



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1270

ANNO: 2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Costantino M.

MATERIA: Instabilità Statica e Dinamica delle Strutture,  
Prof.Manuello\_Carpinteri

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## INSTABILITÀ STATICA E DINAMICA DELLE STRUTTURE

### Programma del corso (2013-2014)

**Docenti:** Titolare: Dr. Amedeo Manuello  
 Coadiutori: Prof. Giuseppe Lacidogna, Dr. Mauro Corrado, Ing. Gianfranco Piana  
 Ing. Federico Accornero, Ing. Sandro Cammarano.

	<b>1<sup>a</sup> Settimana</b>			
<u>LE#1</u>	(1)	01/10/13 martedì	Aula 9S 10-13	Manuello Introduzione al Corso e aspetti storici ✓
	(2)	02/10/13 mercoledì	Aula 7D 8.30-10	Lacidogna Breve storia dei ponti e delle torri sino alla Rivoluzione Industriale ✓
	<b>2<sup>a</sup> Settimana</b>			
<u>LE#2</u>	(3)	8/10/13 martedì	Aula 9S 10-13	Manuello Instabilità dell'equilibrio elastico: Sistemi discreti ✓
	(4)	9/10/13 mercoledì	LAIB 8.30-10	Manuello Calcolo di casi elementari ✓
	<b>3<sup>a</sup> Settimana</b>			
<u>LE#3</u>	(5)	15/10/13 martedì	Aula 9S 10-13	Manuello Travi rettilinee e telai ✓
	(6)	16/10/13 mercoledì	Aula 7D 8.30-10	Manuello Calcolo di un telaio piano a due campate diseguali e dodici piani ✓
	<b>4<sup>a</sup> Settimana</b>			
<u>LE#4</u>	(7)	22/10/13 martedì	Aula 9S 10-13	Manuello Lastre soggette a compressione; Instabilità flessor-torsionale ✓
	(8)	23/10/13 mercoledì	LAIB 8.30-10	Manuello Calcolo di una lastra soggetta a compressione ✓
	<b>5<sup>a</sup> Settimana</b>			
<u>LE#5</u>	(9)	29/10/13 martedì	Aula 9S 10-13	Manuello Anelli e gusci cilindrici soggetti alla pressione esterna; Archi e gusci ribassati soggetti alla forza peso ✓
	(10)	30/10/13 mercoledì	LAIB 8.30-10	Manuello Calcolo di un guscio e fenomeno dello snap-through ✓
	<b>6<sup>a</sup> Settimana</b>			
<u>LE#6</u>	(11)	05/11/13 martedì	Aula 9S 10-13	Manuello Interazione tra svergolamento e risonanza; Fenomeni di instabilità dinamica nei ponti (flutter) ✓
	(12)	06/11/13 mercoledì	LAIB 8.30-10	Piana Esempi di calcolo ✓
	<b>7<sup>a</sup> Settimana</b>			
	(13)	12/11/13 martedì	Aula 9S 10-13	Accornero Ponti ad arco o in muratura: Aspetti generali e fondamenti teorici ✓

# INSTABILITÀ STATICA e DINAMICA delle STRUTTURE

01. OTT. 13

prof. AMEDEO MANUELLO mail: amedeo.manuellobertetto@polito.it tel: 4873

coadiutori: prof. Landogua, dr. Corrado, lug. Piana, lug. Accornero, lug. Cammarano

LEZIONI + ESERCITAZIONI ai LAIB

Vedi programma

TESTI - Computori SdC I e II Pitagora Ed.  
in inglese (....) vedi BILLINGTON

L'esame si registra insieme a Calcolo numerico del prof. Carbone (media)

Esame orale - domande 1° dan. su argomenti teorici  
2°/3° dan. su argomenti specifici - es: edifici alti, ponti

Si può fare una tesina su 1 argomento, più o meno considerata

## LEZIONE 1

### INTRODUZIONE AL CORSO e ASPETTI STORICI

• PONTI IN GHISA e ACCIAIO - ad ARCO

① Iron Bridge - 1779 in Inghilterra (in prossimità della Rivoluzione Industriale)

Ha 3 progettisti: Darby III, Whickuson

Perché si è deciso di costruire in ferro/ghisa? Whickuson era un grande produttore di ferro, chiamato il figlio di un amico, Darby III, anche lui produttore di ferro.

Ha una campata lunga 30 m - La particolarità del ponte è che ha 5 ordini, 5 arcate e non presenta nessun bullone e nessuna saldatura. Hanno incastrato i pezzi, è un capolavoro di ghisa. Tutto il ponte è circa 380 tonnellate e i pezzi più grandi sono 5 tonnellate ⇒ è difficile da costruire.

② Craigellachie Bridge → Risponde al ponte ① Thomas Telford con questo secondo ponte sempre ad arco ma di luce 66 m. È moderno, sembra ribassato. Costo non = ghisa. 1814

Alt: Si fanno i ponti in acciaio ma per poggarsi e terra si usa una soletta in muratura.

③ Royal Albert Bridge → Dopo 50 anni circa, la luce è di 160 m. È il ponte più lungo per sempre. Brunel. Per la prima volta si usano cavi, catena di sostegno. Qui si comincia a bullonare e saldare.

Perché tutti i ponti visti sono ad arco? Perché la ghisa non resiste ancora a trazione ma lavora come la pietra, a compressione.

- ⑬ 1939 - Aumouau no record, è bello
- ⑭ Verrazzano Narrows Bridge, 1298 m (il più lungo fino al 1981)
- ⑮ Ponte del 25 Aprile
- ⑯ Severn Bridge, 1966, 988 m, impalcato in ca
- ⑰ Record → Humber Bridge, UK, 1981 - 1410 m  
il più lungo fino al 1998
- ⑱ China, Tsing Ma Bridge, 1997 → 1377 m ponte ibrido, sia ferroviario che veicolare
- ⑲ Great Belt Bridge, Denmark → Record, 1626 m Struttura ibrida
- ⑳ Akashi Kaikyo Bridge, Japan, 1991 m. I giapponesi collaborano, non è il progettista ma delle cooperative. There a cassone, dentro ci passa il treno. il più lungo finora.

Dopo gli anni 70 passa la moda di voler costruire strutture "belle" nel senso di leggere - Si fanno strutture massicce, voglio flessibilità.

- - - Altri ponti immagini - - -

### • PONTI IN CALCESTRUZZO ARMATO

- ① 1899 Vienne River Bridge, Francia - Hennebique → 50m  
Nasce il cemento
  - ② Stauffacher Bridge, Svizzera - Robert Maillart ≈ 40m  
Si parte subito con nomi importanti per il cemento armato
  - ③ Zurich Bridge, Svizzera 1901, Cemento Maillart ≈ 40m
  - ④ Tavevase Bridge, Svizzera 1905, Maillart → 51m
- In questo caso i progettisti dei ponti in c.a. sono già inventori del materiale e non imprenditori come per l'acciaio. Dal ponte nasce la PRECOMPRES.
- ⑤ Salginatobel Bridge, 1930 Maillart → 90m  
lusevse elementi verticali
  - ⑥ Plongestel Bridge, Freyssinet → 180m
  - ⑦ Yverche Bridge, Freyssinet → nasce la precompressione
  - ⑧ Lauzency Bridge, 1946
  - ⑨ Reichenau Bridge, 100m
  - ⑩ Gantzer Bridge, Mann

PROF. LACIDOGNA

02. OTT. 13

## Lo SVILUPPO STORICO ed ESTETICO dei PONTI fino alla RIVOLUZIONE INDUSTRIALE

Il 1° ponte descritto razionalmente dalla storia è il ponte sull'Eufrate. Era realizzato da travi in legno poggiate su pilastri. La caratteristica era che veniva montato la mattina e smontato la sera per evitare degli attacchi di maledizionati a Babilonia. Il ponte è descritto da Erodoto (la regina Nitocris volle proteggere Babilonia - leggi storia). È possibile vedere il ponte nella mappa dell'antica Babilonia. È la città dei grandi pensati, ponte non menziona mai l'acqua. I pilastri del ponte si legavano tramite barre di ferro.

Il 2° ponte antico è il Ponte di Cesare sul Reno, descritto nel De Bello Gallico. Il Reno era inattraversabile poiché vorticoso, esonda facilmente. Cesare realizzò il ponte per attraversare il Reno. Aveva 3 legni di 6000 uomini ciascuna, di cui 3000 usati come combattenti. Piazzarono 2 macchine battipalo sulla riva per incidere i pali nella melma. Pare che solo 2 legni tornassero indietro, la 3° era il compito di andare avanti per scoprire ciò che c'era oltre la Germania. Cesare era anche Pontifex Maximus → lugugere. L'invenzione dei romani non fu l'arco (già c'era) ma il loro principale sforzo fu l'ottimizzazione di questo. Capirono il funzionamento degli archi, la geometria - i calcoli molto probabilmente li hanno fatti ma sono stati persi.

Ponte = strutture che attraversa un fiume

Via dritto = strutture che attraversa un valico

La tecnica usata per la fondazione era la costruzione di palancolate, getto in malta e zattera.

Riconoscere: arco a tutto sesto, rapporto 1 a  $\frac{1}{3}$  di luce

Il 3° ponte è in Francia, Pont du Gard. È a tre piani e veniva utilizzato come acquedotto.

Finita l'epoca Romana (nel 500 dC circa) si perdevano queste tecniche di costruzione. Si raggiunge un unione di discendente imperiale sotto Federico II. Questo è l'abito della cultura italiana. Capisce che gli unici che raccoglievano cultura erano i monaci, si rivolge dunque a loro per costruire un ponte. Si crea un'associazione: "Fratelli dei Ponti" → si diffonde la tecnica di costruzione dei ponti fino in Francia e in Inghilterra.

→ Londra, Old London Bridge per attraversare il Tamigi. di questo ponte non resta nulla, essendo in legno si bruciò.

→ È simile al ponte vecchio di Firenze. È il primo ponte di luce 6 volte la larghezza di un pilastro. Questa luce fu realizzata perché l'acqua potessero passare senza troppa difficoltà.

→ Maiden Budge: Sotto la fonda di un pilastro, hanno trovato legno di quercia, questo è testimonianza che i monaci di prima hanno contribuito.

→ 1600, Pont Neuf, Parigi. Ci sono 2 ponti in muratura a Parigi

important  
→ Pont Royal, 1639

## LEZIONE 2

08.07.13

## INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO: SISTEMI DISCRETI

Si abbandona l'ipotesi che ci ha accompagnato fin qui dei piccoli spostamenti che ci consente di applicare le eq. in cardinali della statica e consideriamo struttura indeformata e deformata distintamente. Ci troviamo tra statica e dinamica.

Studieremo sistemi meccanici da descrivere tramite una o più coordinate generalizzate del nostro sistema

es: 2 aste collegate da cerniera  
 $\Rightarrow$  coord. gen. = rotazione

Ci troviamo in 3 nuove condizioni: stabilità, indifferenza o instabilità.

Il carico determina la situazione in cui ci troviamo.

Schema di come opereremo:

## SISTEMI DISCRETI

Se la coordinate generalizzata è 1  
 Chiedo aiuto all'energia

1 coord. GEN

$\rightarrow$  ENERGIA POTENZIALE TOTALE del SISTEMA  
 $\rightarrow (W') = 0$

Studieremo le condizioni di stazionarietà  $\rightarrow$  derivata prima dell'energia  $= 0$

$\rightarrow$  CARICO CRITICO

Da qui troveremo il carico critico o il moltiplicatore del carico critico

La stessa procedura si applica se le coord. generalizzate sono più di una. Si complica la scrittura dell'energia e si ottiene un sistema agli autovalori.

Il carico critico coincide con il 1° autovalore del sistema e le deformazioni saranno descritte dagli autovettori.

L'instabilità nell'ing. civile interviene in strutture snelle, alberi, ... instabilità locale e infine instabilità globale.

Un insieme di instabilità locali possono portare al crollo ma se ho un sistema a più elementi discreti, l'instabilità globale può intervenire prima di qualsiasi instabilità locale.

L'instabilità locale si danno più tranquillamente rispetto alla globale.

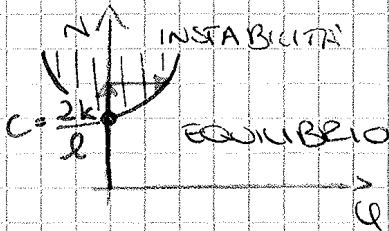
Bisogna soprattutto trovare il moltiplicatore dei carichi.

(Sovraccarico = sussumo di instabilità elastico)

Voglio trovare il momento in cui l'arco collassa, "scatta". Sto cercando i condizioni sia di disequilibrio che equilibrio.

Ho 1 bacchetta e la ruota, questa torce alla sua posizione. Ma ho 1 momento in cui non faccio più fatica e la bacchetta resta in equilibrio sotto forma di arco senza tornare nella posizione di retta. Questa condizione è di INDIFFERENZA, di EQUILIBRIO e la trovo imponendo  $W' = 0 \rightarrow$  punto di massimo o minimo.

$$W'(\varphi) = 4k\varphi - 2Nl \sin\varphi = 0 \rightarrow N = \frac{2k\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{CARICO.}$$



C'è 1 condizione in cui la trave presenta un'inerzia. Io do il carico ma la trave non si muove,  $\varphi$  è piccolo.

Ad 1 certo punto incontro 1 stazione. PUNTO C

$$\rightarrow C = \text{Punto di non ritorno} \quad C = \frac{2k}{l}$$

$\rightarrow$  da C in poi vedo un incremento di  $\varphi$  ottenuto incrementando N

Immagine di caricare molto velocemente nella realtà, può succedere che si prosegue nel ramo fondamentale ma di colpo la struttura cerca l'equilibrio e si porta nella sua posizione d'equilibrio  $\rightarrow$  È molto pericoloso

Posso dividere il semispazio  $(\varphi, N)$  in una parte d'EQUILIBRIO e una di INSTABILITA'

Per studiare la concavità, farsi sistemi matematici  $\rightarrow$  derivata seconda e vedrò se positiva o negativa.

$$W''(\varphi) = 4k > 0 \rightarrow \text{INCRODENTE perché positivo}$$

È possibile trovare la configurazione di equilibrio posso procedere anche in un altro modo:

Uguaglio il momento stabilizzante e quello instabilizzante: si ottiene per N il risultato precedente!

Procediamo cambiando il tipo di vincolo, uso 1 vincolo cederde, un carrello con una molla

La def me sarà duale e quella dell'altro caso.

Scrivo l'energia potenziale

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} k (l \sin\varphi)^2 - 2Nl (1 - \cos\varphi)$$

1 uguale e prima - lav. esterno

Trovo le condizioni d'equilibrio:  $W'(\varphi) = 0 = k l^2 \sin\varphi \cos\varphi - 2Nl \sin\varphi$

$$\text{Ottingo: } N = \frac{k l}{2} \cos\varphi$$

$$N = \frac{k l}{2} \cos\varphi \quad \checkmark$$



Per studiare il segno delle derivate successive, considero gli autovettori:

$$x_1 = E + y_1, \quad x_2 = E + y_2$$

$E =$  spost. lo finale fatto

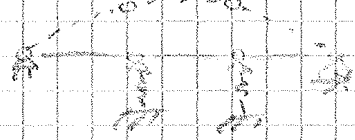
Per  $E \rightarrow 0$ , l'espressione tende al 1° autovettore

Facendo le derivate seconde  $\frac{\partial W}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial x_1 \partial y}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial x_2}$ , trovo l'Hessiano e scrivo il  $\det [H]$ . Otteengo potenze tutte pari  $\Rightarrow$  Sarà  $\det [H] > 0$  e il comportamento di tipo RIGIDO incrudente

Altro metodo è quello di considerare la cinematica e scrivere l'eq. bnd alla rotazione intorno alle 2 cerniere.

Posso considerare un secondo esempio in cui i 2 appoggi centrali sono cedevoli elasticamente

Scrivo l'energia potenziale totale in funzione di  $x_1$  e  $x_2$



Come prima farò le derivate prime  $\frac{\partial W}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial W}{\partial x_2}$  e trovo un'equazione di secondo grado. Sulle  $x$  prime ma non uguali. Trovo 2 soluzioni:

$$N_1 = \frac{1}{3} kE$$

$$N_2 = kE$$

Come prima trovo i due autovettori corrispondenti  $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$

Questi risultano essere opposti rispetto ai precedenti e ci danno dunque delle deformate opposte.

Analizzo il ramo post-critico per vedere se il comportamento è rigido softening o rigido incrudente. Faccio le derivate successive e ottengo  $\det [H] < 0 \Rightarrow$  Comp. RIGIDO SOFTENING.

Cambiando la tipologia di vincolo passo da un comportamento rigido softening a incrudente.

in generale:  $([k] - \lambda [kg]) \cdot \{S\} = \{0\}$

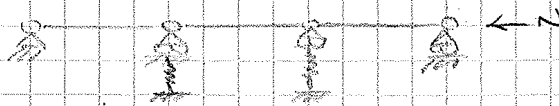
$[k]$  = Matrice di rigidità elastica  
 $[kg]$  = " " " " geometrica: contiene info legate alla geometria della struttura (es: lunghezza tratti)  
 $\{S\}$  = spostamenti nodali

in  $[kg]$  risiede la forma della struttura  $\rightarrow$  è bella!

$\lambda$  è il moltiplicatore dei carichi, deve essere  $\lambda > 1$  per non avere instabilità globale

il più piccolo  $\lambda$  è il valore CRITICO del moltiplicatore

## 2° ESEMPIO



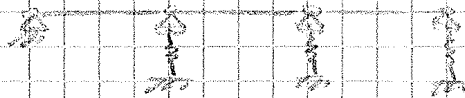
2 gdl

autovalori  $\rightarrow \frac{ke}{3}$   
 $\rightarrow ke$

Procedere come prima  
 At: n° of Eigenvalues = 2

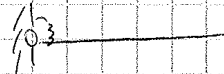
## 3° ESEMPIO

Avrò 3 autovalori e 3 autovettori: scelgo  $k=0.1$   
 $l=1$



Procedere come prima  
 At: n° of Eigenvalues = 3

## 4° ESEMPIO



1 gdl

$k=1$   
 $l=1$

Procedere come prima, 1 gdl  $\Rightarrow$  1 autovalore

Attributes, Line, Mesh

thin beam  
 2 dimensional  
 Quadratic  
 N° of division = 4

Attributes, Geometric Line  
 2D thin Beam  
 $A = 1$

1.106  
 0

Attributes, Material

1  
 0.3  
 1

Attributes, Support

tutto fixed, tranne rot.  $\Sigma = \text{pin} = 1$   
 TRONCA ROTAZIONALE

Attributes, Loading, -1 in x

$\rightarrow$  Si fa partire!

Vedi esempi su dispensa caricata sul portale!

$$2W = \int_0^l (EI v'''' \delta v'' - N v' \delta v' - q \delta v) dz = 0 \quad \delta v = \text{PERTURBAZIONE}$$

Devo risolvere ora l'integrale tra 0 e l. Faccio un'integrazione per parti e ottengo 3 contributi:

$$- [(EI v'''' + N v') \delta v]_0^l + [EI v'' \delta v']_0^l + \int_0^l [EI v'''' + N v'' - q] \delta v dz = 0$$

Disambiguo adesso le condizioni al contorno per vedere quale contributo potrebbe essere zero.  
Per ogni  $\delta v$  risultano soddisfatte:

- ①  $EI v'''' + N v'' - q = 0$  17.47.a
- ②  $(EI v'' + N v') \delta v = 0$  per  $z=0, l$  17.47.b
- ③  $(EI v'') \delta v' = 0$  per  $z=0, l$  17.47.c

Condizioni al contorno.

② Ho 2 condizioni in 0 e l perché  $\delta v = 0$ , non posso spostarmi verticalmente

③  $v'' = 0$  perché ho momento nullo in  $z=0$  e  $z=l$ .

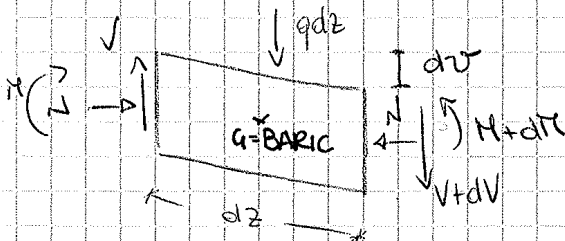
① La trave si inflette  $\Rightarrow \delta v \neq 0$  (TERZO PEZZO Eq.me)  
Sarà nullo il 1° contributo  $EI v'''' + N v'' - q = 0$

Per la trave appoggiata:  $\begin{cases} v(0) = v(l) = 0 & \text{SPOST. NULO} \\ v''(0) = v''(l) = 0 & \text{MOM. NULO} \end{cases}$

①  $\rightarrow$  Eq.me della linea elastica. Posso anche ottenerla se considero l'equilibrio di un corso elementare

$$N = \text{cost} \Rightarrow dN = 0$$

$$\frac{dV}{dz} = -q$$



Equilibrio alle rotazioni:

$$-M + M + dM + 2N \frac{dz}{2} + V \frac{dz}{2} + (V + qV) \frac{dz}{2} = 0$$

TRASCURTO

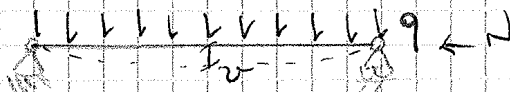
Otengo:  $V = \frac{dM}{dz} - N \frac{dz}{dz}$

Devo e sostituisco  $\frac{dV}{dz} = -q$ :

$$\frac{d^2M}{dz^2} - N \frac{d^2v}{dz^2} + q = 0$$

$$\leadsto EI v'''' + N v'' - q = 0 \quad \text{RELAZIONE PRECEDENTE}$$

Considero una convenzione semplificativa: carico distribuito costante  $q(z) = q$



La soluzione dell'integrale porta ad avere:

$$v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + (Cz + D) + \frac{qz^2}{2N}$$

con  $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$

Dalla seconda ottengo:  $\lambda_m = \frac{M\pi}{l}$  Successione AUTONALORI  
 $M = M'$  naturale

Otteniamo il valore del carico critico:  $N_{cr} = M\pi^2 \frac{EI}{l^2}$

$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$  è il carico critico che porta all'INSTABILITÀ

M è quello formale ci restituisce anche il  $m^o$  delle semionde presenti nelle deformate.

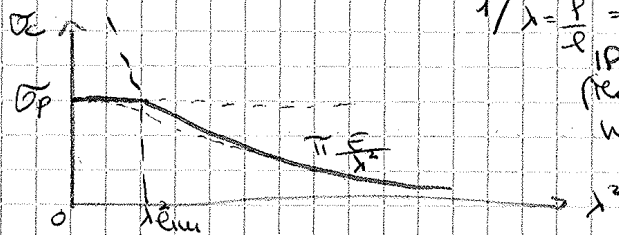
$N_{cr}$  = carico critico di Eulero  $\rightarrow$  SVERGIAMENTO della TRAVE

Per travi non sufficientemente snelle, la formula di Eulero non è valida.

Considero  $\sigma_c = \frac{N_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{l^2 A} = \pi^2 E \frac{I^2}{l^2 A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$   $\lambda$  = raggio d'inerzia

$1/\lambda = \frac{P}{E} =$  snellezza

IPERBOLE DI EULERO (modificata  $\rightarrow$  Per travi tozze, no crisi per sverciamento)



$\sigma_p$  corrisponde a  $\lambda_{lim}$ , quella per cui la crisi del materiale avviene per sverciamento e plasticizzazione.

TRAVI TOZZE  $\sigma_c = \sigma_p \rightarrow$  CRISI SVERGIAMENTO

$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$  snellezza limite  $\rightarrow$  ACCIAIO  $\lambda_{lim} \approx 10^2$

In realtà le 2 crisi interagiscono, si passa dall'una all'altra gradualmente  $\rightarrow$  raccordi (traballato)

Abbiamo visto le travi doppiamente incastrate. Ho anche altri casi con vincoli diversi. Per ogni caso:

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$l_0$  = lunghezza libera d'inflessione

Schemi	COND. STATICHE	$N_{cr}$	$l_0$
Schemi:	$v''(0) = 0$ $v''(l) = 0$	$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$l_0 = l$
mensole	$v''(l) = 0$ $EI v'''(l) + Nv'(l) = 0$	$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{4l^2}$	$l_0 = 2l$
Schemi incastrato appoggio	$v''(l) = 0$ esempio: curvatura, soppello, colpo de sfonda per curvatura	$N_{cr} = -2\pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$l_0 = -\frac{l}{\sqrt{2}}$
	$v'''(l) = 0$	$N_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$l_0 = \frac{l}{2}$
	$v'''(l) = 0$	$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$	$l_0 = l$
	$v''(0) = 0$ $v'''(l) = 0$	$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{4l^2}$	$l_0 = 2l$

Per ricercare il carico critico:

$$\text{Det}([K] - \lambda[Kg]) = 0 \quad \rightarrow \text{Problema agli autovalori}$$

$\lambda$  = Moltiplicatore che conduce a collasso

L'instabilità avviene quando  $\lambda$  = moltiplicatore carico critico e quello che interviene nella geometria.

DOMANI  $\rightarrow$  LAIB 3D

## LUSAS - ESERCITAZIONE 2

16 OTT 2013

Considereremo un edificio multipiano

Ho 1 sistema a più elementi, telaio a 2 campate, 12 piani

h INTERIANO = 3,048 m

l<sub>camp1</sub> = 3,656 m

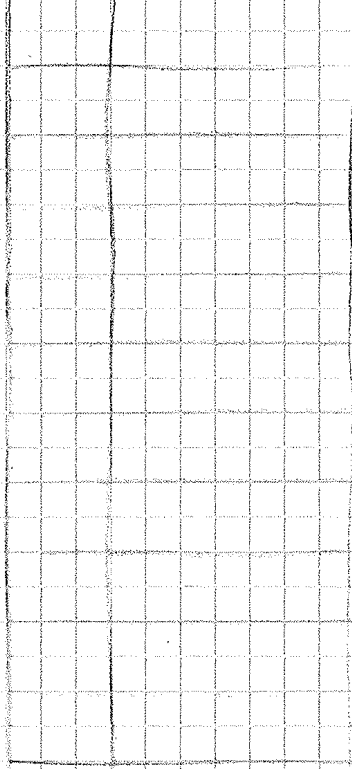
l<sub>camp2</sub> = 7,315 m

carico uniforme  $q = 2838$  N/m su travi orizzontali

carico concentrato  $F = 17793$  N nei nodi di sx

Voglio trovare i moltiplicatori dei carichi critici

### ANALISI ELASTICA



① Generare la geometria dell'edificio.  
(Uso tasto copy)

② L'edificio reale è in America, i nodi probabilmente sono incastrati. Dovrà scegliere i elementi finiti che mi garantisca questi vincoli e le sollecitazioni che siamo abituati ad avere: BEAM

Dovremmo poi considerare lo MESH, il n° di divisioni

Two beam

2 Dimensional - Quadratic

n° subdivision = 6

TRAVI UNICHE

Allo stesso modo

TRAVI CORTE n° division = 4

PILASTRI : n° division = 2

③ MATERIALE

$E = 200 \text{ E9}$

$\nu = 0,3$

④ INCASTRO (rubb fixed)

⑤ Carichi - Analysis, backing load

LOAD FACTOR = 1.09

### $\rightarrow$ ANALISI INCREMENTALE PLASTICA

nell' hyp di piccoli spostamenti

$\rightarrow$  comp. perfetti. plastico.

MATERIALE  $\rightarrow$  isotropo  $\rightarrow$  PLASTIC

$\rightarrow$  Stress resultant

loadcase - Controls - Non linear and transient

load factor - tra 1 a 3 per l'analisi plastica

LOAD FACTOR = 1.5

1° avviene Plastic

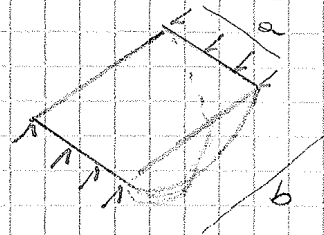
$$\Phi = -\frac{1}{2} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

È possibile ricavare  $M_x, M_y, M_{xy}$ :

$$\begin{cases} M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Risparmio dunque l'energia in termini di  $w$ : sto studiando una lastra vincolata come vedremo che si **INFLETTE**, per questa inflessione nascono dei momenti flettenti all'interno della lastra

$$\Phi = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

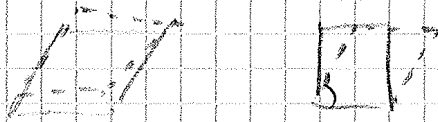


Consideriamo adesso il problema, impongo le condizioni di crollo e considero anche un regime membranale  $N_x, N_y, N_{xy}$ .

Dimentico per un momento il momento flettente:

$$\Phi_N = \frac{1}{2} \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad *$$

Ho 2 condizioni/dilatazioni in  $x$  o  $y$  e poi un netto nelle condizioni in cui la lastra si deforma anche tangenzialmente, ho una deformazione anche, cerco l'effetto delle tensioni tangenziali



Ipotesi la lastra deformata, traslata, ... la succede tutto.

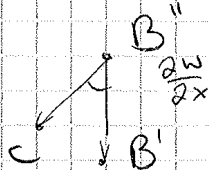
Nota che l'angolo  $\angle BOA = \frac{\pi}{2}$  si trasforma e  $\angle B'O'A' \neq \frac{\pi}{2}$ !

Quale apporto lavorerà per le tensioni tangenziali? È la differenza tra questi due angoli.

AH: ipotesi di avere solo una traslazione.  $\angle BOA = \frac{\pi}{2}$  e  $\angle B''O'A' = \frac{\pi}{2}$ , una volta l'angolo

La differenza tra i due piani è un angolo  $\Rightarrow$  il netto su  $O'A'$  = segmento in comune tra i 2 piani ( $B'O'A'$  e  $B'O'$ ) e lo tengo fisso, ruoto il piano  $B''O'A'$  intorno al segmento fisso  $O'A'$  fino a toccare il piano  $B'O'A'$  nel punto  $C$

$$BC = \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \partial y$$



$$CB' = \frac{\partial w}{\partial y} \partial y \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Ma voglio il segmento, usa l'angolo

$$C \hat{O}' B' = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow \text{Apporto n° 3 dell'eq. me} *$$

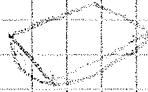
$\frac{a}{b} = 4 \rightarrow m = 4$ , anno 4 semionde  
 hyp: la lastra è quadrata,  $\frac{a}{b} = 1 \rightarrow \frac{Nc b^2}{\pi^2 D} = 4$

$m = 1$  1 semionda

Se continuo, trovo  $\frac{Nc b^2}{\pi^2 D} = 6$

$m = 2$  2 semionde

(...) e così via



$$\frac{Nc b^2}{\pi^2 D}$$

$\frac{a}{b}$

Si ha 2 successioni di curve al variare di  $m$ ,  $n$  comincia il modo in cui si deforma la lastra -  
 Per ciascun valore di  $\frac{a}{b}$  si ha un valore  $N_c$  minimo

$\frac{a}{b} < \sqrt{2} \rightarrow m = 1$

$\sqrt{2} < \frac{a}{b} < \sqrt{6} \rightarrow m = 2$

$\frac{a}{b} > \sqrt{6} \rightarrow$  vedi immagini

$\rightarrow$  Analoga equ. Navier su suolo elastico:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l (EI v''''^2 - N v'^2 + k v^2) dz$$

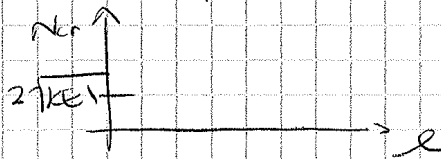
$\rightarrow$  cedevolezza delle molle che rappresentano

### Metodo di Ritz - Galerkin

$$v(z) = \sum_n A_n \sin n \pi \frac{z}{l}$$

Integrando l'energia pot. totale, trovo il campo vrtico anche con questo metodo

Si ottiene una relazione che ci fa ottenere un comportamento simile al precedente



Ho 2 molle su molle, non ho più  $\frac{a}{b}$

### ESEMPIO 1 $\rightarrow$ DOMANI

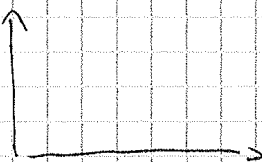


LAIB  $\rightarrow$  laser

Autodeformate e carichi entici

Confronto soluzione analitica e element finiti.

Errore percentuale  $\uparrow$



Con pochi elementi finiti (2) la differenza è del 45% -  
 Con 4 el. finiti, la differenza è del 5%.

$\Rightarrow$  Occorre sapere se sta in termini di convergenza, è importante per questo l'approccio analitico.

Si perviene alla stessa soluzione

AUTONALORI:  $\alpha_n = n \frac{\pi}{l}$

$$M_{lc} = \frac{P}{l} \sqrt{EG I_y I_z}$$

Momento critico: formula di Prandtl

È stata usata per studiare il collasso del Tacoma  
 Il ponte prima di cadere ha oscillato qualche ora

⇒ Si capisce che il collasso è prettamente legato alle caratteristiche geometriche del problema

$$M_{lc} \propto \frac{1}{l} \sqrt{\frac{b \delta^3}{12} \left( \frac{1}{3} b \delta^3 \right)^2} \propto \delta^3 \frac{h}{l}$$

Filmati oscillazione Tacoma Narrows Bridge - Washington

1950 → Nasce Tacoma bridge

→ Passare a vedere, dalle formule di Prandtl si sono accorti che  $h$  è importante

## LAIB 3D

23. OTT. 2013

### ① LASTRA SOGGETTA A COMPRESSIONE

lastra quadrata

mesh → consideravamo diverse discretizzazioni

Definisco 4 punti 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0 e applico 1 superficie per poi applicare 1 mesh tipo shell

→ Attribute, mesh, surface

thru shell, quadrato

Teniamo 1 sola mesh e consideravamo diverse n° di divisioni

Attribute, Mesh, line, → Division 2, Division 4, ..., Division 12

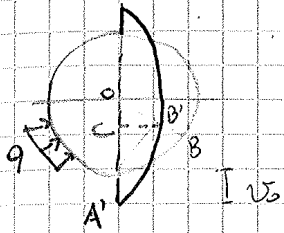
Ne creo 6

Geometric Surface  
 Material ISOTROPIC

At: Il n° delle remande cresce in linea di principio ma poter incontrare nel diagramma le code delle sezioni precedenti  
 es: momento 1, 2, 1, 3 sezioni



Considero ora il cilindro con il carico tutto intorno. Nota che questo si potrebbe deformare schiacciandosi così:



Si instabilizza lungo una delle direzioni principali, per esempio  $y$ .  
Cede lungo  $y$  e spicca lungo  $x$ .

Come poter avere equilibrio nella configurazione deformata?

Considero  $A'$  sul diametro verticale. Considero il raggio  $OB$  generico e dunque  $B'$ .  
Considero il punto  $C$  = proiezione di  $B'$  sul raggio principale.

Potro ora scrivere le equazioni d'equilibrio:

$$N_{A'} = -q \overline{A'O} \quad \text{Contributo relativo allo sforzo normale in direzione } x$$

Faccio ora l'equilibrio rispetto a un punto generico:  $B'$ .

$$M_{B'} = \underbrace{M_{A'}}_A + \underbrace{N_{A'} \cdot \overline{A'C}}_N + \underbrace{\frac{1}{2} q \overline{A'B'}^2}_{\text{CARICO}} \quad \text{eq. bno alla rotazione } \curvearrowright_{B'}$$

Sostituendo  $N_{A'}$

$$M_{B'} = M_{A'} - q \left( \overline{A'O} \cdot \overline{A'C} - \frac{1}{2} \overline{A'B'}^2 \right) *$$

Considero il teorema di Carnot per i triangoli qualsiasi. Sul triangolo  $OA'B'$ :

$$\overline{B'O}^2 = \overline{A'O}^2 + \overline{A'B'}^2 - 2 \cdot \overline{A'O} \overline{A'B'} \cos \omega$$

Usando questa relazione:  $\overline{A'O} \cdot \overline{A'C} = \frac{1}{2} (\overline{A'O}^2 + \overline{A'B'}^2 - \overline{B'O}^2)$

Introduco quest'ultima in  $*$ :  $M_{B'} = M_{A'} - \frac{1}{2} q (\overline{A'O}^2 - \overline{B'O}^2)$

È interessante che considerando l'eq. bno rispetto a un qualsiasi punto, l'effetto sul momento è dato dal momento che trova su uno degli assi principali  $\pm$  l'effetto del carico rispetto ai due raggi deformati. **← IMPORTANTE**

Faccio una considerazione generale e chiamo i raggi deformati in un altro modo:

$$\left. \begin{aligned} \overline{A'O} &= R + v_0 \\ \overline{B'O} &= R + v \end{aligned} \right\} \text{ lo scrivo come somma del raggio indeformato + una certa quantità } (v_0 \text{ e } v)$$

N.B.:  $v_0$  è una costante mentre  $v$  è variabile ( $v_0 > 0$  assunto all'inizio)

Riservo  $*$ :  $M_{B'} = M_{A'} + qR(v - v_0)$

Considero ora l'eq. ue della linea elastica  $*$  che si trasforma così:

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = -\frac{R^2}{EI} [M_{A'} + qR(v - v_0)] \quad (17.100)$$

Voglio trovare il carico critico che porta ad instabilizzare il nostro anello.

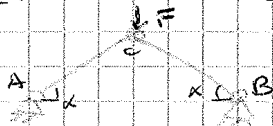
Imponendo altre condizioni di simmetria:

$$\frac{dv}{d\theta} = 0 \quad \text{per } \theta = 0, \quad \frac{1}{m+1}$$

$$xA = 0 \quad -P A = 0$$

Posso ottenere le deformate con configurazioni a più lobi. Questo per quanto riguarda il 1° arco unico.

## 2] ARCHI RIBASSATI



→ arco ribassato costituito da due bracci elasticamente deformabili di rigidità  $k$ , incurvate tra loro

Le aste sono come molle.

L'azione della forza  $F$  fa curvare le aste che si accorciano e  $\alpha$  diventa piccolo di una quantità infinitesima  $\phi$ .

Per risolvere il problema uso un approccio energetico.

Considero la coordinata generalizzata  $\phi$ .

L'energia: 
$$\Phi(\phi) = k \left[ \frac{l}{\cos \alpha} - \frac{l}{\cos(\alpha - \phi)} \right]^2$$

Nell'ipotesi di arco ribassato - Uso gli sviluppi in serie di Taylor:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\cos(\alpha - \phi) \approx 1 - \frac{(\alpha - \phi)^2}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha - \phi)} \approx 1 + \frac{1}{2}(\alpha - \phi)^2$$

Facendo le sostituzioni:

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{4} k l^2 \phi^2 (2\alpha - \phi)^2$$

L'abbassamento di  $F$ : 
$$m(\phi) = l \tan \alpha - l \tan(\alpha - \phi)$$

$$m(\phi) \approx l\phi$$

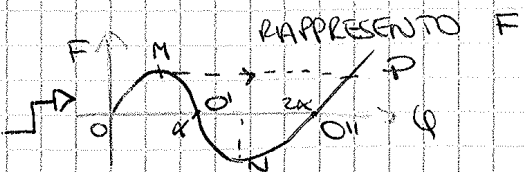
⇒ L'energia potenziale totale: 
$$W(\phi) = \Phi(\phi) - F \cdot m(\phi)$$

⇒ 
$$W(\phi) = \frac{1}{4} k l^2 \phi^2 (2\alpha - \phi)^2 - F l \phi$$
 **ENERGIA POTENZIALE TOTALE dell'ARCO.**

Studio la condizione di stazionarietà:  $W' = 0$

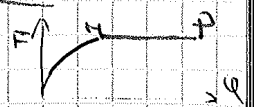
$$W' = k l^2 \phi (2\alpha^2 + \phi^2 - 3\alpha\phi) - F l = 0$$

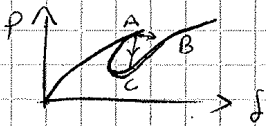
Otengo: 
$$F = k l \phi (\phi - \alpha)(\phi - 2\alpha)$$



Cosa accade? Sfrugo l'arco, da 0 passo ad  $\alpha$ . Da  $M$  in poi ho un belco della struttura che trova una configurazione d'equilibrio per il carico che stiamo dando e si porta subito in  $P$  → **SNAP TRUE**

Questo accade se sforzo troppo la struttura, non vedo tutto





Cuneo cilindrico con arco assiale  
vedi il punto di connessione tra tubo cilindrico e arco ribassato

TIPOLGIE DI COLLASSO - confronto fondamentale tra snap-back e snap through comandato essenzialmente dalla snellezza.

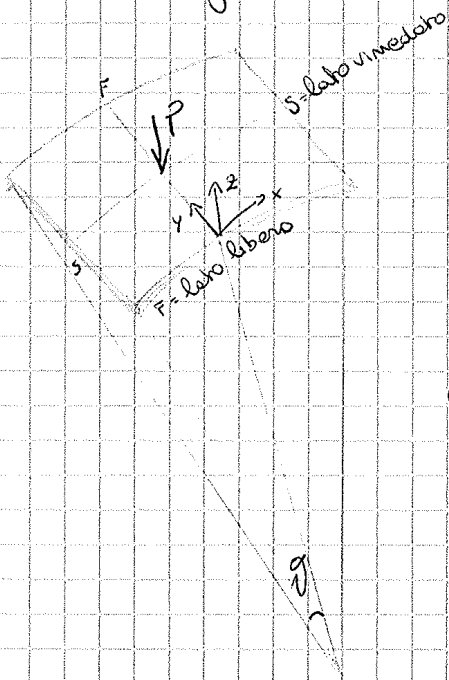
Dunque vedremo un guscio

LAIB 3D

30. OTT. 2013

Calcolo di un guscio e fenomeno dello snap-through

Vedremo un guscio uncinato lungo i bordi con un carico P



si stabilizziamo di voler studiare l'instabilità dell'elemento  
=> faccio una prova a spostamento controllato

In USAAS, da loading, impostare un carico in modo da controllare lo spostamento - lungo uno spostamento e ricavo il carico

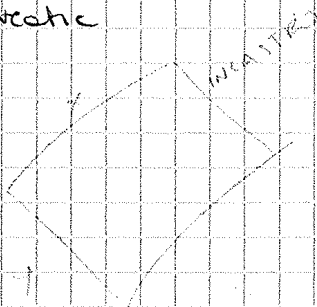
-> la struttura è simmetrica => ne studio  $\frac{1}{4}$

- ① GEOMETRIA
- $R = 2560 \text{ mm}$
- $2\theta = -11,75^\circ$
- $S = 520 \text{ mm}$

Point 0,0  
0,25u

Geometry -> Surface -> by sweeping -> rotate  
 $\theta = -5,785$

Thin shell  
Quadratic



Material Isotropic

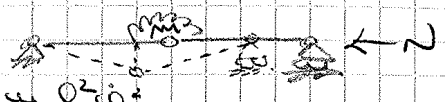
Support incastro  
x  
y

Loading: Prescribed displacement

Lo spessore comanda la forma

Considero il sistema generico e scrivo l'energia potenziale  $W$  e l'energia cinetica  $T$ .

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} k (2\varphi)^2 - 2Nl (1 - \cos\varphi)$$



$$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left[ \frac{d}{dt} (l \sin\varphi) \right]^2 + \frac{1}{2} m \left[ \frac{d}{dt} (l - l \cos\varphi) \right]^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

Introduco nella cinetica tutta la massa dell'oggetto e la chiamo  $m$ . Scrivo dunque  $T(\dot{\varphi})$ .

$\frac{1}{2} m v^2 \rightarrow$   $\begin{cases} \nearrow v \text{ in direzione verticale} \\ \searrow v \text{ in direzione orizzontale} \end{cases}$  } la scrivo in termini di spostamento

A questo punto posso scrivere l'equazione del moto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -4k\varphi + 2Nl \sin\varphi$$

se  $\varphi$  è egli estraneo, nella cinetica  $\varphi$  è piccolo  $\Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$ .

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -4k\varphi + 2Nl \varphi$$

Ho due equazioni dove compaiono  $N = \text{carico}$  e  $m = \text{massa}$ . Dipende allora la struttura da come la progetto  $m$  e da che carico metto sopra  $N$ .

Considerando la soluzione dell'eq. in differenziale  $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$  con  $\omega = \text{FUSIONE}$ , ottengo la soluzione di:

$$(4k - 2Nl - \omega^2 m l^2) \varphi_0 = 0 \Rightarrow N = \frac{2k}{l} - \frac{m l}{2} \omega^2$$

se cerco le soluzioni NON modali.

Quanto vale  $\omega$ ?

Ho 2 casi limiti:

- ① la struttura crolla elasticamente (INSTABILITÀ STATICA)
- ② la struttura va in risonanza e con carico nullo crolla ugualmente

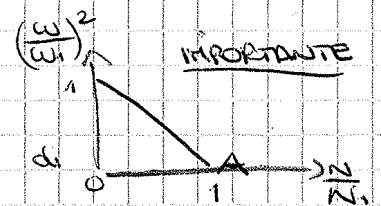
$$\textcircled{1} m=0 \rightarrow N_1 = \frac{2k}{l}$$

$$\textcircled{2} N=0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m l^2}}$$

La struttura non crolla, non ha frequenza propria  $\Rightarrow Dm=0$

Normalizzato rispetto a  $\omega_1$  e  $N_1$ :

$$\left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + \left( \frac{N}{N_1} \right) = 1 \rightarrow \text{ottergo l'equazione di una RETTA}$$



Questo grafico mette in relazione la frequenza col carico assiale. Aumentando il carico rispetto al valore di riferimento, più la frequenza si abbassa fino a un valore limite teorico.

Nel punto A il crollo è causato dal carico  $\omega_1$  e la frequenza della struttura è nulla.

La massa concentrata non conta. Lo smorzamento cambia la pendenza della curva ma non il compimento.

Vediamo un altro esempio e cambiamo le molle, posizionando una molle in linea in corrispondenza della cerniera centrale

Sono l'energia potenziale e cinetica:

$$W = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$



$$\frac{\partial(\partial T)}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

$$\rightarrow m l^2 \ddot{\varphi} = - l \varphi (k l - 2N)$$

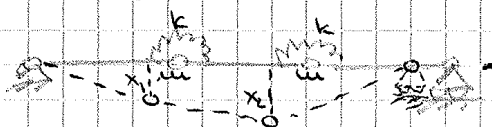
Come prima: considero  $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow (k l^2 - 2N l - \omega^2 m l^2) = 0 \rightarrow N = \frac{k l}{2} - \frac{m l}{2} \omega^2$$

Discutiamo i casi limiti:   
 ①  $N=0$    
 ②  $\omega=0$

Facendo l'integrale energetico statico e dinamico, il comportamento del sistema con molle rotazionali o lineari non cambia in termini di carico - frequenza.

Complichiamo il sistema:



Sono l'energia potenziale totale

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k \left( \arcsin \frac{x_1}{l} - \arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \dots$$

$x_1, x_2 =$  coord. generalizzate del sistema

Consideriamo l'energia cinetica  $T(x_1, x_2) \approx \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

Att: Sono sia W che T in termini di Taylor.

Sono l'eq. del moto in termini lagrangiani: ne ho 2, una per il sistema 1 e una per il 2 parte 2 sono le coordinate lagrangiane

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5k}{2l} & -\frac{4k}{2l} \\ -\frac{4k}{2l} & \frac{5k}{2l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = N$$

Nota che le caratteristiche di rigidezza possono essere divise in 2 matrici:   
 $\rightarrow$  1 legata alla geometria degli elementi (3 aste lunghe l)   
 $\rightarrow$  2 legata alla rigidezza k delle molle

In forma compatta:  $(- \omega^2 [M])$

La soluzione non banale esiste se  $\det([K] - N[kg] - \omega^2[M]) = 0$

Otengo 2 soluzioni:  $\omega^2 = 1 - \frac{N}{N_1}$    
 $\omega^2 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{N_2}{N_1} \left( \frac{N}{N_1} \right)$

ING. PIANA

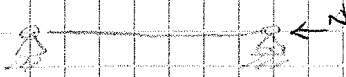
e-mail: gianfranco.piana@polito.it

06. NOV. 2013

## LEZIONE 7

Parleremo dell'influenza dei carichi applicati su strutture snelle per quanto riguarda la frequenza di vibrazione e anche i modi di vibrare. Parleremo di travi ma si può estendere anche a piastre.

### CONTINUO LEZIONE 7



Le frequenze naturali della trave compressa sono più basse rispetto a quelle che il sistema avrebbe se fosse scarico.

Per una forza di trazione si ottengono freq. naturali più alte.

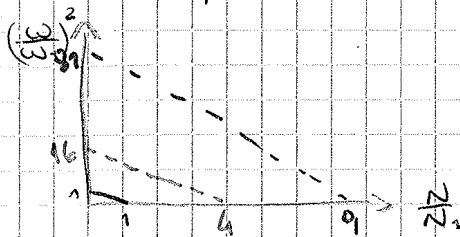
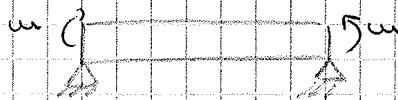


diagramma adimensionalizzato rispetto a  $N_1 =$  carico critico di Eulero (1°)  
 $\omega_1 =$  pulsazione fondamentale

A meno che non si aggiungano ulteriori vincoli, si riesce a leggere solo il 1° carico critico perché per la struttura snella, non riesce ad aumentare ancora  $N$  per raggiungere anche  $N_2, N_3...$

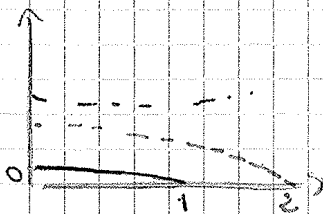
=> In senso leggere il diagramma solo da 0 - 1.

Nella trave doppiamente incernata il modo di vibrare di struttura caricata e non caricata è lo stesso => ottengo curve lineari. Per altre condizioni di vincolo posso ottenere una leggerezza differente tra queste e dunque curve leggermente non lineari.



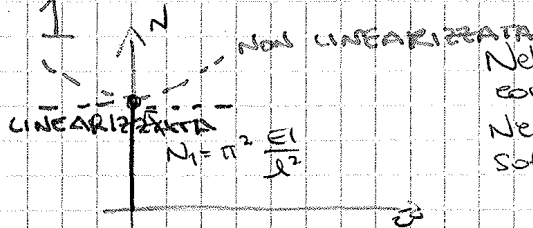
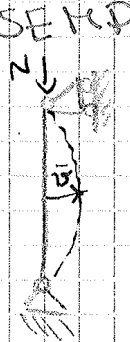
$\omega_m = 0$  equilibrio indifferente  
 Non scatta più per perturbazioni

Le curve di interazione risultano essere NON lineari:



freq. flessionale = 0 -> INSTABILITA'

### ESEMPIO 1



Nell'analisi non linearizzata scatta anche l'impetza di  $\bar{v}$ .  
 Nell'analisi lineare scatta solo la forma della deformata

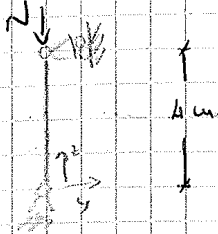
La non lin. mi dice che l'eq. bno non si mantiene e quindi

Già sono molto metodi per trovare  $N$  critico. Noto il carico agente sulla trave e  $f_1 = \text{freq. sulla struttura scarna}$ ,  $f$  si può misurare, posso usare la formula applicativa per trovare  $N_1$ :

$$* N_1 = \frac{N}{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}$$

$f$  è la frequenza relativa al carico  $N$   
 $0 < N < N_1$

### ESEMPIO 3



SEZIONE HEA 120



acciaio S235

La trave si instabilizza nel piano di massima rigidità flessionale, ovvero piano  $y-z$ .

$E = 210 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$  Modulo dell'Acciaio

Calcolo il carico critico di Eulero:  $N_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \frac{KN}{m^2} \cdot 230,9 \text{ cm}^4}{(400)^2 \text{ cm}^2} \approx 299,1 \text{ kN}$

Vogliamo  $\mu = \text{massa per unità di lunghezza}$ :

$$\mu = \rho \cdot A = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{25,36 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{\text{Area sez. trasv.}} = 19,92 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

A questo punto posso calcolare la  $\omega_1$ :

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = \frac{\pi^2}{(4 \text{ m})^2} \cdot \sqrt{\frac{210 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}}{19,92 \text{ kg/m}}} \approx 96,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx 15,3 \text{ Hz}$$

Qui posso applicare la formula vista:

$f(N=150 \text{ kN})$  Applico una forza di compressione pari circa alle metà di  $N_1$ .

$$\left(\frac{N}{N_1} \approx 0,5\right)$$

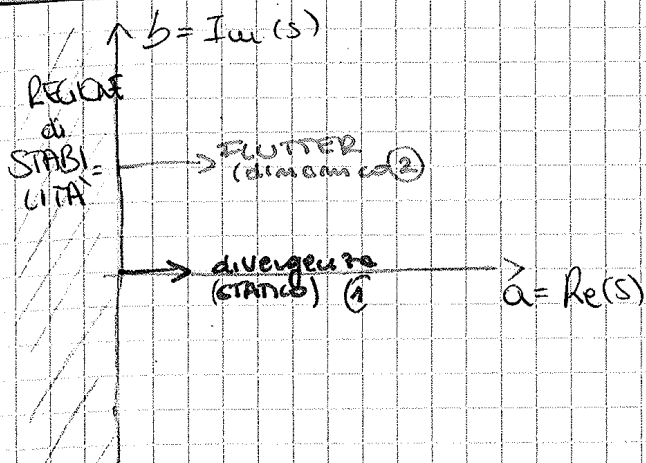
$$* \Rightarrow f(N=150 \text{ kN}) = f_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{N}{N_1}} = 15,3 \cdot \sqrt{1 - \frac{150}{299,1}} = 15,3 \cdot 0,706 \approx 10,8 \text{ Hz}$$

La frequenza è scesa, il periodo è aumentato, la trave vibra dunque più lentamente.

Provo ad applicare adesso  $N = 200 \text{ kN}$ , ovvero circa il 70% di  $N_1$ .

$$\frac{N}{N_1} \approx 0,67 \rightarrow f(N=200 \text{ kN}) = 15,3 \cdot \sqrt{1 - \frac{200}{299,1}} \approx 15,3 \cdot 0,53 \approx 8,07 \text{ Hz}$$

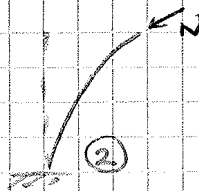
La frequenza si riduce adesso di circa il 70%.



$\lambda$  = Moltiplicatore dei carichi  
(parametro di controllo del problema).

All' aumentare di  $\lambda$  si può passare dalla regione di stabilità a quella di instabilità.

Se il passaggio da stab a instab avviene con  $b=0 \rightarrow$  l'instabilità avviene per DIVERGENZA STATICA. (Caso di Euler, inst. statica) (1)  
 Se il passaggio avviene per  $b \neq 0 \rightarrow$  l'instabilità avviene per FLUTTER (instabilità di tipo DINAMICO) - La struttura perde stabilità oscillando (2)

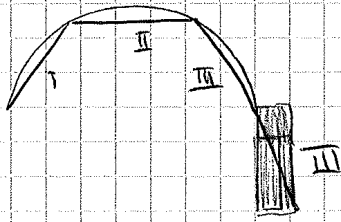


slide + video.

INSTABILITÀ di TIPO STANCO: Sforzo repentino, senza preavviso



## Approccio geometrico



La semiluna è individuata da 3 segmenti di uguale lunghezza.

## Approccio aerumatico

L'approccio aerumatico ebbe 3 grandi maestri

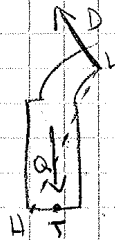
- 1) De la Hire 1695
- 2) De Beldor 1739
- 3) Maschenow 1785

Questi facevano dei semplici equilibri vettoriali

1) e 2) ANEMATISMO



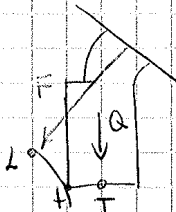
Il centro centrale si abbassa i prodotti spaziosi



$$B \cdot LH = Q \cdot HT$$

INSTABILITÀ

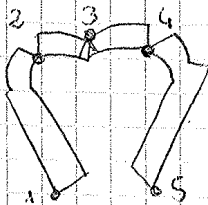
2) Da solo fece un altro sistema



$$F \cdot LH = Q \cdot HT \rightarrow \text{instabilità}$$

esempio un po' mantenendo lo stesso anematismo

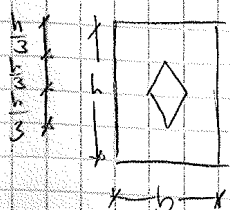
3) Maschenow complicò le cose dicendo che il anematismo si poteva risolvere da 5 archiere.



Anematismo a 5 archiere.

Questo tipo di approccio durò sì e no 100 anni perché complesso.

Fu il eroe Navier, 1826

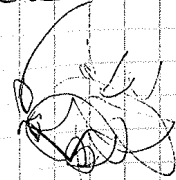


$$\sigma_{media} = \frac{N}{A}$$

Cui introdusse il problema del CENTRO DI INERZIA, anche TERZO MEMO

Neccio chiamato

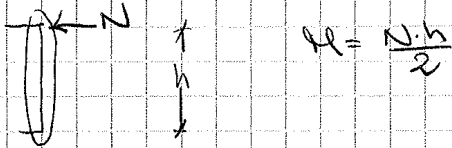
$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot h}{6 \cdot \frac{1}{2}bh^2} = \\ &= \frac{N}{bh} + \frac{N}{bh} = \frac{2N}{bh} \end{aligned}$$



Cosa disse Heymann:

- Stone has no tensile strength  
La muratura in pietra non ha resistenza in trazione
- Stone has an infinite compressive strength  
La muratura ha infinita resistenza a compressione.
- Sliding of one stone upon another can not occur  
Lo scorrimento di un corso su un altro non può capitare

Condizione limite



La struttura non è fatta da questa sezione ma è fatta da tante sezioni.

Il meccanismo di Meccanismi è a 5 corriere e ciascuna corriere è una rotazione rispetto a 1 punto.

Nel contesto di una struttura, la formazione di 1 corriere non porta al collasso.

⇒ L'analisi limite è un ritorno al meccanismo di Heymann:

Anche al di fuori del terzo medio (Navier - Perry), sino alla condizione limite (vista adesso), la sezione si suppone NON ruota.

Quando si arriva alla condizione limite si ha la formazione della 1<sup>a</sup> corriere con punto (PIVOT) sul bordo compresso.



Lo stato di sollecitazione sarà in N e in H allo stato compresso.

Essendo la posizione di N rappresentabile sezione per sezione so che quando la CdP è tangente ai bordi, ha la formazione di 1 corriere.

⇒ Ora la CdP tangente ai bordi dell'arco, ha la formazione di una corriere.



⇒ la CdP che varia e calcolare avrà dei punti di tangenza → si formano corriere.

La struttura è salva se si formano 3 corriere e non di più.

FORMAZIONE di 3 corriere → STRUTTURA ISOSTATICA

FORMAZIONE di 4 corriere → LIMITE di INSTABILITÀ

Posso calcolare un arco con il metodo alla Perry o con il Metodo di Heymann.

È logico che con il Metodo di Perry ottengo un arco spesso 3 volte quello di Heymann.

⇒ Per ottimizzare la progettazione devo fare in modo di avere 3 corriere plastiche.

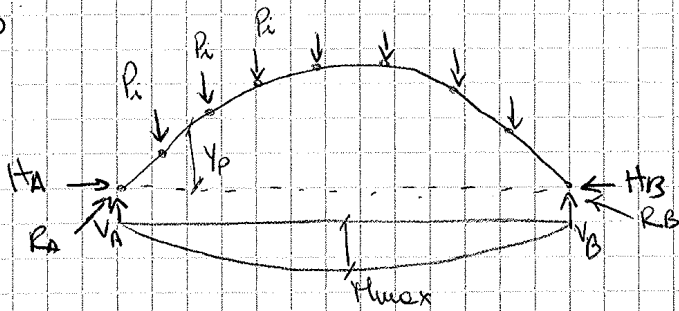
N.B.: Questo vale solo per la pietra, nelle ipotesi di HUYMAN  
 ecco perché nella forma del carico di collasso NON si ha  
 la dipendenza dal materiale.

Gli S.L. sono tenuti indotto di 200 anni, di emergenza.

Si arriva all'astrazione del materiale -> LITTE

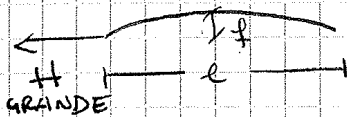
Teoria del I ordine

CdP



Il grosso problema degli archi è l'instabilità la quale è data da H

Venezia ha pochi ponti sul Canal grande. L'ultimo ponte sul Canal grande è il PONTE di CALATRAVE. ha fatto il ponte ad arco ribassato poiché il rapporto  $f/e$  è molto piccolo.



$\frac{f}{e}$  basso Più si ribassa  $\frac{f}{e}$  più il valore di H aumenta.

Venezia è fondata su melma e carca.

Il ponte ha avuto dei problemi strutturali alle spalle molto gravi

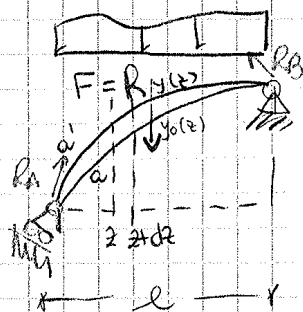
$H_A = H_B = H \rightarrow$  SPINTA  $\rightarrow$  INSTABILITÀ

Un arco ben progettato è un arco il più possibile coincidente con la curva delle pressioni

$$y_p = \frac{M_{opp} \text{ (APPROVIATO)}}{H}$$

$$H \cdot y_p - M_{opp} = 0$$

Più vale questa equazione e più il ponte è ben progettato



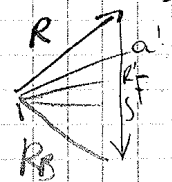
$q(z)$  carico qualsiasi

$$F = \int_0^e q(z) dz$$

$$F d = \int_0^e q(z) \cdot z dz$$

$$d = \frac{\int_0^e q(z) z dz}{F}$$

TRIANGOLO delle FORZE (Tery)



Costituisce la CdP -

$$Q'R' = q(z) dz$$

$$q(z) dz = H dy$$

$$Q'R' = Q'S - R'S = H \tan \alpha - H \tan \beta = H (\tan \alpha - \tan \beta) = -H (y'(R) + y'(\alpha))$$

in termini geometrici

Ho ipotizzato di avere una distanza tra asse medio del ponte e CdP.  
 Se questi coincidero il 3° medio scompare.

D. solo ho sempre una differenza tra CdP e asse medio ma posso assumere che l'inclinazione della CdP sia circa coincidente con quella della struttura:

$$\varphi_s \approx \varphi_p$$

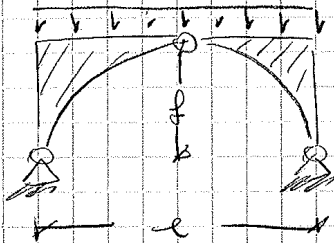
⇒ Posso assumere:

$$\begin{cases} M_s = H(y_p - y_s) \\ N_s \approx -R_s = -\frac{H}{\cos\varphi} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Risultante in ogni} \\ \text{punto} \rightarrow \text{dipende} \\ \text{da } H \end{array}$$

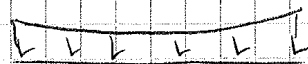
$T_s \approx \Phi \rightarrow$  il taglio tra i capi può essere trascurato  
 Sliding can not occur.

L. I. Sogli archi a 3 cerniere.

Arco a 3 cerniere → struttura più semplice da analizzare



In realtà il carico distribuito su un ponte ad arco è sempre NON UNIFORME.



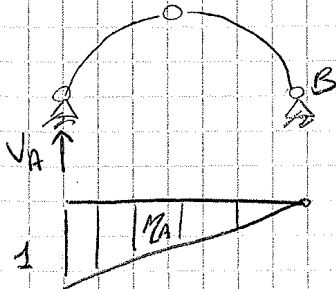
Ho il carico distribuito NON UNIFORME  
 Avrò il venimento grosso -

Cos'è la linea d'influenza?

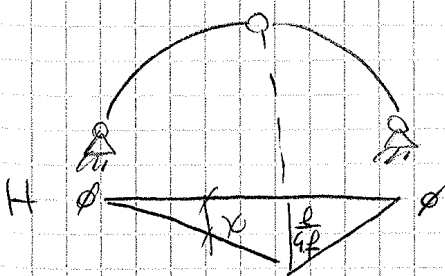
La linea d'influenza di una CdS è la funzione secondo ...

Partendo da il polo di partenza ho la retta tangente e applico lì la forza ⇒ calcolo la CdS che questa provoca ~~provocando~~ viaggiando su tutte le sezioni.

LINEA D'INFLUENZA DI  $V_A$  per la forza unitaria viaggiante verticale



LINEA D'INFLUENZA DI H



Se voglio spinta  $\frac{e}{4f} \Rightarrow$  un netto al centro.

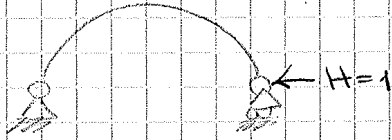
$$H = X = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f}$$

COLASSO per strutture IPERSTATICHE → le strutture diventano ipostatiche.  
 Queste non sono soggette a cedimenti unilaterali, attrito, viscosità.

**ARCO A 2 CERNIERE**

4 punti in muratura in genere sono a 3 cerniere.  
 Se per esempio dobbiamo eseguire una copertura ad arco in calcestruzzo o acciaio, queste saranno archi a 2 cerniere.  
 es: Aula di Nervi

Ai tempi di Nervi non c'erano le  
 code di calcolo  
 ⇒ Uso il PLV



Curve di solito, nel PLV, il taglio si trasforma e la spinta è:

$$H = \frac{\int M_0 y \frac{ds}{EI}}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + \int \frac{ds}{EA}}$$

IMPARARE A MEMORIA

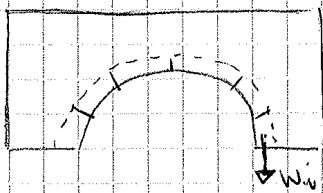
è al denominatore e da l'idea dell'influenza del ribassamento dell'arco sulla spinta.

**LINEE D'INFLUENZA di ARCHI a 2 CERNIERE**

Imparare a

ricavarle direttamente

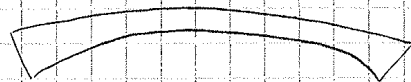
Ovviamente si usano solo per carichi variabili e NON permanenti.



La sezione del ponte resistente è costante perché si hanno riempimenti o rinforchi di materiali diversi.  
 Abbiamo bisogno di superfici orizzontali, non voglio i ponti a schiena d'asino.

Gli archi stanno in piedi perché sull'arco agisce un carico non uniformemente distribuito e dunque il peso dell'ultimo corso è grande. ⇒ Ai lati dell'arco c'è sempre più roba, alleggerire è sbagliato.

Negli archi fortemente ribassati potrebbe essere una sezione resistente non uniforme ma variabile.



Es. TORINO - Dora Ponte Rosa.

**Nervi - Arco a spinta eliminata**

↳ (con trave tra le due cerniere)



Gli estremi sono fissi solo se la rigidezza della catena tende ad infinito.  
 ⇒ Il valore della spinta dipende dal cavo.

Si tratta di un sistema auto-equilibrato.

Un tempo in Italia si usava la CNR 100 la dare era ben spiegato il metodo omega per calcolare l'instabilità di un arco.  
 Adesso si utilizza il Metodo  $\chi$  C3

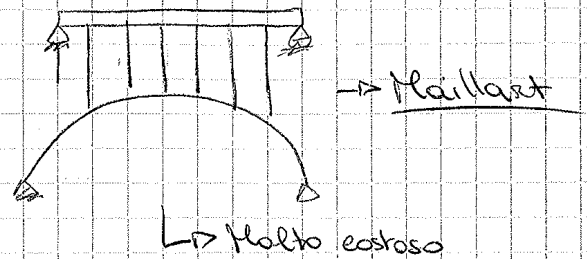
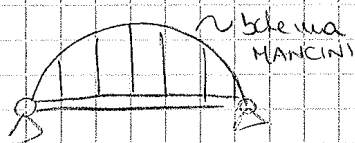
In realtà il metodo  $\chi$  è l'inversione del metodo omega.

Per calcolare l'instabilità di un arco vanno applicati dei coefficienti

$$\frac{H_{cr}}{H_{catodo}} = \text{coefficiente moltiplicatore}$$

Da tenere conto della snellezza dell'arco = rapporto tra estensione dell'elemento e raggio curvo (questo è arco o maglio)

### SISTEMI COLLABORANTI ARCO-TRAVE



Esiste un campo dove si usa molto la ricerca dei sistemi collaboranti arco trave è il campo civile. (Es. coperture)

Per calcolare si usa il metodo di Ritter.

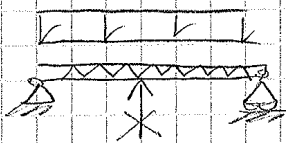
Abbiamo bisogno di E dell'arco e della trave.

Posso calcolare  $H$  con la formula:  $S_{trave}$  e  $S_{arco}$

Attenzione alla situazione di puntellamento

Non è conveniente più aprire su parti esistenti una è conveniente aprire su strutture esistenti.

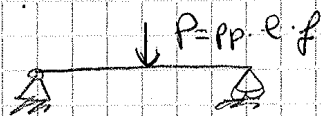
**EFFETTO VINCOLO:** Si ha quando c'è una predalles



Predalles con carico uniformemente distribuito.

Spesso la predalles NON fa da cassero da sola, non ce la fa  $\Rightarrow$  Metto un puntello.

Il cas misura e devo il puntello. Qual'è la situazione di carico?



è fatta NON con carico distribuito ma con un carico concentrato.

**COEFFICIENTI:** Esatto il Pv e trovato  $M_{cr}$  dovuto ripartire

Ho i coefficienti di Ritter  $\tau_a$  e  $\tau_f$  per trovare  $M_{cr}$  e  $M_t$ .

ACCORNERO

19. NOV. 2013

# PONTI STRALLATI

I ponti strallati e ancor più quelli sospesi hanno avuto una nascita recente nel tempo. Questa nascita è legata al concetto di grandi luci. Attenzione, la grande luce è soggettiva, così come il concetto di carico alto, dipende dal contesto.  
Per esempio 300 m di luce per un ponte ad arco è grande luce per un ponte strallato o sospeso è una suocchetta.

Prima di far i calcoli veri e propri dovremo fare i così detti "conti della terra":

LUCE TEORICA → In funzione del materiale, di un coefficiente  $\alpha$  di ignovente.

In Italia non si fanno ponti di grandi luci. (Media luce)

ES. PESSIMA

Studio più grande del mondo: STEINMAN & PARSONS (New York)

Londra OVE ARUP

Nel nostro modello dobbiamo tener conto del modulo d'ELASTICITÀ VIRTUALE del cavo (acciao  $E = 210.000 \text{ MPa}$ )

$E^*$

In funzione della luce teorica, dello stress al cavo e del peso specifico e di  $E$  dell'acciao.

I ponti strallati hanno meno storia di quelli ad arco. Nella seconda metà dell'800

In Italia l'unico che li sa fare è Fabrizio de Piranda.

Riccardo Morandi - grande padre del ds anato.

A Genova fece dei cavi in c.a.p. che si emulsionavano. Il ponte suo fu un modello.

Grecia - con ventaglio, con Antenne porte stralli piramidali.

Brest - Ponte ad arco - Cavi paralleli (Non convergenti)

Ponte STRALLATO:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Impalcato} \\ \text{Antenne portastralli} \\ \text{cavi o stralli} \end{array} \right.$

- ① Si dice "AD ARCA" uno schema con cavi strallati paralleli.
- ② Nella seconda immagine c'è un impalcato molto meno spesso  $\Rightarrow$  meno materiale
- ③ aneggio e terra
- ④ schema a ventaglio: stralli che convergono in 1 punto o comunque in meno punti rispetto al n° degli stralli.  
Ho un arco di punta elevato.
- ⑤ belle  $\Rightarrow$  Trave su più appoggi  
Tutto il taglio di punta è preso da un'unico aneggio che porta il carico e non  $\Rightarrow$  lo spessore della trave di via è molto maggiore rispetto a quello dell'impalcato
- ⑥





CAVO CURVETTO A PESO PROPRIO:

$y = C$   
eq. me della CATENARIA

(1)

$C =$  costante catenaria

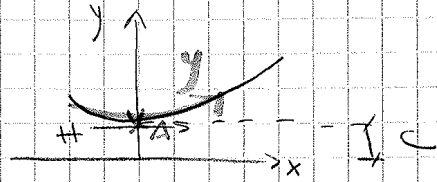
Cambiando l'eq. me (1) con quelle usate si ottiene:

$T = wy$

(devo trovare)

TIRO del CAVO

$w =$  peso proprio al m del cavo  
 $y =$  altezza del cavo.



Il tiro è sempre tangente alla curvatura del cavo.

⇒ Quanto vale il tiro nel punto più basso del cavo?  $H$  (in A)

⇒  $T = wy$  e  $y = C$  in A

$T$  è funzione della resistenza del cavo. Il suo direttore è  $y$ , meglio progettare la forma dell'arco. Si richiede  $y$ . Devo disegnare la forma del cavo - Il CADISTA vi farà i disegni.

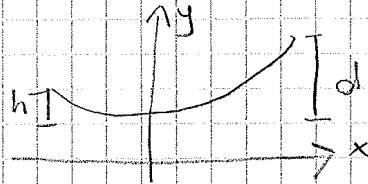
Le stesse equazioni si cambiano nel caso di cavo uniformemente distribuito.

$y = \frac{1}{2} \left( \frac{wx^2}{H} \right)$

Non ho la forma di una catenaria.

Così come per gli archi la forma ottimale che centra la CdP è parabolica.

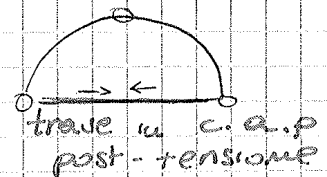
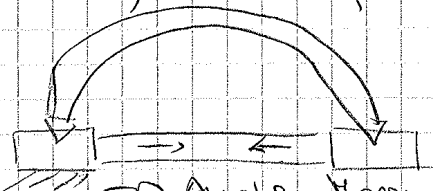
Il problema del disegno del profilo del cavo è quello di poter avere una diversa altezza di catena portastrali.



IMITAZIONI

37 trafilati formano un cavo

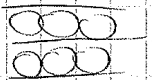
Auto Neri, Valtiano, Rana - Neri



⇒ Anche Morandi pensò di poter fare cavi in cls precompresso (anche perché pesa 3 volte meno rispetto all'acciaio)

Normalmente tutti i cavi si raccolgono all'interno di guaine.

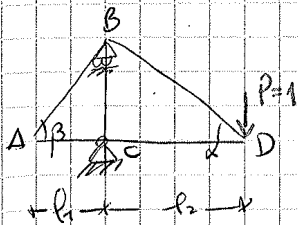
È possibile anche avere cavi in batteria oltre che tondi.



Si fanno anche forme curvose: 127 cavi - ESALONO

Nei ponti sospesi è richiesta notevole rigidità per l'instabilità, e questa è data dalla forma e sezione - ⇒ grande rigidità nell'impulso

Settori BOX con diaframmi trasversali



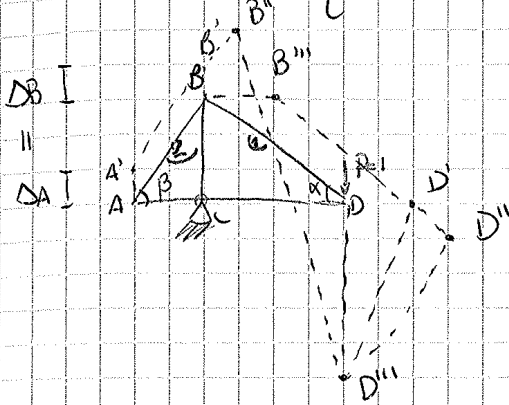
Prendiamo un sistema semplice  
 → Nello 1° fase vorrei che l'antenna potesse scivolare  
 BC fosse indeformabile → aggiungo carrello in B  
 su D ho lo scivolo → metto una forza esponente  
 $P=1$

Voglio trovare la rigidezza del sistema.

$$J = k - M$$

$$\rightarrow k = \frac{J}{M}$$

$J = 1$  imposto  
 $M = ?$  Devo imporre un  
 cinematisimo per  
 trovare poi  $k$ .



De Hiranda → Procedimento di statica grafica.  
 Con il carico in D, dato che non è indeformabile il  
 triangolo, il sistema si sposterà

B può muoversi in  $B'' \Rightarrow$  anche D in  $D'$   
 BD non è rigidezza  $\infty \Rightarrow$  si allunga  
 in  $D''$  (sulla stessa direzione)

Ho preso la rigidezza di AB, di BD e  
 devo tener conto della molla in D  $\Rightarrow$  la giu'

(Dato che D va giù, A verso)

$\Delta A$  sposta A in  $A' \Rightarrow$  anche B si sposta in  $B'$

AB non ha rigidezza  $\infty \Rightarrow B'$  si sposta in  $B''$  sulla stessa direzione

Unisco  $B''$  in  $D''$

Ho impostato il cinematisimo del sistema

Atti. Per il cinematisimo della parte BDC mi serve l'antenna potesse scivolare  
 inestensibile - Per la parte ABC no, la tolgo (tolgo il carrellino).

Quanto vale dunque  $k$ ?  $\rightarrow \Delta D$  l'inverso di  $\Delta$  rigidezza e' la cedevolezza

$$\Delta D = \frac{D'D''}{\sin \alpha} + \frac{DD''}{\tan \alpha}$$

$$D'D'' = B'B'' = \Delta A \cdot \tan \beta + \frac{B'B''}{\cos \beta}$$

$$\Delta D = \frac{D'D''}{\sin \alpha} + \frac{B'B''}{\cos \beta \tan \alpha} + \Delta A \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$$

$$D'D'' = T_1 \cdot \frac{l_1}{E_1 A_1} = \frac{T_1}{k_1}$$

$$B'B'' = T_2 \cdot \frac{l_2}{E_2 A_2} = \frac{T_2}{k_2}$$

$$T_1 = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$T_2 = \frac{T_1 \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{1}{\tan \alpha \cos \beta} \quad (\text{eq. bno in B})$$

Per l'eq. bno del carrellino B devo avere l'uguaglianza delle componenti  
 orizzontali. Sono alla fine. Lo spostamento in D vale:

$$\Delta D = \frac{1}{k_1 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{k_2 \cos^2 \beta \tan \alpha} + \Delta A \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$$

prof. MANUELO

# LEZIONE 6

26 NOV. 13

## COPERTURE RETICOLARI SPAZIALI DI GRANDE LUCE

Tra gli anni '50 e gli anni '90 la LEGGEREZZA era diventata quasi un culto ossessionante in tutti i campi: (lettura Italo Calvino: inizio conferenza)  
 → ELEGANZA PURA.

### CONTENUTI

I contenuti della lezione provengono da una tesi di laurea.

È importante avere l'idea chiara sulla classificazione delle coperture. Possiamo partire dalla classificazione legata al grigliato di travi in ogni singolo strato.

Possiamo avere coperture a singolo strato a 2 vie, a 3 vie, e ...

A livello strutturale confronto a e c?

Cosa succede? Qual è la differenza?

In c travi, i nodi con le diagonali, lo schema è controventato  
 ⇒ Ho sforzi di trazione compressione.

L'effetto del momento flettente è subito assorbito dai diagonali.

Se a, ho struttura più leggera, posso coprire più luce perché non ho diagonali, ma ho momento flettente nei nodi.

→ Si sviluppano da una parte travi-strutture e dall'altra travi e reticolo.

La struttura non è più resistente per forza ma per forma.

→ Si studiano le CATENARIE.

Possiamo usare elementi quadrati senza diagonali ma usando elementi sottili → Reduzio momento e taglio per forma.

Ci sono poi i reticolari spaziali, a 2 strati.

- 2 vie su 2 vie

- disposizioni e diagonali sempre su due strati (f).

Volta reticolare a botte.

→ Pier Luigi Nervi - hangar per aeroporti

Le travi sostengono una sovrastruuttura e nasconde i diagonali nella copertura stessa che è in cemento armato.

Nervi usò la soletta in ds per creare l'effetto del diagonale.



E se la copertura è di vetro?

Cupole reticolare - vedi vari tipi

## EVOLUZIONE TEMPORALE (1928 - 2001)

- 1° Pantheon - elementi in terracotta per alleggerire
- 2° Germania - 76m di luce
- 3° 196m - USA
- 4° 168m - Silver Domes
- 5° Tacoma Dome 160m
- 6° Suncoast dome 210m

al variare del materiale

Nello stesso tempo aumentano le dimensioni degli elementi in stesso materiale al variare dell'epoca

## ● SISTEMA TRIDIMENSIONALE ESAGONALE

Considero di partire da 1 maglia esagonale e voler unire un certo n° di vertici

Ma le ultime 2 curve valuto la differenza nel trattare il vincolo centrale come cerniera o incastrato.

Si considera la necessità di dover considerare diverse tipologie di cupole per coprire la stessa area

Diametro Dome  $f = 0,60m$   
 Se varo le condizioni di vincolo all'interno delle strutture, otengo

- ASTE INCERNIERATE: qe per circa 40 kN di carico ossevo un punto snap-trought
- ASTE INCASTRATE: il 1° snap-trought visibile è a circa 100 kN A 200 kN ho il collasso catastrofico

Se devo considerare situazioni limiti è difficile scegliere:  
 prendo una struttura più rigida che porti più carico?  
 o una struttura meno rigida che mi dà collasso graduale e previsto con grande spostamento?

Dipende da cosa voglio io e collasso?

Att: Ogni qual volta ho il fenomeno di snap-trought la struttura cambia completamente, cambiano anche le condizioni di vincolo e il comportamento però posso caricarla di più anche se la nuova configurazione è più vicina al collasso.

Ho delle strutture una ha più resistenza anche se rovinata che posso caricare di più - Questo è positivo ma negativo allo stesso tempo perché mi anticipo al caso di struttura rigida e collasso catastrofico.

Diametro Dome scelgo come parametro la faccia -  
 (l'abbassamento della cupola)  
 Confronto diversi f.

Una cupola molto ribassata soffre di instabilità per carichi molto bassi ma se previsto, lo evadente molto bene -

È meglio fare cupole basse o no? È una bella competizione -

La cupola ribassata potrebbe avere riserve che quella geodetica non ha.

Schwedler dome - Aste incernierate - incastrate

Apertura reticolare a singolo strato - e risposta

## RICERCA di FORMA: processi geometrici

Si definiscono una generatrice e una direttrice.

Hippo House 200 - Berlino, 2002

Ha 2 generatrici

Ho attenzione, a suo: tiranti.

Frey Otto copia la Multi-hallen di Mannheim con i tele e non usa il tirante, anzi, si permette di fare pure in legno.

Superfici solo - trasportabili.

Definisco la direttrice una la generatrice curva e consente di fare delle forme molto particolari

Esempio Frank O. Gehry

## RICERCA di FORMA: processi di tipo FISICO

Utilizziamo il processo fisico per definire la forma perché voglio il verdeggiare. Non decido più io e definire la forma? Voglio il risparmio in termini di materiale.

Superfici di minimo - (bolle di sapone)

Stadio olimpico di Stade Monaco - Expo di Montreal

CELESTIAL e MODELLI SOSPESI: Vengono alla Compressione Frey Otto non si inventa nulla ma si basa sugli studi di Gerdy

Frey Otto riprende i concetti e li ripete in scale ingrandite

## MODELLO di EQUILIBRIO STATICO

Approcciamoci diversi metodi.

Cominciamo analizzando il modo i-esimo e facendone l'equilibrio. Impostato l'eq. bno, siamo in condizioni statiche, vogliamo l'equilibrio.

incognite =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{posizione nodo} \\ \text{forze nelle aste} \end{array} \right.$  - per ottenere il sistema non lineare

Devono raggiungere la convergenza  $\Rightarrow$  devono iniziare il calcolo da un risultato già vicino a quello reale.

$\Rightarrow$  Facciamo un modello fisico e poi partendo da questo lo perfezioniamo con i calcoli e vanno.

Costi sono troppo elevati

$\Rightarrow$  L'ing. vuole condizioni statiche.

Il fisico: vuoi leggerizzo? Non usare la statica ma la dinamica.

Il regime dinamico consente di partire da soluzioni lontane dalle reali e trovare quella reale senza passare per i modelli fisici ma con modelli matematici.

(...) lettura slide ...

$$R_i = p_i + S_a + S_b + S_c$$

Perché introduco la forza d'inerzia e le dissipative? Ho 3 ragioni

- 1) Assicurare l'equilibrio
- 2) Immagina il rete, cade, si instabilizza, se lo faccio nel modo la rete non si ferma mai  $\Rightarrow$  con queste forze evita vibrazioni

ING. PIANA

27. NOV. 2013

# ANALISI MODALE CON EFFETTI DEL II° ORDINE

Abbiamo precedentemente visto l'analisi dinamica, oggi continueremo la lezione scorsa con degli esempi.

Il 1° risultato con il software AXIS VM → versione di prova scaricabile

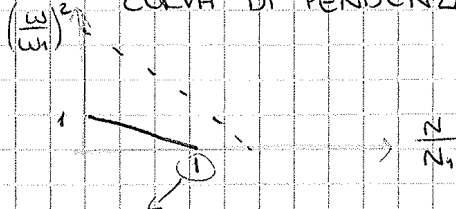
Il 2° riguarda i rinti sospesi, fatto con MATLAB

Ci concentriamo sui concetti e non sui calcoli.



La volta scorsa abbiamo ottenuto:

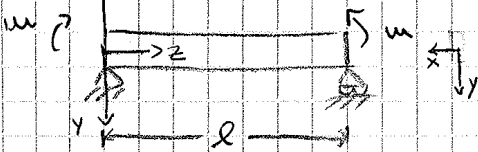
CURVA DI PENDENZA DELLA FREQUENZA DAL CARICO LINEARE



$w$  = pulsazioni flessionali  
 $w_1$  = pulsazione fondamentale  
 $L$  sono gli autovalori

Lo ottengo se trascuro la dinamica, e considero il 1° carico critico. Per queste condizioni di vincolo il grafico è lineare.

Caricata nel piano  $y-z$  → piano di maggiore rigidità flessionale, si applicano delle coppie: generano intorno ad  $x$  un momento costante in  $z$ . Al crescere di  $m$  si raggiunge un massimo per lo quale la trave si deforma ed esce dal piano.



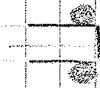
Agli estremi sono presenti dei sistemi che impediscono la rotazione lungo  $z$ , ma consentono la rotazione lungo  $x$ . (sono 2 cilindri)



Il diagramma di momento flettente è costante

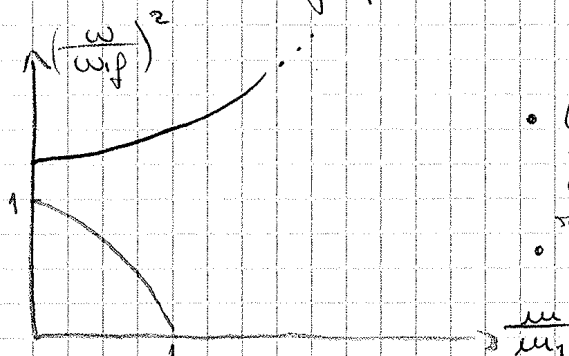
Al crescere delle coppie, la trave si deforma sempre più finché raggiunge instabilità sia flessionale che torsionale.

Bisogna inserire degli ulteriori vincoli.



Vogliamo vedere come variano le frequenze attorno a  $\omega$ .

Disegniamo



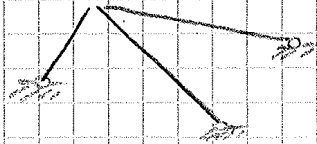
$m = 1, 2, \dots$  per ogni modo

- la 1° oscillazione parte da 1 e arriva a 1 ma non è più lineare, questa è relativa a  $m=1$  (flessionale)
- le torsionali al contrario salgono.  $m=1$  (relativo alla freq. torsionale)

La sua adimensionalità.

possiamo adimensionalizzare la frequenza rispetto a  $w_1$  flessionale o  $w_1$  torsionale. Si sceglie la 1° perché più bassa.

Considero tre aste: 1° SCHEMA - Vedi slide



Sez. circolare cava di acciaio 51 mm di diam. esterno e spessore 5 mm - Acciaio S235

Le sommità e le 3 aste sono connesse rigidamente. Caricare alla base.

Ipotizzo di applicare il carico in sommità.

Analizzo il comportamento di una reticolare.

Idealmemente nelle reticolari dovremmo avere  $M=0$ , nella realtà non è così perché ho attrito e di solito le aste vengono connesse più rigidamente rispetto al nucleo centrale.

Aste tutte tese se  $F_z$  è verso l'alto  
 inversa aste tutte compresse e problemi di instabilità al crescere di  $F_z$ .

Ipotizzo (Caso a)  $\rightarrow F_x$  lungo  $x$  o  $z$  aste compresse e una tesa  
 inversa (Caso b)  $\leftarrow F_x$  " " " " " tesa e una compressa

In questo caso non è semplice dire cosa accade.

Creo il modello

Caso b - Molto più rigido  $\Rightarrow$  Carico critico in campo elastico + elevato.

Vedo deformate modali e frequenze della struttura.

$\Rightarrow$  vedo i modi di vibrare della struttura quando non sono applicati carichi.

Vedo cosa succede se carico la struttura.

$F_x = 15 \text{ kN}$   $\approx$  la metà del carico critico.

Le deformate variano poco, le frequenze variano.  $f_1(III) = \text{freq. fondamentale}$   
 con analisi del II ordine.  $\rightarrow$  Caso a

Caso b  $\rightarrow$  Cambiano poco sia deformate che frequenze rispetto al caso di struttura carico.

Inoltre applico  $F_x = 15 \approx \frac{1}{10}$  del carico critico e nel caso b risulta essere  $\approx 150$

$\rightarrow$  in questo caso noto che la freq. aumenta  $\Rightarrow$  la struttura si sta irrigidendosi perché prevale il contributo delle aste tese.

Nel caso a avevo decremento di rigidità.

più generale per  $F$  che va da 0 a  $F_{critica} = 30 \text{ kN}$  (caso a)  
 vedo cosa succede

Nel caso b invece vedo che le frequenze non hanno andamento monotono  
 modo 1  $\rightarrow$  ho il cambio pendenza essendo  $\neq$  elemento compresso, prima  $\rightarrow$  poi la struttura si irrigidisce.



$\rightarrow$  Ho prima il comportamento irrigidite e poi "rammollite"

Noto che c'è uno scambio in un punto tra modo 1 e modo 3: questo è uno SCAMBIO MODALE:  $\rightarrow$  il modo 1 si scambia col 3 ad un certo punto.

Ecco l'influenza del carico.

Vedo ora qualche differenza se considero rispetto a questo caso diverse condizioni di vincolo.

PROF. MANUELLO

## LEZIONE 8

03 DIC. 2013

### EDIFICI ALTI: TAMPONAMENTI, CONTROVENTAMENTI, RIPARTIZIONE delle AZIONI ORIZZONTALI (Algoritmo generale)

Vediamo 3 edifici e pensiamo a cosa potrebbe succedere in caso di terremoto:

- DUBAI, Grattaciello 2010 BURI. KHAUFA (mista)
- Le Corbusier, Villa Savoye - 1928 cls
- TORRE de BURRI, 1764 ~ 40m Veneto (edificio storico)

Qual è la miglior risposta in termini di sollecitazioni orizzontali? Scala Villa Savoye la mette alle fine, ha la peggior risposta poiché bassa. L'edificio in muratura, ha un materiale meno resistente ma è regolare in altezza ed ha anche un nucleo centrale resistente. Abbiamo spesso nelle torri quelle 2 nuclei (uno interno e uno esterno) - torre degli Asinelli - Bologna.

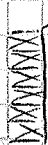
### Effetto di Vento e Sisma su edifici di grande altezza

Abbiamo una serie di tipologie planimetriche:

posso avere una serie di setti collegati a due a due o meno, posso avere elementi puntuali che costituiscono 2 nuclei (esterno e interno), nucleo centrale in ca e esterno con elementi puntuali, controventi esterni. Si tende a valutare ogni elemento come mensola singola.

Quali sono gli schemi strutturali che adottiamo?

- schemi con telaio
- elementi che competono con questi, IRREGOLAMENTI: questi funzionano come mensola.



elemento irregolare  
l'effetto dato è:

- AUMENTO RIGIDITÀ
- SNELEZZA DA UNITÀ

Se considero altezze maggiori (60-70 piani) posso aggiungere mensole e travi orizzontali.

Spesso si tende ad appendere il piano terreno al piano sopra, il nucleo irregolare parte dal 1° piano.

Per altezze maggiori si adottano diverse tipologie strutturali:

- FRAMED TUBE - irrigidimento portato all'esterno dell'edificio
  - TUBE IN TUBE - eq. schema tipico.
- Nucleo interno irregolare con scale, ascensori servizi.

#### John Hancock Center

Le diverse mensole sono collegate tra loro  
Ho elementi diseguali che collegano i diversi piani

Nella sezione del grattacielo ho pilastri con sollecitazioni molto diverse tra loro  $\Rightarrow$  la modellazione della sezione come grande mensola non può avvelarsi dell'ipotesi di sezione piana piani appesi. - soluzione molto usata.



In questo modo posso considerare diversi elementi indipendenti con diversi schemi e mensola, suddividendo la quota parte di arco.

- Pareti forate

### EFFETTO DEI TAMPONAMENTI NELLE STRUTTURE INTELAIATE SOTTOPOSTE A SOLLECITAZIONE SISMICA

→ Se ho 1 elemento che crea discontinuità, NON va bene.

Come valuto l'effetto dei tamponamenti? Ho 1 parete inserita nella maglia. Voglio capire quanto parte del tamponamento farà da elemento portante (lo spessore) e quanto farà da bella.

Ricordo 3 tipologie di crisi

- ① Crisi al centro per scivolamento - azione tagliante
- ② Crisi al centro poiché ho rigidità dell'elemento alta, connessione buona, ma gli edifici si muovono su un lato
- ③ Crisi al vertice per compressione

Posso osservare diagrammi sperimentali

Al decrescere di  $\frac{h}{d}$  ho un aumento dello spessore della biella  $w$

↓ 2H

→ Prova

Simile al comportamento sotto carichi laterali

↑ H

↑ H

Definisco e ricordo dei materiali gli spessori del pendolo equivalente.

### INTERAZIONE PANNELLO-TELAIO

$$\frac{w}{d} = \frac{\text{spessore biella}}{\text{diagonale maglia}} = 0,25 \rightarrow \lambda h = 5$$

Maggiore è  $w$ , maggiore sarà l'apporto di rigidità all'interno della maglia considerata complessivamente.

$\alpha$  = lunghezza in cui neutro la continuità tra pannello e struttura

la larghezza varia tra 0,25 e 0,15

All'aumentare di  $\frac{w}{d}$  vedo che  $\lambda h$  scende → senza tener conto dell'interazione  $\lambda h$ .

Stafford Smith usa per prima  $\lambda h$  e vede qual'è l'apporto delle bielle in elementi predeformati - FER.

10.a)

10.b)

Valutazione del parametro  $\alpha$

la continuità è definita dalle tensioni tangenziali che ho tra pannello e ossatura stessa.

$d_i^*$  = spostamento dell'  $i$ -esimo elemento  
 Le componenti si mettono in relazione con le rispettive componenti di  $d$  tramite l'uso di  $N$  ancora.

Ho la stessa configurazione dell'elemento  $i$ -esimo vista con gli sforzi adesso con gli spostamenti -

Anche in questo caso ricompongo una matrice  $B$  che tiene conto degli effetti di rotazione e spostamenti del sistema di riferimento.

Le forze ripartite sull'  $i$ -esimo elemento, sono connesse agli spostamenti  $t_i$ :

$$F_i^* = k_i^* \cdot d_i^*$$

$k_i^*$  = rigidezza dell'  $i$ -esimo elemento

Posso unire i 2 risultati:  $A_i F_i = k_i^* B_i d_i$

Completando:  $F_i = \begin{pmatrix} A_i^{-1} & k_i^* & B_i \end{pmatrix} d_i$

Contributi che ci consentono di passare dal sistema locale al sistema globale ( $- A_i$  e  $B_i$  -)

→ Ne consegue che  $k_i = A_i^{-1} k_i^* B_i$  rigidezza dell'  $i$ -esimo elemento nel sistema di riferimento globale.

→  $d_i = T_i d$  valuta l'effetto degli spostamenti complessivi dell'intero piano sull'  $i$ -esimo elemento.

$T_i$  matrice che tiene conto delle rotazioni del sistema di riferimento.

Si arriva a definire  $F_i = k_i (T_i d) = \bar{K}_i d$

$\bar{K}_i = k_i T_i$  rigidezza elemento tenendo conto degli spost. piani

Si assembla il tutto. Per l'eq. bno globale:  $\sum_{i=1}^{N_{TOT}} F_i = F = \sum_{i=1}^{N_{TOT}} \bar{K}_i \cdot d$

$\bar{K} = \sum \bar{K}_i$  Matrice globale di rigidezza

Il vettore degli spostamenti:  $d = \bar{K}^{-1} F = \bar{K}^{-1} F$

$\bar{K}_i \bar{K}_i^{-1}$  è la matrice di RIPARTIZIONE -

Questo si può fare a seconda delle connessioni che si hanno tra i diversi elementi -

Esempio numerico:

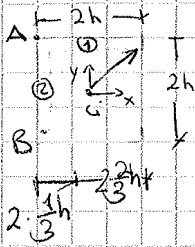
Sistematicamente si scrivono gli apporti dei vari elementi e potrà anche considerarsi strutture complesse.

DOMANI 7B

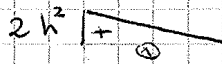
Punto per punto posso individuare  $h(s)$  e moltiplicare per la lunghezza del profilo che sto considerando.

### ESEMPIO NUMERICO

Scelgo il sistema  $x, y$  - Individuo  $G$  - Scelgo  $G =$  Origine di  $xy$



$w = h \cdot ds$   $h = \text{cost}$  nel 1° tratto  
 raggio vettore  $\rightarrow$  scelgo un verso di rotazione di  $n$   
 man mano che mi sposto  $h = \text{cost}$  e  $ds$  aumenta



Io individuo la forma della distorsione  
 Se la trave subisce una distorsione, il punto A per continuità della trave avrà la stessa distorsione sia se considerato nel tratto 1 che nel tratto verticale 2

② Nel tratto 2 dunque non parto da 0 ma da  $2h^2$

$$w = h \cdot S_2 + C$$

$$h \text{ varia} = \frac{2}{3}h$$

$$\rightarrow w_B = \frac{2}{3}h \cdot 2h + 2h^2 = \left(\frac{4}{3} + 2\right)h^2 = \frac{10}{3}h^2$$

L'equazione è sempre quella di una retta, trovo il valore in  $B = \frac{10h^2}{3}$

Per il tratto ③ valgono le stesse considerazioni.

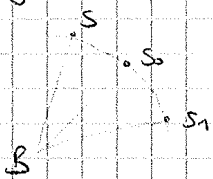
Il raggio vettore ruota sempre nello stesso senso  $\Rightarrow w$  cresce sempre  
 Se per percorrere il profilo devo cambiare verso al raggio vettore  $\Rightarrow$  la  $w$  decresce

La funzione della scelta iniziale (es.  $\int$ )  $\Rightarrow w$  cresce se  $\tau$  ruota in senso antiorario, altrimenti decresce (la sottraggio)

Fino ora abbiamo parlato di polo e origine arbitrari.

Se si fissa un polo arbitrario  $B$ , esiste un'origine principale per la sezione? Voglio far entrare nel calcolo la geometria intrinseca della sez.

Scelgo  $B$  e definisco 2 origini settoriali:  $S_1$  e  $S_0$



$$w_B(S_1, s) = w_B(S_1, S_0) + w_B(S_0, s) \quad (1)$$

Ipotesi:  $S_1, S_0 = 2$  origini differenti tale che

$$\int_A w_B(S_0, s) dA = S_w(S_0) = 0 \quad \text{NON. STATICO SETTORIALE}$$

$$\int_A w_B(S_1, s) dA = S_w(S_1) \neq 0 \quad \text{NON. STATICO SETTORIALE}$$

Dalla (1)  $w_B(S_0, s) = w_B(S_1, s) - w_B(S_1, S_0)$

Tram  $S_w(S_0) = \int_A w_B(S_1, s) dA - \int_A w_B(S_1, S_0) dA = 0$  per hyp.

Essendo  $S_1$  un'origine, il valore di  $w_B(S_1, S_0)$  è costante.

Devo trovare tutto il diagramma settoriale di un valore costante  $\frac{2}{3}h^2$

Nota che trovando il diagramma, questo in un punto si annulla. Quel punto corrisponde all'origine principale  $S_0$  - coord. settoriale principale.

Se faccio l'integrale del diagramma fuote trovo  $0 = S_w(S_0)$   
 NON STANCO SETTORIALE NULO.

Indichiamo altre due caratteristiche:

Momento d'inerzia settoriale:  $I_w = \int_A w^2 dA$

Momento d'inerzia settoriale misto:  $I_{wx} = \int_A w y dA$

$I_{wy} = \int_A w x dA$

$\begin{cases} I_w(S_0) = \\ I_{wx}(S_0) = \\ I_{wy}(S_0) = \end{cases}$  vedi slide fuote  $\rightarrow$  Comparo i momenti statici nelle formule

Da una coordinata origine generica posso ricondurre ai momenti statici e d'inerzia principali tramite semplici espressioni: slide.

N.B.: Se il sistema è baricentrico  $x_0 = y_0 = 0$

$\Rightarrow I_{wx}(S_0) = I_{wx}(S_1)$

Risultano essere indipendenti dall'origine settoriale scelta i momenti misti.

CARATTERISTICHE SETTORIALI PRINCIPALI della SEZIONE

Partendo da considerazioni principali, posso trovare un polo tipico della sezione

Cambiamenti di polo

Ipotizzo di avere 2 poli: A e B generici

$dW_A = (x - a_x) dy - (y - a_y) dx$        $dW_B = (x - b_x) dy - (y - b_y) dx$

Faccio la differenza e integro:

$W_A = W_B + (a_y - b_y)x - (a_x - b_x)y + C$   $\sim$  COSTANTE D'INTEGRAZIONE

Trovo C imponendo che  $W_A$  e  $W_B$  abbiano la stessa origine settoriale.  $S_0 = (x_0, y_0)$

nell'origine,  $W_A = W_B = 0 \Rightarrow C = -(a_y - b_y)x_0 + (a_x - b_x)y_0$

Dunque:  $W_A = W_B + a_y x - a_x y + a$   $\left. \begin{matrix} a_y \\ a_x \\ a \end{matrix} \right\} \text{definite}$

Calcolo  $I_{WA} - I_{WYA} - I_{WXA}$

$I_{WA} = \int_A W_A^2 dA = \int_A (W_B + a_y x - a_x y + a)^2 dA$

Note la espressione, faccio delle ipotesi:

- $\rightarrow$  SISTEMA di RIFERIMENTO BARICENTRICO
- $\rightarrow$  POLO B BARICENTRICO
- $\rightarrow$   $S_0$  è principale relativamente al POLO A

10 DIC 2013

ESAME GIOVEDÌ 30 GENNAIO  
GIOVEDÌ 27 FEBBRAIO

LEZIONE 9

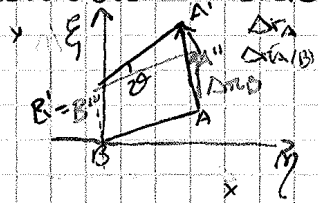
NUCLEI IRRIGIDENTI A SEZIONE SOTTILE APERTA: TEORIA di VLASOV

Estendo la necessità di valutare sistemi irrigiditi in edifici alti. Consideravamo da uno dei nostri nuclei irrigiditi o quello principale ad struttura abbia una sezione generica sottile aperta.

Di fatto consideravamo un regime di spostamento

$u, v, w \rightarrow$  COMPONENTI SPOSTAMENTO

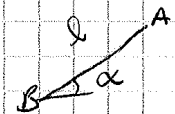
Considero l'ipotesi di indeformabilità trasversale della sezione. La sezione è come fosse quella di un tubo aperto (per es. per accogliere qualcosa). Il tubo si deforma, ma le sezioni non si deformano. Considero il sistema di riferimento e un segmento AB.



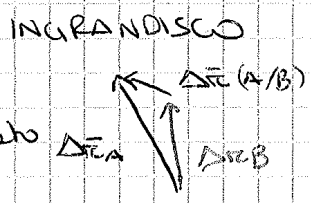
Voglio vedere cosa succede al segmento se traslo in A''B'' e poi ruota di un angolo θ intorno a B'' spostandosi nella posizione A'B'.  
Voglio valutare ΔrA

$$\Delta r_A = \Delta r_B + \Delta r(A/B)$$

$\Delta r_B =$  traslazione  
 $|\Delta r(A/B)| = l \Delta \theta \cdot (-\sin \alpha i + \cos \alpha j)$   
 $\alpha =$  inclinazione iniziale del segmento AB



$$\begin{cases} \Delta r(A/B)_x = -\Delta \theta l \sin \alpha = -\Delta \theta l \cos \alpha \\ \Delta r(A/B)_y = \Delta \theta l \cos \alpha = \Delta \theta l \sin \alpha \end{cases}$$



Considero un sistema di riferimento  $\xi, \eta$  centrato in B.

$$\begin{cases} u = \xi(z) - \theta(z) y \\ v = \eta(z) + \theta(z) x \end{cases}$$

La componente di spostamento lungo t:  $\bar{d}_t = \bar{d} \times (\bar{u}_t)$  versione

$$\bar{u}_t x = \cos \alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\bar{u}_t y = \sin \alpha = \frac{dy}{ds}$$



Come espreso la proiezione?

$$\begin{aligned} & (u_i + v_j) \cdot \left( \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j \right) \\ \bar{d}_t &= (\xi - \theta y) \frac{dx}{ds} + (\eta + \theta x) \frac{dy}{ds} \\ &= \xi \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds} + \theta \left( x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \\ & \hspace{10em} h(s) \end{aligned}$$

Se penso alla sezione noto che il termine che moltiplica la rotazione θ rappresenta la distanza h(s) considerando la direzione normale  $u_n$

## SOLLECITAZIONI

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA \\ M_y &= \int_A \sigma_z x dA \\ M_x &= \int_A \sigma_z y dA \end{aligned}$$

} Le definisco in termini di momenti statici e d'inerzia

Ho da esprimere una nuova sollecitazione

$$B = \int_A \sigma_z \omega dA = E (S_{\omega} \zeta' - I_{\omega y} \xi'' - I_{\omega x} \eta'' - I_{\omega \omega} \vartheta'')$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z dA &= \text{FORZA} \\ \omega &= \text{Area} \end{aligned} \right\} \text{Forza} \cdot \text{braccio} \cdot \text{braccio}$$

E' un BIRIMENTO e tiene conto dell'ingobbimento della sezione.

N.B.: Abbiamo definito momenti statici:  $S_y, S_x, S_{\omega}$   
e i momenti del II ordine:  $I_{xx}, I_{yy}, \dots$

In condizioni generali di carico, non ho soltanto  $\sigma_z$ , ma ho anche gli sforzi taglianti e il momento torcente

$$T_x, T_y, M_z = \int_A \tau_z h dA$$

$$\begin{aligned} dw &= h(s) ds \\ dA &= b \cdot ds \end{aligned} \quad C = \text{sezione a C}$$

$$\rightarrow T_x = \int_C \tau_z b \frac{dx}{ds} ds \quad \text{Ho 2 funzioni: } \begin{matrix} \textcircled{1} \tau_z b \\ \textcircled{2} \frac{dx}{ds} \end{matrix}$$

$$\text{Integro per parti e ottengo} = - \int_C \frac{d(\tau_z b)}{ds} x ds$$

Lo stesso per  $T_y$  e  $M_z$

Considero l'equilibrio in un punto appartenente a un tratto di sezione. Trascuriamo i termini finiti  $\tau_z$  e  $\sigma_z$  e faccio l'eq. bno alla trazione verticale:

$$\frac{d(\tau_z b)}{ds} ds dz + \frac{d(\sigma_z b)}{ds}$$

Questo è l'altro modo per definire  $T_x, T_y$  e  $M_z$ .

Si dimostra che il birimento  $B$  è legato al momento torcente.

Li collegiamo alle CdS esterne:  $p_x, p_y, m_z$  derivando ulteriormente.

Considerazione generale sul campo di sollecitazioni

$$\text{Momento torcente: } M_z = M_z^{\omega} + M_z^t$$

$$M_z^t \rightarrow \text{usata} = G J_t \vartheta'$$

$$M_z^{\omega} = -E I_{\omega \omega} \vartheta''''$$

Considerando  $\frac{dM_z}{dz} = -m(z)$  e sostituendo il valore di  $M_z$ :

$$E I_{\omega \omega} \vartheta'''' - G J_t \vartheta'' = m(z) \quad \text{TIMOSHENKO}$$

(L'altro era di VLASOV)

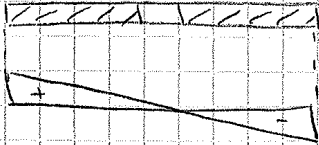


$$\frac{d^2 v_p(x)}{dx^2} - \alpha^2 v_p(x) = \frac{-(M_0(x) + k v(H))}{EI_{tot}}$$

Sostituisco  $v_p$  della soluzione particolare e trovo che risulta soddisfatta.

C.V.D.

Ho anche un esempio.

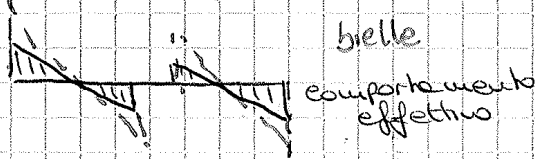


La prossima volta vedremo l'interazione tra mensola e telaio. Negli edifici alti non è detto che la sollecitazione più importante è il taglio.

→ Per travi snelle il taglio è trascurabile

→ In edifici tozzi invece le  $\sigma$  e le  $\tau$  sono paragonabili: il taglio e il momento flettente sono importanti.

Se i travi sono intesi come travi, non ho l'effetto del momento applicato ad ogni piano



Perdono - ho saltato il pezzo. — . — "

Nota la linea elastica per i viti si ha:

$$M_i(x) = -EI_i \ddot{v} = -EI_i \alpha^2 (A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x) + EI \frac{q}{k}$$

Procedimento di Rosman - Beck - Non la chiedo una potete leggerla

→ Alla fine c'è un ESEMPIO DI CALCOLO



## LEZIONE 10

### INTERAZIONE STANCA TRA ELEMENTI IRRIGIDENTI TUBOLARI (CHIUSI O APERTI), SETTI E TELAI

Si estende il discorso di Vlasov a più mensole sottili aperte.

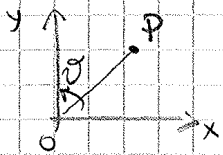
Sono nel caso di  $\varepsilon$  edificio.

- Le mensole sono rigide nel piano  $\Rightarrow$  Bastano 3 gdl (traslazione + rotazione) per descrivere tutti i punti del piano e dunque della mensole. (per piano 3gdl)
- La realtà è un'ipotesi anche reale.
- Sono libere di deformarsi fuori dal piano  $\rightarrow$  sono mensole con sezioni sottili aperte. Se avessi piano infinitamente rigido nel loro piano non potrei avere una deformazione data dal biamento  $\Rightarrow$  Piani  $\infty$  flessibili e travi che possono ingobbirsi senza irrigidimenti locali.

IPOTESI  $\rightarrow$

Date queste 2 ipotesi, per la generica mensole vale:  $\{F_i\} = E [J_i] \{f_i''''\}$  (\*)

La realtà doverò usare  $\{f_i''''\}$  che poi metterò in relazione con  $\{f_i''''\}$



$$\begin{cases} u_p = u_0 + y_p \theta \\ v_p = v_0 + x_p \theta \end{cases}$$

Essendo rigido il sistema (il piano), posso esprimere gli spostamenti di un generico punto P in funzione dello spostamento generico del piano.

$$\{f_i\} \Rightarrow \{f\}$$

$\hookrightarrow$  SPOSTAMENTI DI PIANO

La relazione (\*) può scriversi per tutti i componenti.

A questo punto scrivo le equazioni d'equilibrio individuali

$$[J] = \sum J_i$$

$\rightarrow$  Per l'intero edificio costituito da n componenti con sezione sottile aperta trovo l'equazione:

$$\{f''''\} = \frac{1}{E} [J]^{-1}$$

Come fatto prima, scrivo le equazioni al contorno

Att: Tornando all'eq. me (\*), posso per un componente in qualsiasi punto di riferimento. Se scelgo un punto e per tutti i componenti uso quel punto  $\Rightarrow$  utilizzo  $\{f_i''''\}$

Se sposto il polo per ogni singola mensole  $\Rightarrow$  uso  $\{f_i''''\}$

La  $J_i$  ha le forme geometriche più quelle settoriali.

Quelle settoriali sono riferite al polo globale se in (\*) ho  $\{f''''\}$

Quelle geometriche si riferiscono al baricentro della sezione, perché nell'ipotesi di  $N=0$  ho

$$\xi' = x_0 \xi'' + y_0 \eta'' + w_0 \zeta''$$

$$M_y = -E (J_{yy} \xi''$$

$$M_x = -E ($$

$$B =$$

$\rightarrow$  fattore di ripartizione

$$\{F_i\} = [J_i] [J]^{-1} \{F\}$$

la singola mensole assorbe un carico proporzionale alla sua rigidezza

# INTERAZIONE TRA NUCLEI IRRIGIDENTI A SEZIONE CHIUSA e APERTA.

## ESEMPI DI CALCOLO NUMERICO

Formulazione del problema  
E' molto complesso risolvere

$$F_i^* = E J^* \delta_i^{*IV}$$

$\Rightarrow F_i^*$  = vettore delle forze assorbite dall'elemento nel suo sistema di riferimento (locale  $*$ )

$[k_i^*]$  = Matrice di rigidità

$\{\delta_i^*\}$  = spostamenti

$$\rightarrow \{F_i^*\} = [k_i^*] \{\delta_i^*\}$$

Passando ad un edificio tridimensionale, posso pensare i carichi come fossero concentrati nel piano (es: vento, è distribuito, lo considero concentrato)

A questo punto posso studiare il singolo carico vento nel suo sistema di riferimento  $\Rightarrow$

$$[J_i^*] = \begin{bmatrix} J_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & J_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$$

Deflusso per un singolo carico vento deflusso un sistema barocentrico  $\Rightarrow J_{xy} = 0$

Scelgo anche il carico di taglio come pda e scelgo l'origine principale per il calcolo rotazionale  $\rightarrow J_{xy} = J_{yx} = 0$   
 $\Rightarrow$  la matrice delle inerzie è diagonale e auto:

$$\begin{cases} E J_w \vartheta^{IV} - G J_t \vartheta^{IV} = 0 & \rightarrow \text{eq. ne della rotazione: Timoshenko} \\ E I_x^* y_e^{IV} = 0 \\ E I_y^* z_e^{IV} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{eq. ne della linea elastica}$$

Otengo dunque 3 equazioni disaccoppiate

$$\text{sommate} \rightarrow \begin{cases} \{ \delta_i^* \} = - \frac{1}{E} [J_i^*]^{-1} \{ F_i^* \} \\ \delta_i^*(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{base incastrata} \begin{cases} \delta_i^*(NH) = 0 & \text{rotazioni} \\ \delta_i^*(NH) = 0 & \text{spostamenti} \end{cases}$$

At: sezione per sezione fanno l'integrazione. Per i seguenti intervalli sono solo le condizioni di continuità  
Per il 1° tratto e l'ultimo invece considero le condizioni vincolari.

Dagli spostamenti ottengo la matrice di cedevolezza invertendo thro la matrice di rigidità  $[k_i^*] = [c_i^*]^{-1}$