



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1271

ANNO: 2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Costantino M.

MATERIA: Plasticità e Frattura, Prof.Corrado\_Carpinteri

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Corso di

PLASTICITÀ

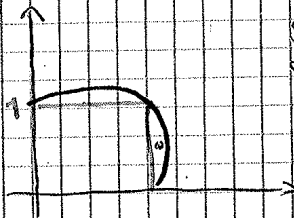
E FRATTURA

Appunti AA. 2013/14

COSTANTINO FARISA

**ESEMPIO**

$\sigma_1 = 1,1 \sigma_p$   
 $\sigma_2 = 0,6 \sigma_p$   
 $\sigma_3 = 0$



Sostanzialmente trovo una **DEQUIVALENTE**  
 $\sigma_{eq} = 0,91 \sigma_p < \sigma_p$   
 per Von Mises

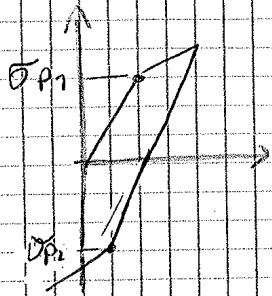
Secondo Tresca questo stato tensionale NON è ammissibile

Secondo Von Mises è ammissibile

Sostanzialmente trovo quando raggiungo la plasticizzazione.

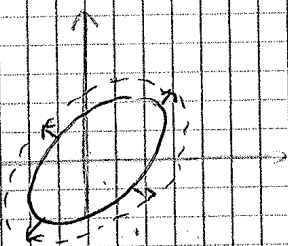
Nei materiali metallici sostanzialmente ho 2 tipi di incrudimento:

• ISOTROPO



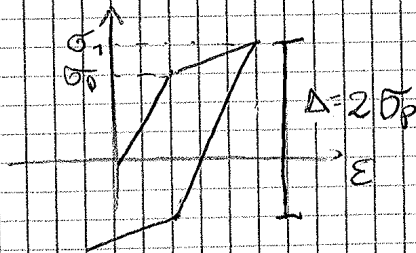
Nota che a compressione il metallo si sforma allo stesso valore di  $\sigma_p$  che lo in trazione  
 $\sigma_{p2} = -\sigma_{p1}$

Nello stato bidimensionale



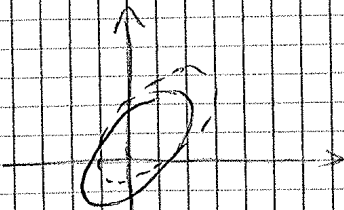
superficie di svernamento raggiunto lo svernamento l'incrudimento è uguale in tutti i punti nel caso isotropo

• CINEMATICO



A compr. raggiungo svernamento quando ho  $\Delta = 2 \sigma_p$

Nello stato bidimensionale



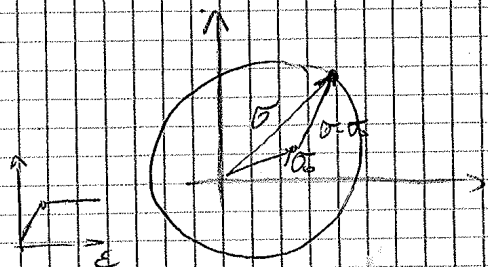
Otengo in questo caso la traslazione del dominio

Considero un elemento bidimensionale con 2 stato tensionale

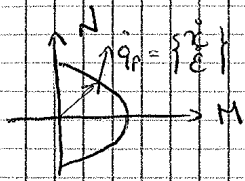
$\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2\}^T$

Applico un altro stato tensionale per raggiungere plasticizzazione ( $\sigma - \sigma_0$ )

Raggiungo la plasticità,  $\epsilon$  è indefinita

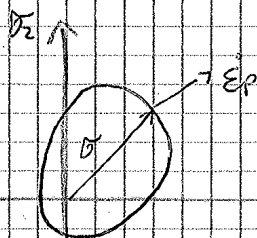


Quando  $\sigma_1$  si riferisce a  $\sigma_1, \sigma_2$  è lo stesso che riferirsi a  $\sigma_1, \sigma_2$



Nel caso di trave è più comodo riferirsi al dominio M-N piuttosto che  $\sigma_1, \sigma_2$

Indichiamo il vettore  $\dot{\epsilon}_p = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{Bmatrix}$  che da punto curvatura e def ha rispetto a M e N.



2<sup>3</sup> hyp:  $\sigma_0 = 0$  Applico  $\{0\}$

$$\{0\} - \{0\}^T \{ \dot{\epsilon}_p \} \geq 0$$

$$\{0\}^T \{ \dot{\epsilon}_p \} = \dot{\Phi}(\{ \dot{\epsilon}_p \}) > 0$$

POTENZA DISSIPATA

nell'unità di tempo e di volume

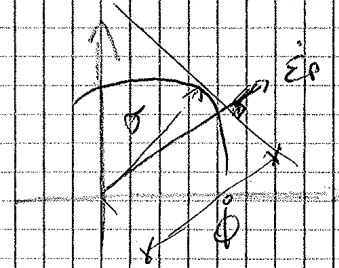
$\hookrightarrow$  questa è funzione solo di  $\dot{\epsilon}_p$ . Dipende solo dal punto raggiunto sul dominio e non dal percorso che faccio  $\rightarrow \dot{\Phi}(\{ \dot{\epsilon}_p \})$

### DRUNKER

- Superfici CONESSE.
- $\dot{\epsilon}_p \perp$  al dominio

$$\{0\}^T \{ \dot{\epsilon}_p \} \geq 0$$

$$\dot{\Phi}(\{ \dot{\epsilon}_p \})$$



Assumo 1 direzione di  $\dot{\epsilon}_p$   
 $\Rightarrow$  conosco anche  $\dot{\Phi}$

La  $\dot{\Phi}$  individua la distanza del punto sul dominio di plasticità associato a questa  $\dot{\epsilon}_p$ .

Se varo  $\dot{\epsilon}_p$ , trovo tanti punti e individuo il dominio di plasticizzazione.

Nota che  $\dot{\Phi}$  è la massima energia

Dato  $\dot{\epsilon}_p$ , la max energia che posso dissipare è quella che trovo come prodotto di  $\sigma$ . È dove  $\sigma$  è quella che genera proprio  $\dot{\epsilon}_p$

### TEOREMA DELLA MASSIMA ENERGIA DISSIPATA

$$\{0\}^T \{ \dot{\epsilon}_p \} \geq \{0\}^T \{ \dot{\epsilon}_p \} \quad \text{valde in ogni punto del solido}$$

$\Rightarrow$  posso fare l'integrale

• hyp:  $\{0\} = \{0\}$



Sono già sul dominio

$\Rightarrow$  posso solo applicare  $(\sigma - \sigma_0) - \sigma_0 = \sigma$   
 $\Rightarrow \{0\}^T \{ \dot{\epsilon}_p \} = 0$  se il materiale è elastico

gli carichi sono proporzionali e crescono nel secondo  $\lambda$ .

$$\lambda_P \sum_i P_i \dot{v}_i \geq \lambda \sum_i P_i \dot{v}_i$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda_P \geq \lambda}$$

Ho che  $\lambda_P = \lambda^*$  quando trova  $\sigma^*$

Se applico il teorema statico trovo il moltiplicatore dei carichi che sicuramente è minore di quello reale

$\Rightarrow$  Mi interessa individuare il più grande tra tutti.

$\rightarrow$  Teorema del limite superiore

### TEOREMA CINEMATICO

$$\dot{E}^+ \quad \sigma^+ \quad \lambda^+ \quad \dot{v}_i^+ \quad | \quad \sigma^+, \lambda_P$$

Sistema corrispondente a un meccanismo cinematico

Stato tensionale di collasso reale

Applico il PLV per le 2 situazioni

$$\int_{Z_i} \sigma^+ \dot{E}^+ dV = \lambda^+ \sum_i P_i \dot{v}_i^+ \quad \text{con } \sigma^+ \text{ e } \dot{v}_i^+ \text{ corrispondenti a un meccanismo ammissibile}$$

Considero ora un campo tensionale reale  $\{\sigma\}$  e degli spostamenti ammissibili

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\dot{E}\}^+ dV = \lambda_P \sum_i P_i \dot{v}_i^+$$

Le forze sono relative a il collasso reale e gli spostamenti a un collasso cinematico ammissibile.

Nota che  $\int_V \sigma^+ \dot{E}^+ dV > \int_V \sigma^T \dot{E}^+ dV$

$$\Rightarrow \lambda^+ \sum_i P_i \dot{v}_i^+ > \lambda_P \sum_i P_i \dot{v}_i^+$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda^+ \geq \lambda_P}$$

Tra tutti i  $\lambda^+$  sono interessato al più piccolo perché è uguale a  $\lambda$

$\rightarrow$  Mi interessa il limite inferiore

Il teorema statico risulta dunque essere a favore di sicurezza rispetto al teorema cinematico che potrebbe portarmi a  $\lambda$  maggiori di  $\lambda_P$ .

### TEOREMA MISTO

Se  $\lambda$  corrisponde a un campo tensionale stat. ammissibile e a un meccanismo di collasso cinematico ammissibile  $\Rightarrow$  ho trovato la soluzione.

Le reazioni vincolari sono A e B:

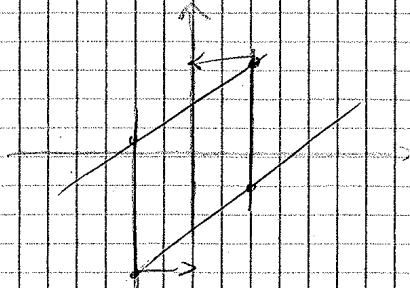
$$M_A = -X$$

$$M_B = -X + \frac{1FR}{4}$$

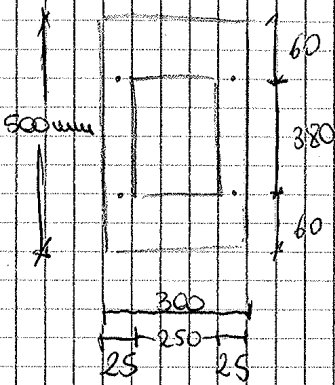
CONDIZIONI

$$\begin{cases} -M_A < M_A < M_B \\ -M_B < M_B < M_A \end{cases} \text{ Ricavo G disug.}$$

Le variabili sono  $\lambda$  e  $X$   
 lunghezza di rotte



Applicazione a livello di sezione



La sezione è soggetta a  $M = 1,35 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}$

$$M_T = 600 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$T = 500 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\sigma_p = 250 \text{ MPa}$$

$$\tau_p = \frac{\sigma_p}{13} = 19,23 \text{ MPa}$$

NON VIOLARE

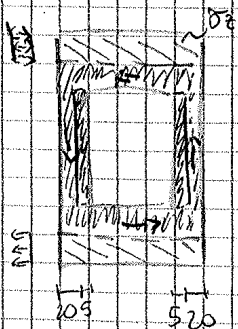
Si mostra che in alcuni punti non rispetta il criterio di Von Mises

Se applico il Teo statico trovo

- due condizioni d'equilibrio
- NON deve superare il dominio di resistenza

Individuo 2 zone che portano solo  $M \Rightarrow$  ho solo  $\sigma_z$ .

ho ipotizzato



Per il torcente individuo il percorso chiuso e la parte che resta la parte che parte taglio

MOMENTO FLETTENTE REAGENTE

$$M_x = \sigma \cdot \text{Area} \cdot \text{braccio} = \sigma \cdot 300 \cdot 40 \cdot (500 - 40) = M_x$$

$\hookrightarrow$  Ricavo  $\sigma_z$  per avere l'eq. bnd

$$\sigma_z = 244,6 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \quad \text{OK}$$

MOM. TORCENTE REAGENTE

$$M_{Tz} = \tau \cdot \text{Area} \cdot \text{braccio} = \tau \cdot (20 \cdot 400) \cdot (300 - 20) + \tau \cdot (20 \cdot 280) \cdot 400 =$$

$$= M_{Tz}$$

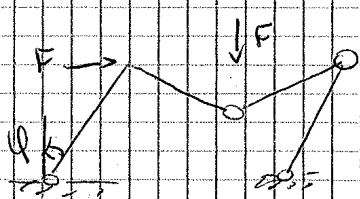
costante

$\rightarrow$  Ricavo  $\tau$  davanti al torcente e ipotizzato

$$\tau = 133,9 \text{ MPa} < 192,3 \text{ MPa} \quad \text{OK}$$



Combinare i due meccanismi:



Entrambe le forze compiono lavoro, ho il collasso globale e la cerniera plastica.

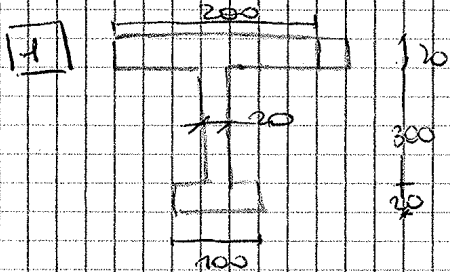
$$F \cdot l + F \cdot l - 6 M_p \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = 0 \quad \rightarrow \quad F_p = \frac{3 M_p}{\sqrt{2}}$$

Ho trovato il carico di collasso più piccolo.

Tra le 3 soluzioni scelgo l'ultima perché più piccola.

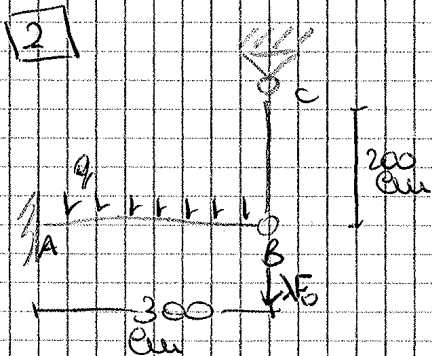
A partire dalla soluzione del problema cinematico posso determinare una soluzione a favore di sicurezza.

### ESERCIZI PER CASA



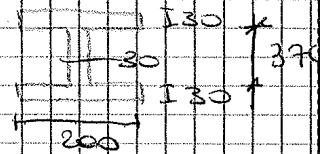
$\sigma_p = 400 \text{ MPa}$   
Calcola  $M_e$  e  $M_p$

$\rightarrow$  dunque l'incremento di capacità della fase el e quella pl.



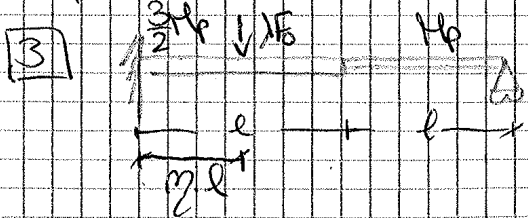
BC fune  $\phi = 8 \text{ mm}$   
AB trave sez. trave

$q = 100 \text{ N/m}$   
 $F_0 = 70 \text{ kN}$



$\sigma_{p \text{ trave}} = 200 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{p \text{ fune}} = 500 \text{ MPa}$

Il  $q$  è costante. Determinare la parte a collasso il sistema.

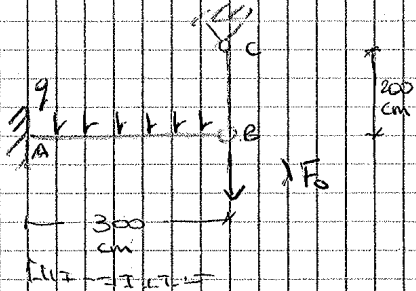


Determinare il massimo  $\lambda$  al variare di  $q$ .



2° ESERCIZIO

DATI



- $F_0 = 70 \text{ kN}$
- $q = 100 \text{ kN/m}$
- $\sigma_{PTR} = 200 \text{ MPa}$
- $\sigma_{P, FUNE} = 500 \text{ MPa}$

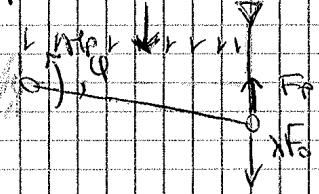
Determinare  $\lambda$ .

$\lambda F_0$  è applicata alla fune  $\Rightarrow$  è ovvio che aumentando e in certo punto la fune si scava.

Molte sicuramente all'incastro si formerà una cerniera plastica  $\rightarrow$  Ho dunque un meccanismo ipotizzato abbastanza reale.

Si potrebbe formare anche 1 cerniera in campo ma è più logico che si scavi la fune per il motivo sopra detto.

Applico il teo cinematico alla 1ª situazione



$$PLV = 0 \quad q \cdot 3 \cdot (1.5\lambda) + \lambda F_0 \cdot 3\lambda - M_p \lambda - F_p 3\lambda = 0$$

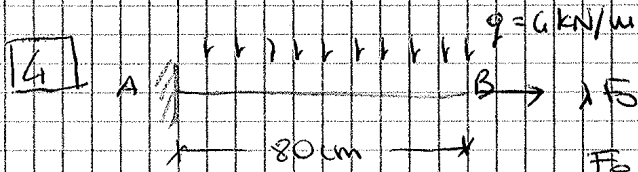
$$F_p = \text{Area fune} \cdot \sigma_{PFUNE} = 25,13 \text{ kN}$$

La sezione è doppiamente simmetrica

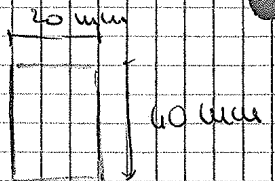
$$M_p = 685,35 \text{ kNm}$$

Sostituisco all'espressione del PLV e ricavo  $\lambda = 1,68$

N.B.: Qualsiasi meccanismo che non prevede spostamento di B non risolve il problema poiché la forza  $\lambda F_0$  non farebbe lavoro  $\times$  Non è ragionevole



SEZIONE



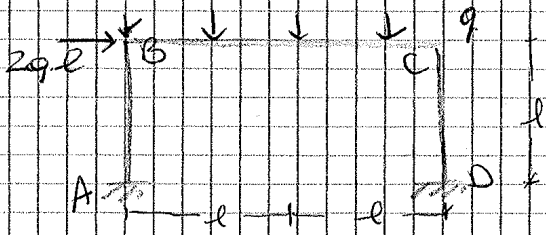
Determina il max  $\lambda$  sapendo che  $\sigma_p = 250 \text{ MPa}$ .

Fare 3) e 4)

Abbiamo ipotizzato per travi e pilastri lo stesso  $M_p$ .

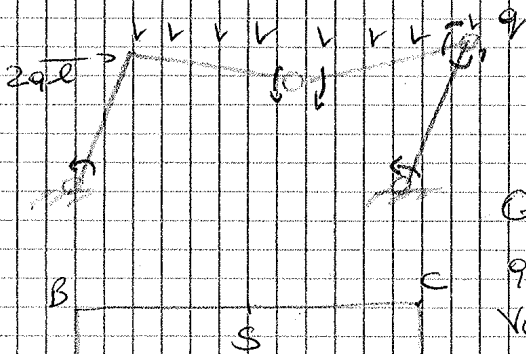
Ipotizzando di incrementare la rigidità del pilastro esamineremo i limiti che ho trovato.

ESEMPIO 2 - Caso di carichi distribuiti



Applico il teo cinematico (più semplice) ipotizzando un meccanismo.

Supponiamo il cinematicismo di tipo ③ visto nel precedente esercizio.



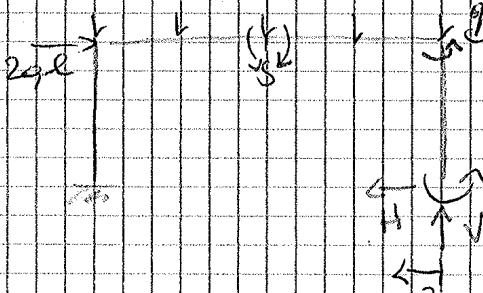
$$PLV: 2ql \cdot l\varphi + (ql \cdot \frac{l}{2}\varphi) \cdot 2 - 6M_p\varphi = 0$$

$$q = 2 \frac{M_p}{l^2}$$

Questo carico è maggiore o uguale a quello reale.

Vediamo qual'è il diagramma di  $M$  per questo meccanismo  $\rightarrow$  In A, S, C, D ho  $M_p$ .

Risolvere la struttura che è iperstatica. Determino le reazioni in D conoscendo già  $M_D = M_p$  e volendo trovare  $H_D$  e  $V_D$  solo tramite equilibri. (Considero  $q = 2 \frac{M_p}{l^2}$  come carico ultimo determinato)



$$\bullet M_C = -M_p + H \cdot l = M_p \rightarrow H = \frac{2M_p}{l}$$

$$\bullet M_S = M_p - H \cdot l + V \cdot l - \frac{1}{2} q l^2 = M_p \rightarrow V = \frac{3M_p}{l}$$

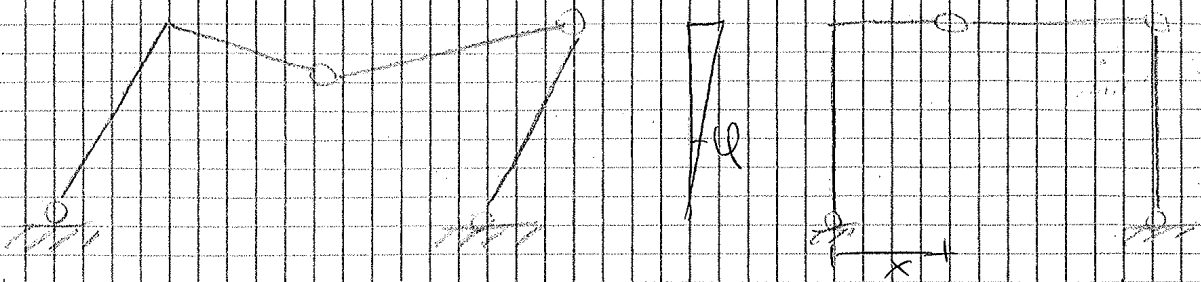
Analizziamo il momento:  $M_{BC}$

$$M(z) = M_p + \frac{3M_p}{l} z - \frac{2M_p}{l} \cdot z - \frac{1}{2} \cdot \frac{2M_p}{l^2} z^2 = -M_p + \frac{3M_p z}{l} - \frac{M_p z^2}{l^2}$$

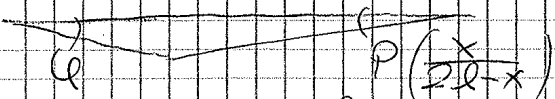
Questa è la funzione momento. Voglio trovare dove  $M(z)$  è max. Se il cinematicismo è quello reale non supera  $M_p$  in nessuna sezione di BC, viceversa non rispetta il teo statico e supera in qualche sezione  $M_p$ .

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z) = \frac{3M_p}{l} - \frac{2M_p}{l^2} z = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{2} l \quad \text{POSIZIONE DEL MOM. MASSIMO}$$

Posso procedere anche con un secondo metodo -  
 Ricerca il cinematicismo reale del portale -



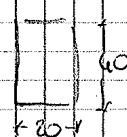
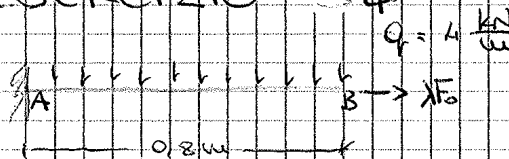
Chiamo  $x$  la coordinata della cerniera che si determinerà sul traverso e scrivo il PLV con l'incognita  $x$ .



Scrivo il PLV. Ricavo  $q$  in funzione di  $x$ .  
 Per il teo cinematico cerco il minimo di  $q$ .  
 → Trovo la posizione  $x$   
 Ho dunque determinato  $q$  reale -

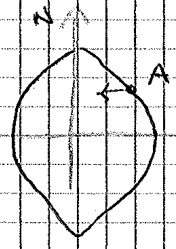
13. MARZO 2010

**ESERCIZIO 4**



$F_0 = 80 \text{ kN}$   
 Determinare la max forza.

Bisogna usare il dominio di resistenza che dice per quali coppie N-M la sezione si plastifica.



La equazione che descrive tale curva è:

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 \quad (1)$$

$$N_p = 250 \cdot 20 \cdot 40 = 2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$M_p = 250 \cdot \frac{bh^2}{4} = 2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

N ed M variano nelle sezioni. Scelgo la sezione critica → INCASTRO

$$M_A = q \frac{l^2}{2} = 1,28 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

N è costante su tutta la trave e contiene l'incognita  $\lambda$ .

Sostituisco nell'eq. (1) e risolvo rispetto a  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{N_p}{F_0} \left(1 - \frac{M}{M_p}\right)^{1/2} = 1,5$$

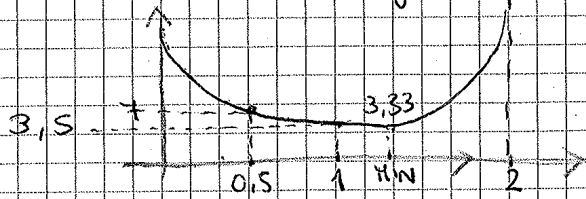
Sono in A, se un spost, N resta costante e sono all'interno del dominio

Abbiamo ricavato le 3 soluzioni.

All'interno dello stesso range (0-2) ho ipotizzato 2 cinematici

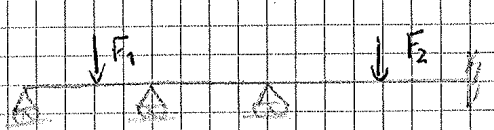
Prenderei quello che mi dà valore di  $\lambda$  più basso.

L'andamento di  $\lambda$  in funzione di  $\eta$  è:



ESAME: Applicare teoremi + bene

ESEMPI nel caso di cavi NON PROPORZIONALI

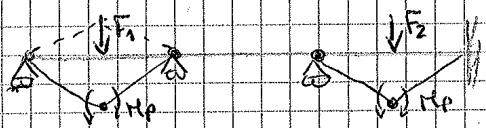


Potrei avere più combinazioni di cavi di collasso

Vedere che cinematici potrebbero uscire

Potrei avere collasso per  $F_1$  o  $F_2$

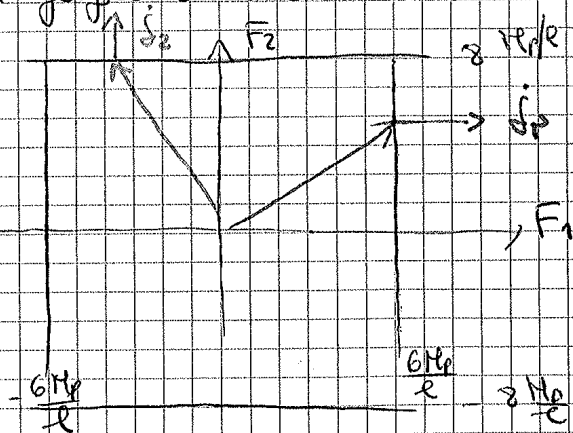
Applico il teo cinematico a 2 condizioni di collasso



$$\textcircled{1} \pm F_1 \frac{1}{2} l - 3M_p l = 0 \rightarrow F_1 = \pm \frac{6M_p}{l}$$

$$\textcircled{2} + F_2 \frac{1}{2} l - 6M_p l = 0 \rightarrow F_2 = \pm \frac{12M_p}{l}$$

su un grafico bidimensionale  $F_1 - F_2$  rappresento le soluzioni.



Se le forze si muovono all'interno, la struttura non ha raggiunto il collasso. Se sono sulle linee ho collasso.

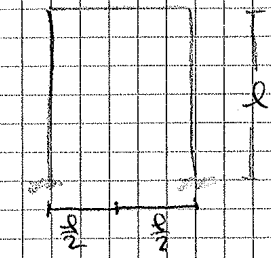
Non posso andare fuori. È un dominio di resistenza.

Come per il caso di Trecca ho il dominio convesso.

Esempio collasso —  $\rightarrow$  ho un collasso a causa di  $F_1$  e lo spost è ortogonale

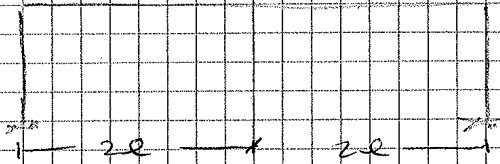
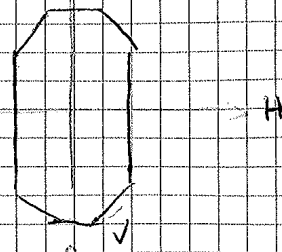
Esempio collasso — e causa di  $F_2$ , ho solo  $\delta_2$ .

Se ipotizzo di lavare la geometria:



Il danno è sempre un obbligo una più stretta.

Si amplia il range di collasso dovuto a H



Si amplia il range dovuto a H collasso e cause di v

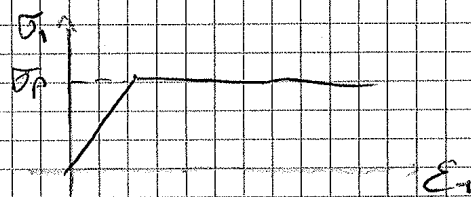
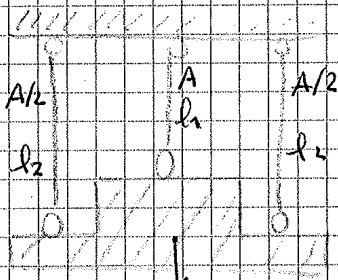
→ Si allunga

## CARICHI CICLICI

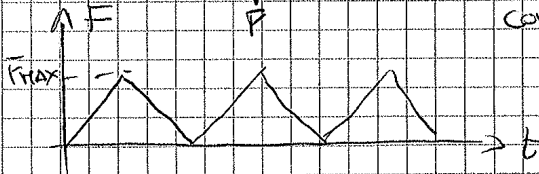
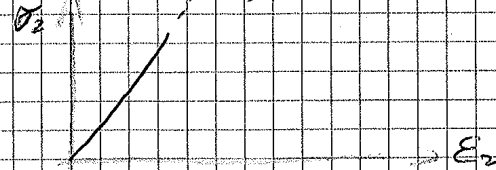
### Fenomeno dello SHAKE-DOWN

Studiamo un sistema di bielle

Per la biella centrale la legge costitutiva:



Per le bielle laterali ipotizziamo un comportamento elastico, non si plasticizzano.



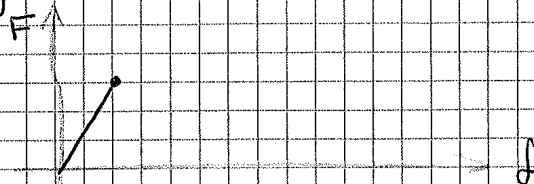
Col metodo degli spostamenti trovo la soluzione:

$$F_1 = F \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

$$F_2 = F \frac{l_1}{2(l_1 + l_2)}$$

$$F_1 = \sigma_p \cdot A \quad \rightarrow \quad F = \sigma_p \cdot A \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right)$$

Nel range di F tra 0 e F il sistema è in campo elastico

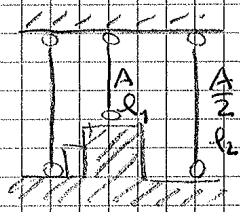




P&F COLLADO

18 MARZO 2011

BIELLE - Shake down

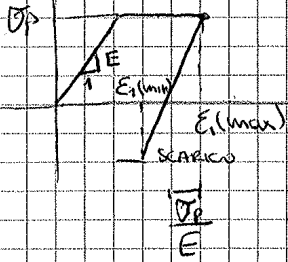


Avevamo visto:  $E_1(\max) = \frac{l_2}{l_1} E_2(\max) = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{F_2(\max)}{EA/2}$  (1)

Se ci riferiamo allo scarico:

$E_1(\min) = \frac{l_2}{l_1} E_2(\min) = \frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\min)}{EA/2}$  (2)

BIELLA CENTRALE



$E_1(\min) = E_1(\max) - 2 \frac{\sigma_p}{E}$  (3)

Sostituisco (1) e (2) in (3):

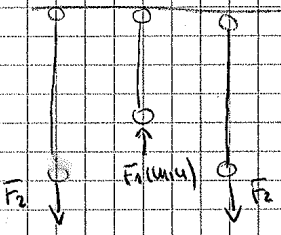
$\frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\min)}{EA/2} = \frac{l_2}{l_1} \frac{F_2(\max)}{EA/2} - 2 \frac{\sigma_p}{E}$

$F_2(\max) = F_2(\min) + \sigma_p A \frac{l_1}{l_2}$

Nella situazione di carico nullo ho comunque delle autotensioni nelle bielle. Sto studiando il caso in cui raggiungo plasticizzazione della biella centrale

$\Rightarrow F_1(\min) = -\sigma_p A$  e nota

La biella centrale è in compressione, dunque le due laterali sono in trazione



$F_2(\max) = \sigma_p \frac{A}{2} + \sigma_p A \frac{l_1}{l_2}$

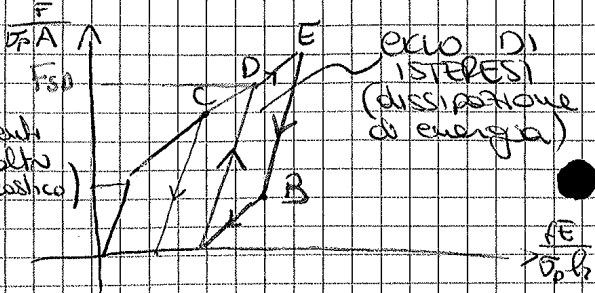
Voglio studiare quale F devo applicare per avere tale situazione.

$F(\max) = 2 F_2(\max) + F_1(\max) = 2 \left( \sigma_p \frac{A}{2} + \sigma_p A \frac{l_1}{l_2} \right) + \sigma_p A = \Rightarrow F_{SD} = 2 \sigma_p A \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right)$  SHAKE DOWN

$F_{SD}$  = valore min che deve assumere la forza max affinché si verifichi questa situazione di shake down

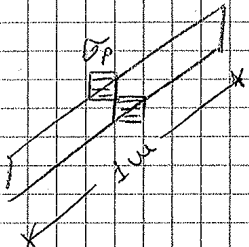
Se  $F \geq F_{SD} \Rightarrow$  la biella centrale con lo scarico sarà snervata, altrimenti no

Ripetendo il comportamento del sistema in un piano  $\frac{F}{\sigma_p A}$ ;  $\frac{\partial E}{\partial l_2}$  (alcuni elementi sono snervati altri in campo elastico) (funzione di F e di spostamenti):



- comp. elastico
- biella centrale snervata
- se a C scarico e  $F < F_{SD}$
- se scarico in D =  $F_{SD}$ , raggiunto  $F_{SD}$  no la biella è snervata
- se scarico in E >  $F_{SD}$ , varia la rigidità del sistema, e si forma il ciclo di isteresi





Valuto  $M_p$  considerando 1 striscia di 1 m di larghezza e ipotizzando  $q_p$ .

Al centro della lastra  $M_0 = M_p = M_R \rightarrow$  Solo nel punto B.  
 Muovendoci dal centro verso l'esterno, sto passando da B a C.  
 All'esterno  $M_R = 0$  e  $M_0 = M_p$ .

$\rightarrow$  Secondo l'hyp  $M_0 = \text{costante}$

$\rightarrow$  la (3) diventa  $\frac{d^2}{dx^2} (r^2 M_R) - q r^2 = 0$  (3)

perché  $\frac{dM_0}{dx} = 0$

Il sistema è staticamente ammissibile:

$\rightarrow$  equilibrio con carichi esterni (soddisfa la (3'))

$\rightarrow$  in ogni punto non supera il valore  $M_p$

Per soddisfare la 1ª condizione devo integrare la (3) 2 volte e trovare le costanti:

$$M_R = q \frac{r^2}{6} + C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

•  $C_2 = 0$  perché se no verrebbe  $M_R \rightarrow \infty$

Diverso è il caso di carichi concentrati. Per i distribuiti devo imporre questa condizione

•  $M_R(0) = M_p \rightarrow$  Trovo  $C_1$

Nelle slide ho errore (NO  $M_R(R) = 0$ ).  $C_2 = 0$  per evitare la singolarità  $M_R \rightarrow \infty$  che non è vero nel caso di carichi distribuiti (ma è vero per i concentrati).

Trovo  $\begin{cases} C_1 = M_p \\ C_2 = 0 \end{cases}$

$$M_R = q \frac{r^2}{6} + M_p$$

Per trovare il valore di  $q$  impongo  $M_R(R) = 0$

$$\rightarrow q = -6 \frac{M_p}{R^2}$$

Il meno viene perché assumo  $\uparrow$  in positivo verso l'alto, invece sto ipotizzando di assumere  $q$  verso il basso.

$$\begin{cases} M_R(r) = -M_p \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \\ M_p(r) = M_p \end{cases}$$

Questa è la soluzione secondo la nostra hyp.

Se tale soluzione soddisfa sia il problema statico che cinematico, allora è l'unica soluzione corretta.

Sostanzialmente ci stiamo muovendo da B a C e la def. ha sempre stessa direzione e abbiamo  $\dot{\chi}_R = 0$  e  $\dot{\chi}_0 \geq 0$

Potenza per unità di area: (faccio con 1 integrale lineare e non di volume)

$$D = \int_{-H}^H (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau \dot{\gamma}_{xy}) dz \quad z = \text{coord trasversale}$$

$\dot{\epsilon}$  è cost nello spessore  $\Rightarrow$  fuori dall'integrale

Trao  $M_x, M_y, M_{xy}$

$$e \quad D = M_x \dot{\epsilon}_x + M_y \dot{\epsilon}_y + M_{xy} \dot{\gamma}_{xy} \quad (M_{xy} = \text{Cuneolare})$$

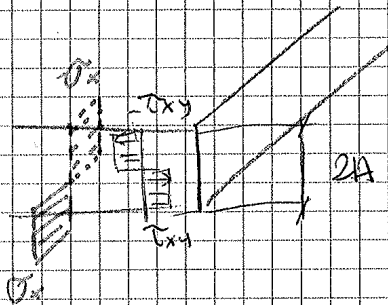
Adimensionalizza per comodità:

$$\mu_{xx} = \frac{M_x}{M_p} \quad \mu_{yy} = \frac{M_y}{M_p} \quad \mu_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_p} \quad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{xy} H$$

$M_p = M_{max}$  di plast. per una striscia unitaria

$$\rightarrow D = \frac{M_p}{H} (\mu_{xx} \dot{\epsilon}_x + \mu_{yy} \dot{\epsilon}_y + \mu_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) \quad \text{Potenza adimensionalizzata}$$

Facciamo una ipotesi sulla distribuzione bidimensionale delle tensioni



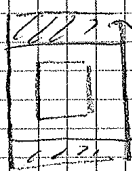
$$M_x = \sigma_x H^2$$

$$M_y = \sigma_y H^2$$

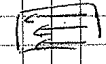
$$M_{xy} = \tau_{xy} H^2$$

$$M = \sigma \frac{bh^2}{4}$$

Come nell'esercizio



$M_{max}$  fless.



Ho hyp distrib di  $\sigma$  rettangolare di  $\sigma$  ma poi

ho trovato  $\sigma$  uniforme  $\Rightarrow$  Non ho soddisfatto le condizioni di congruenza

Per l'applicazione dei teoremi di plast non è importante.

Devo ora ipotizzare un criterio di resistenza:

• Von Mises  $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_p^2$

In questo caso le direzioni principali cambiano punto per punto e il criterio di Von Mises non si riferisce a questi (al contrario di Tresca) ma posso usarlo direttamente con  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  non principali

inoltre lo posso esprimere in termini di  $\mu_{xx}, \mu_{yy}$  e  $\mu_{xy}$

Stiamo cercando il criterio per massimizzare il carico

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Voglio massimizzare } G_1 \text{ e } G_2 \\ \text{Voglio minimizzare } G_3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \text{Voglio massimizzare } G_1 \text{ e } G_2 \\ \text{Voglio minimizzare } G_3 \end{aligned}} \right\} P = 2 \left( G_1 + \frac{G_2}{\beta} - G_3 \right)$$

Impoango  $G_1 = G_2 = 1$  e  $G_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}\beta}$

Trovo: 
$$P = 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\sqrt{3}\beta} \right)$$

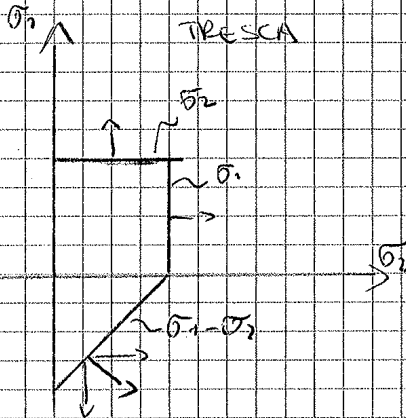
Questa è la soluzione ottenuta col teorema statico.

TEOREMA CINEMATICO

- definire i meccanismi rispettando i vincoli
- determinare la potenza esterna e interna (lavoro)
- applicare il PLV per trovare il limite superiore del carico di collasso.

Avendo scritto la potenza in termini di momento e curvatura.

È possibile elaborare ancora l'espressione



Considerato un certo dominio di plasticizzazione vale la legge di compatibilità.

In genere ogni stato è individuato da una  $\sigma$  e ho

$$|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_p$$

Considerando F:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \text{trovo la def. se } \dot{\epsilon}_1 \text{ sul lato } // \sigma_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = \dot{\epsilon}_2 \rightarrow \text{Facendo la derivata della funzione di plast. rispetto a una variabile trovo la componente deformazione}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = 1^{\text{o}} \text{ componente } // \sigma_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = 2^{\text{o}} \text{ componente } // \sigma_1$$

L'espressione di Von Mises:  $F = m_x^2 + m_y^2 + m_{xy}^2 + 3m_{xx}^2$

Domanda trovo  $\dot{\chi}_x, \dot{\chi}_y, \dot{\chi}_{xy}$  e meno di una costante moltipli  $\lambda$

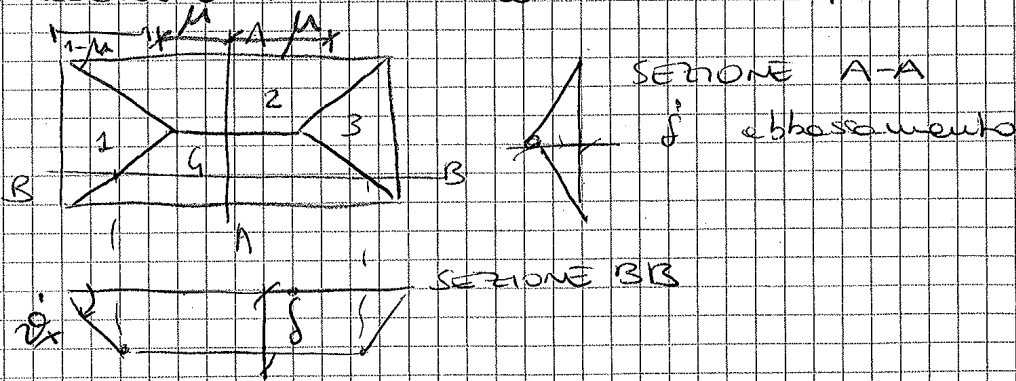
$$\dot{\chi}_x = \lambda (2m_x - m_y) \quad \dot{\chi}_y = \lambda (2m_y - m_x) \quad \dot{\chi}_{xy} = 6\lambda m_{xy}$$

Espresso i momenti in modo da avere  $M$  in funzione di  $\chi$ .

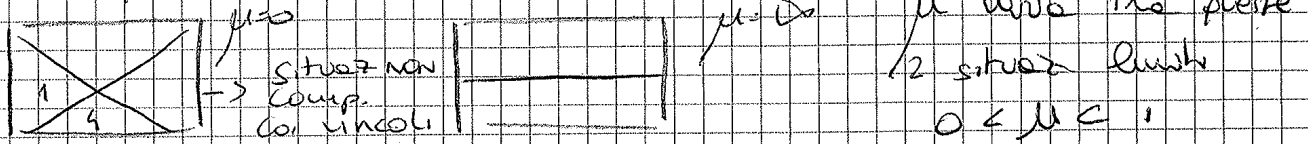
$$D = \frac{M_p}{H} (m_x \dot{\chi}_x + m_y \dot{\chi}_y + m_{xy} \dot{\chi}_{xy}) \quad \text{POTENZA}$$

Sostituendo est. i momenti, le sale trovavo di  $\chi$  in possesso (\*)

Dato la piastra devo fare un ipotesi di meccanica elementare.  
 Meccanismo nel caso concettuale la produzione in delle linee



Varando  $\mu$  posso ipotizzare da meccanismo



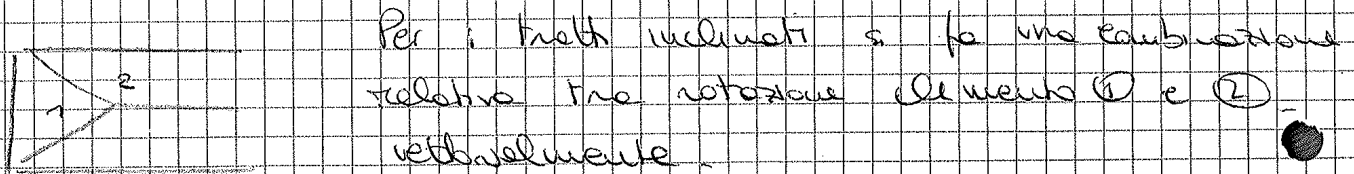
Varando  $\mu$  trovo il minimo carico cu. elem. le

Individuo 4 parti che valano la rotazione relativa tra le varie parti (cerchio cilindrico)

①  $\theta_x = \frac{\delta}{1-\mu}$   $\theta_y = 0$  rotaz per la parte ①

Analogamente ricavo  $\theta_x$  e  $\theta_y$  per le parti ② ③ ④

$\theta_{2-4} = 2 \frac{\delta}{\beta}$   $\rightarrow$  lunghetta  $2\mu$



Il  $Z$  lo trovo sommando i contributi di tutte le parti.

Per il lavoro esterno faccio  $\int d p$  per l'abbassamento

$\rightarrow$  Sto dunque volubendo il volume individuato dal elemento

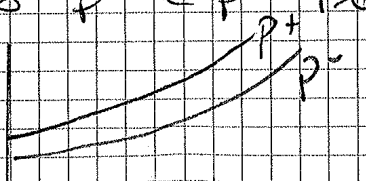
sino perché punto per punto valuto  $p$  abbassamento.

Le variabile  $\mu$  obettivo: trovare  $p$  minore

Devo e trovo che ho minimo per  $\mu = 1 + \beta^2 - \beta\sqrt{\beta + \beta^2}$

Sostituisco in  $p^+$  e trovo il mio valore di  $p^+$

Diagrammo  $p^+$  e  $p^-$  trovare con i 2 teoremi in funzione di  $\beta$ .



Trovo sempre un range e mai la sol. esatta

Il discorso è analogo per le piastre.  
 Lo strip method è legato al teo. Globico.  
 Esiste anche la YIELD LINE THEORY basato sul teo. cinematico (Ipotesi cedere univocamente plastica).

Si preferisce lo Strip Method perché a favore di sicurezza.  
 Vale solo per collasso in flessione.

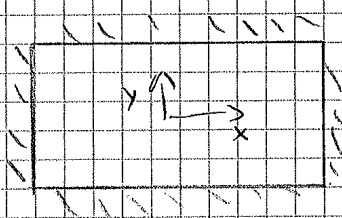
Esempio: Piatra su plastico.

Dovrà effettuare anche verifiche di antonamento e altre perché il metodo non ne tiene conto.

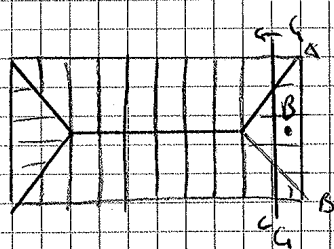
Non tiene conto del Mom. Torcente.

## PIASTRA

• generica piastra rettangolare incastrata.

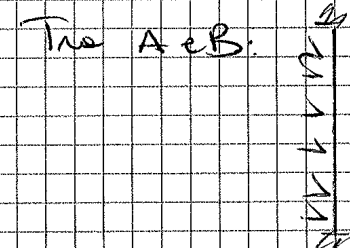
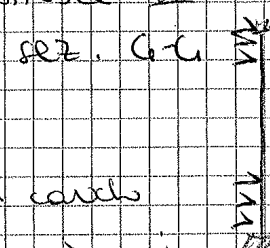


Il carico è portato da strisce // a x e y.  
 Ciascuna striscia viene analizzata come fosse una trave.



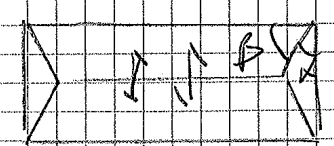
Le linee sono individuate da linee di discont. statico (Taglio nullo).

Tra queste linee il carico è portato da strisce // a x e y.

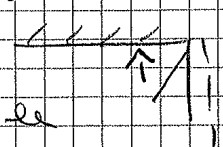


Pensando al flusso dei carichi il carico nel punto B è ovvio che viene portato dalla striscia orizz. poiché si appoggia, e' vicina all'estremità AB.

In generale se i vincoli sono uguali, l'angolo  $\alpha$  è più piccolo di  $\beta$ .

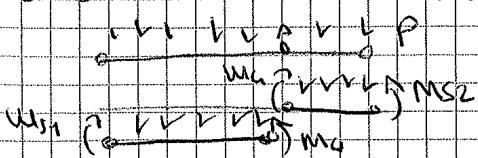


Se ho incastrato - appoggio  $\rightarrow$  più carico va all'incastrato.



Queste due sono regole pratiche per individuare le linee di discontinuità.

Considero una striscia: (hyp caso non simmetrico)



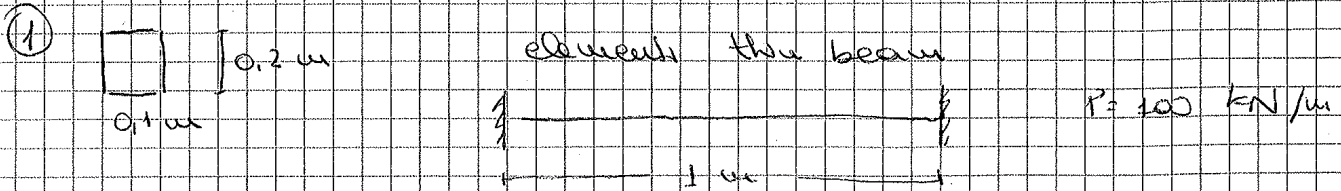
Anzi il punto in cui T=0 e resta la linea di discontinuità.



LAIB 1D → Corrado

19. MARZO. 14

ANALISI INCREMENTALE PLASTICA DI UNA TRAVE IPERSTATICA



Geometric line → Plastic Properties

Dispensa - ANALISI non LINEARE - Online

Material - Plastic

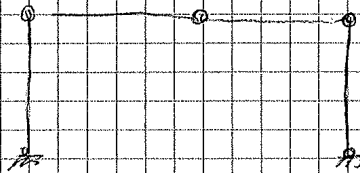
$$\sigma_p = 248\text{ E6}$$

Initial uniaxial yield stress

loadcase

Da un certo punto in poi, una volta formate le cerniere plastiche la forma del diagramma di momento cambia perché ha redistribuzione dei momenti e negli incastrati non cresce più il momento

② PORTALE



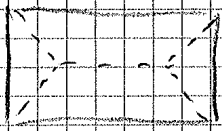


Danno dunque definire  $\frac{u_{d1}}{u_{d2}}$  e  $h_1$ . Di solito  $\frac{u_{d1}}{u_{d2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  e  $h_1$  dipende anche dalla forma della zona

TRIANGOLARE  $\rightarrow$   $h_1$  piccola  
 TRAPEZIA  $\rightarrow$   $h_1$  più grande

**ESEMPIO 1**

Piastina appoggiata - Ho momento solo in campata



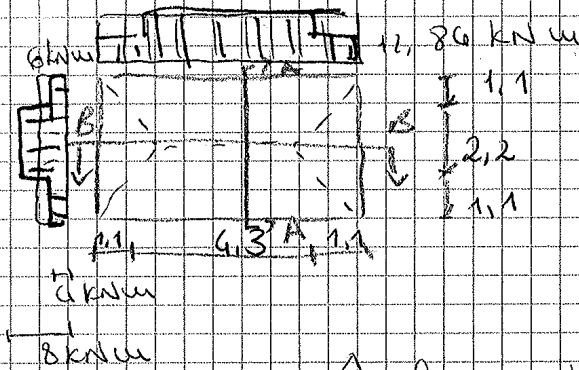
Ho 2 triangoli e 2 trapezi.

Nelle slide, figure ho l'espressione del momento medio di momento e seconda delle figure

$\frac{q c^2}{6}$  TRIANGOLO

$\frac{q c^2 (h_1 + 2h_2)}{6 h}$  TRAPEZIO

Per la parte triangolare ho  $M_{av} = 6 \text{ kNm}$  ed è uguale a  $d_x$  e  $s_x$ . Per la parte trapezoidale  $M_{av} = 12,8 \text{ kNm}$

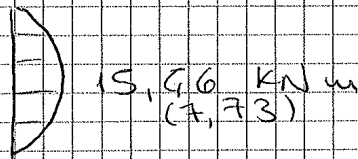


A questo punto devo fare la ripartizione. Per la parte triangolare è stato scelto rapporto 0,5 ottenendo ex  $h_1$  una pari a  $h_1$  e al centro  $8 \text{ kNm}$

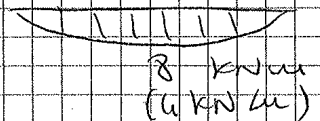
Analogamente per la parte trapezoidale ottengo  $7,73$  e  $15,66$

A questo punto considero come fossero travi

SEZ AA

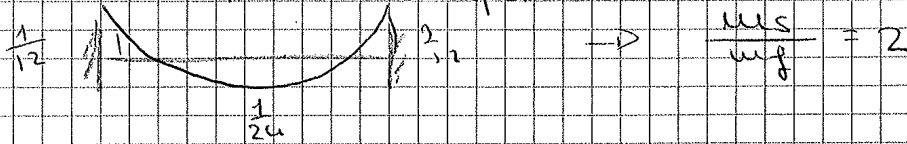


SEZ B.B



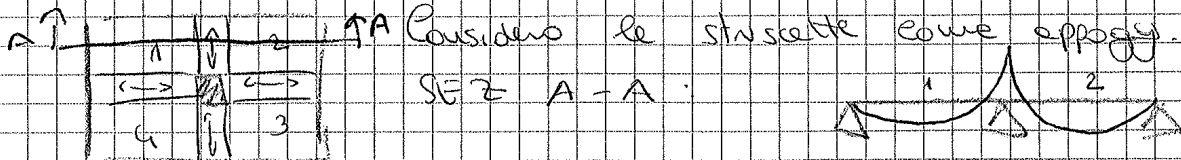
9° In questo modo garantisco l'equilibrio in una delle configurazioni possibili. Garantisco il comportamento a s.c. ma non in esercizio, avrò sicuramente fessurazioni

In fase elastica il rapporto è fissato tra momento all'incastro e momento in campata



Potrei anche scegliere lo stesso rapporto, tenuto in esercizio il valore iniziale di tale rapporto è 2.

Se ho appoggio puntuale:



Corrado

25 MARZO 14

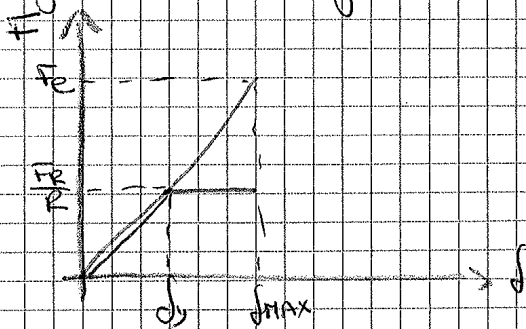
Oggi studiamo con la plasticità

Andremo un aspetto importante legato alla risposta strutturale in campo plastico. Sostanzialmente si è visto che sotto l'azione sismica non è possibile realizzare strutture che si comportino in modo plastico una si considerano solo comportamenti elastici (fase di servizio).

Diverso è l'effetto del sisma su una struttura che si comporta sempre elasticamente e su una struttura che si plasticizza.

Cambiano le forze equivalenti (più elevate in campo elastico) e cambia il comportamento strutturale (in campo elastico la struttura torna allo stato iniziale e seguito da un sisma).

Diagrammando forze spostamento avere:



CAMPO ELASTICO

CAMPO PLASTICO

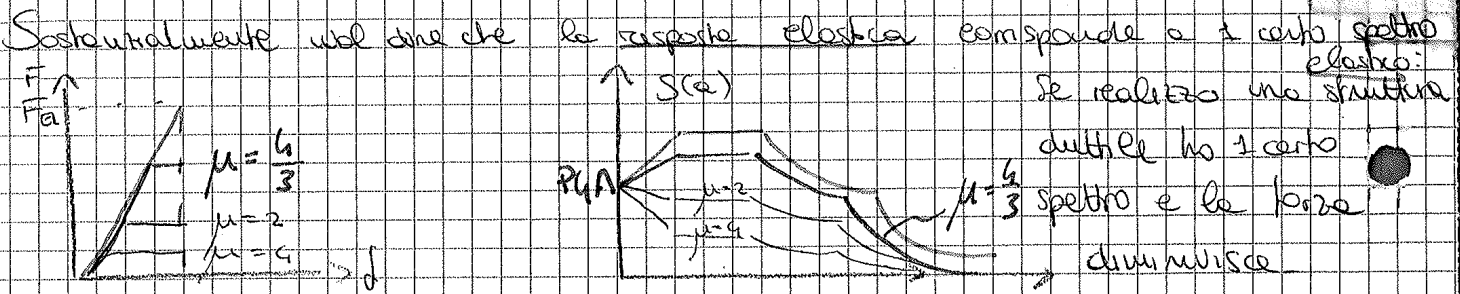
L'approccio più comune è progettare in campo plastico in modo da sviluppare forze più basse e dunque strutture meno resistenti. Deve riuscire ad avere una certa duttilità:  $\mu = \frac{\delta_{max}}{\delta_p}$

La forza applicata all'edificio

è frutto di come quest'ultimo reagisce all'azione sismica.

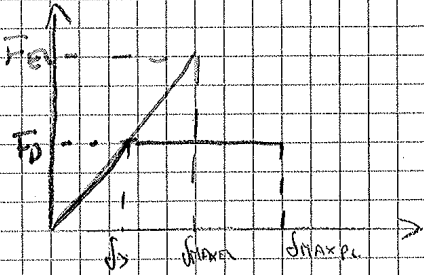
Per il vento non potrei fare gli stessi di conti, perché non cambia la forza.

1



Raddoppiando la duttilità dimezzata la forza  
 Questo tale comportamento funziona bene nel campo di spostamento costante. Poss. fare anche altre ipotesi:

② Energia di deformazione uguale  
 Passo dalla risposta elastica alla elasto-plastica dicendo che le due debbano avere stessa energia di deformazione  $\Rightarrow$  Uguaglio le aree del triangolo e del trapezio.



$$E_{el} = E_{ep}$$

$$\text{Tirato } R_u = \sqrt{2\mu - 1}$$

Si sa che la forza non è in modo lineare  
 Quest'ipotesi funziona bene nel campo dello spettro a velocità costante

Complessivamente è secondo del campo di spettro in cui un tirato utilizzato la 1<sup>a</sup> o la 2<sup>a</sup> ipotesi.

Riferendosi al comportamento reale della struttura:



Devo essere sicuro che raggiunta una certa forza non si abbia un collasso repentino di tipo fragile ma come descritto in queste parti, si formano le cerniere plastiche

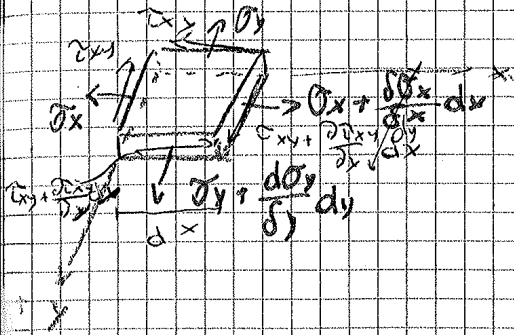
Per esempio se cade un pilastro  $\Rightarrow$  ho raggiunto un collasso di tipo diverso

Devo essere sicuro che la struttura riesca a sviluppare il coefficiente  $\mu$   
 E' un po' il criterio di gerarchia delle resistenze imposto dalle Norme.  
 Questo mi garantisce un certo tipo di raggiungimento al collasso e sono più tranquillo.  
 (Progetto pila e flessione, poi a taglio ...)  
 ( " " le travi, poi i pilastri ... )

FINE PLASTICITA'!

**STATO TENSIONALE PIANO**

Considero un elemento  $\Delta$  e sono l'equilibrio dato uno spessore unitario.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\sigma_x dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \tau_{xy} dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx + F_x dx dy = 0$$

Semplificando i termini e dividendo per  $dx dy$ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad 1a$$

Analogamente in direzione  $y$  troviamo:  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad 1b$

Le leggi di spostamento sono 2 sole componenti  $u$  e  $v$ .

Sono il LEGAME CINEMATICO tra deformazioni e spostamenti:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

• Derivo la 1<sup>a</sup> due volte su  $dy$  e la 2<sup>a</sup> due volte su  $dx$ :

$$\begin{aligned} (1^a) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} \\ (2^a) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned}$$

• Derivo la 3<sup>a</sup> su  $dx dy$ :  $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$

Nota che:  $(3^a) = (2^a) + (1^a)$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (2) \quad \text{Eq. di CONGRUENZA}$$

→ Esiste una relazione tra  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ . Scelte due componenti di def. me, la terza è definita dalla relazione (2).

È prevedibile dato che ho 2 componenti di spostamento  $u, v$ .

Sono il LEGAME COSTITUTIVO: (Hooke)

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{cases}$$

Sono l'eq. di CONGRUENZA in TERMINI DI TENSIONI:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

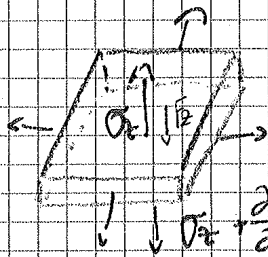
Torno alle equazioni d'equilibrio:

Derivo la 1a per  $\partial x$  e la 1b per  $\partial y$  e le sommo:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (4)$$

Confronto le equazioni (3) e (4) e si eliminano i termini con  $\tau_{xy}$ :

A parità di vincoli esterni, la risposta meccanica è la stessa ma il campo deformativo (e dunque quello degli spostamenti) cambia.  
 Nel caso del prisma piano:



dal punto di vista tensoriale quindi:  
 Con l'equilibrio: le forze  $\Sigma$  in direzione  $x$  e  $y$  restano uguali: 1a. e 1b

In direzione  $z$ :  $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -F_z$   
 Se la forza di volume in direz  $z$  sono nulle esse  $F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \sigma_z = \text{cost.}$

$$F_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

Esiste una procedura efficace per risolvere questi problemi. Si introduce una funzione delle tensioni, **STRESS FUNCTION** detta funzione di **AIRY**  $\Phi(x, y)$

tale che il campo tensionale lo otteniamo in questo modo:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$\Rightarrow \Phi$  è una funzione che ci permette di trovare il campo tensionale in questo modo.

Sostituisco queste nuove equazioni scritte in termini di  $\Phi$  nelle eq. di equilibrio ottengo:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (1a)$$

Stessa cosa si verifica con la 1b. Le prime 2 equazioni d'equilibrio mi diventano identicamente soddisfatte. Danno impone solo la compatibilità e l'incognita è adesso  $\Phi$ .

Dalla compatibilità:  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow \nabla^4(\nabla^2 \Phi) = 0$$

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

La funzione  $\Phi$  è **BIARMONICA** perché deve soddisfare questa equazione.

A questo dovrà aggiungere le condizioni al contorno.

Che forma avrà la funzione  $\Phi$ ?

Vediamo le funzioni di AIRY polinomiali che tipo di campo tensionale ci si può aspettare.



Adesso calcolo il campo tensionale che ne deriva come sempre:

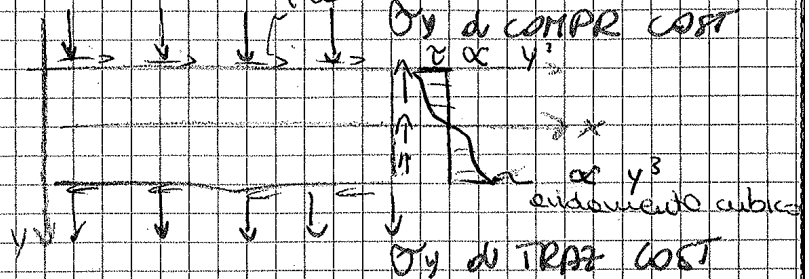
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{c_s}{3} x^3 + d_s x^2 y + e_s x y^2 + f_s y^3 \\ \sigma_y = a_s x^3 + b_s x^2 y + c_s x y^2 + \frac{d_s}{3} y^3 \\ \tau_{xy} = -\frac{b_s}{3} x^3 - c_s x^2 y - d_s x y^2 - \frac{e_s}{3} y^3 \end{cases}$$

ho un campo tensionale più complesso dei casi precedenti.

• Se solo  $d_s \neq 0$

$$\begin{cases} \sigma_x = d_s (x^2 y - \frac{2}{3} y^3) \\ \sigma_y = \frac{d_s}{3} y^3 \\ \tau_{xy} = -d_s x y^2 \end{cases}$$

considerando la relazione tra  $d_s$  e  $f_s$



Dalle equazioni una matrice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x & \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \tau_{xy} \\ u &= a + by & v &= c - bx \end{aligned}$$

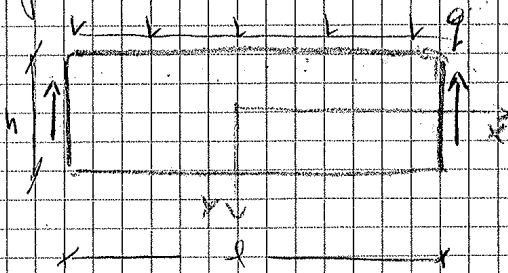
Se aggiungo a  $u$  questa parte e a  $v$  questa parte, sto aggiungendo al campo di spostamenti una ROTOTRASLAZIONE RIGIDA e noto che questo NON mi modifica le deformazioni. Con l'aggiunta delle condizioni al contorno vedo o definire questi effetti di rototraslazione  $\rightarrow$  CONDIZIONI AL CONFINO DI TIPO CINEMATICO sui vincoli.

(Avevo già aggiunto quelle statiche)

Il problema è adesso unicamente definito e risolto.

### TRAVE - PARETE - DEEP-BEAM

Una trave parete NON soddisfa le condizioni di de Saint Venant. La lunghezza e l'altezza della trave sono infatti del tutto confrontabili tra loro.



Assumo spessore unitario della sezione e sezione rettangolare.

Ho carico superiore uniformemente distribuito e i vincoli sono appoggi distribuiti su tutto il lato.

Voglio studiare il problema con le funzioni di Airy. So che devo soddisfare geometricamente delle condizioni al contorno ben precise e in base a queste posso scegliere la funzione di Airy più adatta al problema da punto visto.



LAIB - Corrado

26 MARZO 11

ESAME

- Relazione su: 1 esercizio LAIB
- 1 esercizio AULA (Plasticità, elasticità piana...)
- 1 relazione ESPERIENZA LABORATORIO

① PIASTRA CIRCOLARE

$$M_p = \sigma_p \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 6700 \text{ N}\cdot\text{cm}$$



$$q = 40200 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_p = 268 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$h = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$$

$$R = 1 \text{ m}$$

Corrado

27 MARZO 2011

CONTINUO TRAVE-PARETE

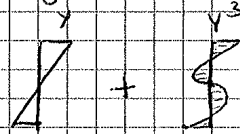


Aggiungendo il mio termine, anch'è un ulteriore contributo da dover determinare. Questa lo determino dalla condizione che non venga soddisfatta. Dopo vari passaggi, ottengo:

$$\sigma_x = \frac{q}{25} \left( \frac{h^2}{4} - x^2 \right) y + \frac{q}{25} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{10} h^2 y \right)$$

sov. CLASSICA ALLA teoria di S. Venant per travi snelle

Parte aggiuntiva, è indipendente da x (vale per qualsiasi sezione). Lungo y ha una parte cubica e una lineare

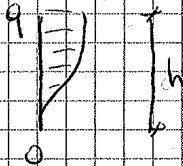


La parte cubica ha risultante nulla e momento riv. nulla

Il diagramma delle  $\sigma_x$ , non è più lineare ma cubica rispetto alla soluzione classica di de Saint Venant.

Confronto noto primo e secondo contributo, noto che all'aumentare delle snellezza il secondo contributo diminuisce.

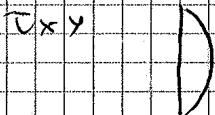
Per quanto riguarda  $\sigma_y$  ho un andamento cubico di questo tipo:



tenace aggiuntiva rispetto alla sol. di de Saint Venant.

La soluzione di de Saint Venant si basa su ipotesi di carico solo alle estremità. Se ho carichi sulle facce ho questi contributi in più.

Per quanto riguarda  $\tau_{xy}$  non sembra nulla



Il  $f$  ha 2 contributi:

①  $\frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}$  contributo della trave alla de Saint Venant

② Contributo legato al taglio che per elementi corti non è trascurabile. Se  $\frac{l}{h}$  cresce, il 2° contributo diventa piccolo.

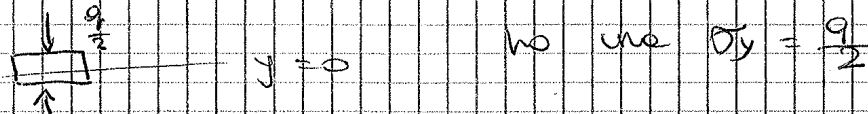
Tornando indietro posso sfruttare  $v$  lo scivolo nella linea media in  $y=0$ .

$$v(x,0) = v \frac{qx}{2E}$$

Lo spostamento orizzontale nella linea media è diverso da zero. Vale zero in  $(0,0)$ , poi cresce andando verso l'esterno.

⇒ la linea media NON è l'asse neutro

Se prendo un elemento nella linea media:



La trave con la teoria di de Saint Venant.

In genere non considero il taglio ma se volessi considerarlo ho un  $d^H$  (dovuto alla flessione) e  $d^T$  (dovuto al taglio)

$$d^H + d^T$$

Come lo valuto  $d^T$ ?  $d^T = \int_0^{l/2} \gamma_y dx = \int_0^{l/2} \frac{6}{5} \frac{T_y}{4h} dx =$

$$= \frac{6}{5gh} \int_0^{l/2} q \left( \frac{h}{2} - x \right) dx = \frac{1+\nu}{40} \left( \frac{h^2}{12} \right) \frac{ql^4}{EI}$$

Ho integrato dall'appoggio fino alla metà e cambiato SR:  $(0,0)$  in appoggio

$$f = d^H + d^T = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \left[ 1 + \frac{63}{25} (1+\nu) \right]$$

Questo è la correzione alla trave di de S.V. ma comunque

considero che la trave diventa retta e def. ne avviene

SENTIFICO



REALE



⇒ Il mio approccio alla soluzione esatto ma ho ancora una piccola differenza - a causa della semplificazione in  $\gamma_y$ .

Estendo questo approccio di stati piani di flessione e deformazione alle coordinate polari (nel caso ho geometrie curve).

Per risolvere questi problemi in deformazione si deve:

- Eq. equilibrio indefinite
- Congruenza o compatibilità

Con la funzione di Airy, allora anche l'eq. non ci interessa più perché sono internamente soddisfatte.

Definisco:

$$r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$r \Delta \Phi = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)$$

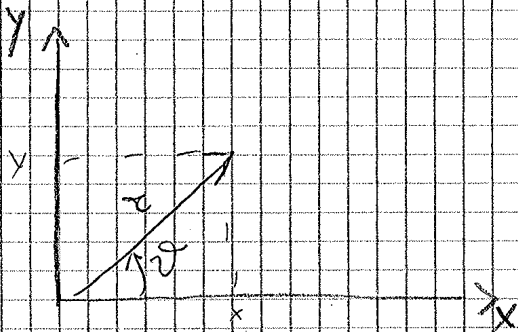
} Solo definizioni  $\Rightarrow$  a memoria -

Resta da definire l'equazione di compatibilità:

Considero quella trovata in campo cartesiano e faccio la trasformazione di sistema di riferimento.

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 = 0$$



legame sistemi di riferimento

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Otengo:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{r} \right) 2x = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \arctan (y x^{-1}) \right) = \frac{1}{1 + y^2/x^2} (-y x^{-2}) = \frac{1}{1 + y^2} (-y) = -\frac{y}{x^2} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

analogamente

Queste derivate si scrivono per esprimere  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  ... in termini di  $r$  e  $\theta$ .

Se  $\Phi$  è in coordinate polari:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Adesso devo fare la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)$$

Le condizioni che un serbatoio sono 2 (trono A e C):

$$\sigma_r (r=R_e) = -p_e \quad p_e \text{ di compressione}$$

$$\sigma_r (r=R_i) = -p_i$$

Trono  $\begin{cases} \frac{A}{R_e^2} + 2C = -p_e \\ \frac{A}{R_i^2} + 2C = -p_i \end{cases}$  Determina A e C

Lo stato tensionale:  $\sigma_r$   
 $\sigma_\theta$

In certe us. i casi ho 2 termini. Sommando la  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$ , resta due volte il secondo termine che è indipendente da r anche.

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{Costante}$$

Cosa implica dal punto di vista deformativo?

Non è piano, e dunque abbiamo la componente  $\epsilon_z$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z + \nu \sigma_x + \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} (\sigma_z + \nu \sigma_r + \nu \sigma_\theta)$$

$\sigma_z = 0$  perché lo stato tensionale è piano

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{E} (-\sigma_r - \sigma_\theta) = \text{COSTANTE}$$

$\Rightarrow$  la sezione resta piana.

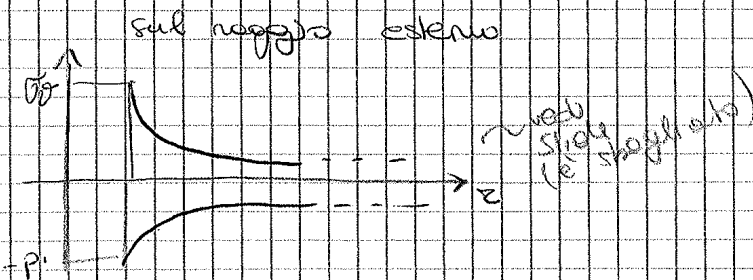
• ipotizzo  $p_e = 0$ , le espressioni si semplificano:

$$\sigma_r = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right) \text{ è sempre negativo } \Rightarrow \text{COMPRESSIONE}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right) \text{ è sempre positivo } \Rightarrow \text{TRAZIONE}$$

$$\sigma_\theta \text{ max} = \frac{p_i (R_e^2 + R_i^2)}{R_e^2 - R_i^2}$$

La soluzione grafica:



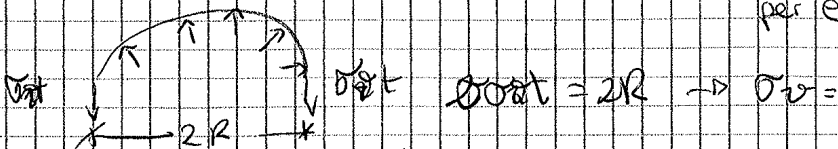
Analizzo  $\sigma_\theta \text{ max}$  di trazione (preoccupante):

$$\lim_{\frac{R_e}{R_i} \rightarrow \infty} \sigma_\theta \text{ (max)} = p_i$$

$$\frac{p_i (R_e^2 + R_i^2)}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{p_i (1 + \frac{R_i^2}{R_e^2})}{1 - \frac{R_i^2}{R_e^2}} \xrightarrow{\frac{R_i^2}{R_e^2} \rightarrow 0} p_i$$

$$\lim_{\frac{R_e}{R_i} \rightarrow 1} \sigma_\theta \text{ (max)} = \lim_{\frac{R_e}{R_i} \rightarrow 1} \frac{p_i (R_e^2 + R_i^2)}{R_e^2 - R_i^2} = \lim_{\frac{R_e}{R_i} \rightarrow 1} p_i \frac{2R^2}{\frac{(R_e - R_i)(R_e + R_i)}{2R}} = \lim_{\frac{R_e}{R_i} \rightarrow 1} p_i \frac{R}{t}$$

per il cilindro a trazione sottile  $t$  formula di HUBERTE



ESAME: Dovete sapere tutto, ricavare la soluzione e commentare i risultati.  $\odot$  a memoria, se non ricordo, si prende da appunti



È sano inoltre per una parte non vuota, funzione di  $r$

$$\Phi = f(r) \cos 2\vartheta$$

Le eq. di congruenza che deve soddisfare  $\Phi = \text{fuz. di Any}$  è:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right) \Phi = 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2} f \cdot \cos 2\vartheta + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \cdot \cos 2\vartheta + \frac{1}{r^2} f(r) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \cos 2\vartheta = 0$$

$$\quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \frac{1}{r^2} f(r) \cdot [-4 \cos 2\vartheta] = 0$$

Semplifico  $\cos 2\vartheta$  perché è un l.t.h. i termini:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) f = 0$$

Integrando trovo:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D$$

Ho 4 costanti da determinare con le condizioni al contorno.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \dots \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \dots \\ \tau_{r\vartheta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) = \dots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{in funzione di} \\ A, B, C, D \end{array} \right\}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\sigma_r(R) = \frac{\sigma}{2} \cos 2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta}(R) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\sigma_r(r) = 0$$

$$\tau_{r\vartheta}(r) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Il foro è scarico} \end{array} \right\}$$

Ho 4 equazioni in 4 incognite e considerando  $R \rightarrow \infty$  trovo:

$$\begin{cases} A = -\frac{\sigma}{4} \\ B = 0 \\ C = -\frac{\sigma}{4} R^4 \\ D = \frac{\sigma}{2} R^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Non bisogna sapere e memoria} \\ \text{ma conoscere i passaggi} \end{array}$$

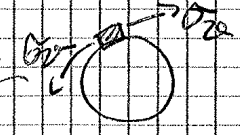
Sostituendo in  $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$  trovo le vere espressioni

Vedo che le c. c. imposte sono rispettate in  $r \rightarrow \infty$

Nel raggio del foro  $r = R$ :  $\sigma_r = \tau_{r\vartheta} = 0$

$$\sigma_\vartheta = \sigma(1 - 2\cos(2\vartheta))$$

nel bordo del foro.



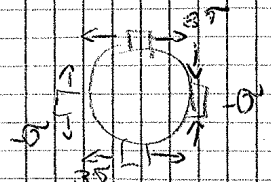
$\vartheta = 0$  lungo l'asse x.

Questa soluzione è stata trovata da Kirsch nel 1898.

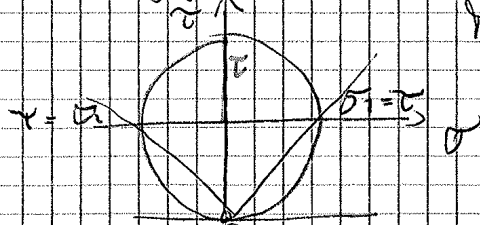
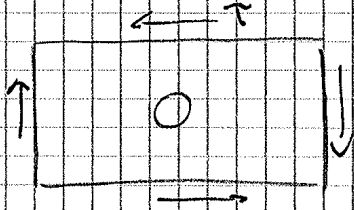
Nel bordo foro:  $\sigma_\vartheta = \sigma(1 - 2\cos 2\vartheta)$

Per  $\vartheta = 0 \rightarrow \sigma_\vartheta = -\sigma$  (tratti on stretched)

Per  $\vartheta = \pi \rightarrow \sigma_\vartheta = 3\sigma$

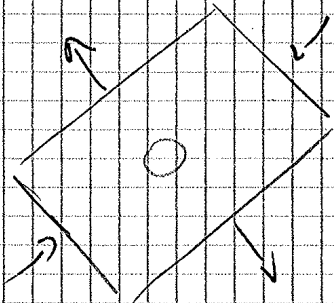


Se volessi trattare una lastica soggetta a taglio:

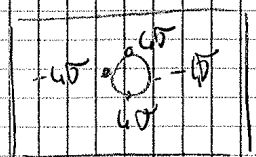


$\gamma_{chr}$

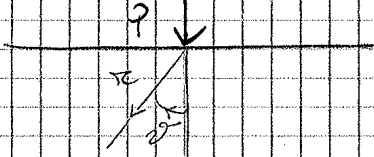
È lo stesso problema, lo vedo ruotato di  $45^\circ$



Trovo i fattori di concentrazione pari a 1



### ③ FORZA CONCENTRATA SU SEMIPIANO ELASTICO



Assumo una profondità qualsiasi unitaria nel semipiano elastico lineare. Considero le coordinate polari e l'origine nel punto d'applicazione di P.

Parto da  $\phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin 2\theta$  (prendo la x buona)

Questa  $\phi$  deve rispettare le condizioni di compatibilità

Il campo tensionale lo trovo come prima e trovo:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos 2\theta}{r} \\ \sigma_{\theta\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

La soluzione è di semplice stato tensionale radiale.

Questa soluzione in termini di campo tensionale ha una particolare caratteristica: sotto il punto d'applicazione della forza,  $r \rightarrow 0$  e  $\sigma_{rr} \rightarrow \infty$

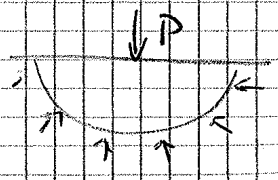
#### INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI $\sigma \rightarrow \infty$

Nella realtà non ha tanto senso. Nella realtà ho 2 casi:

① Un carico concentrato nella realtà ho sempre ripartizione in una certa impronta.  $\Rightarrow \sigma \neq \infty$

② Nella realtà i materiali hanno solo una parte di soluzione elastica, poi si plastificano e il comportamento cambia  $\Rightarrow \sigma \neq \infty$   
 $\Rightarrow$  Ho trovato una singolarità tensionale.

Devo trovare, verificare, che  $\phi$  rispetti le condizioni al contorno.



Per l'equilibrio le componenti verticali devono darvi P (integrando).



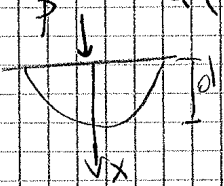
Devo determinare  $B$ .

Se si fa carico ad una certa distanza d'arrivo  $u=0$ .

$$u(d)=0 \rightarrow B = \frac{2P}{\pi E} \log d$$

e dunque:

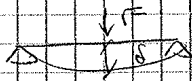
$$u(r=0) = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{R} \quad \text{sposto } u \text{ lungo la } dx$$



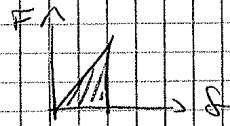
Nota che se  $a \rightarrow 0$ , sotto  $P$ ,  $u \rightarrow \infty$

Trovo una singolarità anche nel campo di spostamenti.

Cosa succede all'Energia di deformazione?

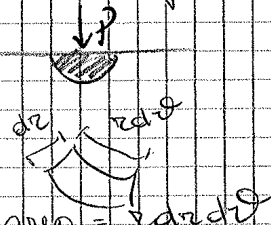


$$E = \frac{1}{2} F \delta \rightarrow \text{Teo di Clapeyron}$$



Nel vostro caso uso il Teo di Clapeyron.

Considero una certa area nell'intorno di  $P$  e voglio calcolare una certa energia di deformazione elastica  $E$ :



$$\frac{1}{2} \int E dV$$

$$\text{spessore } t \rightarrow \frac{1}{2} \int \sigma E dA$$

$$E = \iint \frac{\sigma^2}{2E} r dr d\theta$$

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{r}$$

costituisco

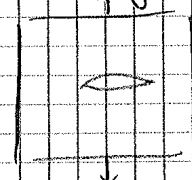
$$E = \frac{2P^2}{\pi^2 E} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{P^2}{\pi E} \log \frac{R}{E}$$

Per  $E \rightarrow 0 \rightarrow$  l'integrale diverge e l'energia tende a  $\infty$ .  
Ho divergenza all'Energia.

È un caso particolare. Ho singolarità in  $\sigma$ , in spostamenti e l'energia diverge.

Nel caso di fessure



Solo il campo tensionale va a  $\infty$ , il resto è finito e sarà possibile trovare tramite FEM un elemento ad hoc che dia la

soluzione esatta. L'energia è infatti integrabile.

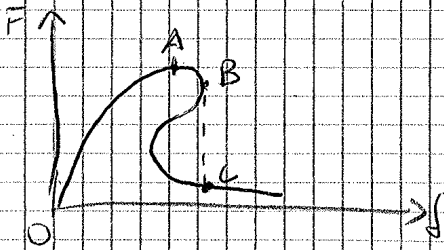
DOMANI LAIB - LUSAS - Gruppelli e 2

- { 1 esercizio in aula
- { 1 applicazione LUSAS
- { 1 relazione su 1 prova di laboratorio

GIOVEDÌ LABORATORIO: • 2 prove:
 

- { una di compressione su rocce
- { una trazione su 1 barra di alluminio
- { una flessione su 3 pinH

Possiamo anche avere altri tipi di comportamenti:



SNAP BACK

Dopo il picco, diminuisce la forza = lo spostamento.

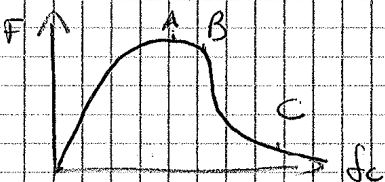
Questo si ottiene variando la lunghezza del provino (snello piuttosto che tozzo) oppure cambiando materiale.

CONTRE. FORZA: trova una  $f_{lim}$  a A

CONTRE. DEF. NE: trova curva  $f_{lim}$  a B e poi da C alla fine

Per individuare tutta la curva devo trovare una grandezza monotona, che cresce sempre per controllarla.

Nel caso di compressione si è visto che se la provino è snello, la dilatazione circonferenziale  $f_c$  cresce sempre

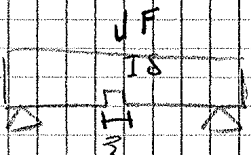


$f_c$  è monotona crescente

⇒ Poss. usarlo

Usi del sensor di misura  $f_c$

Forces la flessione su 3 punti di 1 trave con 1 taglio.



Dispositivo da legge COD

In questo caso l'apertura della fessura è crescente sempre

COD = Apertura bocca della fessura  
Crack mouth open



Nella macchina ho un software che dà un input alla macchina con un elettronica di controllo. Con freq di campionamento alta ( $\pm 1\text{MHz}$ ), legge  $f$   $f$  è quello impostato?

- SI → OK
- NO → Modifica il pistone

Questo lo fa con range altissimo (1 sec = 10'000'000 di volte)

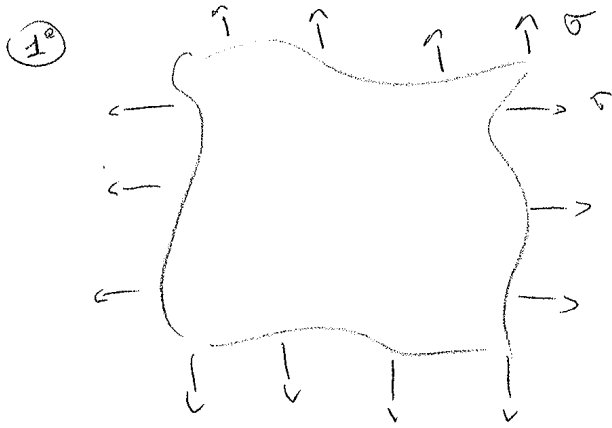
Ecco come fa la macchina

02 APRILE → Flusso TIL (Lezione 6)

03 APRILE → Prova di laboratorio (Laotologia)

Proximo di gesso soggetto a compressione con rotura.

Considero una lastre soggette a trazione uniforme ( $\sigma$  applicato nelle due direzioni  $x$  e  $y$ ).



1° Ci paremo nelle condizioni di liguus  $\rightarrow$  lastre infinite e lo studiamo in controllo di forze.

Da 0 applico  $\sigma$ .

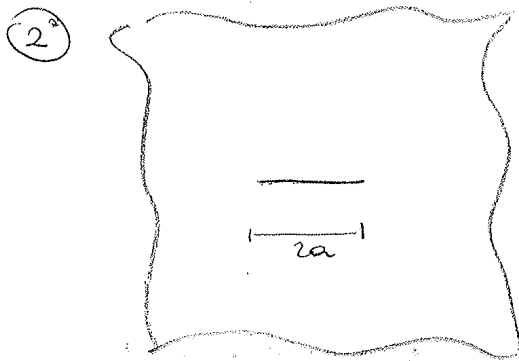
Quando applico lo stato tensionale si ha una certa energia di def. elastiche riferita alla lastre integra ( $\Phi_{INT}$ )

D'Altra parte ho applicato un lavoro ( $L$  integra).

L'energia totale di deformazione vale:

$$W = \Phi - L$$

Aggiungo alla lastre una fessura di lunghezza  $2a$



2° L'incisione della fessura comporta un aumento di elasticità della piastra, si modificano  $\sigma$  e  $E$  e dunque varia lo spostamento sul bordo. Avrà variazione sia di  $L$  che di  $\Phi$ .

- $\Phi = \Phi_{INTEGRA} + \Phi_{CRACK}$

- $L = L_{INTEGRA} + L_{CRACK}$

Studo il passaggio dal 1° al 2° caso e valuto le variazioni che si ha di  $W$  - la parte di  $\Phi_{INT}$  e  $L_{INTEGRA}$  si elidono e resta:

$$(1) \quad \underline{W_{CRACK} = \Phi_{CRACK} - L_{CRACK}}$$

$= - \Phi_{CRACK}$  (energia di def. elastiche dovuta all'introduzione del crack)

Faremo un bilancio di energia.

$G_c$  = energia spesa per far prolungare di un'unità la fessura

ENERGIA necessaria per creare la nostra fessura:

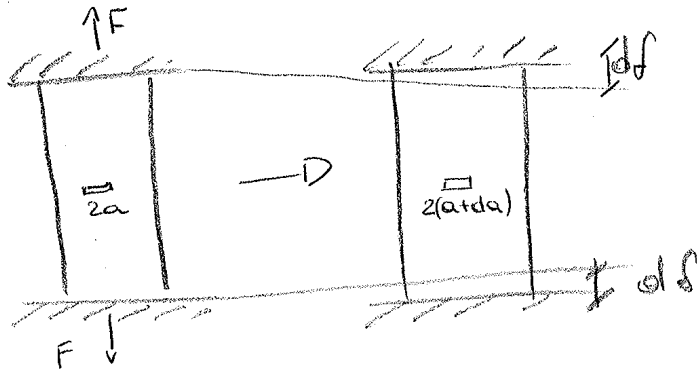
$$U = 2a G_c = 4a \gamma$$

$\gamma$  = energia necessaria per creare 1 superficie. =  $2 G_c$

È un approccio di tipo energetico - Non ha più approccio tensionale, con confronto  $\sigma$  con una  $\sigma$  ideale.

Questo approccio si può generalizzare a qualsiasi geometria, qualsiasi carico, controllo di deformazione o forze...

Considero una geometria di una piastra fissa di lunghezza delle fessure  $2a$  con una forza applicata  $F$



In controllo di carico,

Cosa succede se la fessura diventa lunga  $2(a+da)$ ?

Lo schema è simmetrico

La variazione di energia elastica di deformazione:

$$d\Phi = \frac{1}{2} F \cdot (2 \cdot df) = F df \quad \text{Teorema di Clapeyron}$$

Con l'integrale incrementale la cedevolezza di un valore  $dC$

In generale:  $\int = C \cdot F = \text{Cedevolezza} \cdot \text{Forza applicata}$

$$\Rightarrow df = dC \cdot F$$

abbiamo espresso  $\Phi$  in funzione di  $F$  e  $C$

$$d\Phi = F \cdot df = F^2 dC$$

La variazione di energia totale:

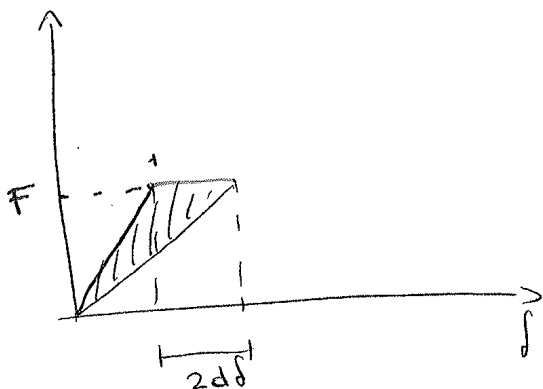
$$dW = d\Phi - dL = F \cdot df - 2F df = -F df$$

$$-F \cdot df = -d\Phi$$

Stiamo in controllo di carico -

Ecco giustificata l'espressione (1) a pag ①.

$$dW = -F df = -d\Phi = -F^2 dC$$



Rispondo in un grafico -

Ho 1 lastica con  $F$  e 1 fessura -

Al punto 1, lascio  $F$  costante e aumento  $df$  (la fessura si propaga) -

L'energia  $dW$  determinata è l'area tratteggiata = variazione di energia elastica determinata

$$\frac{1}{2} (2df) F = F \cdot df$$

1° caso

$$F \text{ cost: } -d\Phi + 2 g_c da = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{da} = 2 g_c$$

EN. DI DEF.  
cresce

2° caso

$$f \text{ cost: } d\Phi + 2 g_c da = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d\Phi}{da} = 2 g_c$$

EN. DI DEF.  
diminuisce

Cambia solo il segno, non il valore

Il meno in (2°) va poi via perché ho un meno dentro  $d\Phi$

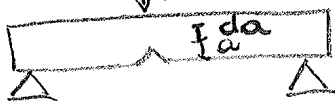
$\Rightarrow$  Comunque l'espressione alla fine è uguale

$$\frac{d\Phi}{da} = g_c$$

$\Rightarrow$  Quando  $g$  raggiunge il valore critico, la fessura propaga.

ESEMPIO

Suppongo di avere



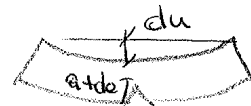
La lunghezza iniziale del crack è  $a$ ,  
l'incremento è  $da$

Studio il caso sia in controllo di carico che di defl. -

1] CONTROLLO DI FORZA

Ipotizzo di avere  $F$  e di avere una propagazione  $da$ .  
Se la fessura propaga, l'abbassamento, l'inflessione della trave cresce di  $du$ .

Il lavoro compiuto dalle forze è  $F \cdot du$



Questo lavoro è visto come 2 contributi:

- ① propagazione fessura ( $g_c da = \text{energia}$ )
- ②  $d\Phi = \text{lavoro di energia di deformazione}$

Il lavoro totale è ① + ②:

$$F du = d\Phi + g_c da$$

$$d\Phi - F du + g_c da = 0$$

È come prima.  
Provo a spiegarlo diversamente.

$$\Phi = \frac{1}{2} F u \quad \text{Clapeyron}$$

$$d\Phi = \frac{1}{2} F du$$

$$F du = \frac{1}{2} F du + g_c da = 0$$

$$\frac{1}{2} F du = g_c da$$

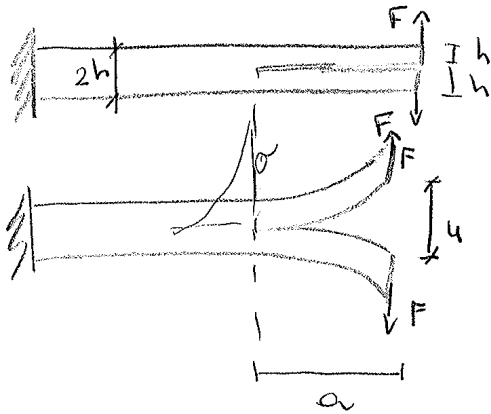
$$d\Phi = g_c da \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{da} = g_c}$$

stessa cosa



ESEMPIO D'APPLICAZIONE - DOUBLE CANTILEVER TEST BEAM



Trave con un intaglio all'estremità caricata da 2 Forze uguali e contrarie all'estremità - DCB TEST.

Quanto deve valere  $F$  affinché si abbia propagazione della fessura?

NB: in tutte le geometrie, traccio in caso di fessure che la  $\sigma \rightarrow \infty$

nell'apice di queste -

Applico il criterio di Griffith:

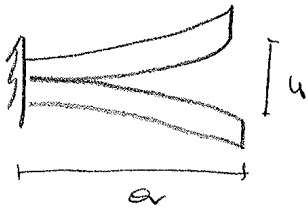
$\Phi = \frac{1}{2} Fu$  Teorema di Clapeyron

Devo trovare il legame forza - spostamento.

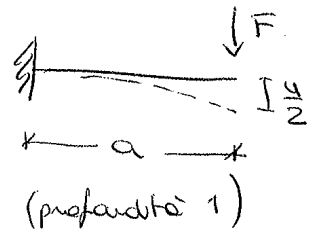
Voglio valutare  $d\Phi$  quando la fessura propagasse di un certo da -

Ipotizzo che a sx dell'intaglio abbia deformazione nulla.

Allora è come se avessi 2 lamelle incastrate:



Studio questo schema:



$\frac{4}{2} = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$

$I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$  (profondità 1)

È opportuno lavorare in condizioni di PLANE STRESS (RICORDA) POSS

$\rightarrow u = \frac{2}{3} \frac{F}{E} \frac{a^3}{I}$

$F = \frac{3}{2} u \frac{EI}{a^3}$

$\Phi = \frac{1}{2} Fu = \frac{F^2 a^3}{3EI} = \frac{3}{4} \frac{EI}{a^3} u^2$

la uso se sono in controllo di carico  
la uso se sono in controllo di spostamento

1° CASO CONTROLLO DI CARICO

$F = \text{cost}$

$g = \frac{d\Phi}{da} = \frac{F^2 a^2}{EI}$

Se  $g = g_c \Rightarrow$  la fessura propaga.

La forza critica vale:  $F_c = \sqrt{g_c \frac{EI}{a^2}} = \frac{\sqrt{g_c EI}}{a}$

A dx di  $a_0$  l'elemento è sensibile alla presenza di fessure e vale il criterio energetico. Non raggiunge  $\sigma_u$

Ad  $a_0$  posso dare un senso fisico.

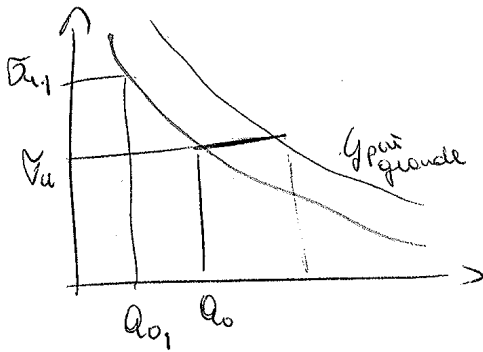
Dato un materiale, ho sempre dei difetti intrinseci (pori...)

$a_0$  è la dimensione caratteristica di questi difetti.

$\Rightarrow$  Se nell'elemento non ho difetti più grandi dei difetti intrinseci  $\Rightarrow$  raggiunge  $\sigma_u$

Altrimenti no.

$\Rightarrow$  Se realizzo materiali con difetti intrinseci sempre più piccoli, aumento  $\sigma_u$  e diminuisco  $a_0$   
 $\rightarrow$  cresce così la resistenza del materiale



Nei cls per esempio aggiungo dei materiali fw per riempire i pori.

$\sigma_u$  grande

$\rightarrow$  E più grande

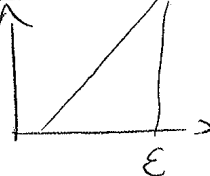
esempio fibra vetro

con def. ne esageratamente grande

e con  $\sigma_u$  grande

Questo perché è molto più piccolo di  $a_0$  e non ho difetti.

Se analizzo la lasta, viceversa  $a_0$  sarà più grande.



Come posso invece diminuire la sensibilità alla frattura di un materiale?

Se aumento  $f_c \Rightarrow$  la curva si alza, cresce l'area

A parità di  $\sigma$ , cresce  $a_0$ .

Atti: aggiungendo fibre, la  $\sigma$  vale poco ma in generale aumenta la  $\epsilon$

COLLADO

29 APRILE 2014

# LEZIONE 9

## Metodo di Williams

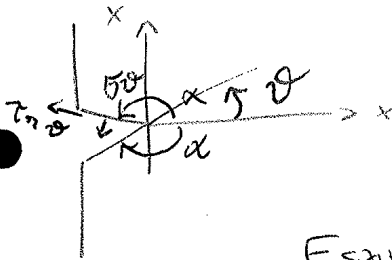
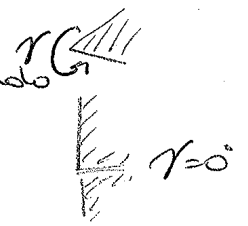
- È un metodo proposto in origine per studiare il problema del campo tensionale nell'intorno di un angolo rientrante (1952). Questo metodo trova la soluzione al variare di  $\gamma$  da  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .



• Nel caso limite  $\gamma \rightarrow 0$  si tende ad avere una fessura

Viene anche detto Metodo degli sviluppi in serie poiché la funzione di Henry è espressa in serie.

La soluzione risulta pertanto approssimata parlando di serie se ci allontaniamo dall'apice via via.



Lavoreremo in coord polari

$\theta > 0$  se autorivolo.

La funzione di Henry sarà in funzione di  $r$  e  $\theta$

Esponiamo:

$$\Phi = \sum_n r^{n+1} f_n(\theta)$$

La parte angolare è separata da quella radiale ed è molto generica ( $f_n(\theta)$ )

$\lambda_n$  sono gli autovalori di  $f_n(\theta)$  → autovettore del problema

Gli autovalori saranno definiti ponendo le c.c. nell'intorno

Gli autovettori si determinano con c.c. all'inf.

Per gli autovalori:

(Ho c.c. di tipo statico, tensionali)

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}$$

} Sono caratterizzate da  $r^{n-1}$

A questo punto devo imporre la congruenza (per la funzione di Henry!)

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Phi &= \nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = \\ &= \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \end{aligned}$$

Noovamente tutti i termini contengono  $r^{n-3}$

→ DEq. me 20.66

tenendo conto di relazioni trigonometriche, si ottiene:

$$\begin{cases} -\lambda_m \sin 2\alpha = \sin 2\lambda_m \alpha \\ +\lambda_m \sin 2\alpha = \sin 2\lambda_m \alpha \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{\sin 2\lambda_m \alpha}{2\lambda_m \alpha} = \mp \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right.$$

→ Trovo la soluzione dove si intersecano queste due funzioni

Quale range di  $\lambda_m$  ci interessa? (Posso avere più punti)

Ci interessano le soluzioni singolari per la tensione (diverge)

Che valore deve assumere  $\lambda$  per avere singolarità tensionale?

Per  $\lambda < 1$  ho almeno un termine che diverge

Se  $\lambda > 1$  non ho singolarità tensionale

Per  $\lambda = 1$ ,  $r^0 \rightarrow$  ho 1 soluzione costante.

Per quanto riguarda l'energia di def. me elastica:

$$\int \frac{\sigma E dA}{E} \rightarrow r dr d\theta$$

$$\propto \int r (\lambda_m - 1)^2 r dr = \pi^{2\lambda_m - 1} \cdot r dr = \pi^{2\lambda_m - 1}$$

⇒ l'integrale diverge se  $(2\lambda_m - 1) \leq -1$

$|\lambda_m \leq 0| \rightarrow$  l'integrale dell'energia diverge

⇒ Il campo che ci interessa è

$$0 < \lambda_m < 1$$

ho singolarità tensionale e l'energia è maggiore di zero.

Il modo più semplice di operare è cercare la soluzione grafica del problema.

Guardando le funzioni prese solo nella forma  $\frac{\sin x}{x}$  con  $x = 2\lambda_m \alpha$  e  $x = 2\alpha$ . Cambia la  $x$ .

La funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è oscillante fin all'infinito con ampiezza che si riduce fin a diventare zero all'infinito.





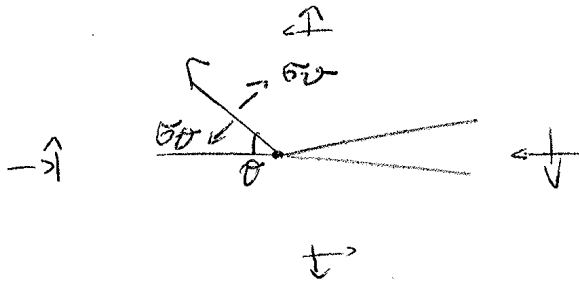
## MIXED MODE FRACTURE CRITERIA

Finché siamo nel modo I, la fessura propaga se  $k_I = K_{IC}$

Nel caso di modo misto, dobbiamo capire quando la fessura propaga e in che direzione.

Ci sono diversi criteri. Vediamo quello della MASSIMA TENSIONE CIRCONFERENZIALE.

Data una fessura con uno stato tensionale generico, siamo in grado di determinare lo stato tensionale e qual'è la direzione ortogonale alla quale abbiamo  $\sigma_{\theta \max}$



→ È logico pensare che in questa direzione avrà propagazione di fessura

Westergaard: avevamo le componenti  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  espresse in  $r, \theta$ .

Le avevamo trovate per il modo I, analogamente si trovano per il modo II.

Bisogna poi trasformarle in  $\sigma_{\theta}, \sigma_r, \tau_{r\theta}$ .

Oppure possiamo usare direttamente le soluzioni trovate.

Si ha:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \dots$$

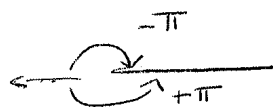
Ho sia  $k_I$  che  $k_{II}$ .

Per trovare  $\sigma_{\theta \max}$ , ne faccio la derivata  $\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta}$ .

Trao da l'espressione  $\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta}$  è proporzionale alla  $\tau$ .  
( $\tau=0$  nelle direzioni principali)

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

•  $\theta = \pm \pi$



Non ha senso.  
In realtà è la direzione del crack

• Annullo ciò che ho dentro le parentesi quadre.

$$k_I \sin \theta + k_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0$$



CORSA LAIB 1D

30. MARZO 2016  
APRILE

# Mechanica della frattura elastica lineare SLIDE refer

• Problemi di intensificazione degli sforzi

## ELEMENTI FINITI

In genere sono stati definiti in sistemi di coord naturali che vanno da -1 a +1.

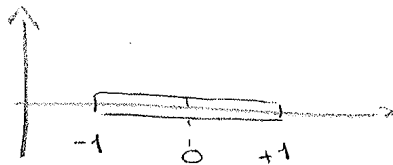
### • ISOPARAMETRICI

All'interno di un elemento finito il campo di spostamento è definito dalle funzioni di forma - In questi elementi anche la geometria è definita dalle stesse funzioni di forma

⇒ A seconda che si abbiano funzioni di forma lineari o quadratiche o ... si può distorcere l'elemento con lati rettilinei o curvi o ...

### • SUBPARAMETRICI

⇒ Se posso distorcere l'elemento con lati rettilinei anche se ho funz di forma quadratiche per esempio



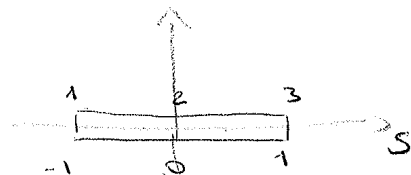
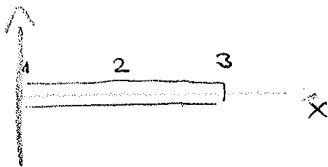
Particolarità:  $\sum_{i=1}^3 N_i = 1$

slide 6 funzioni di forma.

N.B: In qualsiasi punto su un'asta  $N_1 + N_2 + N_3 = 1$

Questo permette di scoprire i modi RIGIDI dell'elemento

Negli anni 70 si è visto se poteva modificarsi l'elemento finito in modo da poter descrivere la singolarità tensionale nell'intorno di un punto.



Voglio passare dal sistema locale al naturale (inverse) in modo da far variare la coordinata del punto 2:  $x_2 = \omega l$

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

$$\frac{x}{l} = \omega + \frac{s}{2} + \frac{1-2\omega}{2} s^2$$

legeme  
 $\begin{cases} x = \text{coord nel sist locale} \\ s = \text{ " " " naturale} \end{cases}$

Studieremo la propagazione della fessura su una trave con taglio.

Nel 1° software CASCA → defusco geometria e mesh  
 " 2° " FRANK 2D → defusco vincoli, materiali ...  
 e ricavo la soluzione al problema

$$l = 2m$$

$$h = 40 \text{ cm}$$

ovunque s.r. nel baricentro

Nel campo delle mecc delle fratture, se ho una fessura piccolissima o nulla ⇒ la resistenza è 0  
 Posso applicare un carico  $\sigma$  (Non considerando la resistenza del materiale)

Creata la crack

Con questo programma posso determinare la funzione  $K_I$   
 Ci sono diversi metodi: → attraverso l'energia  
 → " il campo di spostamenti

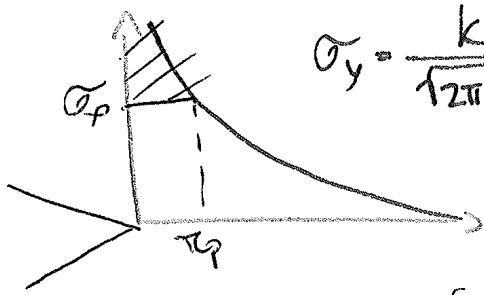
$K_I$  si basa sullo spostamento di 4 nodi vicini all'apice -  
 Gli spostamenti li dà il programma, ribalto l'espressione slide 19 e trovo  $K_I$  -

Questo vale per qualsiasi problema

$K_I$  dipende anche dalla profondità della fessura -  
 ⇒ Applico P, risolvo e trovo gli spost, trovo  $K_I$   
 Per una seconda profondità della fessura, applico P  
 trovo un'altra  $K_I$  ...  
 Per ogni step trovo  $K_I$  - Avvo'  $K_I$  per punti, per  
 profondità della fessura - interpolazione per trovare  $K_I$   
 corretto - OK.

GIÒ 1° VIAGGIO - 0° LEZIONE

In qualsiasi materiale si sviluppa la ZONA PLASTICA.  
 Siamo interessati a valutare l'estensione di tale zona.



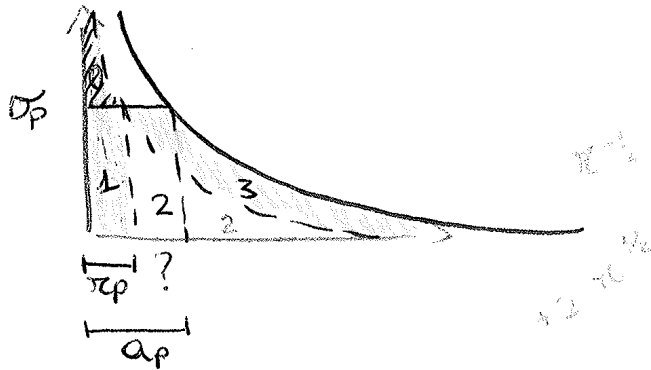
$$\sigma_y = \frac{k_{Ic}}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma_p$$

$$\text{trovare } r_p = \frac{k_{Ic}^2}{2\pi \sigma_p^2} = \frac{\sigma_y^2 a}{2\sigma_p^2}$$

Eukens in gioco la tenacità e la resistenza del materiale - ( $k_I = \sigma \sqrt{\pi a}$ )

Così facendo sto buttando via un pezzo.  
 Non verrà più soddisfatto l'equilibrio.

Introducendo il cut off per soddisfare comunque l'equilibrio  
 devo traslare la curva:



Devo capire quanto vale  $a_p$ :

$$\int_0^{r_p} \sigma_y dz = \int_0^{r_p} \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{k_I}{2\pi} \left[ \sqrt{2\pi r} \right]_0^{r_p} = \frac{k_I}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{k_I}{\sigma_p} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_p \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{r_p} = \sigma \sqrt{2a} \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2} \sigma_p} = 2 \sigma_p r_p$$

Tutta l'area violetta vale dunque  $2 \sigma_p r_p$ .

L'area del rettangolo è  $\sigma_p \cdot r_p = 1$

⇒ L'area 0 vale  $\sigma_p r_p =$  all'area del rettangolo

Se traslassi di  $? = r_p$  allora otterrei:

$$1 + 2 = 2 + 3 \rightarrow \boxed{1 = 3}$$

Ma  $1 = 0 \Rightarrow$  Anche  $\boxed{3 = 0}$

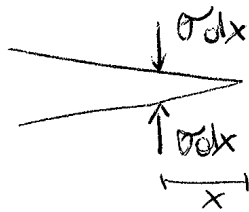
→  $a_p = 2 r_p$  per l'equilibrio

Questo è l'approccio di IRWIN



Per cui la fessura è grande  $\Rightarrow$  è rispettata la condizione del manuale per  $k_I = \sqrt{\frac{2}{\pi b}} F$

● Nel nostro caso abbiamo un valore  $\sigma$  di compressione:



$$k_I = - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sigma_p dx$$

$$k_I = k_I(\text{est}) + k_I(\sigma_p) = k_I(\text{est}) - \int_0^{a_p} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sigma_p dx =$$

$$= k_I \text{ ext} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2 \sqrt{x} \Big|_0^{a_p} \sigma_p = k_I \text{ ext} - \sigma_p \sqrt{\frac{8a_p}{\pi}}$$

elimino l'intensif. degli spri.

$$\Rightarrow a_p = \frac{\pi}{8} \frac{k_I^2}{\sigma_p^2}$$

DOUGDALE:  $a_p = \frac{\pi}{8} \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_p^2}$

Confrontando le soluzioni date dai due approcci:

$$\frac{DUG}{IRW} = \frac{\pi}{8} \cong 1,23 \rightarrow 23\% \text{ di differenza}$$

Dati 2 approcci diversi, ho ottenuto risultati simili.

● At:  $a_p$  NON dipende dalla geometria ma solo dal materiale.

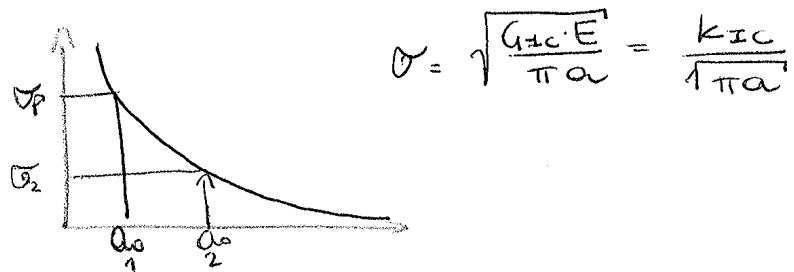
Non possiamo usare la soluzione nella frattura elastica lineare solo all'interno del range  $a_p - \frac{3}{20} a$ :

oltre altri errori troppo grandi e il limite  $\frac{3}{20} a$  dipende dalla geometria della fessura.

● Più la fessura è grande più applicando la meccanica della frattura lineare mi dà soluzione corretta.

● Più è piccola, più prevale il raggiungimento delle plasticizzazione e non va più bene la soluzione delle meccanica della frattura elastica lineare.

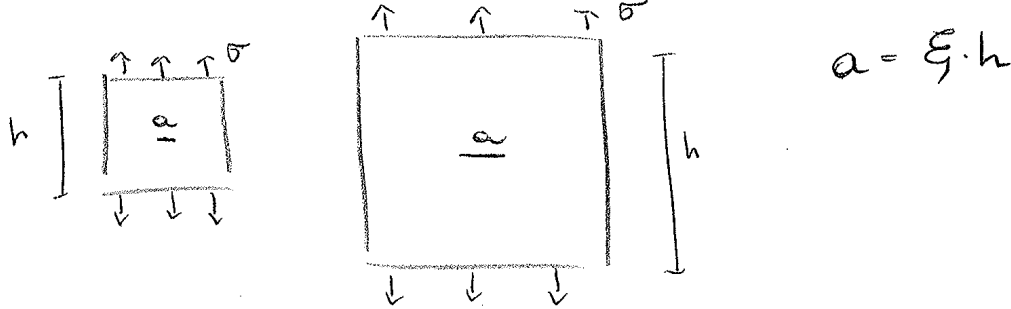
Secondo Griffith:



$$\sigma = \sqrt{\frac{G_{IIC} \cdot E}{\pi a}} = \frac{K_{IIC}}{\sqrt{\pi a}}$$

Aggiungendo il cut off  $\rightarrow$  se  $a < a_0 \Rightarrow$  la fessura non propaga  
 se  $a > a_0 \Rightarrow$  " " propaga

Ipotizzo di avere un provino riscalato:



$$a = \xi \cdot h$$

$a > a_0$  per propagazione fessura  
 $\xi \cdot h \geq a_0$

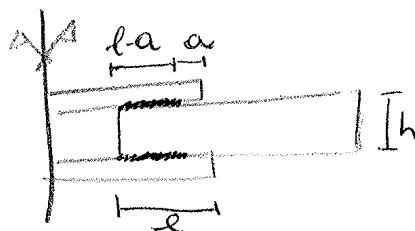
$\rightarrow$  Per i 2 provini cambia l' $a_0$  e dunque cambia la modalità di collasso.  
 Nel caso di dx uno delle  $\sigma$  più piccole

1° ESEMPIO  $\rightarrow$  Esercizio

Riprendo il problema del DOUBLE LAMIN JOINT

$\rightarrow$  Giunto tra due piastre

Ho un elemento collegato a 2 altri elementi



In  $(l-a)$  ho giunzione  
 in  $a$  ho libertà

Avevamo valutato la situazione STABILE, INSTABILE e METASTABILE

CASO METASTABILE

La forza risulta indipendente dalla fessura  $a$

LEFM  $F_{cr} = 2t \sqrt{E G_{IIC} 2h} = 2t K_{IIC} \sqrt{2h}$

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{2h} = 2\sqrt{2} \frac{K_{IIC}}{t}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} = 2\sqrt{2} \frac{K_{IIC}}{t_0 \sqrt{h}} = 2\sqrt{2} \cdot \textcircled{5}$$

004

In generale col crescere di  $h$  (o meglio  $s$ ) ho il passaggio da collasso fragile a duttile

•  $s$  cresce  $\rightarrow$  collasso duttile

Vedo altri due esempi, slide:

vedo nuovamente 2 tipi di collasso: piastra con intaglio

- ① propag. fessura
- ② resistenza materiale

① LEFM

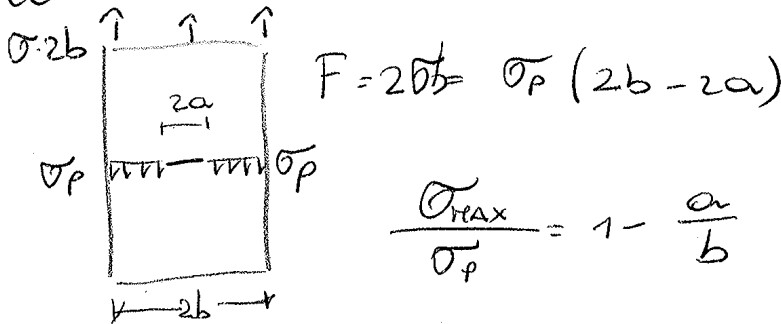
$$K_I = \sigma \sqrt{2b} f\left(\frac{a}{b}\right)$$

PROPAG. INSTABILE

$$\sigma = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2b}} \frac{1}{f\left(\frac{a}{b}\right)}$$

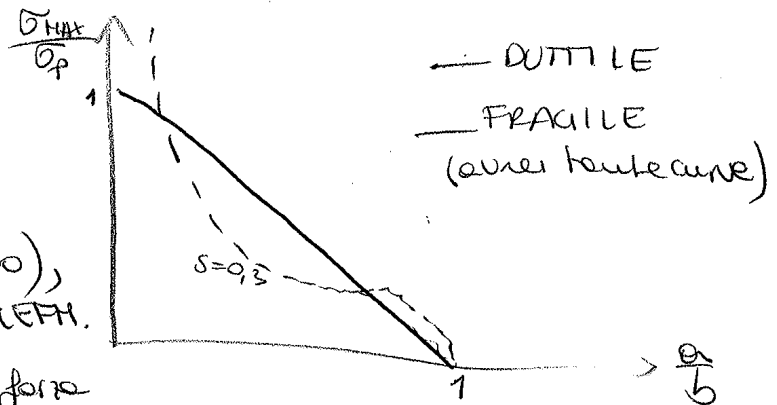
$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_p} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2b} \cdot \sigma_p} \frac{1}{f\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{s}{f\left(\frac{a}{b}\right)}$$

② DUTTILE



Trovo di nuovo 2 espressioni

Riporto su un grafico



Le curve nel caso LEFM

- partono da 1
- se non ho fessura ( $\frac{a}{b} \rightarrow 0$ ), non ha senso parlare di LEFM.
- vanno a zero
- se la fessura è estesa  $\Rightarrow$  la forza applicabile è zero.

Ho 3 casi

a piccolo, non propaga la fessura

a cresce, propaga la fessura.

a cresce tanto, prevale di nuovo la rottura duttile

Se la lastre è infinita, non può avere l'ultimo tratto.

I commentati sono gli stessi di prima, potrei far vedere la sola (2 curve --- curve prima)