NUMERO: 1266

ANNO: 2014

A P P U N T I

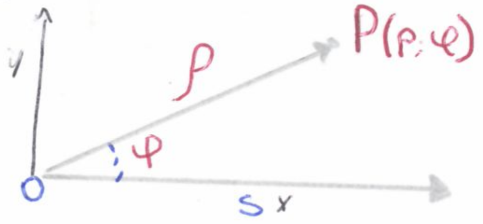
STUDENTE: Tosti

MATERIA: Geometria, Prof. Camerlo

GEOMETRIA CAP 1.

VETTORI DEL PIANO, NUMERI COMPLESSI, EQUAZIONI ALGEBRI

COORDINATE POLARI: Un sistema di coordinate polari (O, s) nel piano α è costituito da un pt O (detto polo) e da una semiretta uscente s (detta asse polare)



LA POSIZIONE DI UN PT P È INDIVIDUATA dalla distanza ρ di P da O e dall'angolo φ

I numeri ρ e φ sono detti coordinate polari di P.

Si scrive: $P(\rho; \varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} = \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\varphi = y/x \end{cases}$$

VETTORI APPLICATI:

DEFINIZIONE: Sia O un pt fissato del piano. Si chiama VETTORE APPLICATO in O un segmento orientato OP dove $P \neq O$.

↳ caratterizzato da:
1) direzione
2) verso
3) modulo

SOMMA DI VETTORI: ⇒ COMMUTATIVA, ASSOCIATIVA.

DIREZIONI DIVERSE: USO LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

DIREZIONI UGUALI:

a) STESSO VERSO: $\vec{OP} + \vec{OQ}$ è quel vettore $\vec{OR}$ avente direzione e verso dei due vettori dati e modulo = alla somma dei moduli.

b) verso opposto e moduli diversi: " " " " " direzione dei due vettori dati, e verso uguale a quello del vettore di modulo >, modulo = differenza dei moduli.

c) verso opposto e moduli uguali: ottengo il vettore nullo

OPPOSTO DEL VETTORE: vettore con stessa direzione, modulo, ma verso opposto: $V + (-V) = 0$

~~PRODOTTO NUMERO / * VETTORE~~

PRODOTTO NUMERO PER VETTORE:

⇒ modulo è: $|a||v|$

⇒ direzione = a v

⇒ verso si mantiene o diventa l'opposto a seconda se $a > 0$ o $a < 0$

ANGOLO DI 2 VETTORI MEDIANTE LE COMPONENTI C1.3

$$\boxed{\cos \hat{VW} = \frac{V \cdot W}{|V||W|} \rightsquigarrow \frac{V_x W_x + V_y W_y}{\sqrt{(V_x)^2+(V_y)^2}\sqrt{(W_x)^2+(W_y)^2}}}$$

Vettori liberi:

=> POSSONO SPOSTARSI NEL PIANO SENZA CAMBIARE LUNGHEZZA, DIREZIONE E VERSO.

MODULO: lunghezza DI UNO QUALUNQUE DEI SEGUENTI CHE LO RAPPRESENTANO
In particolare se $V = P - O$ si ha $|V| = |\vec{OP}|$

VETTORE LIBERO: $P - O$

VETTORE APPLICATO: $\vec{PO}$

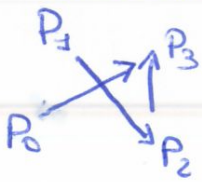
OPERAZIONI TRA VETTORI LIBERI:
=> SI CONSIDERANO I VETTORI APPLICATI E POI QUELLI LIBERI CORRISPONDENTI.

REGOLA DELLA POLIGONALE:
=> SI USA PER LA SOMMA

SI SCRIVE $V_1 = P_1 - P_0$ $\quad V_2 = P_2 - P_1$ .....
$V_n = P_n - P_{n-1}$

-> SI SOMMA FORMALMENTE: $V_1 + \dots + V_n = (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) \dots\dots = P_n - P_0$

graficamente:



COMPONENTI DI UN VETTORE LIBERO:
$V = B - A$

componenti sono: $V_x = x_2 - x_1$ $\quad V_y = y_2 - y_1$

$|V| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

TEOREMA DI SCOMPOSIZIONE: $V = V_x i + V_y j$

Grado di un polinomio: il massimo tra i gradi presenti

- GRADO DELLA SOMMA: è il massimo tra i 2 gradi
- GRADO DEL PRODOTTO: è la somma dei due gradi >

DIVISIONE TRA POLINOMI:

$a = bq + r$

a e b sono due numeri
q è il quoziente
r è il resto

es: $a = -23$
$b = -7$
$a = bq + r$
$-23 = -7 \cdot 4 + 5$ ovvero $q = 4$
$R = 5$

N.B. un polinomio di grado dispari ha sempre:
- una radice reale
- le altre non reali, coniugate a coppie di due

↳ inoltre, un polinomio di grado n, ha esattamente n radici
↳ (anche se ognuna sia contata con la sua molteplicità)

Teorema: ⇒ principio di identità dei polinomi

a) Un polinomio P(x) di grado n, che ammette n+1 radici distinte è necess. il polinomio identicamente nullo.

b) Due polinomi P(x) e Q(x) di gradi ≤ n che assumono lo stesso valore per n+1 valori distinti alla variabile X, sono necessariamente lo stesso polinomio.

es: non esiste polin. di grado 3 con le seguenti radici 1 5 8 3
perché può avere al max 3 radici

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio complesso di grado >0 ha almeno 1 radice complessa

Teorema sulle radici di un polinomio reale

Sia f(x) un polinomio reale e sia $x \in \mathbb{C}$ una radice complessa di f. Allora $\bar{z}$ è ancora una radice di f. Inoltre z e $\bar{z}$ hanno la stessa molteplicità.

Scomposizione polinomio reale di 2 grado

⇒ calcolo il Δ

- Δ>0 ho 2 radici reali distinte si ha dunque ⇒ $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$
- Δ=0 ho 1 radice reale " " " ⇒ $aX^2 + bX + c = a(X - x)^2$ con x reale
- Δ<0 f non è prodotto di polinomi reali di 1° grado, allora f ha 2 radici non reali, complesse, tra loro coniugate cioè: $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
  perciò il polinomio è prodotto di 2 polinomi non reali di 1°

* VEDI PRIMA I DETERMINANTI

PRODOTTO VETTORE

$$\circ \times \circ : \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \end{pmatrix} \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

PROPRIETÀ

- $u \times u = 0$
- $u \times v = -v \times u$ (anticommutat.)
- $(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda u \times w + \mu v \times w$
- NO! associativa
- $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$

esempio: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = i(-3) + j(-6) + k(-3) =$

PRODOTTO VETTORIALE: $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen}\alpha$

↳ $\operatorname{sen}\alpha = 0$ i 2 vettori sono $//$ o uno dei 2 è nullo, in poche parole se sono L.D.

AREA TRIANGOLO:

$$\frac{1}{2} |P_1P_2 \times P_1P_3| = \frac{1}{2} |(b-a) \times (c-a)|$$

PRODOTTO MISTO:

$$\_ \times \_ \cdot \_ : \begin{cases} \begin{pmatrix} R^3 \\ R^3 \\ R^3 \end{pmatrix} \to R \\ (u, v, w) \mapsto u \times v \cdot w := \det(u, v, w) \end{cases}$$

$|u \times v \cdot w|$ ⇒ può essere interpretato come volume del parallelepipedo di lati u, v, w

↳ risulta che: 3 vettori sono complanari se il loro prodotto misto si annulla.

esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$u \times v \neq 0$ abbiamo $u \times v \cdot u = 0$ $u \times v \cdot v = 0$

↳ allora: $u \times v = (|u||v| \operatorname{sen}\alpha) n$

ne segue che u e v sono tra loro $\perp$

allora: $\{u, v, u \times v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ⇒ utile per trovare vettore $\perp$ a 2 vettori dati!

esempio: $\perp$ a $\{i, i+j\}$ $i \times (i+j) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k$

- ESERCIZI -
CAP. 1

① SCRIVERE NELLA FORMA $a+ib$ IL N° COMPLESSO $(2-7i)/(5+3i)$

$$\frac{(2-7i)(5-3i)}{25+9} = \frac{10-6i-35i+21i^2}{34} = \frac{-11}{34} - \frac{41i}{34}$$

② CALCOLARE i^3, i^4, i^{35}, i^{53} => ALTRO METODO DIVIDERE PER 4

$i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^{35} = i^7 \cdot i^5 = -i$

$i^{53} = -i$

③ z, DIMOSTRARE CHE $|z| = |\bar{z}|$

PERCHE: $|a+ib| = |a-ib| \leadsto a+ib = a+ib$

④ $|1/z| = 1/|z| \leadsto \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}$

⑦ SCRIVERE IN FORMA TRIGONOMETRICA DI $z = 1+i\sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\theta = 60° = \pi/3$

$$z = 2\left(\cos\pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3\right)$$

⑧ $z = p(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$z' = p'(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')$ $\quad z/z'$

$$\frac{z}{z'} = \frac{p(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}{p'(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')}$$

⑨ FORMA TRIGONOMETRICA DI $(1+i\sqrt{3})/1+i$

$$z = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2} / 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

ecc....

ATTENZIONE!! ⇒ LE n-UPLE SONO ORDINATE, QUINDI es $(1,2,3) \neq (3,1,2)$ C.2.8

⇒ PER LA SOMMA, SI SOMMANO GLI ELEMENTI CORRISPONDENTI

⇒ PER IL PRODOTTO PER UN NUMERO, SI MOLTIPLICA ESSO PER TUTTI I MEMBRI

QUESTE OPERAZIONI, VERIFICANO LE 8 PROPRIETA' DI DEFINIZIONE DI K-SPAZIO VETTORIALE.
↳ PERTANTO K^n E' UNO SPAZIO VETTORIALE in particolare:

- R^3 (L'INSIEME DELLE TERNE DI NUMERI REALI) E' UN R-SPAZIO VETTORIALE rispetto alle operazioni definite per le terne
- C^2 E' UN C-spazio vettoriale

.... ecc...

MATRICI

DEFINIZIONE: TABELLA RETTANGOLARE DEL TIPO:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ dove $a_{11}, a_{12} \dots\dots a_{mn} \in K$

a_{ij} ⇒ i = INDICA LA **riga** DI APPARTENENZA
j = INDICA LA **COLONNA** DI APPARTENENZA

MATRICE DIAGONALE: HA TUTTI ELEMENTI NULLI tranne quelli sulla diagonale principale
es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

⇒ UNA MATRICE CON m RIGHE E n COLONNE E' DEFINITA $m \times n$ $(K^{m,n})$

$\boxed{\text{CHIEDI}}$: le righe di una matrice possono essere intese come elementi K^n e le colonne K^m

⇒ LA MATRICE SE HA $m = n$ SI DICE QUADRATA

N.B. $K^{1,n} = K^n$
$K^{m,1} = K^m$

SPAZIO VETTORIALE $K^{m,n}$ DELLE MATRICI $m \times n$

SOMMA DI DUE MATRICI: SI SOMMANO GLI **ELEMENTI CORRISPONDENTI** (TIPICO degli spazi vettoriali)
↳ LE MATRICI DEVONO AVERE: $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$

PRODOTTO MATRICE X NUMERO: SI MOLTIPLICA **OGNI MEMBRO PER IL NUMERO** (TIPICO DEGLI S. VETTORIALI)

SOMMA DI SOTTOSPAZI

W e Z sottospazi di V

$\Rightarrow W+Z=\{w+z \mid w\in W \text{ e } z\in Z\}$

↳ SOMMA DIRETTA SE: ogni vettore della somma si può scrivere in modo unico nella forma $w+z$
↳ DIRETTA SE E SOLO SE $W\cap Z=[0_V]$

NOTAZIONE
$W \oplus Z$

esempio: $(x,x,z)+(0,y,y)=(x,x+y,z+y)$ diretta

$\underbrace{(1\ 2\ 4)+(3\ 1\ 6)}=(4,3,10)=\underbrace{(1\ 2\ 6)+(3,1,4)}$

NON DIRETTA
perché si può ottenere da 2 o + somme diverse

TRASPOSTA DELLA MATRICE

$\Rightarrow {}^tA$ = TRASPOSTA DI A
↳ inverte righe con colonne.

es: $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&1\end{pmatrix}$ ${}^tA=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$

PROPRIETÀ:

- $A^{tt}=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$
- ${}^t(aA)={}^taA$

se $P^tP=I$

LA MATRICE È ORTONORMALE

⇒ LA MATRICE È ORTOGONALE SE E SOLO SE LA SUA TRASPOSTA È ORTOGONALE

⇒ NOTARE CHE SE $A={}^tA$ LA MATRICE È DETTA SIMMETRICA

es: $\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}$

↳ PARTICOLARI SIMMETRICHE SONO LE MATRICI DIAGONALI
↳ MATRICI I CUI ELEMENTI NON APPARTENENTI ALLA DIAGONALE SONO 0

es: $\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$

⇒ MATRICE ANTISIMMETRICA SE ${}^tA=-A$
↳ N.B. DEVE ESSERE QUADRATA E TUTTI GLI ELEM. DELLA DIAGONALE SONO 0

es: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE: HA TUTTI 0 SOTTO LA DIAGONALE PRINCIPALE C.2.6.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE: HA TUTTI 0 SOPRA LA DIAG. PRINC.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

RICORDA PICCOLE REGOLE DEL PRODOTTO TRA MATRICI:

1. $A \times B \neq B \times A$
2. $(AB)C = (AC)B = A(BC)$
3. E' vero che lo scalare 0 annulla una matrice ma non è detto che se $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$
4. $A(B+C) = AB + AC$ e viceversa!
5. SI PUÒ ESEGUIRE LA POTENZA della matrice quadrat (RICORDA $A^0 = I$)

FORMULA DI GRASSMANN

$$\boxed{\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W}$$

⇒ DUE VETTORI IN V_2 SONO L.D. SOLO SE HANNO DIREZIONE UGUALE.

⇒ DUE N-UPLE SONO L.D. SOLO SE PROPORZIONALI

⇒ 2 VETTORI SONO L.D. SE E SOLO SE $V_1 = 0$ O $V_1 = aV_2$

BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE ⇒ INSIEME libero DI GENERATORI

Una base di V è un insieme $B = (v_1 \dots v_n)$ DI ELEMENTI DI V con le seguenti proprietà:

a) B è ordinato (si indica con le tonde)

b) B è libero

c) B genera V

DIMENSIONE = n DI ELEMENTI della base

BASE CANONICA: $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \; \text{ecc..}}$

PER CONVENZIONE: SE V È LO SPAZIO VETTORIALE NULLO È CONVENZIONE DIRE CHE L'INSIEME VUOTO È UNA BASE DI V

COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO A UNA BASE

⇒ se $(v_1 \dots v_n)$ è una BASE DI V e $v \in V$, le componenti di v sono i numeri (n) $a_1 \dots a_n$ tali che $v = a_1v_1 \dots a_nv_n$ presi nell'ordine

- vettore nullo ha componenti $(0 \dots 0)$ rispetto a qualunque base
- se $(v_1 \dots v_n)$ è una base di V, v_1 ha componenti $(1, 0, \dots 0)$, v_2 ha $(0, 1 \dots 0)$ ecc...

ESEMPIO:

$v = (a, b)$ vediamo se si può scrivere $(a, b) = xv_1 + yv_2$ in modo unico

SI FA:

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \quad \text{l'unica soluzione è:} \quad x = \frac{a+b}{2} \quad y = \frac{a-b}{2}$$

Quindi sì, si può scrivere in modo unico e le componenti di (a, b) rispetto a tale base sono $\frac{(a+b)}{2}, \frac{(a-b)}{2}$

LE COMPONENTI DI W+V: SI OTTENGONO SOMMANDO ORDINATAMENTE LE COMPONENTI DI V e W

LE componenti di av: SI OTTENGONO MOLTIPLICANDO per a le componenti di V

DIMENSIONE (dim V)

SI DICE CHE IL K-SPAZIO VETTORIALE DI V ha DIMENSIONE n se V ha 1 BASE COSTITUITA DA n ELEMENTI.

OSSERVAZIONE: OGNI SPAZIO VETTORIALE HA ALMENO UNA BASE E QUINDI UNA DIMENSIONE CHE E' UN NUMERO INTERO.

↳ V è uno spazio VETTORIALE DI DIMENSIONE FINITA

CALCOLO DELLA DIMENSIONE: basta trovare una base e contarne gli elementi.

ESEMPIO. Lo spazio ordinato V_2 HA 2 ELEMENTI QUINDI HA DIMENSIONE 2

OSSERVAZIONE: DATO LO SPAZIO DEI $\mathbb{R}$ e DEI $\mathbb{C}$ ⇝ $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V}$

TEOREMA: Sia V uno spazio vettoriale DI DIMENSIONE n E siano $x_1, \dots, x_m \in V$. Allora:

a) se $x \dots x_m$ sono l.i. si ha $m \leq n$

a') se $m > n$ allora $x_1 \dots x_m$ sono l.d.

b) se $V = \mathcal{L}(x_1 \dots x_m)$ allora $m \geq n$

b') se $m < n$ allora $x \dots x_m$ non possono generare V

COROLLARIO:

Sia $\dim V = n$ e sia $E = (e_1 \dots e_n)$ UN INSIEME ORDINATO DI ELEMENTI di V. Allora i seguenti FATTI SONO EQUIVALENTI:

a) E è una base di V

b) E è libero

c) E genera V

N.B. PERMETTE DI ABBREVIARE IL PROCEDIMENTO DEGLI SCARTI infatti se è noto che $\dim V = n$ IL PROCED. SI SOSPENDE UNA VOLTA TROVATI n ELEMENTI

DIMENSIONE SOTTOSPAZI

- NON POSSONO SUPERARE QUELLA DEGLI SPAZI

⇝ SIA V SPAZIO VETTORIALE di DIMENSIONE n e sia $W \subset V$ un SOTTOSPAZIO:

a) $\dim W \leq n$

b) $\dim W = n$ se e solo se $W = V$

c) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

d) $\lambda \in K, u \in W \Rightarrow \lambda u \in W$

e) $O_v \in W$

CAP. 4

- RANGO, RIDUZ. MATRICI -

SPAZIO RIGHE, COLONNE

SPAZIO COLONNE ⇒ COL (A)
SPAZIO RIGHE ⇒ ROW (A)

⇨ IL SOTTOSPAZIO $\mathcal{L}(R_1 \dots R_m) \subseteq K^n$ GENERATO DALLE RIGHE DI A, SI CHIAMA SPAZIO DELLE RIGHE DI A E SI DENOTA CON R_A.

⇨ IL SOTTOSPAZIO $\mathcal{L}(C_1 \dots C_n) \subseteq K^m$ GENERATO DALLE COLONNE DI A, SI CHIAMA SPAZIO DELLE COLONNE DI A E SI DENOTA CON C_A

N.B. NON CONFONDERE INSIEME DELLE RIGHE $[(R_1 \dots R_m)]$ CON SPAZIO DELLE RIGHE $\mathcal{L}(R_1 \dots R_m)$ (VALE ANCHE PER COLONNE)

esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$

⇒ insieme delle righe è $(1,0)\,(0,1)\,(1,2)$

⇒ spazio delle righe $R_A = \mathbb{R}^2$

RANGO $\rho(A)$

RANGO DELLA MATRICE = NUMERO RIGHE L.I.

$$\rho(A) = \dim R_A = \dim C_A$$

esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^{3,2}$

⇒ SPAZIO DELLE RIGHE È $\mathbb{R}^2$ ⇝ QUINDI DIM 2

⇒ " " COLONNE È $\mathbb{R}^3$

RANGO ⇒ 2 PERCHÈ LA 3ª RIGA È C.L. DELLA 1ª E 2ª QUINDI NON È LIN. INDIP.

RANGO CON METODO DI RIDUZIONE

RIDUZIONE ⇝ PERMETTE DI TRASFORMARE UNA MATRICE IN UNA MATRICE RIDOTTA SENZA CAMBIARE LO SPAZIO DELLE RIGHE E QUINDI SENZA CAMBIARE IL RANGO.

RIDUZIONE PER RIGHE "PROCEDIMENTO"

- SI SCEGLIE ELEMENTO NON NULLO DELLA 1ª RIGA E SI ANNULLANO GLI ELEMENTI CHE STANNO AL DI SOTTO.

SI PROSEGUE PER LE SUCCESSIVE RIGHE ....

RIDUZIONE PER COLONNE "PROCEDIMENTO"
AVVIENE COME PER LE RIGHE, MA GLI ZERI COMPAIONO A DX E NON SOTTO.

SOTTOSPAZI DI K^n:
SIA $\mathcal{L}(w_1 \dots w_m)$ SOTTOSPAZIO DI K^n, ESSO PUO' ESSERE TRATTATO COME MATRICE

$$w_1 = (a_{11}, a \dots a_{1n}) \quad w_2 = (a_{21} \dots a_{2n}) \quad w_m = (a_{m1} \dots a_{mn}) \Rightarrow \text{MATRICE: } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO: 1

$f_1 = (1; 1)$ e $f_2 = (1, 0)$ FORMANO UNA BASE B DI R^2 IN QUANTO L.I.
infatti $\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

SIANO ORA $V_1 = 2f_1 - 3f_2$ $\quad V_2 = f_1 + f_2$ $\quad V_3 = 3f_1 - 2f_2$
SI TROVI BASE DI $W = \mathcal{L}(V_1, V_2, V_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} \end{pmatrix}$$

PRIME DUE L.I. QUINDI BASE FORMATA DA $W_1 = -5f_2$
$W_2 = f_1 + f_2$

ESERCIZIO 2

Sia $V = \mathcal{L}(e^x, \cos x, \operatorname{sen} x) \subset C^\infty(R)$ e sia $W = \mathcal{L}(V_1, V_2, V_3) \subset V$
dove $[V_1 = e^x - \cos x]$ $[V_2 = e^x + \cos x + \operatorname{sen} x]$ $[V_3 = 2e^x + \operatorname{sen} x]$ calcola DIM e TROVA BASE:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$V_1 = e^x - \cos x$
$V_2 = 2\cos x - \operatorname{sen} x$
DIM W = 2

esempio Mercadante: C.L.S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & -2a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & a \\ 0 & 0 & \boxed{6a} & a+2a^2 \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$ Rank $A = 3$

$a = 0$ Rank $A = 2$

RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI

C.S. 2

L'INSIEME DELLE SOLUZ. DEI SISTEMI LINEARI E' UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE $K^{(n,1)}$ DETTO **KERNEL** ⇝ Ker(A) $(n-R)$

↳ OMOGENEI: Algoritmo Risolutivo:

1. DATO S. LINEARE OMOGENEO, SCRIVERE LA MATRICE DEI COEFF.
2. RIDURRE A
3. LEGGERE SOLUZIONI

N.B PER LA SOSTITUZIONE SI PARTE DALL'ULTIMA EQ.

ESEMPIO:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{PER CUI:} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5t = 0 \\ x_2 - x_3 - 2t = 0 \\ x_4 = t \\ x_5 = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3t - 3u \\ x_2 = u + 2t \\ x_3 = u \\ x_4 = t \\ x_5 = -2t \end{cases} \quad \text{DA CUI} \quad x = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SPAZIO DELLE SOLUZIONI: $\mathcal{L}\{(3,2,0,1,-2),(-3,1,1,0,0)\}$

NOTA BENE: $A \sim B \iff \text{Ker}(A) = \text{Ker}(B) \iff \text{ROW}(A) = \text{ROW}(B)$

Attenzione! Le mosse di Gauss preservano lo spazio delle RIGHE! MA non quello delle colonne!

DETERMINANTI

MATRICE QUADRATA

DEFINIZIONE: è il numero che si calcola così:

1. Per ogni permutazione $(i_1, i_2 \dots)$ si calcola il prodotto $(a_{1i_1} a_{2i_2} \dots)$
2. A ciascun prodotto si mette segno + se la permutaz. è pari e − se è dispari
3. Si esegue la somma algebrica dei n° ottenuti

in pratica:

2x2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

esempio riepilogante:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 9 - 24 = -15$

3x3 esistono 2 modi:

① REGOLA DI SARRUS:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

② FORMULA DI LAPLACE

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{*} - a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{*} + a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{*}$$

* minori complementari

⇒ se considero anche il segno sono: complementi algebrici esempio mercadante:

Calcola Inversa di $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

determinante: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \leadsto -3$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{+} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{3} = I_A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

INVERSA OTTENIBILE MEDIANTE METODO DI RIDUZIONE

⇒ se A è invertibile allora la forma super ridotta della matrice $(A|I_n)$ coincide con $(I_n|A^{-1})$

esempio mercadante

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

- Posso ottenere il rango con il procedimento inverso

1. Prendo 1 minore di ordine n non nullo
2. Calcolo i minori di ordine $n+1$ che contengono n
   - a) sono tutti nulli, rango $= n$
   - b) non sono tutti nulli, allora prendo quello non nullo e calcolo i minori di ordine $n+2$ che lo contengono.
3. Ripeto fin quando il ciclo non è concluso.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

ora calcolo tutti quelli che lo contengono di ordine 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{è } 0$$ perché ha 2 righe = quindi ordine 3

SPAZI VETTORIALI ISOMORFI:

- NEL CASO IN CUI TRA GLI SPAZI VETTORIALI ESISTA ALMENO UN ISOMORFISMO ESSI VENGONO DETTI SPAZI VETTORIALI ISOMORFI → OGNI ELEMENTO DI 1 PUO' ESSERE IDENTIFICATO CON 1 ELEMENTO DELL'ALTRO.

ESEMPIO IMPORTANTISSIMO!
IL PROTOTIPO DI TALE 'IDENTIFICAZIONE' E' COSTITUITO DALL'ISOMORFISMO $V_n \simeq_\beta K^n$ DETERMINATO DALLA SCELTA DI 1 BASE β NEL K-SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE V_n.

IMMAGINE DI UNA A.L.

L'IMMAGINE DI UNA A.L. $f: X \to Y$ E' UN INSIEME $\subseteq Y$

→ NEL CASO PARTICOLARE IN CUI SIA $f \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ E' FACILE DIMOSTRARE CHE L'INSIEME $\mathrm{Im}(f)$ E' UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE V LA CUI DIMENSIONE E' RANGO DELLA A.L. detto $\mathrm{RANK}(f)$

SURRIETTIVITA' A.L.: $f: X \to Y$ E' DETTA SURRIETTIVA SE $\mathrm{Im}(f) = Y$

$$\boxed{f \text{ SURRIET.} \iff \underset{\mathrm{Col}(F)}{\mathrm{Im}(f)} = V \iff \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\mathrm{RANK}(f)} = \dim V}$$

NUCLEO DI UNA A.L. o KERNEL

SI DEFINISCE NUCLEO o KERNEL (Ker) DELLA A.L. $f: U \to V$ DENOTATO COME $\mathrm{KER}(f)$ L'INSIEME COSTITUITO DA TUTTI I VETTORI DI U CHE VENGONO MAPPATI IN 0_V. $\mathrm{KER}(f) := \{u \in U \mid f(u) = 0_V\} = f^{-1}(0_V)$

$\Rightarrow \mathrm{DIM}(\mathrm{KER}(f))$ = NULLITA' DELLA A.L. DENOTATO COME $\mathrm{null}(f)$

INIETTIVITA' A.L.: $f: X \to Y$ E' DETTA INIETTIVA SE $\forall x_1, x_2 \in X$ vale $f(x_1) = f(x_2)$ CHE IMPLICA $x_1 = x_2$

$$\boxed{f \text{ INIETTIVA} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \underbrace{\mathrm{DIM}(\mathrm{Ker}(f))}_{\mathrm{null}(f) \,=\, n-r \,=\, \mathrm{Ker}(F)} = 0}$$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

C.6.4

Per $\forall f \in Hom_K(U,V)$ vale:

$$\boxed{\dim U = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{\text{null}(f)} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\text{RANK}(f)}}$$

ESERCIZIO (7)

Sia a.l. (f) corrispondente alla matrice F

$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ Determina per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f)$

<u>RISPOSTA:</u>

$$F = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \lambda \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 & \lambda^2 \end{array}\right) \overset{\text{Riduco}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 & 4+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{array}\right)$$

Per essere compatibile avrò: $\lambda^2+\lambda-2=0$

$\lambda = 1$ o $\lambda = -2$

RICAPITOLANDO:

- DIMENSIONE $\mathrm{Im} f = \overset{\text{colonne L.I.}}{\rho A}$
- BASE DI $\mathrm{Im} f$ SI TROVA:
  - A. Applicando scarti successivi alle colonne, le colonne rimanenti danno le componenti rispetto a F di una base di $\mathrm{Im} f$
  - B. Riduzione di A per colonne, le colonne non nulle della matrice ridotta danno le componenti rispetto a F di una base di $\mathrm{Im} f$.

- COROLLARIO

  ↳ f è surriettiva se e solo se $\rho(A) = \dim W$

  f è " " " " " le righe di A sono L.I.

- DIMENSIONE $\ker f = \dim V - \rho(A)$
- BASE DI $\ker f$ SI TROVA
  - A. Si trova una base $(s_1 \dots s_n)$ dello spazio vettoriale delle soluz. del sistema lineare omogeneo $AX = 0$
  - B. Si costruiscono i vettori $v_1 \dots v_n \in V$ aventi per componenti rispetto alla base E, le n-uple $(s_1 \dots s_n)$ allora $(v_1 \dots v_n)$ è un base di V.

- COROLLARIO; si $f\ V \to W$ e E $\dim V = \dim W$, allora f è un isomorfismo, è iniettiva ed è suriettiva

ALTRO MODO PER OTTENERE IL CAMBIO DI BASE:

Sia V un K-spazio vettoriale e siano:

$E = (e_1 \dots e_n)$
$F = (f_1 \dots f_n)$ BASI DI V

allora: $\exists$ una matrice $P = (p_{ij}) \in K^{n,n}$ tale che:

MATRICE DI PASSAGGIO DA E a F

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= p_{11}e_1 + \dots + p_{n1}e_n \\ &\dots\dots \\ f_n &= p_{1n}e_1 + \dots\dots p_{nn}e_n \end{aligned}}$$

NOTA BENE: F è ortonormale se e solo se P è ortogonale

TEOREMA SULLA MATRICE DI PASSAGGIO

a) V spazio vettoriale ed E, F basi di V e P = matrice di passaggio da E a F allora P è invertibile e P^{-1} è la matrice di passaggio da F a E

ESEMPIO LIBRO (PAG 123)

$\mathbb{R}^3$ sia $E(e_1, e_2, e_3)$ base canonica
sia $F(f_1, f_2, f_3) \Rightarrow$ dove: $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - e_3$, $f_3 = e_2 + e_3$

F è una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice di passaggio da E a F ha per colonne le componenti di f_1, f_2, f_3 rispetto ad E:

$$P_{E \to F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Viceversa la matrice di passaggio da F a E ha per colonne le componenti di e_1, e_2, e_3 rispetto ad F

$e_1 = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3$
$e_2 = -\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3$ per cui $P_{F \to E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$e_3 = \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3$

CHIAMIAMO Q

SI VEDE CHE $PQ = I$ QUINDI $Q = P^{-1}$

ESERCIZIO (8):

Sia f endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $F^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Sia $\beta := \left(b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

1. scrivi $F^{\mathcal{E}\beta}$
2. scrivi $F^{\beta\beta}$

Risposte:

1. $F^{\mathcal{E},\beta} = \left(f(b_1)_{\mathcal{E}} ; f(b_2)_{\mathcal{E}} \right)$

$$f(b_1)_{\mathcal{E}} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f(b_2)_{\mathcal{E}} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mathcal{E}\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $f(b_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $f(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vanno espressi rispetto alla base β

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \mu_1 = 3 \\ \mu_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow F^{\beta\beta} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

TEOREMA: MATRICE ASSOCIATA ALLA SOMMA DI 2 A.L.

La matrice associata alla somma di 2 A.L. è uguale alla somma delle matrici associate, pur di usare sempre le stesse basi!

$$M^{E,F}_{\varphi+\phi} = M^{EF}_{\varphi} + M^{EF}_{\phi}$$

TEOREMA: MATRICE " " A.L φ

$$M^{EF}_{\alpha\varphi} = \alpha M^{E.F}_{\varphi}$$

TEOREMA: MATRICE ASSOCIATA ALLA COMPOSIZIONE DI 2. A.L.

$$M^{EG}_{\varphi\circ\phi} = \left(M^{FG}_{\varphi} \right) \left(M^{E,F}_{\phi} \right)$$

ESEMPIO: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = (x+y, x-y)$ e

$g(z,t) = 2z - t$

$g \circ f(x,y) = g(x+y, x-y)$

$= 2x + 2y - x + y = x + 3y$

- CAPITOLO 7 -
AUTOVALORI E AUTOVETTORI

DEFINIZIONE:

Sia $f \in End(V = K^n)$. Se esistono 1 $\lambda \in K$ e 1 vettore non nullo $v \in V$ tale che risulti:

$$f(v) = \lambda v$$

una matrice è sicuramente diagonalizz. se per es: 3x3 ha 3 autovalori

AUTOVALORE lo calcolo annullando 1 matrice

λ è autovalore se e solo se $Ker_f \neq [0]$ ovvero se non iniettiva

AUTOVETTORE

- $v \neq 0$
- se v è autovettore di f rispetto a λ allora anche qualsiasi multiplo di v lo è.

ESEMPIO: sia (v, v_1, v_2, v_3, v_4) base di V

$$f: \begin{cases} v \mapsto v \\ v_1 \mapsto v_2 \\ v_2 \mapsto v_3 \\ v_3 \mapsto v_4 \\ v_4 \mapsto v_1 \end{cases}$$

allora: $f(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = \underbrace{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}_{\text{autovettore di } f \text{ rispetto all'autovalore } \lambda = 1}$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI ASSOCIATI A MATRICI QUADRATE

Sia $A \in K^{n \times n}$ se esistono un $\lambda \in K$ e un vettore $\neq 0$ $\in K$ | risulti:

$$Av = \lambda v$$

autovettore di A associato a autovalore

TEOREMI:

$\Rightarrow$ autovettori $\neq 0$ corrispondenti a autovalori $\neq$ sono L.I

$\Rightarrow$ Se $\dim V = n$, ogni endomorfismo di V ha al più n autovalori distinti

POLINOMIO CARATTERISTICO DI UNA MATRICE $n \times n$

$A \in K^{n \times n}$

$$\boxed{P.C. = \det(A - \lambda I)}$$

$\Rightarrow$ Risulta che: λ è autovalore di A se e solo se è soluzione del suo p.c.

DETERMINAZIONE AUTOVETTORI NOTI GLI AUTOVALORI

risolvo:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

DIAGONALIZZABILITA' MATRICI

DUE MATRICI A e B vengono dette SIMILI, SE ESISTE UNA MATRICE INVERTIBILE P, TALE CHE RISULTI:

$$P^{-1}AP = B \quad o \quad P^{-1}BP = A$$

=) MATRICI SIMILI HANNO:

- stessi autovalori
- stesso rango
- stesso determinante

=) UNA MATRICE E' DETTA DIAGONALIZZABILE SE E' SIMILE a una matrice diagonale D, in tal caso P, tale che, $P^{-1}AP = D$ è detta matrice diagonalizzante.

CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITA' =) A è DIAGONALIZZABILE se e solo se: $Mg(\lambda) = Ma(\lambda)$

=) $A \in K^{n \times n}$ è DIAGONALIZZABILE se e solo se $\exists$ una base di K^n COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI A.

TRACCIA DI 1 MATRICE QUADRATA

La SOMMA DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE DI 1 MATRICE QUADRATA A, SI CHIAMA TRACCIA DELLA MATRICE E SI DENOTA CON Tr(A). LA TRACCIA È DUNQUE, IL COEFF. DEL TERMINE DI GRADO n-1 DEL P.C. DI A.

SOMMA DELLA DIAGONALE

$$\underbrace{Tr(A)}_{\text{è = alla somma delle radici del pc}} = (-1)^{n-1} C_{n-1}$$

è = alla somma delle radici del pc → il loro prodotto è = Det A

SEMPLICITA' ENDOMORFISMO:

Un ENDOM. è detto semplice se è ASSOCIATO A UNA MATRICE DIAGONALIZZABILE.

DIAGONALIZZAZIONE: DIAGONALIZZARE UNA MATRICE significa TROVARE UNA MATRICE DIAGONALIZZANTE P (ossia una matrice invertibile | $P^{-1}AP = D$)

Allo scopo è utile il seguente risultato:

Sia $A \in K^{n \times n}$ una matrice diagonalizzabile e sia B una base di K^n costituita di autovettori di A. Allora la matrice di passaggio dalla base canonica E a B è diagonalizzante per A ossia $P^{-1}AP = D$

DEFINIZIONE: MOLTEPLICITÀ AUTOVALORE

Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\lambda \in K$ un autovalore dell'endomorfismo $\varphi: V \to V$. Si dice che λ ha molteplicità m, se λ è una radice di molteplicità m del P.C di φ

TEOREMA: DIMENSIONE AUTOSPAZI

Sia V un K-spazio vettoriale di $\dim = n$ e sia $\varphi: V \to V$ endom.
Sia λ un autovalore di φ con molteplicità m allora:

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq m$$

METODO PRATICO PER STABILIRE SE ENDOM. È SEMPLICE E PER TROVARE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETT.

1. calcolo radici $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ del P.C. di φ con le rispettive m
2. verifico $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$. In caso affermativo:
3. se λ_i ha molteplicità 1 (ossia $r = n$), φ è semplice

altrimenti:

4. $\forall \lambda_i$ di molteplicità $m > 1$ si confrontano i numeri m_i e $n - \rho(A - \lambda_i I)$. Se si ha sempre uguaglianza, φ è semplice

FORME QUADRATICHE

DEFINIZIONE: POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO ESATTAMENTE = 2

SI! $x^2+y^2+z^2+xy+zx$
$xy+zy$

NO! x^2+x
$xy+y^2+1$

⇒ PUÒ ESSERE ASSOCIATA LA MATRICE SIMMETRICA:

COSÌ: $q(x,y,z) := 2x^2+y^2+5z^2+6xy+2yz$

$$Q := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

VICEVERSA: $q(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

SEGNATURA FORMA QUADRATICA:

UNA FORMA QUADRATICA q RISULTA:

definita POSITIVA: SE LA MATRICE Q ASSOCIATA ha solo AUTOVALORI (+)

SEMIDEFINITA POSITIVA: SE LA MATRICE Q ASSOCIATA ha solo AUTOVALORI (+) o nulli

DEFINITA NEGATIVA: SE LA MATRICE Q ASSOCIATA HA SOLO AUTOVALORI (−)

SEMIDEFINITA NEGATIVA: SE LA MATRICE Q ASSOCIATA ha solo AUTOVALORI (−) o nulli

INDEFINITA: SE LA MATRICE ASSOCIATA ha sia AUTOVALORI (+) che AUTOVALORI (−)

VEDI INIZIO libro appunti

Cambiamenti LINEARI DI VARIABILI:

Siano $x = {}^T(x_1 \dots x_n)$ $y = {}^T(y_1 \dots y_n)$. Un camb. lineare di variabili DA X a Y è una trasformazione del tipo $X = PY$ dove $P \in \mathbb{R}^{n\,n}$ è una matrice invertibile. Sostituendo nella forma quadratica $q(x)$ l'espressione $X = PY$, si ottiene una nuova funzione $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $r(Y) = q(PY)$

FORME QUADRATICHE EQUIVALENTI: Siano q e r 2 forme quadratiche e siano A e B le matrici associate.
Allora r equivale a q se esiste una matrice invertibile P tale che $B = {}^tPAP$

ALTRO METODO PER TROVARE FORMA CANONICA DI UNA FORMA QUADRATICA:

Sia $q(x) = {}^{T}XAX$ una forma quadratica. Per ridurre q a forma canonica bisogna trovare una matrice invertibile P tale che ${}^{t}PAP$ sia diagonale. Allora si procede così:

1. SIA A MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA SI COSTRUISCE LA MATRICE A BLOCCHI $\left(\frac{A}{I}\right)$ con $2n$ righe e n colonne

2. SI ESEGUONO TRASFORMAZIONI AL FINE DI TRASFORMARE A IN MATRICE DIAGONALE

3. AL TERMINE A DIVENTA DIAGONALE A' e I DIVENTA P tale che $P^{T}AP = A'$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{A}{I}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = C_1 - C_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{ecc...}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{A'}{P}\right)$$

RISULTA QUINDI: ${}^{T}PAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

LA FORMA CANONICA È QUINDI

$$h(y) = 2y_1^2 + y_2^2 - 18y_3^2$$

N.B. <u>NON</u> è un PROCESSO DI DIAGONALIZZAZIONE!!

RETTE //

- PARAMETRICA (Retta // passante per $P=(c;z)$)

$$\begin{cases} x = a + tu \\ y = b + tu_2 \end{cases}$$ mantengo i valori di T e sostituisco a (a,b) il punto $\Rightarrow \begin{cases} x = c + tu \\ y = z + tu_2 \end{cases}$

- CARTESIANA trovo il vettore ortogonale ovvero:

$3x + 4y = 0$ vettore ortogonale $(3i + 4J)$
Punto$(\alpha ; \beta)$

$$3(x-\alpha) + 4(y-\beta) = 0$$

RETTE ⊥

- CARTESIANO

$$ax + by = 0$$
$$cx + dy = 0$$
$(a \cdot c) + (b \cdot d) = 0$ ma sono ⊥

INTERSEZIONE RETTE IN EQ. CARTESIANA

- FACCIO IL SISTEMA
  - a) 1 soluzione → incidenti
  - b) incompatibile → //
  - c) ∞ soluzioni → coincidenti

TRASLAZIONI

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$ ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ vale anche in R^3

ROTAZIONI

$$\begin{cases} x = PX \\ y = PY \end{cases}$$ ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ vale anche in R^3 oppure $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^{T}P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

matrice della rotazione con α antiorario

$$P \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ROTOTRASLAZIONI

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$ ovvero, con la relaz. inversa $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^{T}P \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

vale anche in R^3

cambiamento di riferimento

$$\begin{cases} x = x_0 + X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = y_0 + Y\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

CIRCONFERENZA

EQ CARTESIANA

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \qquad \text{CENTRO}(\alpha, \beta)$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

- 1° membro polinomio di secondo grado x, y
- manca termine xy
- x^2 e y^2 coefficenti =

SI PUÒ SCRIVERE:

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - 4c\right)$$

- >0 $\quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

  $\alpha = \left(-\frac{\alpha}{2}\right)$
  $\beta = \left(-\frac{\beta}{2}\right)$ $\Rightarrow$ CENTRO

  $r = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

- <0 $\quad$ CIRCONFERENZA IMMAGINARIA

- $=0$ $\quad \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = 0$

  C = rappresenta un pt

  $$\left[\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) + i\left(y + \frac{b}{2}\right)\right]\left[\left(x + \frac{\alpha}{2}\right) - i\left(y + \frac{b}{2}\right)\right] = 0$$

in pratica: per trovare C e R, si usa il metodo del completamento dei quadrati (anche per sfere) caso b: $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sono TANGENTI nel PT REALE $P=(q,p)$ se

Allora:

- l'ASSE RADICALE passa per il punto P ed è ⊥ alla retta che passa per i 2 centri
- l'ASSE RADICALE è la retta r tg alle 2 circonferenze in P
- IL FASCIO è costituito da tutte e sole le circonferenze tg a r in P e dalla circonf di centro P e raggio nullo

CIRCONF. PER TRE PUNTI NON ALLINEATI

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

PROBLEMI RISOLUBILI CON I FASCI DI CIRCONFERENZE:

→ Circonferenze per 2 punti distinti P e Q e tangenti a una retta r

→ Si scrive il fascio di pt base P, Q e impone la tg con r. La tangenza comporta una eq λ di grado ≤ 2 e quindi possono risultare 2, 1, 0 circonf. a pt reali

→ Circonferenza tg a una retta r in un punto P di r e passante per un pt Q non su r

→ Si scrive il fascio delle circonferenze tangenti a r in P e impone il passaggio per Q.

EQ. CARTESIANA DELLA CIRCONFERENZA NELLO SPAZIO

È L'INTERSEZIONE DI 1 SFERA E UN PIANO

L'ELLISSE

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad a, b > 0$$

SIMMETRIE: è simmetrica sia rispetto a x che a y perciò gli assi sono detti assi di simmetria e l'origine è il centro

$$\boxed{x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

ne segue che x è compreso tra $(-a, a)$

y " " " $(-b, b)$

IPERBOLE IN FORMA PARAMETRICA

$$\Gamma: \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\,\mathrm{senh}\, t \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \Gamma: \begin{cases} x = a\,\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\,\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases} \qquad t \neq \pm 1$$

IPERBOLE TRASLATA

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

$C = (p, q)$

PARAMETRICAMENTE:

$$\begin{cases} x = p + \cosh t \\ y = q + \mathrm{senh}\, t \end{cases} \qquad o \qquad \begin{cases} x = p + a\,\dfrac{1+T^2}{1-t^2} \\ y = q + b\,\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

LA PARABOLA

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad p \neq 0$$

SIMMETRIA: ASSE DELLE x

FUOCO: $(p/2 ; 0)$

DIRETTRICE: $x = -p/2$

PARABOLA TRASLATA

$$\boxed{x - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

TRASLAZIONE:

$$X = x - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \qquad Y = y + \frac{b}{2a}$$

LE CONICHE

OTTENUTE INTERSECANDO UN CONO CIRCOLARE RETTO CON DEI PIANI.

LA PARABOLA: $y^2 = 2x$ può anche essere traslata così

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ ottengo: $x^2 + y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}(x-y) = 0$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$

RICORDA: IMPORTANTE È IL COMPLETAMENTO DEI QUADRATI!

OVVERO:
- SE EQ PRESENTA TERMINE XY SI CERCHERÀ DI FARLO SPARIRE CON IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE
- SE EQ <u>NON</u> PRESENTA TERMINE XY SI USA IL COMPLETAMENTO DEI QUADRATI E LO SI INTERPRETA COME TRASLAZIONE.

CONICA IN FORMA CANONICA

$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma}$ oppure $\beta y^2 = 2\gamma x$

$\beta x^2 = 2\gamma y$

→ TUTTI I COEFFICIENTI $\neq 0$ ELLISSE O PARABOLA O IPERBOLE
→ α e β stesso segno γ opposto, soluzioni solo complesse → ELLISSE IMMAGINARIA

EQUAZIONE CONICHE IN FORMA MATRICIALE

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

LE DUE MATRICI SIMMETRICHE ASSOCIATE SONO:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

MATRICE ASSOCIATA AD f

MATRICE DEI TERMINI DI 2° GRADO DI f

SI PUÒ USARE IL PRODOTTO DI MATRICI:

$$f(x,y) = (x,y,1)\, B\, {}^T(x,y,1)$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x\,y)\, A\, {}^T(x,y$$

TEOREMA SU CONICHE DEGENERI E MATRICI ASSOCIATE

Le condizioni sono equivalenti:

1) $\Delta: f(x,y)=0$ è degenere cioè
$$f(x,y)=(ax+by+c)(a'x+b'y+c')$$
2) $\det B=0$

CLASSIFICAZIONE CONICHE DEGENERI IN FORMA GENERALE:

Sia $\Gamma = f(x,y)=0$ conica degenere

& A, B matrici associate

& A', B' matrici associate ad una forma canonica di f

Ricordando che: $\det A = \det A'$
$\rho(B)=\rho(B')$ risulta:

- $\rho(B)=2$ se e solo se Γ è unione di 2 rette distinte (reali o complesse coniugate)
- $\rho(B)=1$ se e solo se Γ è unione di 2 rette reali coincidenti

Inoltre se $\rho(B)=2$ si ha:

- $\det A>0$ se e solo se le 2 rette sono complesse coniugate con un pt reale in comune
- $\det A=0$ se e solo se le 2 rette non hanno pt in comune
- $\det A<0$ se e solo se le 2 rette sono reali e incidenti.

TEOREMA SUGLI ASINTOTI DELL'IPERBOLE:

SIA $f:(x,y)=0$ IPERBOLE DI CENTRO C e $g(x,y)$ la parte di 2° GRADO DEL POLINOMIO f. Allora:

Γ': $g(x,y)=0$ è UNIONE DI 2 RETTE DISTINTE.

Gli ASINTOTI DI Γ sono le rette $// r_1, r_2$ passanti per C

TEOREMA SULL'ASSE della parabola

Sia Γ: $f(x,y)=0$ una parabola non degenere. Allora si ha:

1) L'asse DI Γ è $//$ all'autospazio DI φ corrispondente all'autovalore nullo

2) Se $a_{12} \neq 0$ l'asse della parabola è $//$ alla retta $a_{11}x+a_{12}y=0$

TEOREMA sul vertice della parabola:

La tg a Γ nel vertice è $\perp$ all'asse. ESSA È l'unica retta $\perp$ all'asse che interseca Γ in un solo pt.

COME TROVARE ASSE E VERTICE della parabola?

1. $a_{12}=0$ TRASLO
2. $a_{12} \neq 0$ l'asse della P. è $//$ alla retta $a_{11}x+a_{12}y=0$ quindi LA TG nel vertice ha EQ. $a_{12}x - a_{11}y + T = 0$ (T lo si determina in modo che ci sia 1 sola intersez con V)

REGOLE PRATICHE PER LA RICERCA DEI FUOCHI

ELLISSE: SI DETERMINA l'asse > e SI TAGLIA CON IL CERCHIO $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2-b^2$

IPERBOLE: SI DETERMINA l'asse secante e SI TAGLIA CON IL " $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2+b^2$

PARABOLA: F SI TROVA sull'asse DI Γ e la sua DISTANZA DAL vertice V è pari a $(\frac{1}{2})\sqrt{\det B(-\lambda)}$ λ autovalore non nullo DI A

REGOLA PRATICA per determinare a e b

$$\boxed{\frac{1}{a^2} = \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{\det B} \qquad \frac{1}{b^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\det B}}$$

Retta tg a una conica in 1 pt

$\Gamma: f(x,y)=0$

P_0: (PUNTO DI Γ)

$r: g(x,y) = 0$ retta passante per P_0

r è tg a Γ in P_0 se:

1) r è contenuta in Γ (Γ è degenere)
2) LA MOLTEPLICITA' DI INTERSEZIONE tra Γ e r in P_0 è 2
(cioè l'equaz. che si ottiene risolvendo il sist. ha grado 2 ed ha 2 soluzioni coincidenti)

TANGENTE ad una conica nell'origine

Sia $\Gamma: f(X,Y)=0$ conica passante per l'origine, non degenere.
Allora la tg a Γ in $(0,0)$ esiste ed è unica.
Inoltre una sua EQ si ottiene eguagliando a 0 il termine di 1° grado di f.

Inoltre se $F(x,y) = (X,Y,1)\, B'\, {}^T(X\, Y\, 1)$ la tg a Γ nell'origine ha EQ. $(0,0,1)\, B'\, {}^T(X,Y,1) = 0$

TANGENTI a CONICHE DEGENERI

$\Gamma \Rightarrow$ conica DEGENERE unione di r_1 e r_2

$P_0 \in \Gamma$ si hanno 2 casi:

1. $P_0 \in r_1 \cap r_2$ Allora ogni retta passante per P_0 è tg a $\Gamma \Rightarrow P_0$ è detto SINGOLARE

2. $P_0 \notin r_1 \cap r_2$ Allora la tg esiste ed è unica $\Rightarrow P_0$ è detto semplice
(ANCHE se Γ è NON degenere)

INTERSEZ DI 2 CONICHE pg 110-114

EQ. VETTORIALE E CARTESIANA DEL PIANO PASSANTE PER 1 PT E $\perp$ A UN VETTORE:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad v = ai + bj + ck$

$$\alpha = \left(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0\right)$$ EQ CARTESIANA

$$(P - P_0) \cdot v = 0$$ EQ VETTORIALE

EQ. PIANO PER 3 PT non ALLINEATI

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

PARALLELISMO E $\perp$ RETTE

$P = tv + P_0$
$P = tv' + P_0'$
$\rightarrow$ $\perp$ se v e v' $\perp$ ossia $v \cdot v' = 0$
$//$ se $v \wedge v' = 0$ o $v = \alpha v'$

PARALLELISMO E $\perp$ PIANI

$(P - P_0) \cdot v = 0$
$(P - P_0') \cdot v' = 0$
$\rightarrow$ paralleli se v e v' $//$
$\perp$ se v e v' $\perp$

PARALLELISMO E $\perp$ PIANO-RETTA

$(P - P_0) \cdot v = 0$
$P = tw + P_1$
$\rightarrow$ sono $//$ se w e v $\perp$
sono $\perp$ se w e v $//$

Intersezione tra piani: (2)

- faccio il sistema
  ↳ lo pongo come matrice A e matrice A|termini noti

Rank (A) = 1	Rank(A|B) = 2	Piani //
Rank(A) = 2	Rank(A|B) = 2	Piani incidenti
Rank (A) = 1	Rank (A|B) = 1	Piani coincidenti

mi da una retta!

$$\alpha \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \qquad \alpha' = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

Intersezione tra piani: (3)

Faccio il sistema:
Pongo A e A/B

Rank(A) < Rank (A/B)	Piani **non** si tagliano
Rank(A) = Rank(A/B) = 3	Piani incidenti in 1 pt
Rank(A) = Rank (A/B) = 2	Piani incidenti in 1 retta
Rank(A) = Rank(A/B) = 1	Piani coincidenti

Intersezione retta - piano

$\pi = ax+by+cz+d=0$

$$r \begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

Un pt Q di R sta su π se le sue coordinate soddisfano l'eq di π.

$$(al+bm+cn)t + ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

- 1 sola soluz (per $al+mb+cn \neq 0$)
- 0 soluzioni (per $al+mb+cn=0$ e $ax_0+by_0+cz_0+d \neq 0$ cioè R // α e non contenuta in α)
- ogni t come soluz ($al + mb+cn=0$ $ax_0+by_0+cz_0+d=0$

5. Retta che incontra ⊥ 2 rette sghembe o incidenti
↳ esiste 1 e 1 sola retta che incontra ⊥ 2 rette sghembe
• se le 2 rette sono incidenti in P s è ⊥ in P al piano

DISTANZA PIANI //

$$\boxed{d(\alpha;\alpha') = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

DISTANZA RETTE non //

$$\boxed{d(r,s) = \frac{|(P_2-P_1)\cdot v\wedge w|}{|v\wedge w|}}$$

SFERA

$$\boxed{\alpha x^2+\alpha y^2+\alpha z^2+ax+By+Cz = g \begin{cases} =0 \\ \neq 0 \end{cases}}$$

$C=(a,b,c)$ $\qquad R=\sqrt{g}$ dopo il complet. dei quadrati

⇒ Per capire se ho una sfera utilizzo COMPLETAMENTO DEI QUADRATI

Superficie sferica per 4 PT:

non complan?
PT

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

FASCI DI SFERE

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$$

FASCIO DI SFERE GENERATO DA S_1 e S_2 → EQ OMOGENEA DEL FASCIO

SE IL PIANO RADICALE $S_1 - S_2$ ESISTE e ha EQ $h=0$ IL FASCIO DIVENTA

$$f + \lambda h = 0$$

EQ non omogenea

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA SFERA

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \alpha + R\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &= \beta + R\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta \\ z &= \gamma + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{aligned}}$$

INTERSEZIONI:

$\Rightarrow$ si mettono a sistema le equazioni

DISTANZA PT-RETTA

prendo vettore V a cui è $//$ la retta

$$\frac{V}{|V|} = e_v \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{dist(P_0, r) = |\underbrace{P_0P}_{P-P_0} \times e_v|}$$

DISTANZA PT-PIANO

$P_0(x_0\, y_0\, z_0) \qquad \pi: ax+by+cz+d=0$

$$\boxed{d_{(P_0,\pi)} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|}$$

LE QUADRICHE

4

sono le coniche evolute in $\mathbb{R}^3$.

→ det $B_q = 0$ quadrica degenere
→ det $A_q \neq 0$ quadrica a centro

inoltre

Rank$(B_q) = 3$	cono quadrico
Rank$(B_q) = 2$	2 piani
Rank$(B_q) = 1$	piano doppio

CONO: deve avere EQ omogenea

CILINDRO QUADRICO: una variabile totalmente assente (riconosco che è una quadrica solo perché è data in $\mathbb{R}^3$)

paraboloide: quadrica non degenere, non a centro.
↳ paraboloide ellittico, se interseco una eq con piani $x=k$, $y=k$, $z=k$ ottengo ellissi e parabole

ellissoide: quadrica non degenere, a centro (3 autovalori concordi)

iperboloide: quadrica non degenere, a centro. (autovalori non concordi)
↳ porto termine noto e z da una parte
- se sempre >0 1 FALDA
- se può essere <0 2 FALDE

$x^2 + xy + y^2 = 0$
$= 1$

APPARTENENZA DEL SOSTEGNO AL SOSTEGNO DI UNA SUPERFICIE ASSEGNATA

6

esempio: $(x,y,z): (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t)$

E' contenuta nella sfera di eq. $x^2+y^2+z^2=25$

$$(3\cos t)^2+(5\sin t)^2+(4\cos t)^2=25$$

$$25(\sin^2 t+\cos^2 t)=25 \quad \underline{\text{vero}}$$

CURVA CHIUSA

→ Definita su un intervallo chiuso $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

→ Risulta $\gamma(a)=\gamma(b)$ ⇒ ne consegue che la curva iniettiva non è mai chiusa

CURVA, REGOLARITÀ:

→ Regolare, se ammette vettore tg **non nullo**

es: curva $P(t)=(e^t+1, 0, 2t)$

è regolare? SI, perché
1. INIETTIVA
2. CLASSE C^∞
3. $P'(t)\neq 0 \ \forall t$

↳ IL VETTORE TG È LA DERIVATA I

TROVARE LA RETTA TG A UNA CURVA PARAMETRIZZATA IN UN PT

1) SI VERIFICA PER QUALI t IL PUNTO APPARTIENE ALLA CURVA
2) SI CALCOLANO LE DERIVATE ecc.

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

DATO UN qualsiasi INSIEME S, SI DEFINISCE **TOPOLOGIA**, di S, una opportuna famiglia DI SUOI SOTTOINSIEMI DETTI **Aperti** che SODDISFI LE CONDIZIONI delle **ASSIOMI DEGLI APERTI**

↳ nelle METRICI esiste una topologia detta TOPOLOGIA DELLE PALLE APERTE

⇒ Sia (X, d) uno spazio metrico, P_0 un suo pt, δ un numero reale ≥ 0

l'insieme $B_{P_0}(\delta) := \{P \in X \mid d(P_0, P) < \delta\}$

viene detto PALLA APERTA DI CENTRO P_0 e RAGGIO δ

⇝ Sia (X, τ) uno spazio topologico metrico. Viene detto APERTO DI (X, τ) un insieme $A \subseteq X$ tale che esista una palla

21) CURVA CHIUSA: se ESISTONO t, t' tali che $f(t) = f(t')$

22) $R(A) = R(A^T)$

(17) DATA CURVA PARAMETRICA E RICHIESTA retta TG in un pt:

1) DERIVO LA CURVA
2) calcolo in 0
3) scrivo EQ. retta con i COEFF. DI T CHE HO TROVATO nel punto 2.

(18) PIANO XZ → $y=0$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

PIANO Y → $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

(19) DETERMINARE Q | AQ = numero · Q si fa una matrice che ha per colonne 1 autovettore di A rispetto al numero.

(20) VEDERE TANGENZA A UN PIANO es z ovvero $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ si fa la derivata e si verifica se è $= a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(21) DERIVATE DIREZIONALI: CALCOLO GRADIENTE nel pt e lo moltiplico per il vettore

(22) vettore ⊥ PIANO: è // al vettore DEI COEFF. DEL piano

(23) PIANO TG SE non HO EQ CANONICA:

es: $f(u,v)=(4\cos u,\ 4\sin u,\ 4v)$

Derivo

$$\begin{array}{l} u \\ v \end{array}\begin{cases}-4\sin u,\ 4\cos u,\ 0\\ 0,\ 0,\ v\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=0\\ v=1\end{cases} \rightarrow \text{SOSTITUISCO}$$

TROVO JACOBIANA: $\begin{pmatrix}-4\sin u & 0\\ 4\cos u & 0\\ 0 & v\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

OTTENGO: $\begin{pmatrix}x-4 & 0 & 0\\ y-4 & 4 & 0\\ z-4 & 0 & 4\end{pmatrix} \rightsquigarrow (x-4)=0$ EQ PIANO

(24) TANGENTE IN UN PT // a ASSE: GUARDO COEFF. DI T

(25) RETTA // a PIANO π: PRENDO vettore DI π e vettore coeff. t e FACCIO PRODOTTO scalare