NUMERO: 1275 ANNO: 2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Reho

MATERIA: Statistica Temi D'esame + Eserc., Prof.Fontana_Vicario

STATISTICA ROBERTO FONTANA / PAOLA SIRI

(TEORIA) (ESERCITAZIONE SQUADRE)

Crediti : 10

- Esame

Parte scritta : Esercizi su quello che verrà visto a { LABORATORIO / LEZIONE / ESERCITAZIONE

Voto Massimo : 30/30

- $V_{scritto} \geq 24/30$

  A - ORALE : $V_{finale} = V_{scritto} \pm V_{orale}$

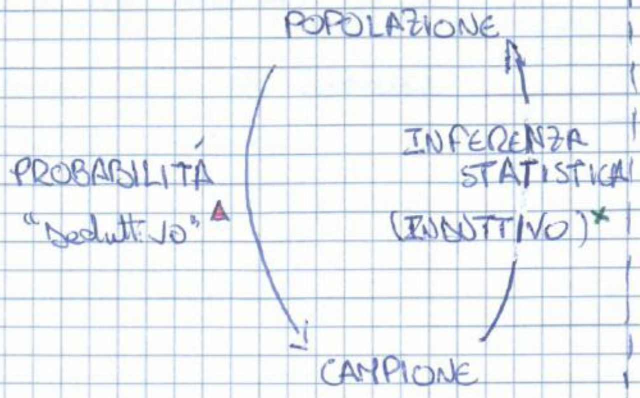
  B - NIENTE : $V_{finale} = V_{scritto}$

- $V_{scritto} \leq 23/30$

  $V_{finale} = V_{scritto}$

---

MAIL : ROBERTO.FONTANA@POLITO.IT (MARTEDì 15h00 SU APPUNTAMENTO)




▲ qual è il comportamento "potenziale" di un campione estraibile da una popolazione nota?

✗ con quale precisione si possono descrivere le caratteristiche di una popolazione sulla base di un campione?

Esempio: Lancio un dado; probabilità che esca 5? ⇒ 1/6 (Deduttivo)
Lo lancio 20 volte; probabilità di avere 5 (vincere) per 7 volte?
Vuole dire probabilità di vincere 7 volte e di Perdere 13 volte.

## PROBABILITÁ

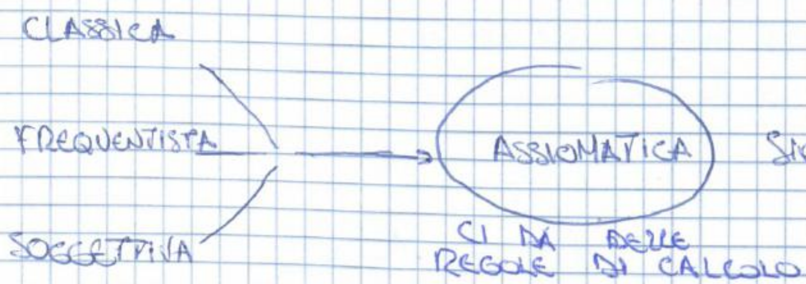
Consideriamo innanzitutto alcuni esempi: Partita Siena - Juve 1 × 2
Calcoliamo la probabilità di avere 2: P('ris = 2')

① Soggettiva: conosco uno dei giocatori del Siena, ho letto dei giornali ecc... considero tutte le MIE conoscenze per valutare il possibile risultato;

② Classica: è definita come il rapporto tra il numero s dei risultati favorevoli (cioè n° dei ris che determinano E) e numero n dei risultati possibili

③ Frequentista:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1/3 | 1/3 | 1/3 | Class |
| 0,1 | 0,3 | 0,6 | Sogg |
| 0,3 | 0,2 | 0,5 | Freq |




Siena - Juve 1 × 2

· CLASSICA / "A PRIORI"

Consideriamo innanzitutto
· E = evento
· P(E) = Probabilità che si produca l'evento E

Lancio di due monete: probabilità di avere Testa su 1 moneta

Consideriamo moneta Rossa e moneta Verde

| | R | V |
|---|---|---|
| | T | T |
| | C | C |
| (E) | T | C |
| (E) | C | T |

T = Testa

C = Croce

E = "esattamente una testa" $\#E = 2$ $\#S = 4$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Per definizione, una probabilità è SEMPRE compresa tra 0 e 1 (Mai negativo, Mai $> 1$)

- FREQUENTISTA / A POSTERIORI

Consideriamo nuovamente il lancio della moneta. Lancio la moneta N volte e considero $n_E$ il numero di volte che si presenta l'evento favorevole

$$f = \frac{n_E}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathbb{P}(E)$$

Tuttavia, questa spiegazione è solo qualitativa poiché nella realtà il limite che calcolo non è matematico, quindi non posso calcolare così la probabilità.

- SOGGETTIVA

La probabilità di un evento E, secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo p che egli stima equo attribuire all'importo unitario esigibile solo al verificarsi di E. COERENTE: che ha una giusta percezione del rischio

Notazioni:

$S$ (o $\Omega$): Insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento viene detto spazio campione

Testa o croce: $S = \{'T', 'C'\}$

Lancio un dado: $S = \{'1', '2', \dots, '6'\}$

N° di incidenti in 1 settimana $S = \mathbb{N}$

Misura di una durata $S = \mathbb{R}_+$

Alla fine, ho $2^6$ possibili combinazioni.

- Lancio di due monete

$\{(T,T)\}$ due teste

$\{(T,C)\}$ prima testa e poi croce

$\{(C,T)\}$ " " croce e poi testa

$\{(C,C)\}$ due croci

$\{(C,T),(T,C)\}$ una testa e una croce

$\{(C,C),(T,C),(C,T)\}$ al più una testa

$\{(T,T),(T,C),(C,T)\}$ almeno una testa

Spazio degli eventi $\mathcal{A}$: insieme costituito dagli eventi associati ad un fenomeno casuale. Parliamo anche di Algebra degli eventi.

SINTESI

$\mathcal{A}$ $\quad S \in \mathcal{A}$

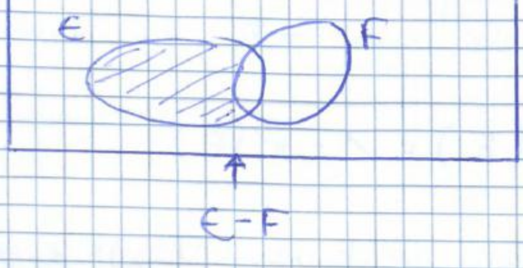
$E \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{E} \in \mathcal{A}$

$E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{A}$

1) $E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow EF \in \mathcal{A}$

2) $\phi \in \mathcal{A}$

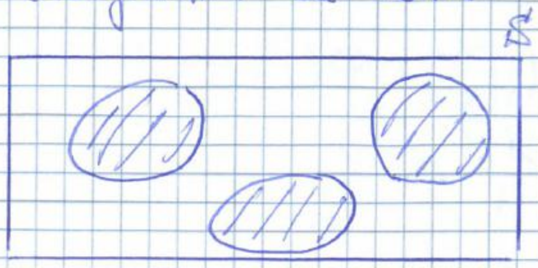
3) $E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E - F \in \mathcal{A}$




oppure, in modo equivalente $\quad E - F = E\bar{F}$

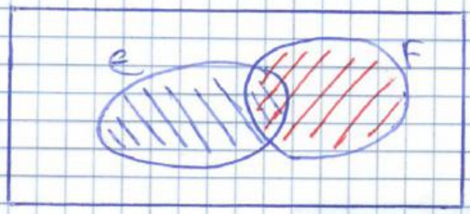
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 476

Con i diagrammi di Venn



la probabilità dell'unione è la somma delle probabilità (solo caso eventi disgiunti

Consideriamo adesso l'unione $E \cup F$. Dal diagramma di Venn



$$\boxed{\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(EF)}$$

Se gli eventi sono disgiunti la formula resta valida poiché $\mathbb{P}(EF) = 0$

Consideriamo ora il caso $E \subseteq F$

$$\boxed{E \subseteq F \Rightarrow \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)}$$

Spazi campione finiti con punti campione equiprobabili

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

$$\mathbb{P}(S) = 1$$

$$\mathbb{P}(\{s_1\} \cup \{s_2\} \cup \{s_3\} \cup \dots \cup \{s_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(s_i) = \mathbb{P}(S)$$

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{i=1}^{N} p$$

POICHÉ STIAMO CONSIDERANDO PUNTI CAMPIONE EQUIPROBABILI

Richiamo su sommatorie:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3}$$

⚠ ATTENZIONE ⚠

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} x = 3x}$$

Quindi

$\mathbb{P}(S) = Np$ ovvero $\boxed{p = \frac{1}{N}}$

Esempio: dado

$$p = \frac{1}{6}$$

Consideriamo ora caso di 3 dadi bilanciati. Vogliamo conoscere $\mathbb{P}(A_9)$ e $\mathbb{P}(A_{10})$, con

$$A_9 = \{(i,j,k) \in S \mid i+j+k = 9\}$$ (Per esempio)

Abbiamo

$$\# S = 6^3 = 216$$

APPROCCI POSSIBILI

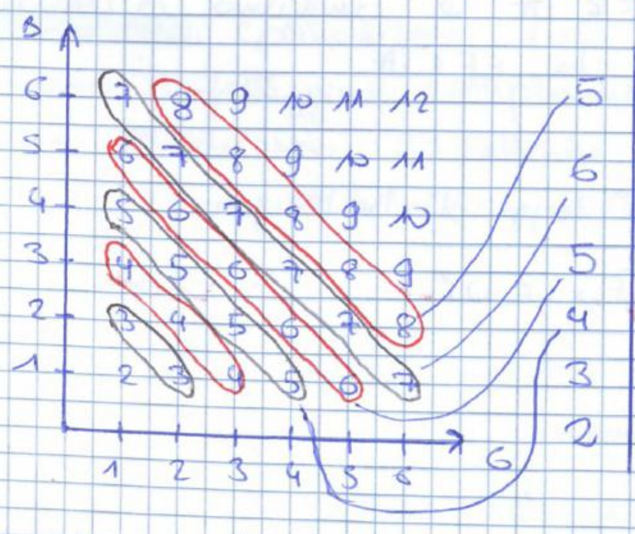
1) Informatico:

| G | V | B | G+V+B |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 1 | 3 | 5 |
| 1 | 1 | 4 | |
| 1 | 1 | 5 | |
| 1 | 1 | 6 | |
| 1 | 2 | 1 | |

→ e vado a contare il n° di volte che trovo 9

2) GRAFICO

rappresento la somma di due dadi (Giallo e Blu per es) e vado a vedere quali risultati $G+B$ posso considerare per arrivare a nove nel caso di lancio del 3° dado




25

Quindi $\# A_9 = 25$

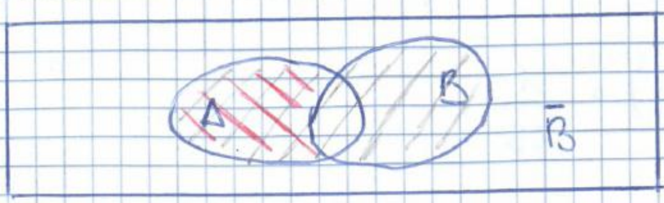
$$\mathbb{P}(A_9) = \frac{25}{216}$$

Analogamente troviamo

$\# A_{10} = 27$ cioè $\mathbb{P}(A_{10}) = \dfrac{27}{216}$

Quindi deduciamo $\mathbb{P}(A_9) < \mathbb{P}(A_{10})$

Consideriamo ora 2 eventi A e B




DIMOSTRAZIONE

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\bar{B})$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB \cup A\bar{B})$$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(A\bar{B})$ poiché gli eventi sono disgiunti

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A\bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$

quindi deduco

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\bar{B})$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)}$$ OK!

Come visto precedentemente

| | |
|---|---|
| Spazi campione finiti con esiti equiprobabili: | $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\#E}{\#S}$ |

Applicazione: consideriamo 1000 persone e vediamo la $\mathbb{P}$ che almeno 2 festeggino compleanno lo stesso giorno. Condizioni:

- Non consideriamo 29 febbraio
- consideriamo distribuzione uniforme sull'anno

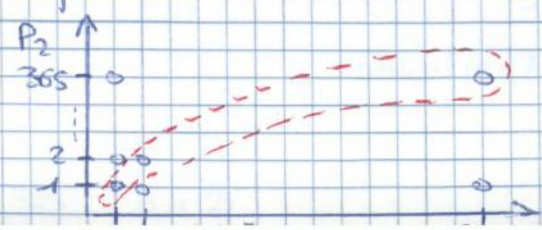
Risoluzione

$2 \leq n \leq 365$ poiché per $n > 365$ sono sicuro di trovarle!
evento certo $\Rightarrow$ NO probabilità

$E_n = \{$Su $n$ persone, almeno 2 festeggino compleanno lo stesso giorno$\}$

- $n = 2$

$E_2$ $\quad S_2 =$




$P_1$ = Persona 1
$P_2$ = Persona 2
$\#S_2 = 365^2$
$\#E_2 = 365$

Caso di $E_3$

$\# E_3 = 365 \cdot 364 \cdot 363$

$\mathbb{P}(\bar{E}_3) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3}$

$\mathbb{P}(\bar{E}_3) = \frac{364 \cdot 363}{365}$

ovvero

$\mathbb{P}(E_3) = 1 - \frac{364 \cdot 363}{365}$

Caso di $E_m$

$\# E_m = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - m + 1)$
$(365 - (m-1))$

$\# S_m = 365^m$

CAMPIONAMENTO

Consideriamo un lotto di $N$ componenti

$K$ sono difettosi

$N-K$ sono non difettosi

Estrazione di $n$ componenti: qual è la probabilità che $k$ di questi $n$ siano difettosi?

2 Modalità che descrivono il procedimento

- Con reimmissione
- Senza reimmissione

1° e 2° metodo si assomigliano molto se i numeri sono molto grandi.

1 - Con Reimmissione

$S = N^n$ $\quad$ $n$-uple $\underbrace{(1 \to N; 1 \to N; \ldots; 1 \to N)}_{n}$

Abbiamo $N^n$ combinazioni possibili.

Esempio:

$N = 100$

$K = 70$ $\quad$ $N-K = 30$

$n = 5$

$k = 2$

Quindi la probabilità di $A_2$ sarà

$$P(A_2) = \frac{10 \cdot 70^2 \cdot 30^3}{100^5}$$

Nel caso generale

$$\boxed{P(A_k) = \frac{\binom{m}{k} K^k \cdot (M-K)^{m-k}}{M^m}}$$

## 2 - Senza reimmissione

SAPPIAMO che

$$m(m-1)\cdots(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Quindi

$$\frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{K(K-1)\cdots(K-k+1)(M-K)\cdots}{M(M-1)\cdots(M-m+1)}$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(M-K)!}{(M-K-(m-k))!} \cdot \frac{K!}{(K-k)!} \cdot \frac{(M-m)}{M!}$$

$$= \frac{K!}{k!(K-k)!} \cdot \frac{(M-K)!}{(m-k)!(M-K-(m-k))!} \cdot \frac{m!(M-m)}{M!}$$

$$= \binom{K}{k} \cdot \binom{M-K}{m-k} \cdot 1/\binom{M}{m}$$

Consideriamo immaginato lo spazio campione

$$(M, M-1, M-2, \ldots, M-m+1)$$

$$\#S = M(M-1)\cdots(M-m+1)$$

Consideriamo allora

$$(\underbrace{\bullet, \bullet, \ldots, \bullet}_{k}, \underbrace{\ldots\ldots}_{m-k})$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$K(K-1)\cdots(K-k+1) \;|\; (M-K)(M-K-1)\cdots(M-K-(m-k)+1)$$

Quindi al numeratore avrò

$$\binom{m}{k} K(K-1)\cdots(K-k+1)(M-K)\cdots(M-K-m+k+1)$$

Quindi in definitiva

$$P(A_k) = \frac{\binom{m}{k} K(K-1)\cdots(K-k+1)(M-K)\cdots(M-K-m+k+1)}{M(M-1)\cdots(M-m+1)}$$

che possiamo riscrivere come

$$\boxed{P(A_k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{m-k}}{\binom{M}{m}}}$$

ESERCIZIO

$$m(m-1)\cdots(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 476

A = { sapendo che ho delle irregolarità di spessore, estraggo uno con traccia non regolamentare }

Cambio lo spazio campione poiché ho un'informazione in più!

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{7}{32}$$

$\boxed{\mathbb{P}(F|E) = \text{Probabilità di } F \text{ dato } E}$

Quale procedimento abbiamo utilizzato?

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\#(EF)}{\#E}$$

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\#(EF)/\#S}{\#E/\#S}$$

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$$

Quindi, la definizione di probabilità condizionata mi dice che

Def: Dato lo spazio di probabilità $(S, \mathcal{A}, \mathbb{P}[\cdot])$, si definisce probabilità condizionata di A dato B, con A e B eventi qualunque di $\mathcal{A}$, il rapporto

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \qquad \mathbb{P}(B) \neq 0$$

B: Evento condizionante

E analogamente

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(BA)}{\mathbb{P}(A)}} \qquad \mathbb{P}(A) \neq 0 \qquad \text{(Pagina 20)}$$

A = Evento condizionante

Applicazione: Lancio di due dadi bilanciati

A = { La somma è maggiore di 8 }

B = { Vi è almeno un 6 }

Avremo

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3)$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB_1) + \mathbb{P}(AB_2) + \mathbb{P}(AB_3)$ Poiché eventi disgiunti!

Consideriamo ora

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(EF)}{\mathbb{P}(F)}$$

$\mathbb{P}(EF) = \mathbb{P}(E|F) \cdot \mathbb{P}(F)$ Riscrivo intersezione utilizzando le probabilità condizionate.

----

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3) \cdot \mathbb{P}(A|B_3)$

NB: Avrei potuto dire anche

$\mathbb{P}(AB_1) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B_1|A)$

MA QUESTA NON LA CONOSCO => INUTILE!

Quindi

$\mathbb{P}(A) = 0{,}65 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}10 + 0{,}1 \cdot 0{,}25$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}0825$ ovvero $8{,}25\%$

CASO GENERALE

- $B_1, B_2, \dots, B_n$ una collezione di eventi mutualmente escludentesi
- $S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$
- $\mathbb{P}(B_i) \neq 0 \quad \forall i$

Allora

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}$$

TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

# Formula di Bayes

$$\boxed{P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}}$$

**Applicazione**

Lanciamo un dado bilanciato

$A = \{1, 2\}$ $\qquad$ $C = \{2, 4\}$

$B = \{2, 4, 6\}$ (Numero Pari)

$P(A) = 2/6 = 1/3$

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(A|B) = \dfrac{1/6}{1/2}$

$P(A|B) = 1/3$

$P(A|C) = \dfrac{P(AC)}{P(C)}$

$P(A|C) = \dfrac{1/6}{2/6}$

$P(A|C) = 1/2$

Tra A e B notiamo che $P(A) = P(A|B)$, ovvero che gli eventi A e B sono stocasticamente indipendenti

Caso Generale per avere indipendenza stocastica: Una delle seguenti condizioni

$\boxed{P(AB) = P(A) \times P(B)}$

$\boxed{P(A|B) = P(A)}$ se $P(B) > 0$

$\boxed{P(B|A) = P(B)}$ se $P(A) > 0$

**Lancio di 2 dadi (bilanciati)**

$A = \{$La somma è pari$\}$ $\qquad$ $C = \{$La somma è $6\}$

$B = \{$Esce 6 sul 1° dado$\}$

Questi eventi sono o non sono indipendenti

## Lancio di 2 dadi

$A_1 = \{$il 1° dado è pari$\}$

$A_2 = \{$il 2° dado è pari$\}$

$A = \{$La somma è dispari$\}$

$A_1, A_2$ e $A$ sono indipendenti?

$P(A_1 A_2) \overset{?}{=} P(A_1) \times P(A_2)$

$P(A_1 A) \overset{?}{=} P(A_1)\, P(A)$

$P(A_2 A) \overset{?}{=} P(A_2) \cdot P(A)$

$P(A_1 A_2 A) \overset{?}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A)$

$P(A_1) = 1/2 \quad (= 18/36)$

$P(A_2) = 1/2 \quad (= 18/36)$

$P(A) = \frac{18}{36} = 1/2$

$P(A_1 A_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P(A_1 A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

$P(A_1 A_2 A) = 0$

$A_1 A$

Spazi campione finiti con punti campione equiprobabili e non equiprobabili

- Equiprobabili

$P(s_i) = \frac{1}{N}$ $\qquad P(A) = \frac{\#A}{\#S}$

- Non equiprobabili

Esempio

La probabilità che il test somministrato ad una persona affetta da una certa malattia (un tipo di cancro, HIV ...) sia positivo viene detta sensitività; la probabilità che il test somministrato ad una persona sana sia negativo viene detta specificità. Ammettiamo di disporre di un test per la diagnosi precoce di quella malattia capace di fornire una diagnosi corretta nel 95% dei casi esaminati se l'incidenza di quella malattia (prevalenza) è pari allo 0,5% della popolazione esaminata, valutare qual è la proporzione di diagnosi corrette di malattia.

| incidenza | | P | N |
|---|---|---|---|
| 0,995 | S | 5% | 95% |
| 0,005 ↓ 5% | N | 95% | 5% |

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 476

Stiamo cercando

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

Poiché gli eventi sono indipendenti, l'intersezione equivale a moltiplicare le probabilità di ogni evento

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}05 \cdot 0{,}03 - 0{,}05 \cdot 0{,}02 - 0{,}03 \cdot 0{,}02 + 0{,}05 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}02$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cong 0{,}0969$$

Alternativamente, possiamo pensare di ragionare con il complementare

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \quad \text{Formula di De Morgan}$$

quindi devo calcolare $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$

Dovremmo prima sapere

$E \perp\!\!\!\perp F$ ($E$ e $F$ indipendenti) $\Rightarrow E \perp\!\!\!\perp \bar{F}$ $\qquad \perp\!\!\!\perp$ = INDIPENDENTI

ovvero

$$P(E\bar{F}) \overset{?}{=} P(E) \cdot P(\bar{F})$$

sappiamo che

$$E = EF \cup E\bar{F}$$

$$P(E) = P(EF) + P(E\bar{F})$$

$$P(E\bar{F}) = P(E) - P(EF)$$

$$P(E\bar{F}) = P(E) - P(E) \cdot P(F) \quad E \perp\!\!\!\perp F$$

$$P(E\bar{F}) = P(E)(1 - P(F))$$

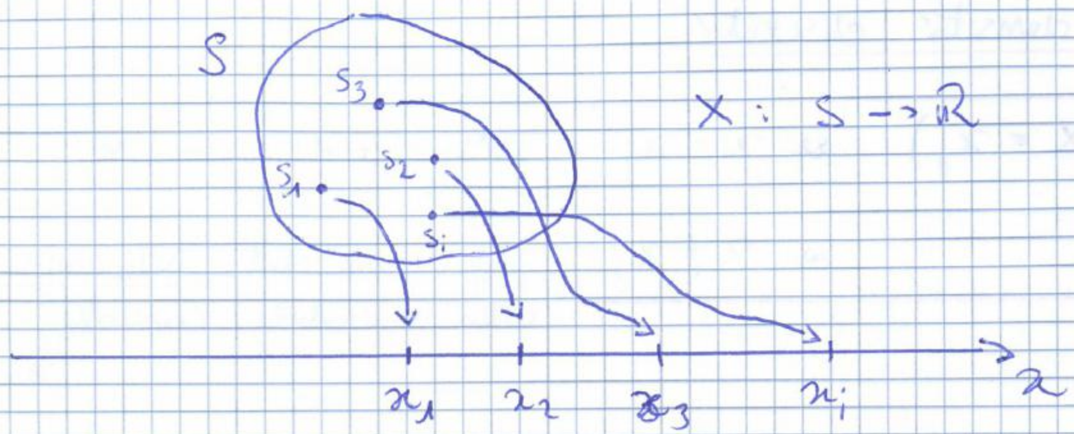
$$P(E\bar{F}) = P(E) \cdot P(\bar{F})$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 476

# Capitolo II : Distribuzioni

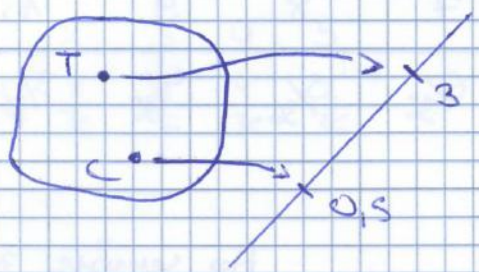
## Variabile casuale

Se consideriamo $X$ una variabile casuale generica




Dato $(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
Una variabile aleatoria (v.a.) è un'applicazione $X : S \to \mathbb{R}$

Esempio: Lancio di una moneta




$$X(s) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{se } s = C \\ 3 & s = T \end{cases}$$

Chiamiamo poi <u>variabile casuale discreta</u> una variabile che può assumere un numero finito o al più numerabile di valori. Le altre sono generalmente dette variabili continue ($\Rightarrow$ possono assumere con continuità tutti i valori di $\mathbb{R}$)

Esempio: Lancio di 2 dadi bilanciati

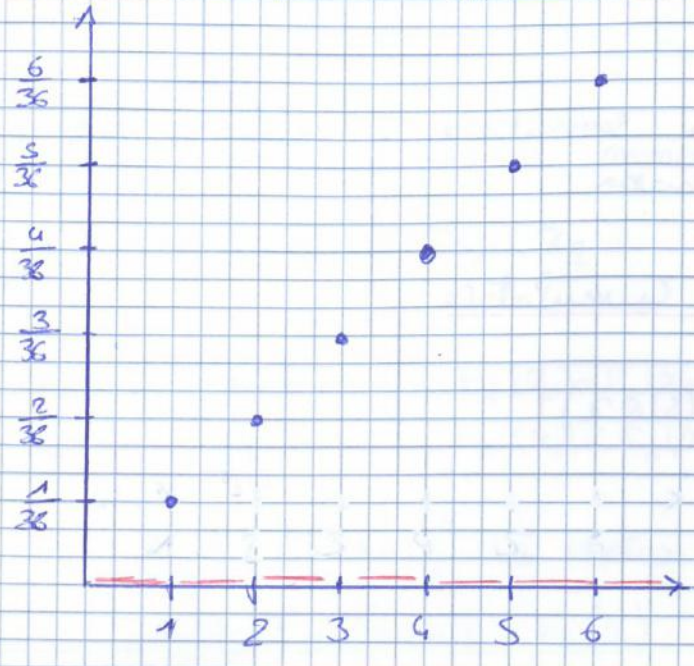
$$X((i,j)) \longrightarrow i + j$$

$$Y((i,j)) \longrightarrow \max(i,j)$$

$$Z((i,j)) \longrightarrow |i - j|$$

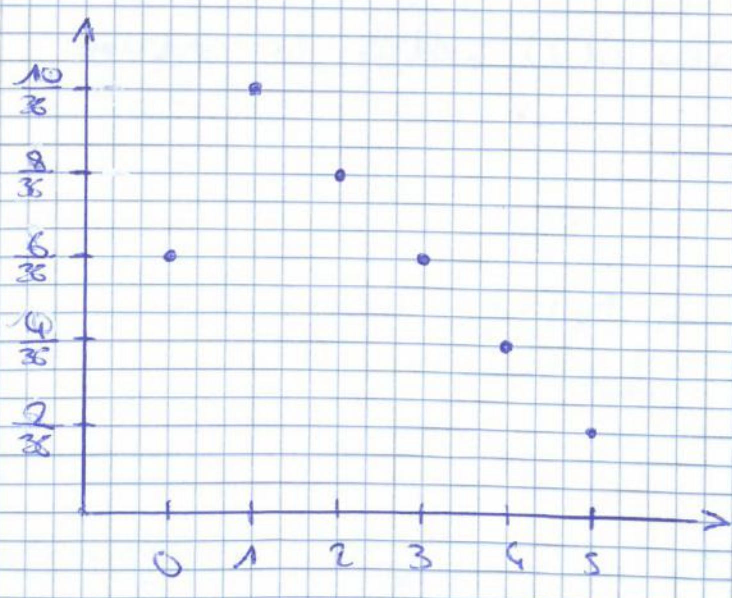
Analogamente, se consideriamo Y

| $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_Y(Y)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ |




Se infine consideriamo Z

| $Z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_Z(Z)$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |




$f_X(X)$, $f_Y(Y)$ e $f_Z(Z)$ sono funzioni di densità, mentre i loro argomenti, ovvero i valori che possono assumere X, Y o Z sono detti: PUNTI MASSA

## Proprietà di $F_X(x) = P(X \leq x)$ — 4 PROPRIETÀ

- $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0;1]$

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

- $F_X(x)$ è una funzione monotòna non decrescente

$$\forall x_1, x_2 \text{ t.c. } x_1 < x_2 : \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

Esempio di prima

$x_1 = 3 \quad x_2 = 3,5 \qquad F_X(x_1) = F_X(x_2)$

$x_1 = 3,5 \quad x_2 = 4 \qquad F_X(x_1) < F_X(x_2)$

- $F_X(x)$ è continua da destra

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

### Applicazione

Torniamo a considerare il lancio di due dadi e
$X(i,j) \to i+j$

$P(3 < X \leq 5) = f_X(4) + f_X(5)$

$P(3 < X \leq 5) = \frac{7}{36}$

$P(3 \leq X \leq 5) = f_X(3) + f_X(4) + f_X(5)$

$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}$

$P(3 \leq X \leq 5) = 9/36$

Se consideriamo ora la funzione $F_X(x)$, possiamo anche scrivere

$P(3 < X \leq 5) = F_X(5) - F_X(3)$

$P(3 < X \leq 5) = \frac{10}{36} - \frac{3}{36}$

$P(3 < X \leq 5) = 7/36$

$P(3 \leq X \leq 5) = F_X(5) - F_X(2)$

$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{10}{36} - \frac{1}{36}$

$P(3 \leq X \leq 5) = 9/36$

QUINDI NEL CASO DISCRETO:
Attenzione quindi col segno $<$ oppure $\leq$ perché fa una grossa differenza! (e analogamente per $>$ e $\geq$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 476

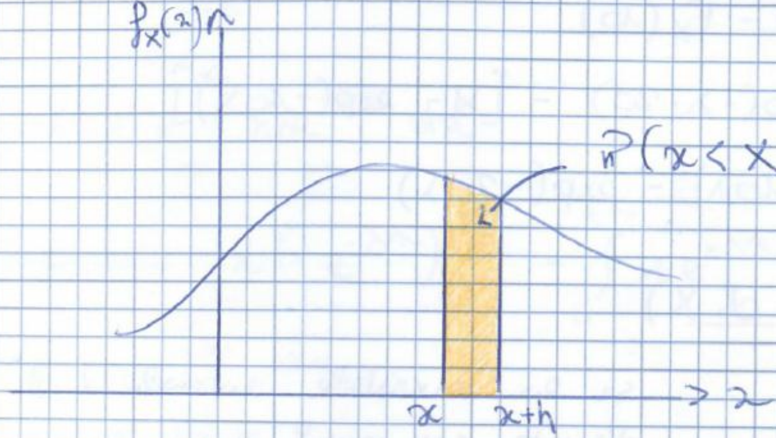
Nota: Nelle tavole numeriche non troveremo mai la funzione di densità, ma bensì la funzione di distribuzione cumulativa

- $f_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

PROPRIETÁ DELLA FUNZIONE DI PROBABILITÁ

3 PROPRIETÁ

Interpretazione geometrica di $\mathbb{P}(x < X \leq x+h)$




E se $h \rightarrow 0$, allora $\mathbb{P}(x) = 0$

Applicazione

Sia $X$ una variabile casuale che rappresenta la durata (espressa in anni) di un componente elettronico (per esempio un condensatore) la cui funzione di distribuzione cumulativa è data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Possiamo già dedurre che

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx} \quad \text{ovvero} \quad f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Se la variabile casuale X è continua con funzione di densità $f_X(x)$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx}$$

Calcoliamo, per esempio, nel caso del componente

X variabile casuale con $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$u = x \qquad v' = \lambda e^{-\lambda x}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{-\lambda x}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\mathbb{E}(X) = -\left.\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_0^{+\infty}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$$

Esempio 2:

X variabile casuale con $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & per\ 1 < x < \infty \\ 0 & altrove \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{x^2}\, dx$$

$\mathbb{E}(X) = \infty$ IL VALORE ATTESO NON ESISTE

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \left[\ln(x)\right]_1^{\infty}$$

$f_X(x)$ è una funzione di densità?

- $\frac{1}{x^2} \geq 0 \ \forall x$ quindi $f_X(x) \geq 0 \ \forall x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ $= -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{\infty} = 1$ ok!

E se volessi calcolare il valore atteso di una funzione di X?

Esempio

$$E(X) = \sum_{x_j} x_j f_X(x_j)$$

$$E(g(X)) = ?$$

Caso moneta starata

$$X(s) = \begin{cases} 0 & s = 'C' \\ 1 & s = 'T' \end{cases} \qquad f_X(0) = 0{,}90 \qquad f_X(1) = 0{,}10$$

$$E(X) = 0{,}9 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1$$

$$Y = 10X \quad \to \quad Y(s) = \begin{cases} 0 & s = 'C' \\ 10 & s = 'T' \end{cases} \qquad \begin{matrix} f_Y(0) = 0{,}90 \\ f_Y(10) = 0{,}1 \end{matrix}$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}90 + 10 \cdot 0{,}1 = 1$$

Quindi abbiamo cambiato non i pesi, ma piuttosto la distribuzione dei punti massa.

Quindi

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{x_j} g(x_j) f_X(x_j)}$$

Se la variabile casuale X è continua con funzione di densità $f_X(x)$

$$\boxed{E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx}$$

② 

$Var(cx) =$

$Y = cx \qquad \mu_Y = c\mu_x$

$Var(cx) = E((Y-\mu_Y)^2)$

$Var(cx) = E((cx - c\mu_x)^2)$

$Var(cx) = E(c^2(x-\mu_x)^2)$

$Var(cx) = c^2 E((x-\mu_x)^2)$

$$\boxed{Var(cX) = c^2 Var(X)}$$

Inoltre, un modo equivalente per scrivere la varianza sarà

$Var(X) = E((X-\mu_X)^2)$

$Var(X) = E(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2)$

$Var(X) = E(X^2) - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2)$

$= E(X^2) - E(X)^2$

Disuguaglianza di Tchebycheff

Sia $X$ una variabile casuale e $g(x)$ una funzione non negativa $\forall x \in \mathbb{R}$, allora

$$\boxed{P(g(x) \geq K) \leq \frac{E[g(X)]}{K}}$$

Per ogni costante $K$ positiva

quindi

$$\mathbb{P}\left((X-\mu_X)^2 \geq K\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right]}{K}$$

inoltre

$\mathbb{E}((X-\mu_X)^2) = \sigma_X^2$ $\quad K = t^2\sigma_X^2$ $\quad$ con $t$ scelta in modo tale che $t^2 = \frac{K}{\sigma_X^2}$

quindi

$$\mathbb{P}\left[(X-\mu_X)^2 \geq t^2\sigma_X^2\right] \leq \frac{\sigma^2}{t^2\sigma^2} = \frac{1}{t^2}$$

COMPLEMENTARE

$$\mathbb{P}\left[(X-\mu_X)^2 < t^2\sigma_X^2\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

o in forma equivalente

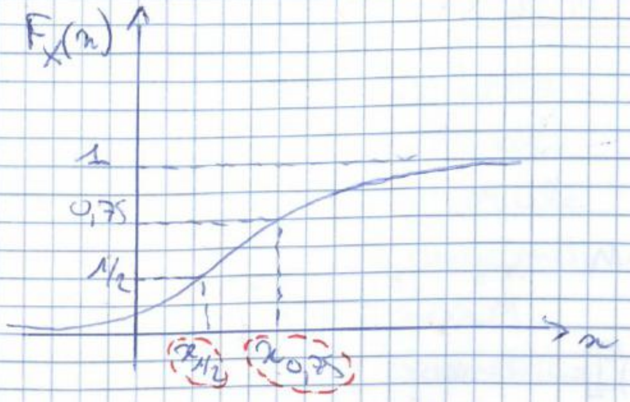
$$\boxed{\mathbb{P}\left[|X-\mu_X| < t\sigma_X\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2}}$$

Promemoria

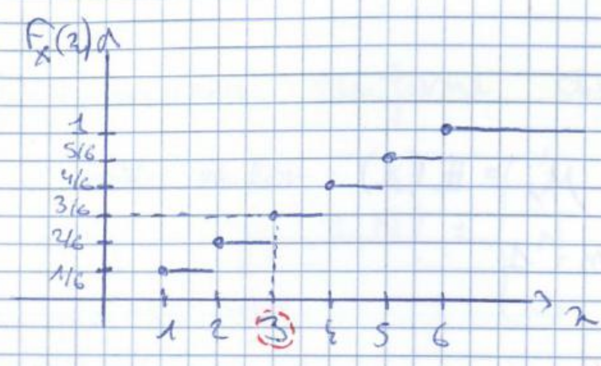
| Discreta | | Assolutamente continua |
|---|---|---|
| $f_X$ | $\neq$ | $f_X$ |
| $F_X$ | | $F_X$ |
| $E(X) = \sum \ldots$ | | $E(X) = \int \ldots$ |
| $Var(X) = \sum \ldots$ | | $Var(X) = \int \ldots$ |
| $E[g(X)] = \sum \ldots$ | | $E(g(X)) = \int \ldots$ |

Tchebycheff lega $\mathbb{P}$ e $E(X)$, $var(X)$

Consideriamo il caso di variabile continua e discreta

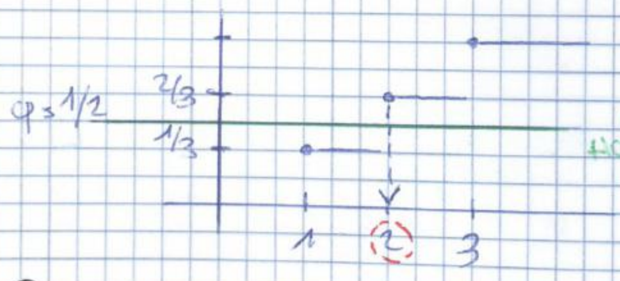



X continua




X discreta
(es lancio dado)

quantili




X discreta

NON HO NESSUN VALORE MAGGIORE quindi prendo IL PRIMO MAGGIORE (O UGUALE)

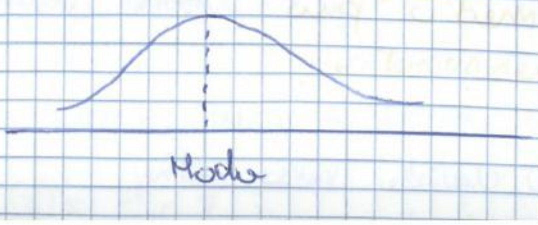
Il valore $x_q$ per $q = 1/2$ (50%) è detto Mediana

Il valore $x_q$ per $q = 1/4$ (25%) è detto 1° quartile

Il valore $x_q$ per $q = 3/4$ (75%) è detto 3° quartile

Ci riferiremo anche ai Decili $D_1, D_2, \dots, D_9$, il Range interquartile $(Q_3 - Q_1)$ e la Moda

La moda corrisponde al massimo della densità




La moda è il punto di massimo delle frequenze

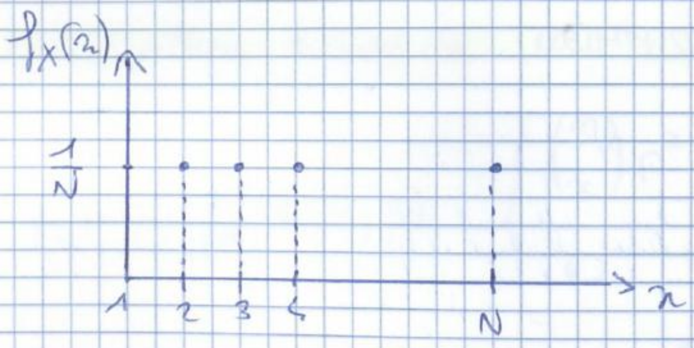
# Famiglie di distribuzione

**DISTRIBUZIONI DISCRETE**

- Uniforme — esiti equiprobabili
- Bernoulli — Binomiale con $n=1$
- Binomiale — Reimmissione
- Ipergeometrica — senza reimmissione
- Poisson — A sé stante
- geometrica — quanto attendo prima di successo

• **Distribuzione uniforme discreta** (esiti equiprobabili)

$$f_X(x) = f_X(x;N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{per } x = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$




ESITI EQUIPROBABILI

Densità uniforme discreta

Verifica: $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$ Allora è uniforme

Teorema

$$\boxed{E(X) = \frac{N+1}{2}} \qquad \boxed{Var(X) = \frac{N^2-1}{12}}$$

Dimostrazione SPERANZA

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i f_X(x_i)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} i \frac{1}{N} \quad \Big\} \text{ DIST UNIFORME}$$

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} i$$

$$E(X) = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

Verifichiamo le condizioni tali per cui $f_X$ è una funzione di densità

(I) $f_X(x) \geq 0$ ✓

(II) $\sum_{x_j} f_X(x_j) = 1$

Verifichiamo la (II)

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (\cancel{p} + 1 - \cancel{p})^n$$

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1$$

verificata ✓

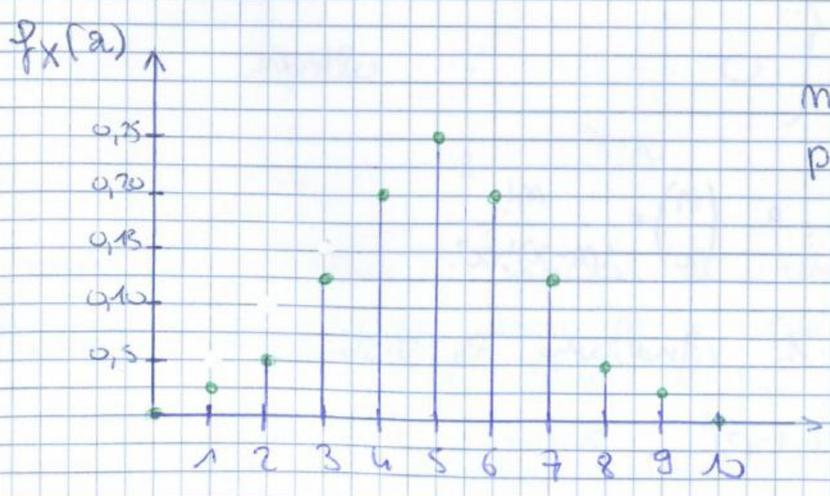
Richiamo

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Inoltre, relativamente a valore atteso e varianza, avremo

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = np}$$

$$\boxed{Var[X] = npq}$$




ESEMPIO

$n = 10$

$p = 0,5$

Osservazione 2:

consideriamo un esperimento casuale consistente in $n$ prove di Bernoulli indipendenti e ripetute con probabilità di successo uguale a $p$

Esempio: $n = 5$

$(s, s, f, f, s)$

$s$ = successo "1"

$f$ = fallimento "0"

Quindi il campionamento con reimmissione, per esempio, è una distribuzione binomiale

Nota: p lo calcolerò come $\boxed{p = \frac{\#\text{casi favorevoli}}{\#\text{casi tot}}}$

Esempio esperimento casuale: lancio di un dado 10 volte. Qual'è la probabilità di avere 4 volte la faccia "6"?

Successo = presentarsi della faccia "6"

$$P(S) = \frac{1}{6} \qquad P(f) = \frac{5}{6}$$

Binomiale con $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$ e $x = 4$

$$f_X\left(4; 10; \frac{1}{6}\right) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 (1-p)^{10-4}$$

$$f_X(4; 10; 1/6) = 210 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6$$

$$f_X\left(4; 10; \frac{1}{6}\right) = 0,0543$$

$X \sim$ Binomiale $(n = 10, p = 1/6)$

Esempio.

Una ditta che produce componentistica per autovetture ha potuto accertare che il 5% di un certo componente risulta essere difettoso. L'acquirente decide di accettare un lotto se, da un controllo eseguito su un campione casuale di 100 pezzi, non più di 2 risultano difettosi. Qual'è la probabilità che un lotto venga accettato?

X = variabile casuale che conta numero dei pezzi difettosi su $n = 100$

$P(S) = 0,05 = p$, $n = 100$ $\quad X \sim Bin(100; 0,05)$

$P(X \geq 2) = 1 - F_X(1)$

$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}6590$

$P(X \geq 2 = 0{,}3410$

ⓒ $P(X \leq 3) = F_X(3)$ (Definizione)

$P(X \leq 3) = 0{,}9744$

d) cerco $P(X=4)$

Due modi

- $P(X=4) = \binom{12}{4}(0{,}10)^4(0{,}90)^8$ LUNGO
- $P(X=4) = P(X\leq 4) - P(X\leq 3)$

$P(X=4) = F_X(4) - F_X(3)$ VELOCE (USO TAVOLE!)

$P(X=4) = 0{,}9957 - 0{,}9744$

$P(X=4) = 0{,}0213$

**Teorema di Bernoulli**

Variabile casuale X binomiale di parametri n e p

Variabile casuale $X/n$ = rapporto tra il numero di successi in n prove e il numero delle prove

Dal corollario della disuguaglianza di Tchebycheff

$$P(|Y-\mu_Y| \leq t\,\sigma_Y) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\boxed{\text{con } Y = \frac{X}{n} \quad \text{FREQUENZA RELATIVA}}$$

Allora

$\mu_Y = E\left[\frac{X}{n}\right] \Rightarrow$

$\boxed{P \quad \text{FREQUENZA ATTESA}}$

Osservazione

Il teorema di Bernoulli non dice che la frequenza ha come limite la probabilità.
Dice invece che al crescere del numero delle prove la probabilità che lo scarto fra la frequenza e la probabilità sia contenuto entro limiti assegnati, e comunque scelti, tende all'unità.
Ad esempio nell'esperimento lancio di un dado, se si considera l'evento "presentarsi di un numero pari", non afferma che la frequenza tende a 1/2 al crescere di $n$, ma dice che la probabilità che la frequenza si mantenga nella striscia $(1/2 - \varepsilon ; 1/2 + \varepsilon)$ tende a 1 $\forall \varepsilon$ al crescere di $n$

## DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA (NO REINMISSIONE)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & \text{Per } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{Altrove} \end{cases}$$

con $M \in N$ ; $K \in N$ ; $K \leq M$ ; $n \in N$ e $n \leq M$ , $x$ = numero di successi

Teorema

$$\boxed{E[X] = n \frac{K}{M}}$$

$$\boxed{Var[X] = n \frac{K}{M} \cdot \frac{M-K}{M} \cdot \frac{M-n}{M-1}}$$

Esperimento casuale: estrazione senza reimmissione di un campione di $n$ $(n \leq M)$ palle da un'urna che ne contiene $M$ di cui $K$ sono difettose.

$X$ = variabile casuale che conta il numero di palle difettose nel campione di $n$ palle estratte.

Supponiamo ora di cambiare distribuzione: $N = 150$; $K = 30$
$n = 3$

$$f_X(\overset{x}{3}, \overset{N}{150}, \overset{K}{30}, \overset{n}{10}) = \frac{\binom{30}{3}\binom{150-30}{10-3}}{\binom{150}{10}} = 0,2065$$

Notiamo che

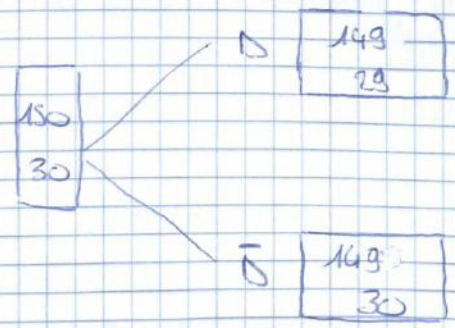
| | N | K | K/N |
|---|---|---|---|
| 1° caso | 30 | 6 | 1/5 |
| 2° caso | 150 | 30 | 1/5 |

Supponendo per assurdo di fare lo stesso calcolo del caso 2 ma con reimmissione

$n = 10$ $\quad p = K/N = 0,2$ $\quad x = 3$

$$f_X(3;10;2) = \binom{10}{3}(0,2)^3(0,8)^7 = 0,2013$$

Se rappresento con diagramma ad albero




Variazioni minime,

La regola che seguiremo sarà

$\boxed{\text{errore minore dello } 0,1\% \Rightarrow \text{almeno } n \leq N/10}$

Approssimazione della densità binomiale mediante la densità di Poisson

$$\boxed{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \Rightarrow \frac{\exp(-\lambda)\,\lambda^x}{x!} \qquad \begin{array}{l} n \to +\infty \\ p \to 0 \end{array}}$$

Fissato l'intero $x$ e $\lambda = np$ (comodo perché da due variabili $n$ e $p$ passo a una!)

Accenno di dimostrazione (VEDI P. 66)

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n+1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!\,\underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{n^x}} \lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \qquad \boxed{p = \frac{\lambda}{n}}$$

$$= \frac{1\,(1-1/n)(1-2/n)\dots(1-x-1/n)}{x!}\,\lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Tuttavia

$$\lim_{n\to+\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\lambda} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \quad n \to +\infty \quad \Rightarrow e^{-\lambda}$$

quindi per $n \to +\infty$

$$\binom{n}{\lambda} p^x (1-p)^{n-x} \simeq \frac{\exp(-\lambda)\,\lambda^x}{x!}$$

**Esempio**: Il 5% delle valvole prodotte da una ditta sono difettose. Qual è la probabilità di trovarne 2 difettose in un lotto costituito da 100 valvole?

a) Distribuzione binomiale con $x = 2$, $n = 100$ e $p = 0,05$

$X$ : v.c. conta il numero di persone allergiche su 1500

$X \sim$ Binomiale $\left(n = 1500 \,;\, p = \frac{4}{2500} = 0{,}0016\right)$

Successo = Trovare persona allergica

i) $P(X=3) = \binom{1500}{3}(0{,}0016)^3(1-0{,}0016)^{1500-3}$

$P(X=3) = 0{,}2092$

Approssimando la binomiale con la legge di Poisson avente

$\lambda = np$

NOTA: Posso farlo perche $n \geq 100$ $p \leq 0{,}05$!

$\lambda = 1500 \times 0{,}0016$

$\lambda = 2{,}4$

Andiamo poi a vedere la tavola di distribuzione cumulativa di Poisson

$P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2)$

$P(X=3) = 0{,}779 - 0{,}570$

$P(X=3) = 0{,}209$

ii) Meno di due persone allergiche

Sempre con l'approssimazione di Poisson

$P(X<2) = P(X \leq 1)$

$P(X<2) = F_X(1)$

$P(X<2) = 0{,}308$

Riassumendo sulle distribuzioni: (PARENTESI)

| | $\mathbb{E}(X)$ | $Var(X)$ |
|---|---|---|
| Bernoulli | $p$ | $p(1-p)$ |
| Binomiale | $np$ | $np(1-p)$ |
| Ipergeometrica | $n\frac{K}{N}$ | $n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$ FATTORE CORRETTIVO |
| Geometrica | $\frac{1-p}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| Poisson | $\lambda$ | $\lambda$ |

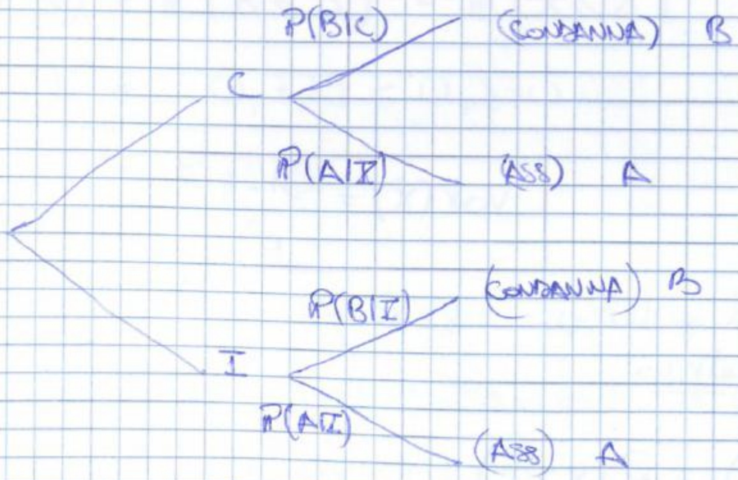
Esercizio

Una giuria composta da 12 persone

Se almeno 8 dei giurati ritengono l'imputato colpevole si procede con la condanna

I giurati agiscono indipendentemente uno dall'altro con probabilità $\theta$ di prendere decisione corretta. $\alpha$ indica la probabilità che l'imputato sia colpevole

Qual è la probabilità che l'imputato sia colpevole?




$X \sim Bin(n=12,\ p=\theta)$

$$P(B|C) = \sum_{x=8}^{12} \binom{12}{x} \theta^x (1-\theta)^{12-x}$$

$\theta$ considero la probabilità per il numero necessario di giurati

$$P(A|I) = \sum_{x=5}^{12} \binom{12}{x} \theta^x (1-\theta)^{12-x}$$

FINE RIASSUNTO

Quindi, relativamente a K, dovrà essere

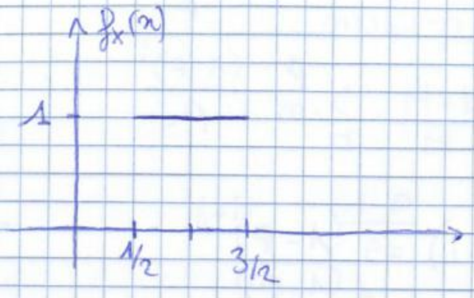
i) $K \geq 0$

ii) Tale che $K(b-a) = 1$ ovvero $K = \frac{1}{b-a}$

Esempio

$a = 1/2 \qquad b = 3/2$

$K = \frac{1}{b-a} \qquad K = 1$




In linea generale

$$f_X(x) = f_X(x; a; b) \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Valore atteso

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Varianza

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3!}\right)_a^b$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3}$$

$E(X^2) = \dots$

$\dots$

Fino ad ottenere

$$\boxed{Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

# Distribuzione Normale (o Gaussiana)

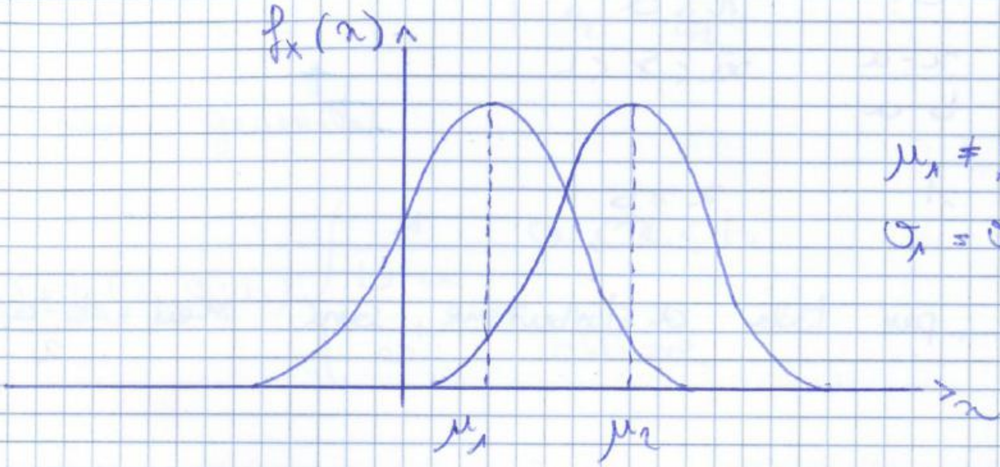
$$f_X(x) = f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$\mu \in \mathbb{R}$

$\sigma > 0$

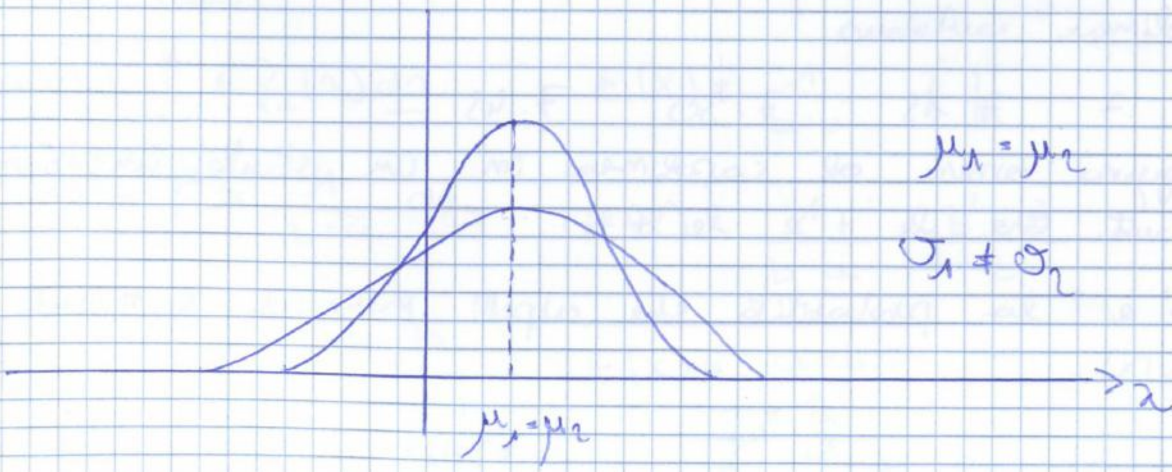
$-\infty < x < +\infty$

Rappresentazione Grafica




$\mu_1 \neq \mu_2$

$\sigma_1 = \sigma_2$




$\mu_1 = \mu_2$

$\sigma_1 \neq \sigma_2$

Nel caso della distribuzione normale utilizzeremo simboli diversi per $f_X$ e $F_X$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_X \iff \varphi_{\mu, \sigma^2} \\ F_X \iff \Phi_{\mu, \sigma^2} \end{array}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 476

Varianza

$$Var[X] = E\left((x-\mu)^2\right) \qquad Var[X] = \sigma^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \cdot \left( (x-\mu) \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) dx$$

----

Fino a trovare

$$Var(X) = \sigma^2$$

Quindi in definitiva

$\boxed{E[X] = \mu}$ $\boxed{Var[X] = \sigma^2}$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

La distribuzione normale è caratterizzata dal fatto che media, mediana e moda coincidono.

Se i parametri della distribuzione sono $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, la distribuzione normale assume il nome di distribuzione centrale e ridotta o standardizzata

$X \sim N(0,1)$ => Distribuzione normale standardizzata

$Z \sim N(0,1)$ (Utilizziamo Z per riferirci a tale distribuzione standardizzata).

La trasformazione di variabile casuale

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

è tale che trasformare qualsiasi casuale normale X nella variabile casuale Z centrata e ridotta o standardizzata.

Esempio: $X \sim N(3,7)$

$P(X < 4) = ?$

Calcolo

$$P\left(\frac{X-3}{\sqrt{7}} < \frac{4-3}{\sqrt{7}}\right) = P(X<4)$$

$$P(X<4) = P\left(Z < \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$$

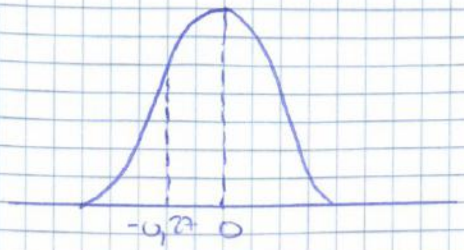
Nel caso della v.c. Z abbiamo

- $Z \sim N(0,1)$
- $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
- $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

Le espressioni della distribuzione normale si semplificano se $\mu = 0$, $\sigma = 1$

- $E(Z) = 0$
- $Var(Z) = 1$

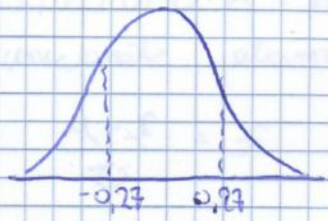
• $\mathbb{P}(-0,27 < Z \leq 0)$




$$= \Phi(0) - \Phi(-0,27)$$

Problema: le tavole funzionano solo con numeri POSITIVI
Per risolvere

$$\mathbb{P}(-0,27 < Z \leq 0) = \Phi(0) - [1 - \Phi(0,27)]$$
$$= 0,10642$$




Esempio

Due produttori di pile affermano che il loro prodotto ha una durata media di 50 h di uso continuato (durata nominale). Comunque si è osservato che il 20% delle pile del primo produttore ha una durata inferiore a 49 h ed il 10% più di 52 h; mentre il 10% delle pile del secondo produttore ha una durata inferiore alle 48 h ed il 13% superiore alle 53 h. Considerando solo il fattore durata, dire quale dei due prodotti è da preferirsi per durata.

Dai dati forniti:

$$X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2) \qquad X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_A < 49) = 0,20 \\ \mathbb{P}(X_A > 52) = 0,10 \end{cases}$$

Ritrasponendo utilizzando Z distribuzione standardizzata

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(\dfrac{X_A - \mu_A}{\sigma_A} < \dfrac{49 - \mu_A}{\sigma_A}\right) = 0,20 \\ \mathbb{P}\left(\dfrac{X_A - \mu_A}{\sigma_A} > \dfrac{52 - \mu_A}{\sigma_A}\right) = 0,10 \end{cases}$$

Quindi andiamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{49-\mu_A}{\sigma_A} = -0,84 \\ \\ \dfrac{52-\mu_A}{\sigma_A} = 1,28 \end{cases}$$

e troviamo

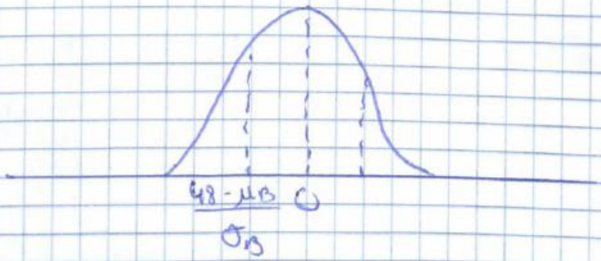
$$\begin{cases} \mu_A \cong 50,189 \\ \sigma_A^2 \cong 2 \end{cases}$$

Analogamente per $X_B$

$$\begin{cases} P(X_B < 48) = 0,10 \\ \\ P(X_B > 53) = 0,13 \end{cases}$$

$Z \sim N(0,1)$

$$\begin{cases} P\left(Z < \dfrac{48-\mu_B}{\sigma_B}\right) = 0,10 \\ \\ P\left(Z > \dfrac{53-\mu_B}{\sigma_B}\right) = 0,13 \end{cases}$$




$$\frac{48-\mu_B}{\sigma_B} = z_{0,10} = -z_{0,90}$$

Leggendo sulle tavole $z_{0,90} = 1,28$

$$\frac{48-\mu_B}{\sigma_B} = -1,28$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 476

Sotto opportune condizioni, la distribuzione Normale può approssimare quella Binomiale.

TEOREMA DI DE MOIVRE

$X \sim Binom(n, p) \xrightarrow{\text{APPROSSIMAZIONE}} N(np, np(1-p))$

$E(X) = np$

$Var(X) = np(1-p)$

$\boxed{np(1-p) \geq 10}$

condizione per approssimazione

OPPURE

$\boxed{np \geq 10 \text{ e } nq \geq 10}$

Esempio:

Lancio di una moneta equilibrata 40 volte

X conta il numero di teste

calcolare la probabilità che X = 20

$X \sim Bin(40, 1/2) \left\langle \begin{array}{l} E(X) = 20 \\ Var(X) = 10 \end{array} \right.$

$P(X = 20) = \binom{40}{20} (0,5)^{20} \cdot (0,5)^{20}$

$P(X = 20) = \binom{40}{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{40}$

$P(X = 20) \cong 0,1254$ (con software)

Notiamo che

$n \geq 100$ NO
$p \leq 0,05$ NO } NON POSSO USARE POISSON

$np(1-p) = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10 \geq 10$

APPROSSIMO CON LA NORMALE

Approssimazione Normale

$P(X = 20) = P(19,5 < X < 20,5)$ CORREZIONE DI CONTINUITÀ

$X \sim N(20; 10)$ STANDARDIZZO

$P(X = 20) = P\left(\frac{19,5 - 20}{\sqrt{10}} < Z < \frac{20,5 - 20}{\sqrt{10}}\right)$

$P(X = 2) \cong P(-0,16 < Z < 0,16)$

$P(X = 2) = \Phi(0,16) - \Phi(-0,16)$

Tornando al nostro esempio, relativamente al valore atteso

- $E(Y) = \sum_{y_i} y_i \, f_Y(y_i) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} + 16 \cdot \frac{2}{9}$

$$= \frac{60}{9}$$

- $E(Y) = E(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2 \, f_X(x_i)$

$$= \frac{60}{9}$$

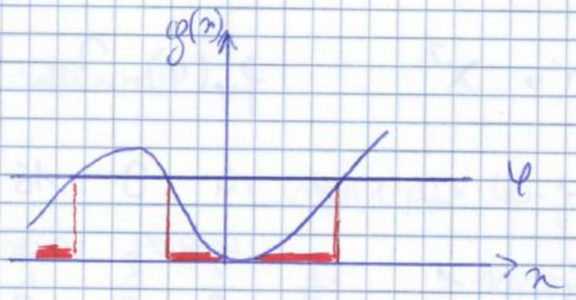
Consideriamo $X$ v.c. continua: Metodo della funzione di distribuzione cumulativa

$X \sim f_X(x) \quad (F_X(x))$

$Y = g(X) \quad f_Y(y)? \quad (F_Y(y))?$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$ ← studio questa

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(g(X) \leq y)$$
$$= \int_{x \mid g(x) \leq y} f_X(x)\, dx$$



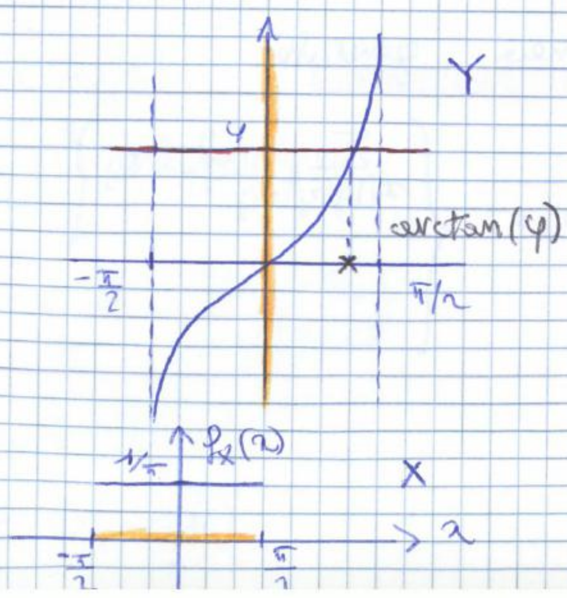

Esempio

$X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$Y = \tan(X)$

$D_X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$D_Y = (-\infty; +\infty)$



Altro esempio

$X \qquad f_X(x) \qquad F_X(x)$

$Y = aX + b \qquad a \neq 0 \qquad f_Y\ ?$

$F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$F_Y(y) = P(aX + b \leq y)$

$F_Y(y) = P(aX \leq y - b)$

- $a > 0$

$F_Y(y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$

$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

- $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$

$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$

- $a < 0$

$F_Y(y) = P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right)$

$F_Y(y) = 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right)$

$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

- $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dY}$

$f_Y(y) = -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$

Quindi in definitiva

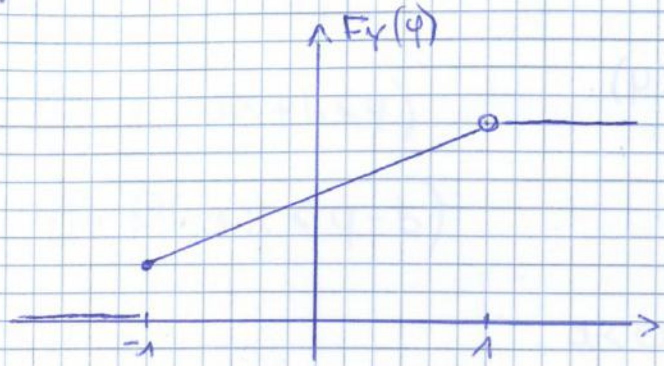
$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}$$

Ovvero

$-1 \leq y < 1 \qquad F_Y(y) = F_X(y)$

$y > 1 \qquad F_Y(y) = 1$

Graficamente




Variabile né discreta né continua, ma bensì mista.

Tornando al caso di una distribuzione Normale

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \qquad \frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim \mathcal{N}(0;1)$$

Allora Z è una trasformazione lineare di X del tipo

$$\boxed{Z = \frac{1}{\sigma} X + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

Cioè possiamo considerare $Z = g(X)$ con g particolare

Allora avremo

$$f_Z(z) = \frac{1}{1/\sigma} \cdot \varphi_{\mu,\sigma}\left(\frac{z-\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1/\sigma}\right) \quad \text{Del tipo } f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

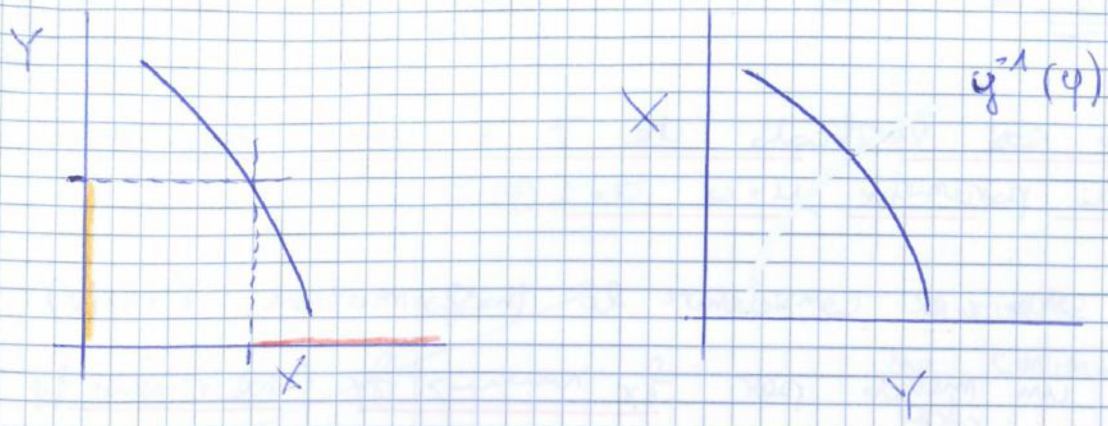
$$f_Z(z) = \sigma \, \varphi_{\mu,\sigma}(\sigma z + \mu)$$

Ricordiamo inoltre che

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Andando allora a considerare $\varphi_{\mu,\sigma}(\sigma z + \mu)$ e andando a sostituire supponiamo ora $g(x)$ monotona decrescente

$$F_Y(y) = \dots = P(g(x) \leq y)$$




Poiché $g(x)$ monotona decrescente, avremo

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(X \geq g^{-1}(y))$$

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Graficamente ci accorgiamo che $g(x) \geq y$ è verificata solo per $x \geq g^{-1}(y)$

E avremo allora

$$\boxed{f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}}$$

La funzione è decrescente, la derivata $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$ è negativa.

Quindi, ponendo il segno $\ominus$, sto considerando il valore assoluto. In sintesi avremo

$$\boxed{f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| f_X(g^{-1}(y))}$$

Abbiamo così dimostrato il teorema

Osservazione: La restrizione che $g(x)$ sia una trasformazione biunivoca di $D_X$ in $D_Y$ può essere rimossa

$$D_X = \bigcup_{i=1}^{n} D_X^{(i)}$$

con $D_X^{(i)}$ tali che $D_X^{(i)} \cap D_X^{(j)} = \phi$ e su ognuno $g(x)$ definisce una trasformazione biunivoca di $D_X^{(i)}$ in $D_Y$

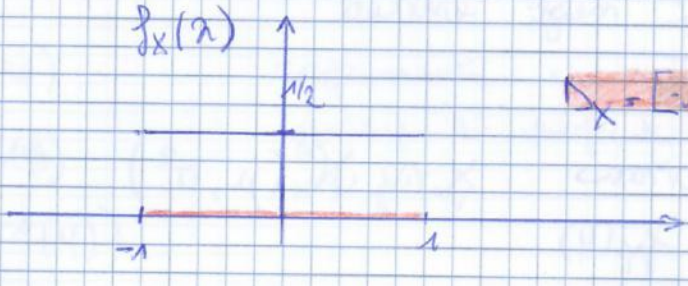
Partizioniamo $D_X$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d}{dy} g_{(i)}^{-1}(y) \right| f_X\left(g_{(i)}^{-1}(y)\right) \quad \forall y \in D_Y$$

Esempio:

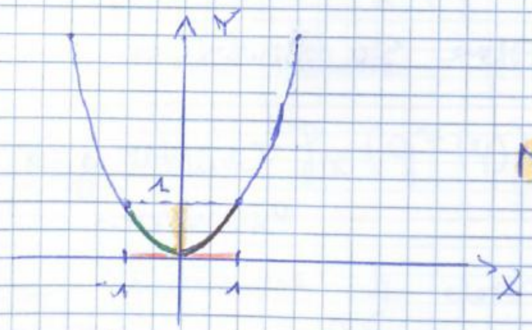
Sia $X$ una variabile uniforme sull'intervallo $(-1;1)$. Si determini la distribuzione di $Y = X^2$

$X \sim U(-1,1)$




$D_X = [-1;1]$

La $Y$ è tale che




$D_Y = [0;1]$

La trasformazione non è biunivoca, quindi partizioniamo.

biunivoca su $D_X^{(1)}$ e su $D_X^{(2)}$

$D_X = D_X^{(1)} \cup D_X^{(2)}$

$D_X^{(-1)} = (-1;0)$

$g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

$\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$D_X^{(2)} = (0;1)$

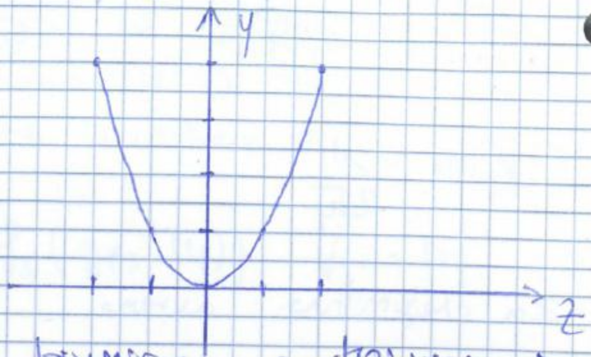
$g^{-1}(y) = +\sqrt{y}$

$\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

ESEMPIO

Consideriamo $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ e la trasformazione $Y = Z^2$

Calcoliamo allora $f_Y(y)$




$D_Z = Z \mid f_Z > 0$ $\quad D_Z = \mathbb{R}$

$D_Y = \mathbb{R}^+$

$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = \varphi(z)$

Poiché la trasformazione non è biunivoca, partizioniamo $D_Z$

$D_Z^{(1)} = (-\infty; 0)$ | $D_Z^{(2)} = (0; +\infty)$ | quindi per ottenere la funzione

$z = -\sqrt{y}$ $\quad g(g^{-1}(y))$ | $z = \sqrt{y}$ | $\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \varphi + \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \varphi$

$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$ | $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ | $= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ NON DOVREBBE ESSERE Y ?

$g(z) = z^2$

$g^{-1}(Y) = \pm\sqrt{Y}$

Quindi avremo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}z^2} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Detta anche distribuzione Gamma

PROCESSI DI POISSON

Si tratta di una particolare famiglia dei processi stocastici, ovvero processi nei quali consideriamo non una variabile casuale $X$ ma piuttosto un insieme di variabili casuali $X_t$

Esempio di processi stocastici
- coda al casello
- Temperature e richiesta di energia elettrica

Nei processi di Poisson ci interessiamo a fenomeni del tipo:
- numero di difetti per unità di superficie o per unità di lunghezza di un prodotto proveniente da una produzione continua.
- numero di radiazioni emesse per unità di tempo da una sostanza radioattiva

di lunghezza $\Delta t$ sia approssimativamente uguale a $\alpha \Delta t$, cioè

$$P[\text{esattamente un evento nell'intervallo di tempo } \Delta t] = \alpha \Delta t + o(\Delta t)$$

$\alpha$ viene detta intensità statistica con $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

- Ipotesi 2

La probabilità che nell'intervallino $\Delta t$ si verifichi più di un evento è trascurabile rispetto alla probabilità che se ne verifichi esattamente uno, cioè:

$$P[2 \text{ o più eventi nell'intervallo } \Delta t] = o(\Delta t)$$

- Ipotesi 3

L'evento $E_1$ rappresentante il verificarsi di $n_1$ eventi in qualsiasi intervallo di tempo $(t_1, t_2)$ è indipendente dall evento $E_2$ rappresentante il verificarsi di $n_2$ eventi in un intervallo $(t_3, t_4)$ non contenuto (parzialmente o del tutto) in $(t_1, t_2)$, cioè:

$$P[n_1 \text{ eventi in } (t_1, t_2) \text{ e } n_2 \text{ eventi in } (t_1, t_2)] = P[E_1] \cdot P[E_2]$$

Quindi, Riassumendo

$N(t) =$ n° di eventi che ho osservato in un certo tempo $t$

$N(0) = 0$ $\qquad \alpha =$ costante

(i) $P[1 \text{ evento in } \Delta t] = \alpha \Delta t + o(\Delta t)$

(ii) $P[2 \text{ o + eventi in } \Delta t] = o(\Delta t)$

(iii) $P[E_1 \cap E_2] = P[E_1] \cdot P[E_2]$

$$E_1 = \{n_1 \text{ eventi in } (t_1, t_2)\}$$

$$E_2 = \{n_2 \text{ eventi in } (t_3, t_4)\} \quad \text{con } \boxed{(t_1, t_2) \cap (t_3, t_4) = \phi}$$

Ricordiamo inoltre che, se $X \sim Poi(\lambda)$, allora

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

Nel nostro caso

- $E[N(t)] = \alpha t \Rightarrow \boxed{E[N(1)] = \alpha}$ $\alpha$ rappresenta quindi il n° medio di eventi che si presentano nell'unità di tempo
- $Var[N(t)] = \alpha t$

ESERCIZIO

Il numero medio di chiamate in arrivo al centralino di una ditta di medie dimensioni è di 60 ogni ora

① Qual'è la probabilità che non vi sia stata nessuna chiamata in un intervallo di tempo di 2 minuti?

② Qual'è la probabilità che arrivino più di 5 chiamate in un intervallo di tempo di 5 minuti?

Nota: Non è importante il posizionamento (es: 10.30 - 10.32 oppure 12.20 - 12.22) dell'intervallo, è importante l'ampiezza!

1-

60 chiamate in 60 minuti

$\Updownarrow$

1 chiamata in 1 minuto $\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$ se ragiono in termini di minuti

$N(2) \sim Poi(\underbrace{1 \cdot 2}_{\alpha \cdot t})$

$N(2) \sim Poi(2)$

Nota: la probabilità che 2 chiamate arrivino contemporaneamente nel tempo è trascurabile (IPOTESI 2)

quindi

$P(N(2) = 0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!}$

$P(N(2) = 0) = e^{-2}$

$P(N(2) = 0) \cong 0{,}135$