi_e(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \psi_k(t) \right] \psi_e^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t) \psi_e^*(t) dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta_{ke} = a_e$$

• $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi_k(t)$

$$c_k = \langle x_T(t), \psi_k(t) \rangle = \int x_T(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi k t/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi k t/T} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} X_T(f) \Big|_{f=k/T}$$

$X_T(f)$ = trasformata di Fourier del segnale Troncato

$$X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}} \int x_T(t) e^{-j2\pi k t/T} dt}_{c_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi k t/T} p_T(t) =$$

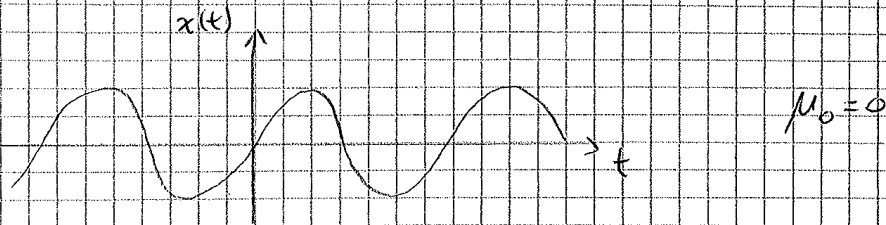
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int x_T(t) e^{-j2\pi k t/T} dt}_{M_k} \cdot e^{j2\pi k t/T} p_T(t)$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k t/T} p_T(t)$$

$$M_k \triangleq \frac{1}{T} \int x_T(t) e^{-j2\pi k t/T} dt = \frac{1}{T} X_T(f) \Big|_{f=k/T}$$

$$M_k = k\text{-esimo coefficiente della serie di Fourier} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{j2\pi k t/T} p_T(t)$$

• C'è una relazione tra serie di Fourier e Trasformata di Fourier.

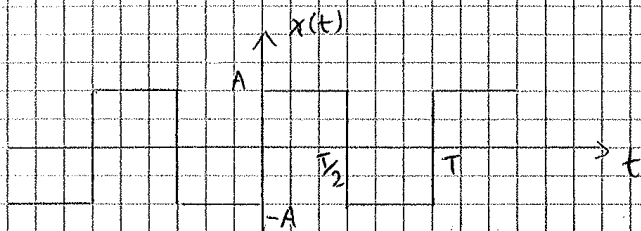


Per verifica puoi essere comodo controllare il valore di μ_0 .

ESEMPIO:

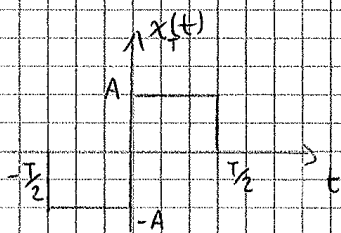
Serie di Fourier per $x(t)$:

È LA 1^a volta che riprova!



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k t / T}$$

$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j2\pi k t / T} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{j2\pi k t / T} dt = \frac{1}{T} X(\varphi) \Big|_{\varphi = k/T}$$



$$x_T(t) = A \left[p_{T/2}(t - T/2) - p_{T/2}(t + T/2) \right] = A \left[p_{T/2}(t) * \delta(t - T/2) - p_{T/2}(t) * \delta(t + T/2) \right] =$$

$$= A p_{T/2}(t) * \left[\delta(t - T/2) - \delta(t + T/2) \right]$$

$$X_T(\varphi) = A \frac{\text{sinc}(\pi \varphi T/2)}{\pi \varphi} \left[e^{-j2\pi \varphi T/2} - e^{j2\pi \varphi T/2} \right] = -2jA \frac{\text{sinc}(\pi \varphi T/2)}{\pi \varphi} \text{sinc}(\pi \varphi T/2)$$

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right) = -\frac{1}{T} 2jA \frac{\text{sinc}^2(\pi k/2)}{\pi k/T}$$

$$x(t) = \sum_k \mu_k e^{j2\pi k t / T}$$

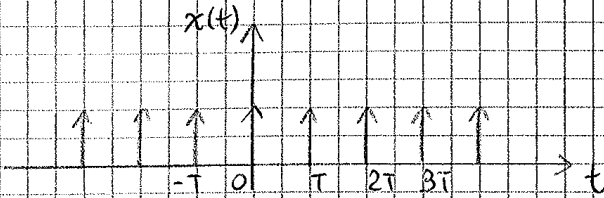
$$X(\varphi) = \sum_k \mu_k \delta(\varphi - k/T) = \sum_k \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right) \delta(\varphi - k/T) = \frac{1}{T} \sum_k X_T(\varphi) \delta(\varphi - k/T) =$$

$$= \frac{1}{T} X_T(\varphi) \sum_k \delta(\varphi - k/T)$$

SEGNALE TRENO DI DELTA

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t+T) + \dots$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_k M_k e^{j2\pi k t / T}$$

$$M_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k t / T} dt$$

$$x_T(t) = \delta(t)$$

$$M_k = \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi k t / T} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot 1 dt = \frac{1}{T}$$

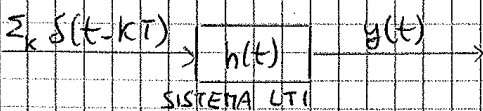
$$x(t) = \sum_k \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t / T}$$

$$X(f) = \sum_k M_k \delta(f - k/T) = \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - k/T)$$

$$\mathcal{F}\left\{ \sum_k \delta(t - kT) \right\} = \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - k/T)$$

La trasformata di Fourier di un treno di delta è uguale ad un treno di delta.

ESEMPIO:

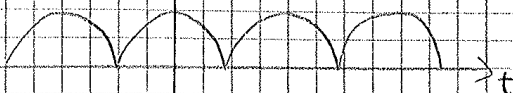


$$Y(f) = X(f)H(f) = H(f) \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - k/T) \Rightarrow H(f) = X_T(f) \quad ?$$

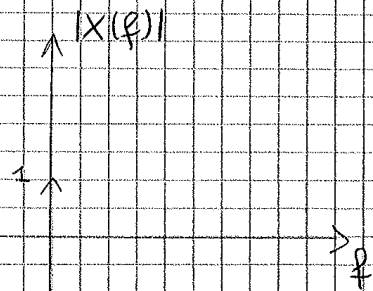
$$y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * \sum_k \delta(t - kT) = \sum_k h(t) * \delta(t - kT) = \sum_k h(t - kT)$$

è lineare

$\uparrow x(t)$



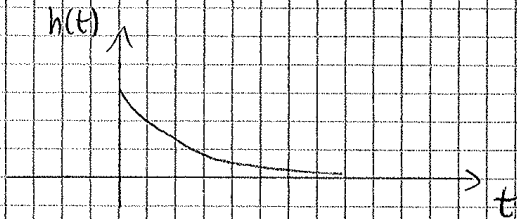
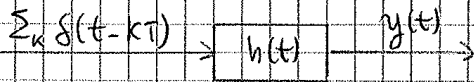
Supponiamo di avere questo segnale:
 $x(t) = \left| \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right|$ periodo $T/2$



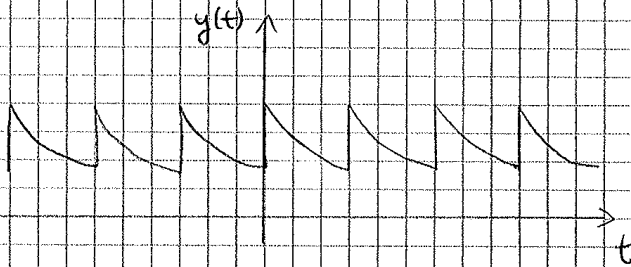
$$X(p) = \delta(p)$$

$$\Rightarrow x(t) = 1$$

ESEMPIO 2:



$$y(t) = h(t) * \sum_k \delta(t - kT) = \sum_k h(t) * \delta(t - kT) = \sum_k h(t - kT)$$



L'uscita di un sistema LTI con entrata un segnale periodico è sempre periodica, può succedere che i periodi siano diversi (vedi esempio 1).

SIMMETRIE

Se $x(t)$ è reale $\Rightarrow x_T(t)$ è reale e $X_T(p)$ è tale che:

$$X_T(-p) = X_T^*(p)$$

$$X(p) = X_T(p) \frac{1}{T} \sum_k \delta(p - k/T) = \sum_k \mu_k \delta(p - k/T)$$

$|X(p)|$ è una funzione pari
 $\angle X(p)$ è una funzione dispari

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T(p) \Big|_{p = k/T}$$

$$|\mu_{-k}| = |\mu_k| \quad \text{pari}$$

$$\angle \mu_{-k} = -\angle \mu_k \quad \text{dispari}$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = \mu_N \delta(f - N/T) + \mu_{-N} \delta(f + N/T) \quad \rightarrow \text{trasformata di Fourier di un seno/coseno}$$

$$P_y = |\mu_N|^2 + |\mu_{-N}|^2$$

A partire da un segnale periodico, utilizzando un opportuno filtro passa banda, si riesce ad ottenere un segnale sinusoidale in uscita.

Si definisce lo **SPETTRO DI POTENZA** del segnale periodico $x(t)$ di periodo T :

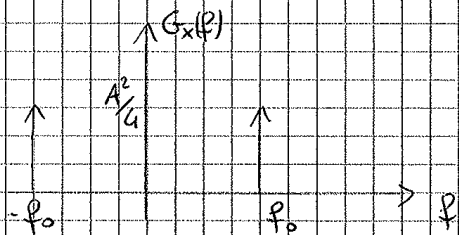
$$G_x(f) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(f - k/T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k |\mu_k|^2 \delta(f - k/T) df = \sum_k |\mu_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T) df = \sum_k |\mu_k|^2 = P_x$$

L'integrale dello spettro di potenza deve dare la potenza.

Per il segnale sinusoidale:

$$G_x(f) = |\mu_1|^2 \delta(f - f_0) + |\mu_{-1}|^2 \delta(f + f_0) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$$



la potenza è sempre una funzione reale, positiva.

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}\{G_x(f)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_k |\mu_k|^2 \delta(f - k/T)\right\} = \sum_k |\mu_k|^2 \mathcal{F}\{\delta(f - k/T)\} = \sum_k |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T}$$

$R_x(\tau)$ è una funzione periodica di periodo T .

$$x(t) = \sum \mu_k e^{j2\pi k t/T}$$

$$R_x(\tau) = \sum |\mu_k|^2 e^{j2\pi k \tau/T} \quad \Rightarrow \text{periodico dello stesso periodo di } x(t)$$

$$X(f) = \sum \mu_k \delta(f - k/T)$$

$$G_x(f) = \sum |\mu_k|^2 \delta(f - k/T)$$

I coefficienti delle serie di Fourier del segnale d'uscita sono uguali ai coefficienti delle serie di Fourier del segnale d'entrata moltiplicati per $H(k_T)$, ovvero $H(f)$ calcolato nel valore in cui si annulla la delta.

$$G_y(f) = \sum_k |v_k|^2 \delta(f - k_T) = \sum_k |\mu_k|^2 |H(k_T)|^2 \delta(f - k_T) = \\ = |H(f)|^2 \sum_k |\mu_k|^2 \delta(f - k_T) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ G_y(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ |H(f)|^2 G_x(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ |H(f)|^2 \} * R_x(\tau) = \\ = R_h(\tau) * R_x(\tau)$$

↓
se è ad energia finita

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) x(t+\tau) dt \quad \text{segnale periodico}$$

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t+\tau) dt \quad \text{segnale ad energia finita}$$

SISTEMA CIRCOLATORIO

- trasporta le sostanze essenziali nei tessuti;
- rimuovere rifiuti metabolici;
- bilanciamento dell'ossigeno e nutrienti in differenti stati fisiologici;
- comunicazione ormonale;
- regolazione della temperatura del corpo.

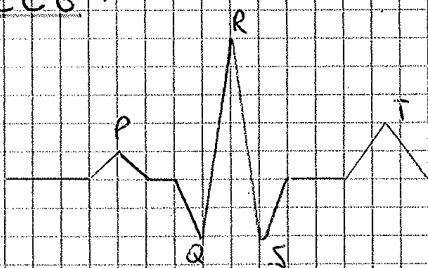
Il cuore è avvolto dalle coronarie che partono dall'aorta, le coronarie si dividono in: destra, sinistra e circonflessa.

la più importante è quella di sinistra che svolge il 60% del lavoro, la destra il 25% e la circonflessa il 15%.

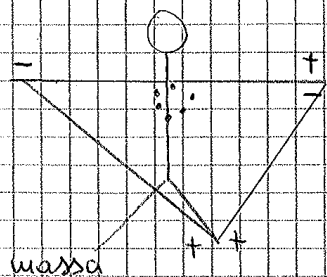
Nel cuore sono presenti due nodi: senoatriale e atrioventricolare.

- Il segnale parte dal nodo senoatriale, si espande negli atri, arriva al nodo atrioventricolare, passa per il fascio di His e successivamente attraverso le fibre di Purkinje, raggiunge i ventricoli. I ventricoli iniziano a contrarsi dal basso e la contrazione risale grazie alle fibre.

ECG:



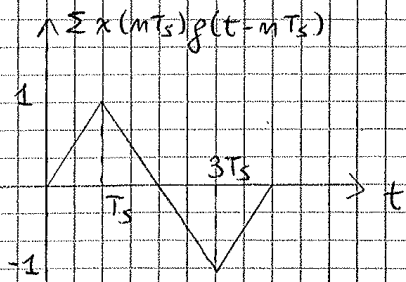
- P: contrazione atriale dall'alto verso il basso (depolarizzazione degli atri)
- Q, R, S: contrazione ventricolare (depolarizzazione dei ventricoli)
- T: ripolarizzazione dei ventricoli
- PR: distanza tra contrazione dell'atrio e del ventricolo
- QT: distanza tra depolarizzazione e ripolarizzazione dei ventricoli (la sua lunghezza è implicata in alcune disfunzioni)



Triangolo di Einthoven
più poste posizionate su polsi
e caviglie durante l'ECG

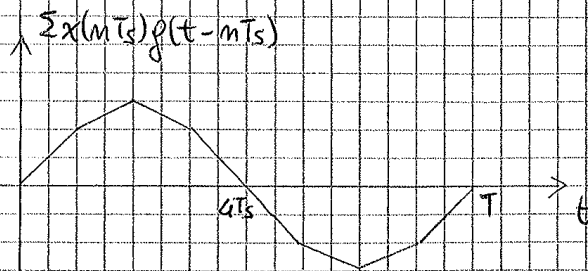
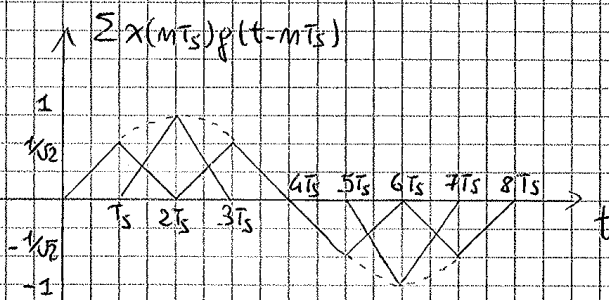
Gli elettrodi sono tutti e sei positivi, il cuore diventa il polo negativo.

Il soffio genera un rumore dovuto al flusso turbolento invece che laminare.



Se $T_s = \frac{T}{8}$: $x(mT_s) = \sin\left(\frac{2\pi m T}{8}\right) p_T\left(\frac{mT}{8} - \frac{T}{2}\right) = \sin\left(\frac{mT}{4}\right) p_T\left(\frac{mT}{8} - \frac{T}{2}\right)$

m	$x(mT_s)$
0	0
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	1
3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
4	0
5	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
6	-1
7	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
8	0



Non è sbagliato prendere $g(t)$ come il triangolo, ma non si riuscirà ad ottenere il segnale di partenza.

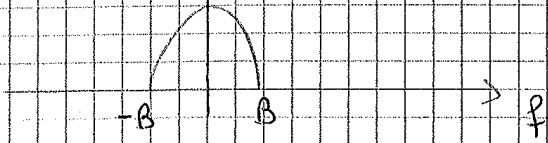
Vogliamo che sia esattamente $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s)g(t-mT_s)$

L'incognita è $g(t)$ oltre a T_s

Scelgo $G(f)$ uguale alle porta perché voglio che il segnale in uscita sia uguale all'ingresso.

$$\uparrow \left[\sum_m X(f - m f_s) \right] G(f) = X(f)$$

$$* \text{cioè } X(f) = 0 \text{ per } |f| > B$$



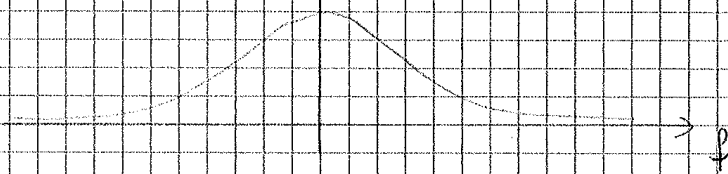
È possibile ricostruire il segnale se $f_s > 2B$, altrimenti si ha sovrapposizione delle $X(f)$ traslate, cioè si ha aliasing, che impedisce la ricostruzione di $x(t)$.

Se $x(t)$ è strettamente limitato in banda e ha banda B_x , è possibile ricostruirlo esattamente dai suoi campioni, a patto che la frequenza di campionamento sia $f_s > 2B_x$ e il filtro di ricostruzione abbia funzione di trasferimento $G(f)$ di tipo passa basso con banda $> B_x$.

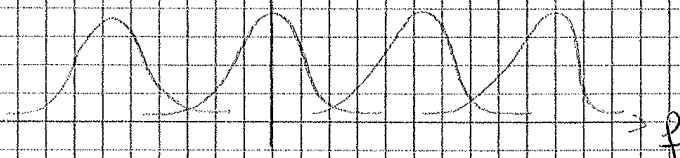
TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

$X(f)$

SEGNALE ILLIMITATO IN BANSA

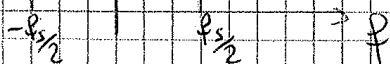


$$\uparrow \sum_m X(f - m f_s)$$



Si ha una sovrapposizione delle code chiamata ALIASING.

$G(f)$

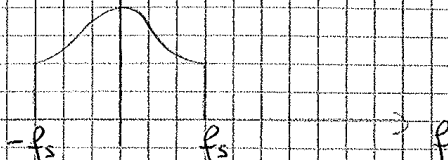


↓ questo succede quando $X(f)$ non è contenuto in un intervallo di frequenza, cioè è a banda illimitata

$$\uparrow Y(f) \neq X(f)$$

non si ottiene il segnale di partenza

$$Y(f) = G(f) \sum_m X(f - m f_s)$$



02/05/13

XII LEZIONE:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s) p(t - mT_s)$$

$x(mT_s)$ = campione di $x(t)$

T_s = intervallo di campionamento

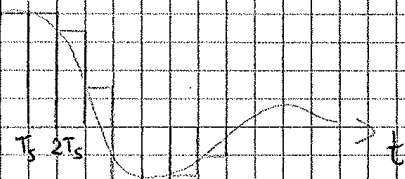
TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Occorre che la frequenza di campionamento sia maggiore di $2B_x$ e che

$$p(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ G(p) \} \quad \text{dove} \quad G(p) = \begin{cases} T_s & |p| \leq f_{s/2} \\ 0 & \text{altrve} \end{cases}$$

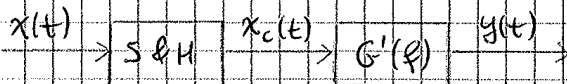
Nelle realtà per costruire un campionatore non si moltiplica per un treno di delta poiché questo non è fisicamente realizzabile

$x(t) \uparrow$



SAMPLE & HOLD

(campiona e mantiene)



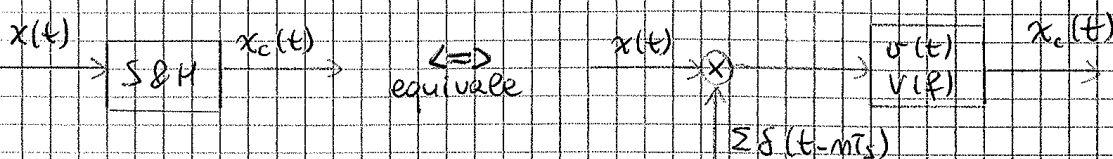
Vogliamo che $y(t) = x(t)$

$G'(p)$ = funzione di trasferimento del blocco ricostruttore

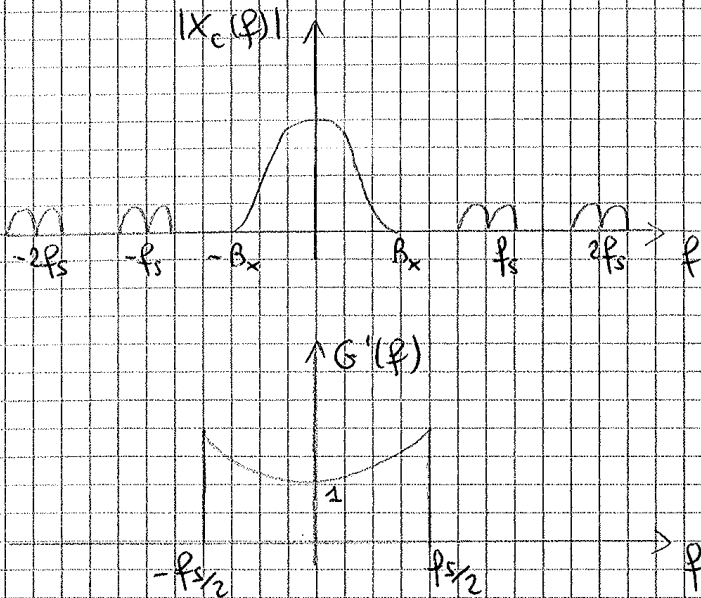
$$x_c(t) = x(0) p_{T_s}(t - T_s/2) + x(T_s) p_{T_s}(t - 3T_s/2) + \dots$$

Si definisce $v(t) = p_{T_s}(t - T_s/2)$

$$\Rightarrow x_c(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s) v(t - mT_s) = \sum_m x(mT_s) \delta(t - mT_s) * v(t)$$



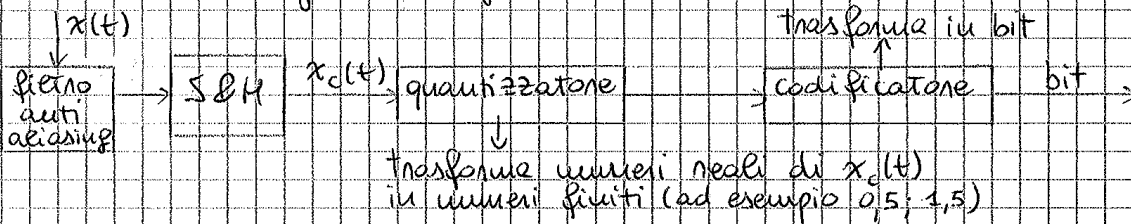
Il sample & hold equivale ad un segnale campionato idealmente e



Sulle repliche vengono aggiunti degli zeri in corrispondenza di mf_s

$$G'(f) = P_{f_s}(f) \frac{T_s}{V(f)}$$

ADC = Analog to Digital Converter



Campionamento GSM

$f_s = 8 \text{ kHz} \Rightarrow$ ogni $T_s = \frac{1}{8000}$ secondi viene generato un campione

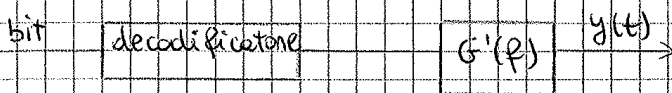
13 bit per campione (ogni campione viene convertito in 13 bit)

All'uscita dell'ADC i bit vengono generati a velocità:

$$T_b = \text{intervallo di bit} = \frac{T_s}{13}$$

$$\text{Bit rate } R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{13}{T_s} = 13 f_s = 13 \times 8000 \text{ bit/s}$$

DAC = Digital to Analog Converter



Non si può avere l'operazione inversa del quantizzatore.

$y(t) \neq x(t)$ perché normalmente $x(t)$ ha banda maggiore di $f_s/2$ inoltre il quantizzatore fa perdere informazioni e infine i filtri anti-aliasing e ricostruzione non sono ideali.

Dato un segnale $x[m]$ la sua ENERGIA è:

$$E_x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x[m]|^2$$

Un segnale $x[m]$ periodico di periodo π è tale che $x[m] = x[m+\pi]$
 π è un intero, positivo

Per un segnale periodico di periodo π , la potenza è:

$$P_x = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\pi-1} |x[m]|^2$$

Per un segnale $x[m]$ a energia finita la funzione di autocorrelazione è:

$$R_x(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^*[m] x[m+m]$$

Per un segnale $x[m]$ periodico di periodo π la funzione di autocorrelazione è:

$$R_x(m) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\pi-1} x^*[m] x[m+m]$$

Sistemi LTI nel tempo discreto:

Si definisce la risposta all'impulso del sistema come l'uscita del sistema quando al suo ingresso è posto il segnale $\delta[m]$

$h[m]$ = risposta all'impulso

Per un sistema fisicamente realizzabile:

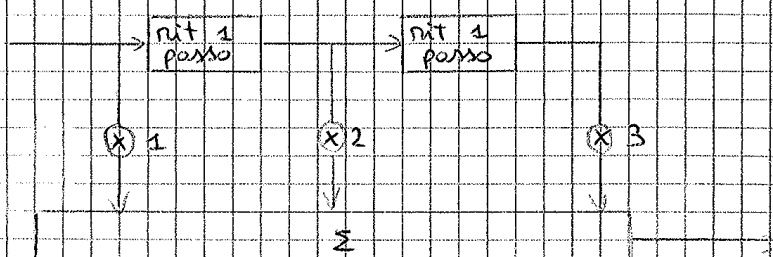
- $h[m] = 0$ per $m < 0$

- $h[m] \in \mathbb{R}$

Un sistema con risposta all'impulso $h[m]$ è STABILE se:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < \infty$$

ESEMPIO



$$\Rightarrow \lambda = \sum_k h[k] z^{-k}$$

Per l'autofunzione $w[m] = z^m$, l'autovalore λ vale $\lambda = \sum_k h[k] z^{-k} = H(z)$

$H(z)$ = funzione di trasferimento del sistema o trasformata zeta della risposta all'impulso $h[m]$

Per il tempo continuo:

$w(t) = e^{st} \rightarrow H(s)$ trasformata di Laplace

$w(t) = e^{j2\pi f t} \rightarrow H(f)$ trasformata di Fourier

La trasformata zeta è l'analogo della trasformata di Laplace

Se $x[m]$ è un segnale tempo discreto allora si definisce la sua trasformata zeta come:

$$X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m}$$

ESEMPI NOTEVOLI

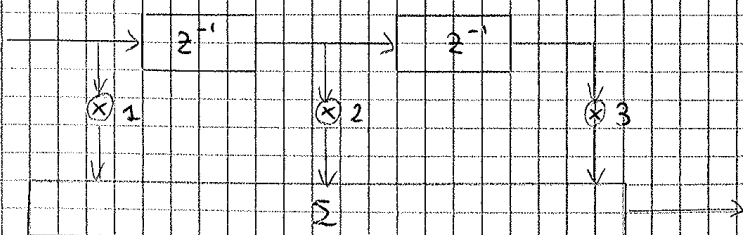
$$\mathcal{Z} \{ \delta[m] \} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m] z^{-m} = 1$$

$$\mathcal{Z} \{ \delta[m-1] \} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m-1] z^{-m} = z^{-1}$$

$$\mathcal{Z} \{ \delta[m-n] \} = z^{-n}$$

$$h[m] = \delta[m] + 2\delta[m-1] + 3\delta[m-2]$$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \quad \text{è un'operazione lineare}$$



Il ritardatore di un passo ha funzione di trasferimento $H(z) = z^{-1}$

$$\mathcal{Z} \{ p_n[m] \} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_n[m] z^{-m} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} z^{-m} = \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 - z^{-1}}$$

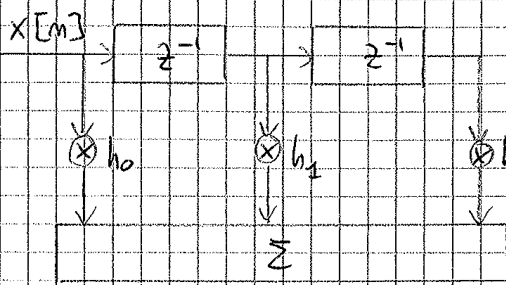
$$= -z \sum_{m=0}^{+\infty} x[m] \frac{d}{dz} z^{-m} = -z \frac{d}{dz} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-m} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

La derivata è lineare
e $x[m]$ non dipende da z

$$\bullet \mathcal{Z} \{ m a^m u[m] \} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right) = -z \left(\frac{(z-a) - z}{(z-a)^2} \right) = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$\bullet \mathcal{Z} \{ m a^{m-1} u[m] \} = \frac{z}{(z-a)^2} \quad |z| > |a|$$

$$\bullet \mathcal{Z} \{ h[m] * x[m] \} = H(z)X(z)$$



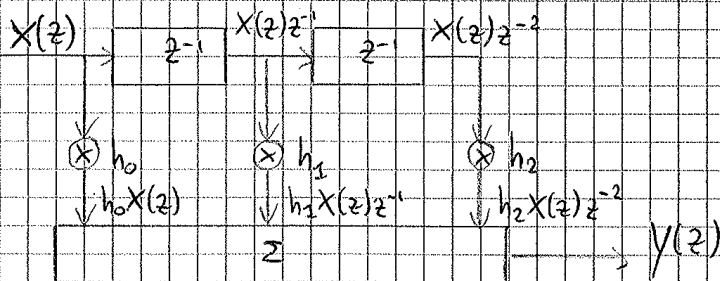
SISTEMA NON RETROAZIONATO

⇓

SISTEMA FIR = FINITE IMPULSE RESPONSE

(La risposta all'impulso ha durata finita)

Supponendo di conoscere $X(z)$, calcolare $Y(z)$



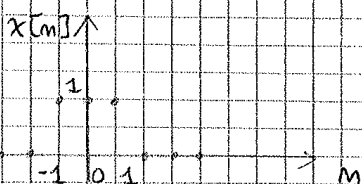
$$Y(z) = h_0 X(z) + h_1 X(z) z^{-1} + h_2 X(z) z^{-2} = X(z) [h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}] = X(z) H(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

risposta all'impulso dell'intero sistema

$$h[m] = \mathcal{Z}^{-1} \{ H(z) \} = h_0 \delta[m] + h_1 \delta[m-1] + h_2 \delta[m-2]$$

ESEMPIO:



$$Y(z) = W(z) + \alpha_2 z^{-1} Y(z)$$

$$W(z) = X(z) + \alpha_1 z^{-1} W(z)$$

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1 - \alpha_2 z^{-1}} = \frac{X(z)}{(1 - \alpha_2 z^{-1})(1 - \alpha_1 z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \alpha_2 z^{-1})(1 - \alpha_1 z^{-1})} = \frac{z}{z - \alpha_2} \cdot \frac{z}{z - \alpha_1}$$

Espansione in fattori semplici:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_N x^N} = \frac{a_0 + \dots + a_k x^k}{b_N (x - p_1)(x - p_2) \dots (x - p_N)} \quad k < N$$

Supponiamo che $p_i \neq p_e \quad \forall i \neq e$ (poli distinti)

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c_1}{x - p_1} + \frac{c_2}{x - p_2} + \dots + \frac{c_N}{x - p_N}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)} (x - p_1) = c_1 + \frac{c_2 (x - p_1)}{x - p_2} + \dots + \frac{c_N (x - p_1)}{x - p_N}$$

$$\left. \frac{N(x)}{D(x)} (x - p_1) \right|_{x=p_1} = c_1$$

Se $k > N$ prima si fa la divisione tra polinomi e poi si applica questo metodo.

$$\mathcal{Z}\{a^m u[m]\} = \frac{z}{z - a}$$

perché voglio ricondurmi alla
formula $\frac{z}{z - a}$
↑

Si opera l'espansione in fattori semplici di $\frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_N}{z - p_N}$

$$H(z) = c_1 \frac{z}{z - p_1} + c_2 \frac{z}{z - p_2} + \dots + c_N \frac{z}{z - p_N}$$

$$h[m] = c_1 p_1^m u[m] + c_2 p_2^m u[m] + \dots + c_N p_N^m u[m]$$

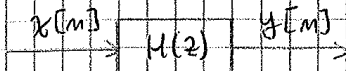
$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} = \frac{c_1}{z - \alpha_1} + \frac{c_2}{z - \alpha_2}$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{H(z)}{z} (z - \alpha_1) = \lim_{z \rightarrow \alpha_1} \frac{z}{z - \alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow \alpha_2} \frac{H(z)}{z} (z - \alpha_2) = \lim_{z \rightarrow \alpha_2} \frac{z}{z - \alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

ESERCIZIO:

$$x[m] = 6\delta[m+2] + 5\delta[m+1] + 22\delta[m] + 6\delta[m-1] - 2\delta[m-2]$$



$$H(z) = \frac{1}{6-z^{-1}-z^{-2}} \quad (\text{data})$$

Calcolare $y[m]$.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$X(z) = 6z^2 + 5z + 22 + 6z^{-1} - 2z^{-2}$$

le sequenze d'entrata può avere potenze positive e uscite no poiché non può essere in anticipo

$$Y(z) = \frac{6z^2 + 5z + 22 + 6z^{-1} - 2z^{-2}}{6-z^{-1}-z^{-2}}$$

$$Y(z) = \frac{6z^4 + 5z^3 + 22z^2 + 6z - 2}{6z^2 - z - 1}$$

moltiplico per $\frac{z^2}{z^2}$ per non avere potenze negative

$$\begin{array}{r|l} 6z^4 + 5z^3 + 22z^2 + 6z - 2 & 6z^2 - z - 1 \\ -6z^4 + z^3 + z^2 & \hline \hline // 6z^3 + 23z^2 + 6z & z^2 + z + 4 \\ -6z^3 + z^2 + z & \\ \hline // 24z^2 + 7z - 2 & \\ -24z^2 + 6z + 4 & \\ \hline // 11z + 2 & \end{array}$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{11z + 2}{6z^2 - z - 1}$$

$$6z^2 - z - 1 = 0 \quad z = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \begin{cases} -1/3 = p_2 \\ 1/2 = p_1 \end{cases}$$

$$6z^2 - z - 1 = 6 \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{3} \right)$$

$$Y(z) = z^2 + z + 4 + \frac{1}{6} G(z) \quad \text{dove} \quad G(z) = \frac{11z + 2}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{3} \right)}$$

$$G(z) = C_1 \frac{z}{z - p_1} + C_2 \frac{z}{z - p_2} + C_0$$

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{11z + 2}{z \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{3} \right)} = \frac{C_0}{z} + \frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2}$$

ESEMPIO:

$$H(z) = \frac{1}{(z-p)^2} \quad p = 0,5$$

$$X(z) = z + 1 + z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z+1+z^{-1}}{(z-p)^2} = \frac{z^2+z+1}{z(z-p)^2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z+1}{z^2(z-p)^2} = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{b_0}{z-p} + \frac{b_1}{(z-p)^2}$$

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{Y(z)}{z} z^2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2+z+1}{(z-p)^2} = \frac{1}{p^2} = 4$$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow p} \frac{Y(z)}{z} (z-p)^2 = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z^2+z+1}{z^2} = \frac{p^2+p+1}{p^2} = 7$$

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{Y(z)}{z} z^2 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2z+1)(z-p)^2 - 2(z^2+z+1)(z-p)}{(z-p)^4} = 20$$

$$b_0 = \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} \left[\frac{Y(z)}{z} (z-p)^2 \right] = \lim_{z \rightarrow p} \frac{(2z+1)z^2 - 2z(z^2+z+1)}{z^4} = -20$$

$$Y(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + b_0 \frac{z}{z-p} + b_1 \frac{z}{(z-p)^2}$$

$$y[m] = a_0 \delta[m] + a_1 \delta[m-1] + b_0 p^m u[m] + b_1 m p^{m-1} u[m]$$

- secondo metodo:

$$\frac{z^2+z+1}{z^2(z-p)^2} = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{b_0}{z-p} + \frac{b_1}{(z-p)^2} = \frac{a_0 z + a_1}{z^2} + \frac{b_0(z-p) + b_1}{(z-p)^2} =$$

$$= \frac{a_0 z(z-p)^2 + a_1(z-p)^2 + b_0 z^2(z-p) + b_1 z^2}{z^2(z-p)^2}$$

$$z^2+z+1 = (a_0+b_0)z^3 + (a_1 - a_0 - \frac{b_0}{z} + b_1)z^2 + (\frac{a_0}{z} - a_1)z + \frac{a_1}{z}$$

$$\begin{cases} a_0 + b_0 = 0 \\ a_1 - a_0 - \frac{b_0}{z} + b_1 = 1 \\ \frac{a_0}{z} - a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{z} = 1 \end{cases} \begin{cases} b_0 = -20 \\ b_1 = 7 \\ a_0 = 20 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

A volte questo secondo metodo è troppo complicato.

16/05/13

XV LEZIONE:

$$\mathcal{B} = \left\{ \psi_k[m] \right\}_{k=0}^{N-1} \quad \psi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi km/N} \quad m=0, \dots, N-1$$

AE di punti dell'intervallo $[0, N-1]$ i segnali sono nulli.

Per i segnali $x[m]$ nulli al di fuori dell'intervallo $[0, N-1]$ la base è completa:

$$x[m] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \psi_k[m]$$

$$C_k = \langle x[m], \psi_k[m] \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \psi_k^*[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j2\pi km/N}$$

$$C_k = x \cdot \psi_k^*$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad \underline{\psi}_k^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi k/N} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi k(N-1)/N} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_k^0 \\ W_k^1 \\ \vdots \\ W_k^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$W_k = e^{-j2\pi k/N}$$

$$x[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{e=0}^{N-1} x[e] e^{-j2\pi ke/N} \right) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{e=0}^{N-1} x[e] e^{-j2\pi ke/N} \right) e^{j2\pi km/N}$$

$$e^{j2\pi km/N}$$

$$X(k) \triangleq \sum_{e=0}^{N-1} x[e] e^{-j2\pi ke/N} = \sqrt{N} C_k \quad \text{TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA DI } x[m] \text{ (DFT)}$$

$$\Rightarrow x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi km/N}$$

$$\text{IDFT: Inverse DFT} \quad x[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi km/N} \quad m=0, \dots, N-1$$

FFT: Fast Fourier Transform è un'implementazione efficiente della DFT, è un algoritmo

IFFT: Inverse FFT

$$\psi_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi km/N}$$
 è definito per $m=0, \dots, N-1$ ed è periodico di periodo N

$$\text{DFT} \left\{ e^{j2\pi m/N} \right\} = N \delta[k-1]$$

$$\text{DFT} \left\{ e^{-j2\pi m/N} \right\} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi m/N} e^{-j2\pi k m/N} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi (k+1)m/N}$$

$$\text{per } k = N-1 \quad \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi m/N} = N$$

▽ In questo caso non si poteva scegliere $k = -1$ in analogia al caso precedente poiché nella DFT $k \in [0, N-1]$.

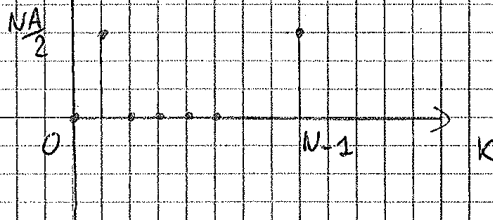
$$\text{per } k \neq N-1 \quad \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi (k+1)m/N} = 0$$

$$\text{DFT} \left\{ e^{-j2\pi k m/N} \right\} = N \delta[k - (N-1)]$$

$$X(k) = \frac{NA}{2} e^{j\theta} \delta[k-1] + \frac{NA}{2} e^{-j\theta} \delta[k - (N-1)]$$

La DFT è complessa quindi si può disegnare il modulo e la fase

$|X(k)| \wedge$

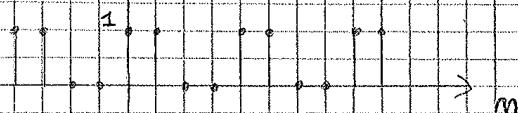


la parte reale $\text{Re}\{X(k)\}$ e il modulo di $X(k)$ sono simmetriche rispetto a $\frac{N}{2}$, mentre la parte immaginaria $\text{Im}\{X(k)\}$ e la fase sono dispari.

Se facessimo variare k da $(-\infty, +\infty)$ otterremmo un segnale periodico di periodo N .

ESEMPIO:

$x[m] \wedge$



In generale, il generico segnale periodico di periodo N può essere scritto come:

$$x[m] = x[0]x_s[m] + x[1]x_s[m-1] + x[2]x_s[m-2] + \dots + x[N-1]x_s[m-(N-1)]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x[k]x_s[m-k]$$

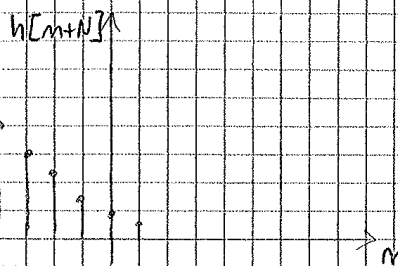
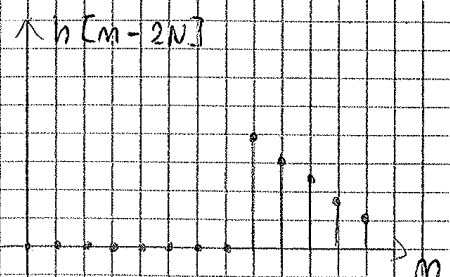
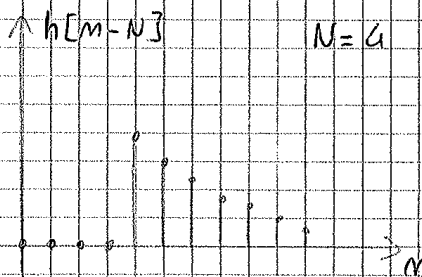
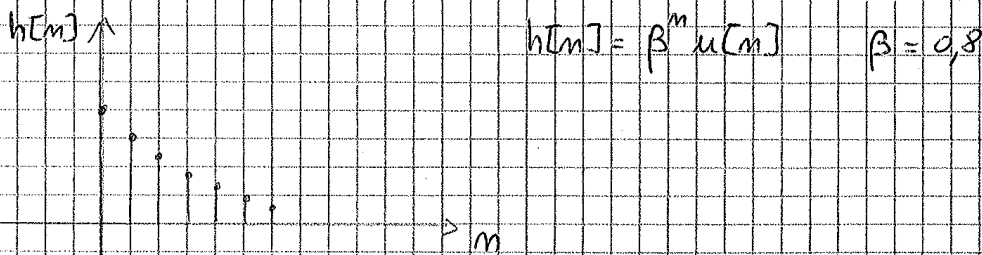
Definiamo $h_N[m] = x_s[m] * h[m]$ uscita di un sistema LTI con risposta all'impulso $h[m]$ ed entrata $x_s[m]$ (treno di delta)

$$h_N[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]h[m-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} \delta[k-sN] \right] h[m-k] =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-sN]h[m-k] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h[m-sN]$$

↳ segnale periodico di periodo N

Se all'ingresso c'è un treno di delta di periodo N , l'uscita sarà anch'essa periodica di periodo N .



le code si sommano agli altri segnali.

$$h_N[m] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h[m-sN]$$

$$Y(k) = \text{DFT} \{ y[m] \} = \sum_{m=0}^{N-1} y[m] e^{-j2\pi km/N} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} x[s] h_N[m-s] \right)$$

$$e^{-j2\pi km/N} = \sum_{s=0}^{N-1} x[s] \sum_{m=0}^{N-1} h_N[m-s] e^{+j2\pi km/N} =$$

$$= \sum_{s=0}^{N-1} x[s] \sum_{m=0}^{N-1} h_N[m-s] e^{-j2\pi k(m-s)/N} e^{-j2\pi ks/N} = \sum_{s=0}^{N-1} x[s] e^{-j2\pi ks/N}$$

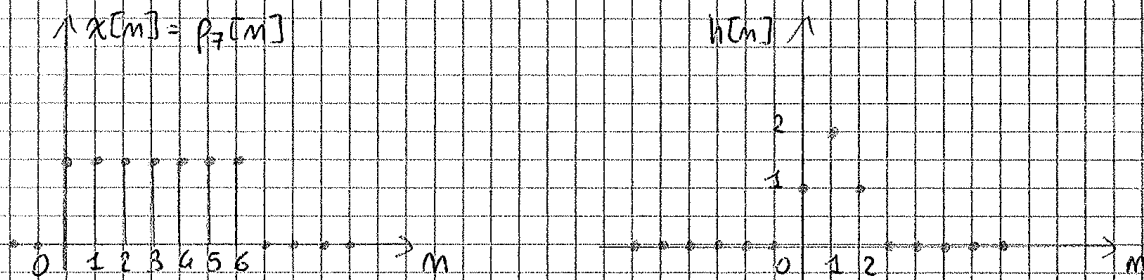
$$\cdot \sum_{m=0}^{N-1} h_N[m-s] e^{-j2\pi k(m-s)/N} = \sum_{s=0}^{N-1} x[s] e^{-j2\pi ks/N} \cdot \sum_{e=-s}^{N-1-s} h_N[e] e^{-j2\pi ke/N} =$$

(e' intervallo è sempre N)

$$= \sum_{s=0}^{N-1} x[s] e^{-j2\pi ks/N} \cdot \sum_{e=0}^{N-1} h_N[e] e^{-j2\pi ke/N} = X(k) H_N(k)$$

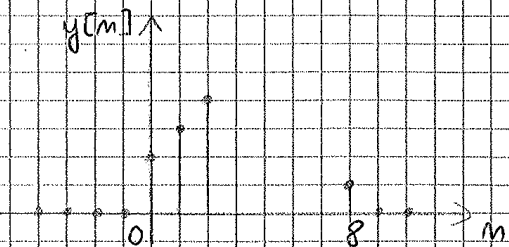
$$y[m] = \text{IDFT} \{ X(k) H_N(k) \}$$

ESEMPIO:



Nessun sistema ha risposta all'impulso periodica, altrimenti i sistemi sarebbe instabile.

$$y[m] = x[m] * h[m]$$



Il numero di campioni diversi da zero per $y[m]$ è:

$$N_x + N_h - 1$$

Nell'esempio $N_x = 7$ $N_h = 3$

$$\Rightarrow N_x + N_h - 1 = 9$$

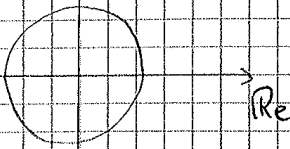
One faccio finto che $y[m]$ sia periodico di periodo 9 e quindi anche $x[m]$ è periodico di periodo 9. La $h[m]$ viene periodicizzata di periodo 9.

Si è passati dalla trasformata di Fourier alla trasformata zeta.

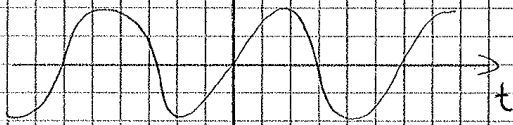
La trasformata zeta è uguale alla trasformata di Fourier quando $z = e^{j2\pi f \Delta t}$.

Nel piano complesso la trasformata zeta è uguale alla trasformata di Fourier lungo la circonferenza di raggio unitario.

Im ↑

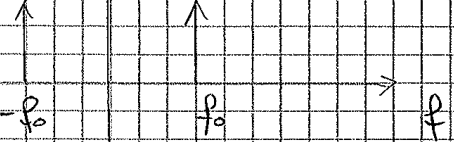


$\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ ↑

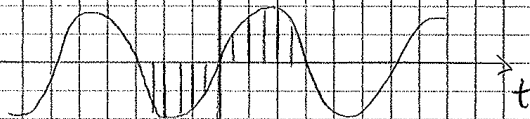


$|X(f)|$ ↑

$\frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$



$\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ ↑



$|X(f)|$ ↑



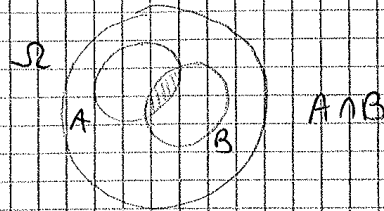
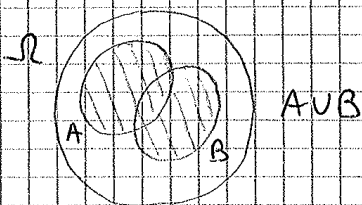
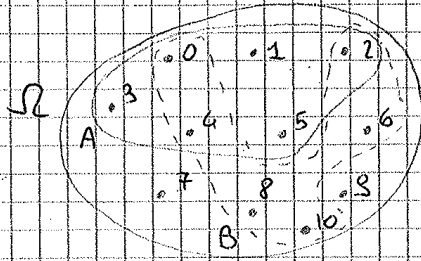
Campionando il segnale, lo spettro si periodizza ovvero si generano delle repliche.

$\mathcal{F}\{x(t) \sum \delta(t - m\Delta t)\}$ trasformata di Fourier del segnale discreto

$$\mathcal{F}\{x(t) \sum \delta(t - m\Delta t)\} = X(f) * \frac{1}{\Delta t} \sum \delta(f - \frac{m}{\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t} \sum X(f - \frac{m}{\Delta t})$$

$$\text{oppure: } \mathcal{F}\{x(t) \sum \delta(t - m\Delta t)\} = \mathcal{F}\{x(m\Delta t) \sum \delta(t - m\Delta t)\} = \sum x[m] e^{-j2\pi f m \Delta t}$$

DIAGRAMMA DI VENN



Prodotto cartesiano tra due insiemi Ω_1 e Ω_2 :

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \left\{ w_i^{(1)}, w_j^{(2)} : w_i^{(1)} \in \Omega_1 \wedge w_j^{(2)} \in \Omega_2 \right\}$$

ESEMPIO

$$\Omega_1 = \{ AII, FII, ELI, ELN, AS, TI, DIS, FIS \}$$

$$\Omega_2 = \{ \text{voti} \geq 18 \}$$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{ (AII, 18), (AII, 18), \dots, (AII, 30L), (FII, 18), \dots \}$$

Cardinalità $\Omega_1 = N_1, \Omega_2 = N_2$

$$\Rightarrow \text{card. } \Omega_1 \times \Omega_2 = N_1 N_2$$

ESPERIMENTO: es. lancio del dado

EVENO: possibile risultato dell' esperimento

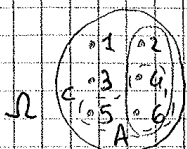
SPAZIO CAMPIONE: insieme dei possibili eventi associati all' esperimento

ESPERIMENTO: lancio del dado

SPAZIO CAMPIONE: $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ insieme degli eventi semplici

EVENI COMPLESSI: $A = \{ \text{il dado restituisce un numero pari} \}$

↓
sottoinsiemi di Ω



23/05/13

XVIII LEZIONE:

TEORIA DELLE PROBABILITÀ

1) $P\{A\} \geq 0$

2) $P\{\Omega\} = 1$

3) se A e B sono mutuamente esclusivi $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

Se A e B non sono mutuamente esclusivi:

• $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$

• $P\{A \cup B\} \leq P\{A\} + P\{B\}$

• $P\{A \cap B\} = P\{A, B\} =$ PROBABILITÀ CONGIUNTA

2 ESPERIMENTI (es. lancio di due dadi)

$\Omega_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\Omega_2 = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\Omega_2 \backslash \Omega_1$	1	2	3	4	5	6
1
2
3
4
5
6

$\{1, 2\} \neq \{2, 1\}$

$P\{\{1, 1\}\} = \frac{1}{36}$

Se due eventi A e B sono statisticamente indipendenti allora la probabilità $P\{A, B\} = P\{A\} P\{B\}$, vale anche il viceversa (se e solo se)

ESEMPIO

$P\{\text{somma dei valori nel lancio di due dadi sia } 8\} = p$

$$P\{\text{vincita}\} \approx \frac{N_P}{N}$$

● Nel caso dell'esperimento 2:

lancio il dado e registino solo i risultati che ottengo quando si verifica l'evento B, ottengo N_B casi di verifica dell'evento B e all'interno di questi casi ottengo N_{PB} volte il valore 2.

$$P\{\text{vincita} | B\} \approx \frac{N_{PB}}{N_B} = \frac{N_{PB}}{N} \cdot \frac{N}{N_B} \approx P\{\text{vincita} \cap B\} \frac{1}{P\{B\}}$$

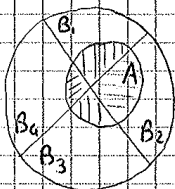
REGOLA DI BAYES: $P\{\text{vincita} \cap B\} = P\{\text{vincita} | B\} P\{B\}$

$$P\{A \cap B\} = P\{A, B\} = P\{A | B\} P\{B\} = P\{B | A\} P\{A\}$$

● $P\{A | B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$

$$P\{\text{vincita} | B\} = P\{2 | B\} = \frac{P\{2 \cap B\}}{P\{B\}} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE



Ω $P\{A\}?$

● $B_1 \cap B_2 = \emptyset \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset \quad \dots \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^4 B_i = \Omega$ $B_i =$ disgiunti e esaustivi

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^4 B_i = \{A \cap B_1\} \cup \{A \cap B_2\} \cup \{A \cap B_3\} \cup \{A \cap B_4\}$$

$$P\{A\} = P\{\{A \cap B_1\} \cup \dots \cup \{A \cap B_4\}\}$$

$\{A \cap B_1\} \dots \{A \cap B_4\}$ sono eventi mutuamente esclusivi

● $P\{A\} = P\{A \cap B_1\} + \dots + P\{A \cap B_4\}$

$$P\{A\} = P\{A | B_1\} P\{B_1\} + \dots + P\{A | B_4\} P\{B_4\}$$