NUMERO: 1264

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Facciolla

MATERIA: Topografia

Prof. Manzino

DISPENSE DI TOPOGRAFIA

PROF. AMBROGIO MARIA MANZINO

Politecnico di Torino

DETERMINARE UN DISLIVELLO: SE VOLESSI DETERMINARE LA QUOTA DI TORINO E NON AVESSI DEI PUNTI DI RIFERIMENTO, DOVREI PARTIRE DA GENOVA E INSTALLARVI UN MAREOGRAFO. IN TAL MODO, TROVANDOMI AL LIVELLO DEL MARE, POTREI DETERMINARE IL GEOIDE, OVVERO LA SUPERFICIE A QUOTA ZERO. DA QUESTO PUNTO DI PARTENZA DOVREI POI MISURARE TANTI PICCOLI DISLIVELLI FINO A TORINO, DETERMINANDO IN TAL MODO LA QUOTA DI TORINO.

IL GEOIDE SI OTTIENE PROIETTANDO LA SUPERFICIE FISICA TERRESTRE LUNGO IL NADIR, OVVERO LUNGO LA DIREZIONE DEL FILO A PIOMBO.

PARTE I

GEODESIA

GEODESIA FISICA

Introduzione

La Topografia é una scienza applicata che si prefigge *la determinazione e la rappresentazione metrica della superficie fisica terrestre*, nasce e si inser:sce nella Geodesia il cui scopo è la determinazione della figura della terra e del suo campo gravitazionale esterno in funzione del tempo.
Per figura della terra si intende qui la sua superficie fisica e matematica; si intende per superficie fisica il limite tra l'atmosfera e la superficie liquida o solida della terra e per figura matematica la superficie equipotenziale del campo gravitazionale della terra (a potenziale convenzionale $W=W_0$).
Per comprendere meglio la Topografia è quindi necessario dare dei cenni di Geodesia, chiarendo per i nostri fini, quale è la forma della terra e quali sono le forze che agiscono su di essa.

TOPOGRAFIA E GEODESIA SONO COLLEGATE POICHE' LA RAPPRESENTAZIONE OTTIMALE DELLA TERRA E' LEGATA ALLA SUA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE. LA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE SI RAPPRESENTA ATTRAVERSO LINEE CHE NE EVIDENZIANO IL CAMPO DI GRAVITA' AGENTE.
LA GEODESIA SI OCCUPA INFATTI ANCHE DELLE FORZE CHE AGISCONO SU UNA DETERMINATA SUPERFICIE, E QUESTO ASPETTO E' ASSOLUTAMENTE NECESSARIO PER LA PROGETTAZIONE DI OPERE ANTROPICHE.
ATTRAVERSO I CALCOLI OTTERREMO CHE LA SUPERFICIE TERRESTRE SI APPROSSIMA MOLTO BENE A UN ELLISSOIDE DI ROTAZIONE Σ.
Σ E' PERO' SOLO UNA SUPERFICIE TEORICA CHE NON ESISTE REALMENTE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 170

ESSENDO NOSTRO OBIETTIVO QUELLO DI RICAVARE L'EQUAZIONE DEL GEOIDE, OVVERO DI UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE, SIAMO PIU' INTERESSATI AL POTENZIALE CHE NON ALLA FORZA F. DUNQUE:

$$\begin{cases} dF = -\text{GRAD } V \\ dF = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = G\dfrac{dm}{\ell^2} \end{cases} \longrightarrow dV = \frac{G\,dm}{\ell} \quad \text{OTTENUTO INTEGRANDO } dF$$

$$V = G \iiint_T \frac{\rho(x,y,z)\,d\tau}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

POTENZIALE DOVUTO ALLA FORZA GRAVITAZIONALE

COME NEL CASO DI F QUESTA FORMULA INTEGRALE CONTIENE TROPPE INCOGNITE. PRESUPPONE INFATTI LA CONOSCENZA DELLA DENSITA' ρ SU TUTTO IL VOLUME TERRESTRE T, NONCHÉ LA CONOSCENZA DELLA SUPERFICIE DI T CHE È, PERO', IL NOSTRO OBIETTIVO.

MOTI TERRESTRI E POTENZIALE DI GRAVITA'

LA TERRA E' SOGGETTA A DUE MOTI PRINCIPALI

1) MOTO DI ROTAZIONE ATTORNO A UN ASSE POLARE CON VELOCITA' ANGOLARE MEDIA $\omega = \frac{2\pi}{T_t}$ DOVE T_t E' IL GIORNO SIDERALE MEDIO, CHE VALE MENO DI 24 h A CAUSA DELLA CONTEMPORANEA ROTAZIONE DELLA TERRA ATTORNO AL SOLE.
L'ACCELERAZIONE CENTRIFUGA VALE $a = \omega^2 r$ E DUNQUE LA FORZA ESERCITATA SULLA MASSA m VALE $f = m\omega^2 r$.

2) MOTO DI RIVOLUZIONE ATTORNO AL SOLE CON PERIODO $T_s = 1$ ANNO SIDERALE, CHE EQUIVALE A PIU' DI 365 GIORNI.

SE CONSIDERO UN PUNTO DI MASSA UNITARIA, CON $m=1$, LA FORZA CENTRIFUGA VALE $f = \omega^2 r$. ANCHE QUESTA FORZA, COME F, AMMETTE POTENZIALE CENTRIFUGO, CHE SI OTTIENE PER INTEGRAZIONE:

$$v = \frac{\omega^2 r^2}{2} = v(x,y) \longrightarrow \text{POTENZIALE CENTRIFUGO}$$

IL POTENZIALE DI GRAVITA' W E' DUNQUE DEFINITO DALLA SOMMA DEI DUE CONTRIBUTI VISTI FINORA:

$$\underbrace{W}_{\text{POTENZIALE DI GRAVITA'}} = \underbrace{V}_{\text{POTENZIALE GRAVITAZIONALE}} + \underbrace{v}_{\text{POTENZIALE CENTRIFUGO}}$$

IL PROBLEMA SARA' DUNQUE DETERMINARE LE SUPERFICI PER CUI $W = \text{COST}$ E, IN PARTICOLARE, LA' DOVE VARRA' $W = W_0 = \text{COST}$ SI TROVERA' IL GEOIDE.

NELLO SPAZIO ESTERNO IL POTENZIALE GRAVITAZIONALE V, CHE È PARTE DI W, SODDISFA L'EQUAZIONE:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \longrightarrow \text{LAPLACIANO DI } V = \text{SOMMA DELLE DERIVATE SECONDE} = 0$$

$\Delta W = 2\omega^2$ PERCHÉ $r^2 = x^2 + y^2$ $\longrightarrow$ IL LAPLACIANO DI W È UNA COSTANTE NELLO SPAZIO ESTERNO

LE FUNZIONI $\Delta V = 0$ SI CHIAMANO FUNZIONI ARMONICHE E POSSONO ESPRIMERSI ANCHE ATTRAVERSO UNO SVILUPPO IN SERIE ARMONICHE. CIO' CHE E' NOTEVOLE È CHE TUTTE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI POSSONO ESSERE RISOLTE CONOSCENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO, OVVERO I LORO FUNZIONALI, CHE HANNO LA CARATTERISTICA DI ESSERE MISURABILI.
ALLA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL POTENZIALE NON SI ARRIVA DUNQUE CERCANDO LA DENSITA' ρ, BENSI' RISOLVENDOLA NUMERICAMENTE IN BASE ALLE CONDIZIONI AL CONTORNO DEL POTENZIALE OPPURE DEI SUOI FUNZIONALI.
$\longrightarrow$ DI QUI SI ARRIVA ALL'EQUAZIONE DEL GEOIDE

SOSTITUENDO LE EQUAZIONI APPENA RICAVATE NELL'ESPRESSIONE DEL POTENZIALE V SE NE OTTIENE L'EQUAZIONE INTEGRALE IN FUNZIONE DI (ψ, λ, σ).
ESSENDO V UNA FUNZIONE ARMONICA, POSSIAMO SVILUPPARLA IN SERIE DI ARMONICHE SFERICHE.
L'ESPRESSIONE CHE SI OTTIENE SARÀ IN FUNZIONE DI (ψ, λ, σ)

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(A_{nm} \frac{R_{nm}(\psi, \lambda)}{(\sigma)^{n+1}} + B_{nm} \frac{S_{nm}(\psi, \lambda)}{(\sigma)^{n+1}} \right) \qquad \begin{matrix} n = \text{ORDINE} \\ m = \text{GRADO} \end{matrix}$$

SI TRATTA DELLA SOLUZIONE OTTENUTA DALL'IMPOSIZIONE DEL LAPLACIANO UGUALE A ZERO. TALE SOLUZIONE NON ESISTE IN FORMA CHIUSA MA È UNO SVILUPPO IN SERIE.

1) R_{nm} E S_{nm} SONO FUNZIONI SFERICHE RICAVABILI ATTRAVERSO I POLINOMI DI LEGENDRE IN FORMA RICORSIVA $\longrightarrow$ SONO DUNQUE NOTI
2) ψ, λ, σ SONO LE COORDINATE DEL PUNTO P SCELTO E DUNQUE SONO NOTE POICHÈ SONO IMPOSTE DA NOI
3) A_{nm} E B_{nm} SONO COEFFICIENTI SCALARI CHE TENGONO CONTO DELLA DENSITÀ E DELLA FORMA DELLA TERRA. AL FINE DI CONOSCERE IL POTENZIALE IN UN PUNTO E, DI CONSEGUENZA, TUTTO IL GEOIDE, NON RESTA CHE CONOSCERE IL VALORE DEGLI SCALARI A_{nm} E B_{nm}.

A PRIMA VISTA PERÒ, NEMMENO A_{nm} E B_{nm} SONO RICAVABILI, POICHÈ CONTENGONO QUANTITÀ COME ρ E τ, CHE NON CONOSCIAMO E VOGLIAMO EVITARE.

LO SFEROIDE

NONOSTANTE L'APPARENTE DIFFICOLTÀ, È POSSIBILE RICAVARE I PRIMI TRE TERMINI (FINO A ORDINE E GRADO 2) IN MODO SEMPLICE. INFATTI, INSERENDO I PRIMI VALORI DI R_{00} E S_{00} SI OTTIENE UNA FORMULA FISICA NOTA.

$$R_{00} = 1 \longrightarrow A_{00} = G \iiint_{\tau} \rho d\tau = GM$$
$$S_{00} = 0 \longrightarrow B_{00} = 0$$

$\longrightarrow$ SI OTTIENE UNA FORMULA FISICA NOTA OVVERO $\rho dV = M$. SI TRATTA DELLA MASSA DELLA TERRA, ED ESSENDO NOTA È POSSIBILE SVOLGERE IL CALCOLO.

COSÌ FACENDO RISULTA COME SE TUTTA LA MASSA DELLA TERRA FOSSE CONCENTRATA NEL CENTRO DI MASSA. IN QUESTO MODO È STATO POSSIBILE CALCOLARE IL GEOIDE DI GRADO ZERO.
PROSEGUENDO NELLA SOSTITUZIONE DI R E S NEGLI INTEGRALI, SI NOTA CHE, A PARTE G, I TERMINI RELATIVI ALLE PRIME FUNZIONI ARMONICHE ESPRIMONO I MOMENTI STATICI DEL CORPO TERRESTRE. MA DAL MOMENTO CHE LA SCELTA DELL'ORIGINE DEGLI ASSI È ARBITRARIA, SI PUÒ IMPORRE DI FISSARE L'ORIGINE COINCIDENTE CON IL CENTRO DI MASSA. IN QUESTO MODO I MOMENTI STATICI SI ANNULLANO. SI RICAVANO A, B, C OVVERO I MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA DEGLI ASSI X, Y, Z (CALCOLABILI ASTRONOMICAMENTE).
IN DEFINITIVA, APPROSSIMANDO V FINO A UN CERTO ORDINE E GRADO, E SOMMANDO POI IL POTENZIALE CENTRIFUGO, SI PUÒ OTTENERE UN'APPROSSIMAZIONE DEL GEOIDE. PER GIUNGERE AD UN'APPROSSIMAZIONE SUFFICIENTE BISOGNEREBBE ARRIVARE A ORDINE E GRADO 2000 MA, PER I NOSTRI SCOPI, UN'APPROSSIMAZIONE A 2 È SUFFICIENTE.

SI SCRIVE LO SVILUPPO IN SERIE DI V LIMITANDOLO A ORDINE E GRADO 2. QUEST'ESPRESSIONE È CHIAMATA $V' \longrightarrow V \neq V'$
$V = V' + T$

V CONTIENE:
- 1° ORDINE CON TUTTI I GRADI
- 2° ORDINE CON TUTTI I GRADI

} QUESTA PARTE SI PUÒ CALCOLARE BENE ED È LA PARTE PREPONDERANTE DELLO SVILUPPO.

- 3° ORDINE CON TUTTI I GRADI
- POTENZIALE ANOMALO T $\longrightarrow$ ESPRIME UN RESTO

DALLE FORMULE APPENA RICAVATE È POSSIBILE RISALIRE AL POTENZIALE DI GRAVITÀ W. INFATTI:

$$V = V' + T$$

$$W = V + v \longrightarrow W = V' + v + T \longrightarrow W = \underbrace{\left(V' + \frac{\sigma^2 \omega^2 \cos^2 \psi}{2}\right)}_{U} + T = U + T = W$$

LA FORMULA, COSÌ COME È SCRITTA, METTE IN EVIDENZA LA DISTINZIONE TRA IL TERMINE DA NOI CONOSCIUTO, U, DI CUI FA PARTE V', E IL TERMINE SCONOSCIUTO, OVVERO IL POTENZIALE ANOMALO T, CHE NON È NOSTRO COMPITO DETERMINARE.

⟶ T È DETTO POTENZIALE ANOMALO

⟶ U È DETTO POTENZIALE NORMALE

T È, A TUTTI GLI EFFETTI, LO SVILUPPO DEL POTENZIALE GRAVITAZIONALE FINO A ORDINE E GRADO 3000. MA, COME DETTO, PER I NOSTRI FINI, NON È NECESSARIA UNA TALE PRECISIONE. T VIENE DUNQUE ACCANTONATO, E CI LIMITIAMO ALLA CONSIDERAZIONE DI U, OVVERO DEL POTENZIALE NORMALE, CHE È UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DI W. U È UN NUMERO ORMAI CONOSCIUTO E CALCOLATO DAGLI ASTRONOMI CON ESTREMA PRECISIONE. PER CONOSCERE U SONO IMPORTANTI LA MASSA DELLA TERRA E LA CONOSCENZA DEI PRINCIPALI MOMENTI DI INERZIA. VIENE INVECE IGNORATA LA VELOCITÀ DI ROTAZIONE DELLA TERRA.

GEOIDE $\longrightarrow W = W_0 = \text{COST}$

SFEROIDE $\longrightarrow U = U_0 = \text{COST} \longrightarrow$ È POSSIBILE ESPRIMERE IL VALORE DI U ATTRAVERSO UN'EQUAZIONE DIPENDENTE DA A, B, C (PRINCIPALI MOMENTI D'INERZIA) E DALLE COORDINATE DI UN PUNTO INSERITO.

FORMULA 1.33

A ⟶ MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A x

B ⟶ MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A Y

C ⟶ MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A Z

SECONDO UNA CONSTATAZIONE A E B RISULTANO ESSERE QUASI IDENTICI. DI CONSEGUENZA $B - A \cong 0$

⟶ QUESTA CONSTATAZIONE PORTA ALL'ELIMINAZIONE DI UN INTERO TERMINE DALL'EQUAZIONE. CON ESSO SCOMPARE λ E DUNQUE LO SFEROIDE È A TUTTI GLI EFFETTI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

CARATTERISTICHE DELLO SFEROIDE

- LE NORMALI ALLO SFEROIDE SONO SUFFICIENTEMENTE PROSSIME ALLE VERTICALI (DEL GEOIDE).
- L'EQUAZIONE DELLO SFEROIDE È L'EQUAZIONE DI UNA SUPERFICIE IN TERMINI PARAMETRICI. SI TRATTA DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE POICHÈ DIPENDE DA φ E σ MA NON DA λ. LE COSTANTI DA CONSIDERARE SONO 4 E SONO GM, $(C-A)/M$, ω^2 E U_0. SONO SEMPRE NECESSARIE 4 COSTANTI E DUE COORDINATE PER FISSARE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO.
- ANCHE IL POTENZIALE ANOMALO HA LAPLACIANO NULLO $\Delta T = 0$

GRAVITÀ

VALENDO $F = -\text{GRAD}\,V$ E $g = -\text{GRAD}\,W$ SI HA ANCHE $\gamma = -\text{GRAD}\,U$.
γ È LA GRAVITÀ NORMALE, ED È SIMILE A g POICHÈ U È SIMILE A W.
IL VALORE DI γ È RICAVABILE DERIVANDO U RISPETTO A σ, DOVE σ È LA DISTANZA DI UN PUNTO DAL CM.

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial \sigma}$$

⟶ È FACILMENTE CALCOLABILE POICHÈ ANZICHÈ DERIVARE RISPETTO A X, Y, Z PER FARE IL GRADIENTE, CONSIDERO σ COME DIREZIONE PREPONDERANTE E DERIVO RISPETTO AD ESSA. SI TRATTA DI UN'OTTIMA APPROSSIMAZIONE DELLA GRAVITÀ g, E LA DIFFERENZA TRA I DUE VETTORI g E γ È DEFINITA COME ANOMALIA DI GRAVITÀ: $\Delta g = g - \gamma$

EQUAZIONE GEOMETRICA DELLO SFEROIDE

CONSIDERANDO CHE LUNGO LO SFEROIDE U È COSTANTE, POSSO DIRE CHE U GENERICA PER φ GENERICA È UGUALE A U ALL'EQUATORE, SI OTTIENE:

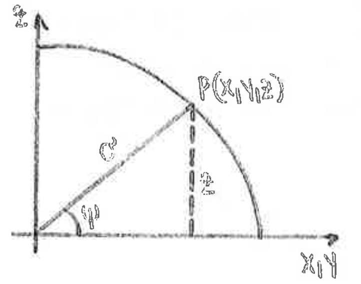
$$\rho = a\left[1-\underbrace{\left(\frac{3K}{2a^2}+\frac{\omega^2 a^3}{2GM}\right)}_{\alpha}\operatorname{sen}^2\varphi\right] \longrightarrow \rho = a\left(1-\alpha\operatorname{sen}^2\varphi\right) \quad \text{EQUAZIONE GEOMETRICA}$$

ANCORA UNA VOLTA NON È PRESENTE λ E DUNQUE L'EQUAZIONE OTTENUTA RAPPRESENTA UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

LA GRAVITÀ NORMALE γ PUÒ ESSERE ANCH'ESSA TRASFORMATA IN TERMINI GEOMETRICI OTTENENDO $\quad \gamma = \gamma_E\left(1+\beta\operatorname{sen}^2\varphi\right)$

DALLO SFEROIDE ALL'ELLISSOIDE

SI VUOLE ORA COMPIERE UN ULTERIORE PASSO AVANTI NELLA SEMPLIFICAZIONE DEL PROBLEMA.
SI CONSIDERA DUNQUE L'ELLISSE CHE HA GLI STESSI SEMIASSI (a, C) DELLO SFEROIDE. DIAGRAMMIAMO GLI SCOSTAMENTI NELLA DIREZIONE DELL'ORIGINE IN FUNZIONE DELLA LATITUDINE GEOCENTRICA.
DAL PUNTO DI VISTA ALTIMETRICO GLI SCOSTAMENTI SONO NULLI A 0° E A 90° (POLI ED EQUATORE), MENTRE SONO MASSIMI A 45°, DOVE LO SFEROIDE È PIÙ ALTO DELL'ELLISSOIDE DI 26,93 m.
QUEST'INFORMAZIONE PERÒ NON CI INTERESSA, POICHÉ SAPPIAMO CHE LE DISTANZE DA NOI MISURATE SI RIFERISCONO AL GEOIDE E NON ALLO SFEROIDE!
ANGOLARMENTE, INVECE, LA PENDENZA MASSIMA SI HA A 22°5 E A 67°5 ED È PARI A 1,7".
A PARTIRE DA QUESTA AFFERMAZIONE SI SCOPRE CHE L'ELLISSOIDE È UNA SUPERFICIE PERFETTA DAL PUNTO DI VISTA PLANIMETRICO IN QUANTO 1,7" SU TUTTA LA SUPERFICIE È UN ERRORE ACCETTABILE E PARAGONABILE CON QUELLO COMMESSO DAI TEODOLITI. BISOGNA PERÒ SEMPRE RICORDARE CHE NON VIENE SCELTO UN ELLISSOIDE CASUALE, BENSÌ QUELLO CHE HA GLI STESSI SEMIASSI DELLO SFEROIDE.



$$\rho = a\left(1-\alpha\operatorname{sen}^2\varphi\right) \quad \text{MA} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & \text{(PER PITAGORA)} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{z}{\rho} \end{cases}$$

ATTRAVERSO SUCCESSIVE APPROSSIMAZIONI SI OTTIENE

$$x^2+y^2+z^2 = a^2-2\alpha z^2 \longrightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}\underbrace{(1+2\alpha)}_{\text{QUANTITÀ SEMPRE POSITIVA DI CUI POSSO FARE LA RADICE}}=1$$

PONENDO $(1+2\alpha)=t^2$ SI HA

$$\Sigma := \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{a^2}{t^2}\right)}=1$$

EQUAZIONE DI UN ELLISSOIDE DI ROTAZIONE GENERICO
$\longrightarrow$ BISOGNA VERIFICARE CHE IL DENOMINATORE DI z^2 SIA UGUALE A C, AFFINCHÉ GLI ASSI DELL'ELLISSOIDE COINCIDANO CON QUELLI DELLO SFEROIDE.

$$\sqrt{\frac{a^2}{t^2}} = \frac{a}{t} = d\ (\text{DEF}) \longrightarrow d = \frac{a}{\sqrt{1+2\alpha}} \underset{\text{SVILUPPO IN SERIE BINOMIALE}}{\cong} a(1-\alpha) = a\left(1-\frac{a-C}{a}\right) = a-a+C = \underline{\underline{C}}$$

DUNQUE:

$$\Sigma := \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow \text{SI È DIMOSTRATO CHE SI TRATTA PROPRIO DELL'ELLISSOIDE CON GLI STESSI SEMIASSI.}$$

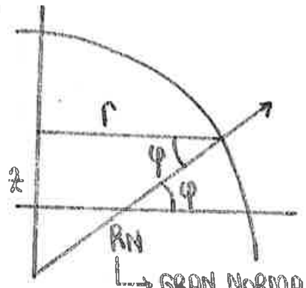
L'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE Σ SARÀ DUNQUE LA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO USATA PER SCOPI PLANIMETRICI, POICHÉ POSSIEDE GLI STESSI SEMIASSI, LE STESSE TANGENTI E LE STESSE VERTICALI DELLO SFEROIDE. SI USA L'ELLISSOIDE PERCHÉ È PIÙ FACILE DA STUDIARE DAL PUNTO DI VISTA MATEMATICO.
PER QUANTO RIGUARDA IL PROBLEMA ALTIMETRICO CONTINUIAMO INVECE A RIFERIRCI AL MARE IN QUIETE E NON SI HANNO PROBLEMI IN QUANTO È POSSIBILE RICAVARE TUTTO CON OPERAZIONI DI LIVELLAZIONE.

$$r = a\cos\beta = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$$

$$z = c\,\mathrm{sen}\beta = a\sqrt{1-e^2}\cdot\frac{\mathrm{sen}\varphi\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \frac{a\,\mathrm{sen}\varphi(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = R_N(1-e^2)\,\mathrm{sen}\varphi \\ r = R_N\cos\varphi \end{array}}$$

DEFINISCO GRAN NORMALE $R_N = \dfrac{r}{\cos\varphi} = \dfrac{a\cos\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$

r È IL RAGGIO DEL PARALLELO.



ATTRAVERSO OPPORTUNE SOSTITUZIONI SI RIESCE A PASSARE DA (φ,λ,h) A (x,y,z) PER UN GENERICO PUNTO Q CHE SI TROVA SULL'ELLISSOIDE.

$$\begin{cases} x(Q) = R_N\cos\varphi\cos\lambda \\ y(Q) = R_N\cos\varphi\,\mathrm{sen}\lambda \\ z(Q) = R_N(1-e^2)\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \longrightarrow$$

RICORDANDO L'ESPRESSIONE DI n' RICAVO LE COMPONENTI NON UNITARIE, OVVERO R_N, R_N, $R_N(1-e^2)$.

$\llcorner\!\to$ GRAN NORMALE (FORMANO UN TRIANGOLO RETTANGOLO)

VOLENDO POI RICAVARE LE COORDINATE DI UN PUNTO P A DISTANZA h DALL'ELLISSOIDE SI AVRÀ:

$$\begin{cases} x_P = x(Q) + n'h \\ y_P = y(Q) + n'h \\ z_P = z(Q) + n'h \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_P = (R_N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y_P = (R_N+h)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\lambda \\ z_P = R_N(1-e^2)\,\mathrm{sen}\varphi + h\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$$

<u>DALLE COORDINATE CARTESIANE GEOCENTRICHE ALLE GEOGRAFICHE</u> $(x,y,z)\to(\varphi,\lambda,h)$

SI TRATTA DI FORMULE INVERSE MOLTO UTILI IN QUANTO LE COORDINATE CARTESIANE GEOCENTRICHE NON DANNO IDEA DI DOVE UN PUNTO SI TROVI E SONO DUNQUE DI SCOMODO UTILIZZO. I MEZZI GPS FORNISCONO (x,y,z) E DIVENTA NECESSARIO CONOSCERE (φ,λ,h) SULL'ELLISSOIDE.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = (R_N+h)\cos\varphi \\ z = [(1+e^2)R_N+h]\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \longrightarrow \frac{z}{r} = \frac{[(1+e^2)R_N+h]\,\mathrm{sen}\varphi}{(R_N+h)\cos\varphi} = \left(1-\frac{e^2R_N}{R_N+h}\right)\tan\varphi$$

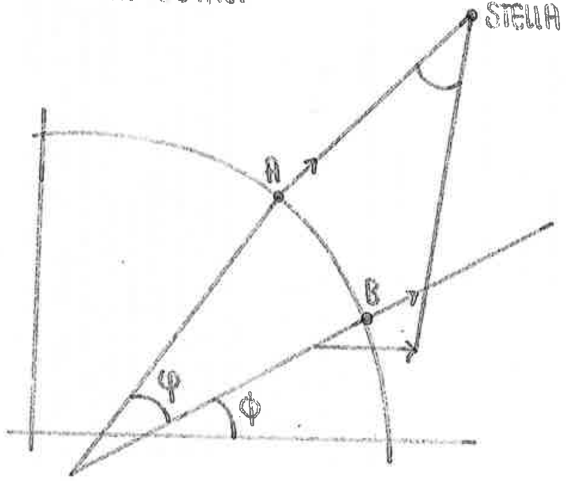
$\frac{z}{r}$: È UNA QUANTITÀ NOTA PERCHÉ x E y SONO NOTI. DI CONSEGUENZA RICAVO r. z È NOTO.

$\frac{e^2R_N}{R_N+h}$: È UNA QUANTITÀ CHE VALE CIRCA 10^{-4} E DUNQUE PICCOLA. PUÒ ESSERE TRASCURATA.

$\varphi \longrightarrow$ SI OTTIENE PER ITERAZIONE E TRAMITE SUCCESSIVE APPROSSIMAZIONI. z/R È UNA QUANTITÀ PROSSIMA A 1 E DUNQUE, ALLA PRIMA ITERAZIONE, QUESTA QUANTITÀ PUÒ ESSERE TRASCURATA. IN QUESTO MODO SI OTTIENE UNA PRIMA APPROSSIMAZIONE DELLA TANGENTE DI φ.
SI RICAVA POI R_N E POI UN VALORE APPROSSIMATO DI h. RIPARTENDO CON L'ITERAZIONE NON TRASCURO PIÙ z/R. COSÌ FACENDO OTTENGO VALORI SEMPRE PIÙ CORRETTI E PRECISI. CON TRE ITERAZIONI SI ARRIVA A UNA PRECISIONE CENTIMETRICA, CON QUATTRO MILLIMETRICA.

UNIVERSALI GEODETICI ⟶ TEODOLITI DI PRECISIONE CHE DETERMINANO LATITUDINI E LONGITUDINI ASTRONOMICHE.

SE SAPPIAMO CHE, AD ESEMPIO, SU TORINO IL SOLE RAGGIUNGE IL SUO CULMINE ALLE 12.20, TRASFORMEREMO QUEI 20 MINUTI IN UNA LONGITUDINE, CONOSCENDO LA VELOCITA' DI ROTAZIONE DELLA TERRA. OVVIAMENTE PERO' QUESTE MISURE NON SI EFFETTUANO COLLIMANDO IL SOLE, CHE NON E' UNA SORGENTE PUNTIFORME, BENSI' UNA STELLA, SORGENTE PUNTIFORME POSTA A DISTANZA CHE SI RITIENE INFINITA E I CUI RAGGI SONO SUPPOSTI TRA LORO PARALLELI. LO STESSO VALE PER LA LATITUDINE.



DAL PUNTO A LA STELLA SI TROVA ALLO ZENIT, DAL PUNTO B INVECE LA STELLA ASSUME UN'ANGOLAZIONE, DUNQUE UNA LATITUDINE. I NOSTRI ANTENATI RICAVAVANO QUESTI DATI CON L'USO DELLE EFFEMERIDI.

N = ONDULAZIONE DEL GEOIDE

E' UNA QUANTITA' MOLTO IMPORTANTE POICHE' SI RIFERISCE AL POTENZIALE DELLA GRAVITA'.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 170

COORDINATE CARTESIANE LOCALI O EULERIANE (x, y, z)

I SISTEMI DI COORDINATE VISTI FINORA SONO SISTEMI DI COORDINATE GLOBALI, CON CUI È POSSIBILE DESCRIVERE L'INTERA SUPERFICIE TERRESTRE. PER SCOPI LOCALI PUÒ PERÒ ESSERE UTILE RIFERIRSI AD UN SISTEMA DI COORDINATE PIÙ LIMITATO.
LE COORDINATE EULERIANE, CHE FANNO RIFERIMENTO AL PIANO TOPOGRAFICO, SONO DUNQUE COMODE, PLANIMETRICAMENTE MA NON ALTIMETRICAMENTE, PER LA RAPPRESENTAZIONE DI PICCOLE PORZIONI DI SPAZIO.

$z \longrightarrow$ DIRETTO COME n'
$y \longrightarrow$ DIRETTO SECONDO IL MERIDIANO
$x \longrightarrow$ DIRETTO ORTOGONALMENTE A y E z.

SI PASSA:

1) ALLE COORDINATE EULERIANE DALLE CARTESIANE GEOCENTRICHE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{R}_{\text{MATRICE DI ROTAZIONE CHE DIPENDE SOLO DA } \varphi \text{ E DA } \lambda} \cdot \begin{pmatrix} X - X_P \\ Y - Y_P \\ Z - Z_P \end{pmatrix}$$

2) ALLE COORDINATE CARTESIANE GEOCENTRICHE DALLE EULERIANE:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

SI È DETTO CHE LE COORDINATE (X, Y, Z) SONO SCOMODE PERCHÈ NON DANNO IDEA DEL LUOGO IN CUI CI TROVIAMO. LO STESSO NON VALE IN RIFERIMENTO A UNA ZONA RISTRETTA.
LA TERNA (x, y, z) SI OTTIENE TRAMITE DUE ROTAZIONI λ E φ, MENTRE NON C'È ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE z. P È L'ORIGINE DELLA TERNA DI COORDINATE LOCALI.
LA POSIZIONE DI P SI RICAVA CONOSCENDONE LATITUDINE E LONGITUDINE, CON L'USO DELLE FORMULE GIÀ VISTE IN PRECEDENZA.
QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO PUÒ ESSERE COMODO IN AMBITO LOCALE E DUNQUE ALL'INTERNO DI UN RAGGIO DI 10 km.

ELLISSOIDE COME SUPERFICIE DI RIFERIMENTO PLANIMETRICA

$n' \longrightarrow$ NORMALE ALL'ELLISSOIDE

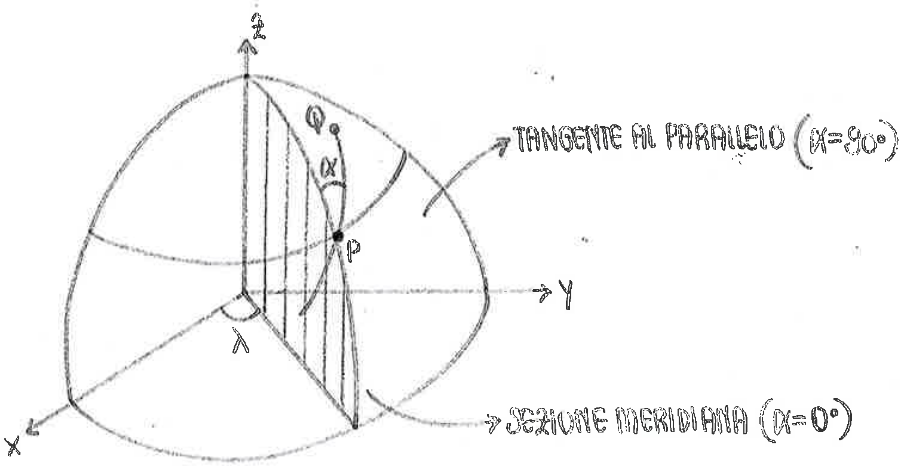
COME SI È DETTO, PER GLI SPOSTAMENTI PLANIMETRICI CI SI RIFERISCE ALL'ELLISSOIDE.

1) IN CHE DIREZIONE ANDARE?
2) QUANTO DISTA IL PUNTO DI ARRIVO?

CONSIDERO α (AZIMUT) $\longrightarrow$ FASCIO DI PIANI PASSANTI PER n' CHE TAGLIANO L'ELLISSOIDE IN SEZIONI DETTE SEZIONI NORMALI. SONO SEZIONI NORMALI SOLO QUELLE CON COSTOLA n'; LE ALTRE SARANNO SEZIONI OBLIQUE.

IL MERIDIANO È LA SEZIONE NORMALE CON $\alpha = 0$ E DUNQUE QUALUNQUE ALTRA SEZIONE NORMALE GENERA UN ANGOLO α RISPETTO AL MERIDIANO.

PER POTERMI MUOVERE SULL'ELLISSOIDE DEVO STUDIARE LE SEZIONI NORMALI.
LA SEZIONE NORMALE CON $\alpha = 90°$ NON È IL PARALLELO MA È TANGENTE AL PARALLELO.



RAGGIO MINIMO $\longrightarrow$ MERIDIANO
RAGGIO MASSIMO $\longrightarrow$ NORMALE AL MERIDIANO
} SEZIONI PRINCIPALI

TUTTE LE TANGENTI AI RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI SONO DIRETTE SECONDO n'.
I RAGGI DI CURVATURA VARIANO LINEARMENTE CON L'AZIMUT α DA VALORI MINIMI (ρ) A VALORI MASSIMI $R_N \longrightarrow$ GRAN NORMALE, GIÀ RICAVATA NUMERICAMENTE.

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{\sin^2\alpha}{R_N}$$

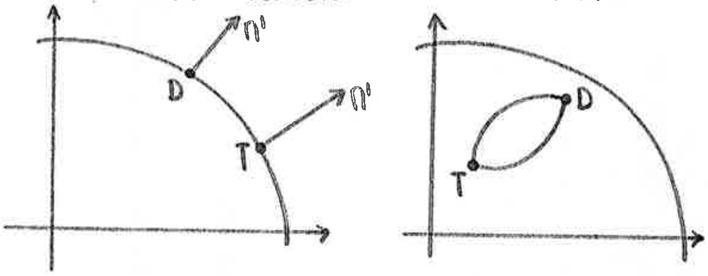
RELAZIONE DI EULERO

RICAVO IL RAGGIO DI CURVATURA ρ DELL'ELLISSE. QUADRANDO E SOMMANDO RICAVO EFFETTIVAMENTE ρ COME RAPPORTO TRA dS E $d\varphi$.

$$\rho = \frac{dS}{d\varphi}$$

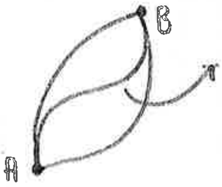
LINEE GEODETICHE

→ PROBLEMA: STABILIRE E MISURARE LA DISTANZA ESISTENTE TRA DUE PUNTI P E Q SULL'ELLISSOIDE.
PRENDIAMO IN ESAME IL CONCETTO DI SEZIONE NORMALE:



LE SEZIONI NORMALI IN ANDATA E RITORNO SONO DIVERSE NONOSTANTE IO VIAGGI CON α COSTANTE, CIO' ACCADE PERCHE' I DUE PUNTI HANNO α DIVERSO.
LE DUE DIREZIONI RIMARREBBERO LE MEDESIME SOLO SE I DUE PUNTI SI TROVASSERO SULLO STESSO MERIDIANO.

LE DUE DIREZIONI DESCRITTE DALLE SEZIONI NORMALI SONO EVIDENTEMENTE DIVERSE SOLO PER DISTANZE CHE SUPERANO IL MIGLIAIO DI KM.
SE CERCO UNA PRECISIONE SUFFICIENTE NON POTRO' ALLORA RIFERIRMI ALLE SEZIONI NORMALI, MA DEVO DEFINIRE IL CONCETTO DI GEODETICA: CURVA NON PIANA CHE UNISCE DUE PUNTI.



GEODETICA: INIZIALMENTE SOMIGLIA ALLA PRIMA SEZIONE NORMALE, DOPODICHÈ, IN PROSSIMITA' DI B, SOMIGLIA ALLA SECONDA. NEL CENTRO SI DISCOSTA DA ENTRAMBE. LA PARTICOLARITA' DELLA GEODETICA E' DI ESSERE UNICA, A DIFFERENZA DELLE SEZIONI NORMALI. FINO AL MIGLIAIO DI KM SI USANO PERO' LE SEZIONI NORMALI POICHE' SI DISCOSTANO DI UN VALORE DEL TUTTO INAPPREZZABILE.
LA GEODETICA SI ESPRIME IN FORMA PARAMETRICA.

LA SEZIONE NORMALE SI OTTIENE SEZIONANDO L'ELLISSOIDE CON UN PIANO AVENTE PER GENERATRICE LA NORMALE n AL PUNTO, DUNQUE NON E' DETTO CHE LA NORMALE AD UN ALTRO PUNTO SIA LA STESSA E QUINDI DUE PUNTI DIVERSI HANNO SEZIONI NORMALI DIVERSE → VIAGGIARE SULLA SEZIONE NORMALE PRODUCE DUE ITINERARI DIVERSI IN ANDATA E IN RITORNO PERCHÈ LE DUE NORMALI NON SONO IDENTICHE. LA CURVA CHE APPROSSIMA I DUE ITINERARI E' LA GEODETICA ED E' UNICA.
L'EQUAZIONE DELLA GEODETICA SI OTTIENE EGUAGLIANDO I COSENI DIRETTORI DELLA CURVA DATA IN FORMA PARAMETRICA. IL PARAMETRO DELLA GEODETICA E' S E RAPPRESENTA LO SVILUPPO DELLA CURVA, OVVERO LA SUA LUNGHEZZA.

→ I COSENI DIRETTORI DELL'ELLISSOIDE SONO PROPORZIONALI A x, y, z DELLA FUNZIONE

→ I COSENI DIRETTORI DI UNA CURVA NELLO SPAZIO SONO PROPORZIONALI AL QUADRATO DELLA DERIVATA.

UGUAGLIANDO LE EQUAZIONI DEI COSENI DIRETTORI LE COSTANTI DI PROPORZIONALITA' SI SEMPLIFICANO, E SI OTTIENE DUNQUE L'EQUAZIONE DELLA GEODETICA.

SIA L'ELLISSOIDE $\Sigma := f(x,y,z)=0$, I COSENI DIRETTORI DELLA NORMALE ALL'ELLISSOIDE SONO

$$\frac{1}{2S}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{1}{2S}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{1}{2S}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{CON } 2S=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

MENTRE PER LA GEODETICA I COSENI DIRETTORI DELLA CURVA DATA IN FORMA PARAMETRICA SONO ESPRESSI DALLE FORMULE DI PUISEUX-WIENGARTEN (SVILUPPI IN SERIE MOLTO COMPLESSI), E VALGONO

$$R_\alpha\frac{d^2x}{ds^2} \qquad R_\alpha\frac{d^2y}{ds^2} \qquad R_\alpha\frac{d^2z}{ds^2}$$ CON R_α = RAGGIO DI PRIMA CURVATURA.

EGUAGLIANDO LE EQUAZIONI SI OTTIENE L'EQUAZIONE DELLA GEODETICA: *

RELAZIONE DI CLAIRAUT

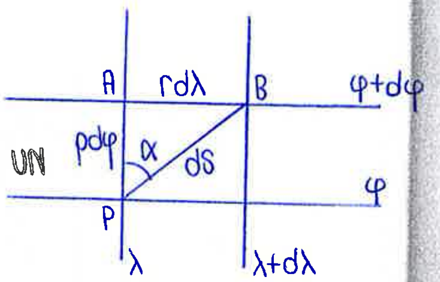


FIG. 3.4) ⟶ L'IMMAGINE RAPPRESENTA ELEMENTI INFINITESIMI
MERIDIANI E PARALLELI SONO PERPENDICOLARI E DUNQUE HO UN TRIANGOLO RETTANGOLO IN A.
PER TRIGONOMETRIA POSSO DIRE CHE

$r\, d\lambda = dS \operatorname{sen}\alpha \longrightarrow \boxed{r \operatorname{sen}\alpha = \text{cost}}$ RELAZIONE DI CLAIRAUT

LA RELAZIONE DI CLAIRAUT NON VALE SOLO PER L'ELLISSOIDE MA PER TUTTE LE SUPERFICI DI ROTAZIONE. QUESTO ACCADE PERCHÉ NELLO SVILUPPO DEI CALCOLI PRECEDENTI, CHE HANNO CONDOTTO ALLA RELAZIONE, ABBIAMO USATO SOLO LA x E LA y E NON ANCHE LA z.
DALLA RELAZIONE SI DEDUCE CHE SE AUMENTERÀ IL RAGGIO DOVRÀ NECESSARIAMENTE DIMINUIRE L'ANGOLO α E VICEVERSA, AFFINCHÉ IL PRODOTTO RIMANGA COSTANTE.
IN REALTÀ, PER DISEGNARE LA GEODETICA CON PRECISIONE, BISOGNA USARE LE FORMULE DI PUISEUX-WIENGARTEN, ANCHE SE LA RELAZIONE DI CLAIRAUT GARANTISCE UNA BUONA APPROSSIMAZIONE.
IL RISULTATO FORNITOCI È INFATTI UN ITINERARIO CHE PREVEDE LA VARIAZIONE DELL'AZIMUT (IN QUESTO MODO OTTERRÒ LA GEODETICA E QUINDI LA MINIMA DISTANZA).
È QUI CHE SI NOTA LA DIFFERENZA CON LA SEZIONE NORMALE! LA SEZIONE NORMALE POSSIEDE INFATTI α COSTANTE, E DUNQUE NON "CAMBIA ROTTA". LA GEODETICA SUBISCE INVECE VARIAZIONI.

TEOREMI DELLA GEODESIA OPERATIVA

L'EFFETTIVO UTILIZZO DI STRUMENTI GEODETICI E TOPOGRAFICI MOSTRA UN'INCONGRUENZA CON QUANTO IPOTIZZATO FINORA, OVVERO DI RIFERIRE LE MISURE ALL'ELLISSOIDE. QUESTI STRUMENTI FANNO INFATTI RIFERIMENTO AL CAMPO REALE DELLA GRAVITÀ, E NON A QUELLO NORMALE. LE NOSTRE MISURE SI RIFERISCONO PERCIÒ PIUTTOSTO AL GEOIDE, E NON ALL'ELLISSOIDE.
PERCIÒ, PER TROVARE L'EFFETTIVO PERCORSO DELLA GEODETICA, DOVREI RISOLVERE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALE, MA SI TRATTA DI UN PERCORSO POCO AGEVOLE.
È DUNQUE OPPORTUNO EFFETTUARE UNA SEMPLIFICAZIONE, MA PRIMA DI FARE CIÒ È NECESSARIO CAPIRE SE UNA SIMILE OPERAZIONE CI È CONSENTITA.
IL DISCORSO NON È QUINDI PIÙ TEORICO BENSÌ PRATICO. DAL PUNTO DI VISTA TEORICO, INFATTI, SEZIONE NORMALE E GEODETICA NON COINCIDONO, MA DAL PUNTO DI VISTA OPERATIVO SI È ANDATO A VERIFICARE DI QUANTO DIFFERISCONO.

⟶ SI NECESSITA DI UNA PRECISIONE CHE VA CONFRONTATA CON QUELLA DEGLI STRUMENTI A NOSTRA DISPOSIZIONE. PER PRECISIONE SI INTENDE IL RAPPORTO ESISTENTE TRA ERRORE COMMESSO E FONDO SCALA DELLO STRUMENTO.
I DISTANZIOMETRI HANNO UNA PRECISIONE DI 10^{-6}.

SI È CALCOLATO CHE, SU 1000 km, LA DISTANZA TRA SEZIONE NORMALE E GEODETICA È DELL'ORDINE DI 1 cm. SI TRATTA PERCIÒ DI 10^{-8}, DISTANZA NEMMENO PERCEPIBILE DA UN DISTANZIOMETRO.

⟶ NE DEDUCO CHE, USANDO STRUMENTI TOPOGRAFICI, SEZIONI NORMALI E GEODETICHE SONO LA STESSA COSA.
(TEOREMA DELLA GEODESIA OPERATIVA)

CAMPO GEODETICO E CAMPO TOPOGRAFICO

LE ESPRESSIONI PW SONO IN FUNZIONE DELLE COORDINATE LOCALI (x, y, z).
MUOVENDOCI IN UN'AREA LIMITATA (300 KM) POSSIAMO TRONCARE LO SVILUPPO IN SERIE FINO A QUESTA DISTANZA.
PONENDO $R_\alpha = R = \sqrt{\rho R_N}$ E $e=0$ SI OTTIENE:

$$\begin{cases} x_s = s \cdot \operatorname{sen}\alpha \left(1 - \dfrac{s^2}{6R^2}\right) \\ y_s = s \cdot \cos\alpha \left(1 - \dfrac{s^2}{6R^2}\right) \\ z_s = -\dfrac{s^2}{2R} \end{cases} \longrightarrow$$

SE DOVESSIMO APPROSSIMARE LA SUPERFICIE A QUELLA DI UNA SFERA NORMALE, SI USEREBBERO VALORI DI R COMPRESI TRA ρ E R_N. PER FAR CIO' SI USANO LE FORMULE DI PW SVILUPPANDOLE E MODIFICANDOLE IN RELAZIONE ALLE CARATTERISTICHE SCELTE.

CI SI CHIEDE CHE DIFFERENZA CI SIA TRA LE COORDINATE DELL'ELLISSOIDE E QUELLE DELLA SFERA LOCALE, BISOGNA DUNQUE CAPIRE FINO A CHE PUNTO L'APPROSSIMAZIONE SIA VALIDA E DUNQUE FINO A CHE PUNTO SI POSSA EFFETTIVAMENTE SOSTITUIRE L'ELLISSOIDE CON LA SFERA LOCALE.
DAI CALCOLI E DALL'ESPERIENZA SI DEDUCE CHE LA SEMPLIFICAZIONE E' CONSENTITA FINO AD UNA DISTANZA DI CIRCA 100 KM PER RILIEVI PLANIMETRICI.
PER QUANTO RIGUARDA LE QUOTE, INVECE, SI DIMOSTRA CHE PER $s > 20$ km CONVIENE RIFERIRSI ALL'ELLISSOIDE E NON ALLA SFERA LOCALE.
INFATTI PER $s = 20$ km SI HA $\Delta z = 5{,}4$ cm E GIA' DA QUESTI VALORI SI PERCEPISCE CHE LA TERRA NON SIA EFFETTIVAMENTE UNA SFERA. IL VALORE DI Δz CRESCE CON IL QUADRATO DELLA DISTANZA E QUESTA RELAZIONE IMPLICA L'INUTILITA' DELLA SFERA LOCALE PER IL PROBLEMA ALTIMETRICO. ⟶ CAMPO GEODETICO

SI CERCA ORA DI EFFETTUARE UNA SUCCESSIVA APPROSSIMAZIONE, SOSTITUENDO ALL'ELLISSOIDE E ALLA SFERA LOCALE IL PIANO TANGENTE NEL PUNTO ESAMINATO P.
PER RILIEVI PLANIMETRICI QUESTA APPROSSIMAZIONE E' ACCETTABILE PER UN INTORNO DI CIRCA 15 KM IN QUANTO, PER QUESTE DISTANZE, L'ERRORE NON E' NEPPURE CALCOLABILE (RIENTRA NEL 10^{-6} DEI DISTANZIOMETRI).
PER QUANTO RIGUARDA LE QUOTE, INVECE, I VALORI SONO ESAGERATAMENTE FUORVIANTI GIA' PER PICCOLE DISTANZE (8 cm SU 1 km) E DUNQUE IL PIANO TANGENTE NON E' USATO.
⟶ CAMPO TOPOGRAFICO

$$X = s \sin \alpha \qquad (3.23)$$
$$Y = s \cos \alpha \qquad (3.23)$$

L'errore planimetrico Δs risultante, differenza tra le (3.22) e le (3.23) vale $s^2/2R^2$

s =	10 km	20 km	50 km
Δs=	$4*10^{-7}$	$1.6*10^{-6}$	$10.2*10^{-5}$

Tabella 3.3: Errore planimetrico nel campo topografico

Siccome la precisione massima di distanziometri EDM è di $1 \cdot 10^{-6}$ possiamo affermare che, (definizione di _campo topografico_):

in un'intorno di 10-15 km, per misure planimetriche possiamo sostituire alla sfera locale il piano locale tangente in P.

Non è mai possibile riferire *le quote nel campo topografico* al piano locale ma occorre utilizzare ancora la 3.22c.
L'errore altimetrico ΔZ risultante, $\Delta Z = s^2/2R$ che si commette in caso contrario, assume i valori riportati in tabella 3.4.

s =	100 m	500 m	1 km	5 km	10 km
ΔZ =	0.8 mm	2 cm	8 cm	2 m	7.8 m

Tabella 3.4: Errore altimetrico nel campo topografico

Già a poche centinaia di metri l'errore che si commette è paragonabile alla sensibilità del metodo di misura dei dislivelli della livellazione trigonometrica (o di quella tacheometrica) se le distanze sono misurate con i moderni distanziometri ad onde.

DI OGNI PUNTO NOI NON CONOSCIAMO α E δ, BENSÌ φ E λ (LATITUDINE E LONGITUDINE). QUINDI NOTI (φ_0, λ_0) E (φ_P, λ_P) DOBBIAMO OTTENERE α E δ. SONO CALCOLI POSSIBILI CON L'USO DI FORMULE CHE NON STUDIAMO.
DI CONSEGUENZA CALCOLO X E Y NOTE φ E λ. IN SOSTANZA NOTE LATITUDINE E LONGITUDINE POSSO RICAVARE COORDINATE PIANE.

→ X E Y (COORDINATE GEODETICHE RETTANGOLARI) SONO QUELLE USATE DAL CATASTO, CHE RICOPRÌ L'INTERA SUPERFICIE ITALIANA ANCOR PRIMA CHE L'ISTITUTO GEOGRAFICO MILITARE TERMINASSE DI METTERE A PUNTO LA RETE TOPOGRAFICA.

4. PROBLEMI PLANIMETRICI RISOLUBILI NEL CAMPO GEODETICO

4.1 Il teorema di Legendre

Premessa

Si può dimostrare attraverso le (3.19) che _nel campo geodetico_ una figura ellissoidica può essere risolta con i teoremi della trigonometria sferica. I teoremi della trigonometria sferica non sono tuttavia di facile utilizzo; il teorema di Legendre permette allora di risolvere _in questo intorno_, un qualunque triangolo sferico con gli algoritmi della trigonometria piana.

La somma degli angoli interni di un triangolo sferico A,B,C vale

$$A + B + C = \pi + 3\varepsilon$$

dove 3ε, è detto _eccesso sferico_ e si ricava da:

$$\boxed{3\varepsilon = \frac{S}{R^2}} \qquad (4.1)$$

con S superficie del triangolo e R raggio della sfera locale. Il teorema di Legendre afferma:

"Sia dato un triangolo sferico i cui lati siano piccoli rispetto ad R, tali che l/R si assuma come quantità del 1° ordine. Commettendo un errore di $(l/R)^4$ gli angoli di un triangolo piano che ha i lati della stessa lunghezza dei lati del triangolo sferico possono essere derivati degli angoli di quest'ultimo sottraendo a questi 1/3 dell'eccesso sferico."

Per triangoli di 60 km di lato, ad esempio, $3\varepsilon = 24^{cc}$; ($1^{cc}=10^{-4}$ gon) ; l'errore residuo vale $(l/R)^4 = 0{,}006^{cc}$.
Dal teorema deriva il corollario:
a meno di errori di $(l/R)^4$, l'area del triangolo sferico è la stessa del triangolo piano costruito come già detto.
Questo teorema permette di risolvere agevolmente il problema inverso del trasporto di coordinate geografiche ed il passaggio dalle coordinate geodetiche polari alle rettangolari.

4.2 Coordinate geodetiche polari e rettangolari

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 170

Datum geodetico

Un **datum geodetico**, detto anche semplicemente **datum**,[1] è un sistema geodetico di riferimento che consente di definire in termini matematici la posizione di punti sulla superficie della Terra. Il datum consente quindi l'operazione di georeferenziazione di luoghi o oggetti. Non essendo la Terra uno sferoide perfetto, il datum di riferimento non può essere univoco. Si possono pertanto definire diversi modelli (datum) in funzione delle esigenza. È quindi sempre necessario associare alle coordinate di un punto il suo datum di riferimento, in quanto lo stesso punto, può avere coordinate diverse a seconda del datum utilizzato.
Occorre notare che il sistema di riferimento in se è puramente teorico, quindi per il suo utilizzo pratico deve necessariamente essere associato ad un insieme fisico di punti materializzati sulla superficie della Terra, di cui si devono misurare le posizioni, ovvero assegnare le coordinate. Questo insieme di punti prende il nome di "rete di inquadramento" e costituisce la realizzazione materiale del datum.

Classificazione dei datum

I sistemi di riferimento possono essere classificati secondo vari criteri.
Una prima differenziazione è quella fra *sistemi non inerziali* e *sistemi inerziali*:

- i sistemi *non inerziali* (o in inglese *earth-fixed*) in quanto solidali con la Terra, sono quelli utilizzati tipicamente in geodetica e topografia;
- i sistemi *inerziali*, cioè fissi rispetto al Sole o alle stelle fisse, ed in cui la Terra risulta essere in movimento, vengono utilizzati ad esempio in astronomia e per lo studio del moto dei satelliti.

Una seconda differenziazione riguarda il numero di dimensioni usate per la definizione del datum. Si parla quindi di:

- datum Orizzontali (o Planimetrici): sono usati nella geodesia classica basata su misure eseguite a terra;
- datum Verticali (o Altimetrici): usati per la misura della quota ortometrica;
- datum Tridimensionali: usati nella moderna geodesia basata su misure fatte con i satelliti.

I datum nella Geodesia classica

Nella geodesia classica, cioè quella prima della disponibilità dei satelliti, l'unico modo per calcolare le coordinate di un punto era quello di effettuare delle misurazioni a terra per mezzo delle triangolazioni o trilaterazioni. È pertanto necessario disporre di una superficie di riferimento, ovvero di una superficie matematica nota sulla quale poter sviluppare i calcoli geodetici, questa superficie prende il nome di ellissoide di riferimento. Dal punto di vista matematico, un ellissoide di riferimento è usualmente uno sferoide oblato descritto dalla formula:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Dove:

- a = semiasse maggiore (o raggio equatoriale)
- c = semiasse minore (o raggio polare)
- a > c

pochi metri. I sistemi attualmente più utilizzati sono il sistema statunitense GPS e il sistema russo GLONASS. Il sistema europeo Galileo è tuttora in fase di realizzazione e dovrebbe essere operativo entro il 2014.

Nella geodesia satellitare è necessario adottare dei datum tridimensionali con orientamento globale, valido cioè per tutta la Terra, e non solo per porzioni più o meno grandi di essa come accade per i datum con orientamento locale o medio.

Il datum è basato su una terna di assi cartesiani fissa rispetto alla Terra, a cui viene associato un ellissoide geocentrico, secondo le seguenti regole:

- origine (O) della terna posizionata nel baricentro terrestre;
- asse Z coincidente con l'asse di rotazione terrestre convenzionale;
- assi X e Y posti sul piano equatoriale, con asse X diretto secondo il Meridiano di Greenwich;
- centro dell'ellissoide coincidente con quello della terna (e quindi della Terra), semiasse minore orientato come l'asse Z e semiassi maggiori orientati come gli assi X e Y.

Per la loro caratteristica di essere solidali e geocentrici con la Terra questi sistemi vengono anche detti ECEF, cioè E*arth Centered - Earth Fixed*.

Datum verticali

Nei datum planimetrici la posizione dei punti sulla superficie viene individuata tramite le coordinate geografiche. In questi modelli l'altezza del punto è quella relativa all'ellissoide di riferimento utilizzato per il datum. Nella pratica tuttavia quello che interessa è la quota relativa al livello del mare, detta in termini più precisi la quota ortometrica (o geoidica). Per queste misure occorre quindi definire un datum specifico che viene detto datum verticale o altimetrico.

Per definire un datum verticale occorre:

- individuare un punto di origine, detto anche "caposaldo fondamentale", a cui si assegna convenzionalmente la quota zero;
- associare al punto di origine una rete altimetrica, detta anche rete di livellazione, composta di punti (capisaldi) che coprono tutto il territorio di interesse, posti a distanza di 1 o 2 chilometri, di cui va misurata la quota ortometrica assoluta;
- associare un modello di geoide (globale o locale) valido per l'area interessata dal modello.

L'ultimo punto risulta essenziale nella geodesia moderna basata sull'uso dei satelliti in quanto questi forniscono le quote riferite all'ellissoide di riferimento (quota ellissoidica), mentre nelle applicazioni di uso comune si usa la quota ortometrica.

Per la definizione della quota del caposaldo fondamentale viene usato uno strumento detto mareografo che è in grado di misurare e registrare il livello del mare in un determinato punto. Questo valore, mediato in un periodo lungo, solitamente decine di anni, fornisce un valore che viene assunto come livello del mare. Questo valore viene quindi riportato con misure di livellazione ad un punto fisso e stabile nelle vicinanze che costituisce appunto il caposaldo fondamentale.

Il caposaldo fondamentale è quindi l'origine della rete altimetrica che viene realizzata mediante tecniche di livellazione geometrica di alta precisione.

Sistemi di coordinate e trasformazioni

Una volta definito un datum è possibile georeferenziare un punto, ossia definirne la posizione, mediante vari sistemi di coordinate. I sistemi più utilizzati sono:

- Coordinate geografiche ellissoidiche;

MISURA DI UNA GRANDEZZA

OPERAZIONI DI MISURA:

1) MISURE DIRETTE

CONTO IL NUMERO DI UNITÀ CONTENUTE IN UNA QUANTITÀ COSTITUITA

2) MISURE INDIRETTE

SONO DEFINITE DA UN LEGAME FUNZIONALE A MISURE DIRETTE. IL CALCOLO DELL'AREA DI UNA QUALUNQUE FIGURA GEOMETRICA È UNA MISURA INDIRETTA.

3) MISURE DIRETTE CONDIZIONATE

SONO MISURE DIRETTE MA LEGATE TRA LORO DA UN LEGAME FUNZIONALE, CHE NE CONTROLLA L'ERRORE. LA MISURA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO DEVE RISPETTARE IL VINCOLO CHE LA LORO SOMMA SIA π.

4) MISURE INDIRETTE CONDIZIONATE

ESEMPIO PRATICO: I DISLIVELLI DI ALCUNI PUNTI SONO MISURE DIRETTE POICHÈ VENGONO MISURATE PER MEZZO DI STRUMENTI (LIVELLO + STADIA). LE QUOTE SONO INVECE MISURE INDIRETTE POICHÈ SONO FUNZIONE DEI DISLIVELLI CALCOLATI. MISURE INDIRETTE CONDIZIONATE SONO QUINDI, AD ESEMPIO, LE QUOTE DI TRE PUNTI LEGATI TRA LORO DA TRE MISURE DI DISLIVELLO. LA CONDIZIONE È CHE LA SOMMA DI TUTTI I DISLIVELLI COMPONENTI UN PERCORSO CHIUSO SIA NULLA.

VENGONO CONSIDERATE VARIE TIPOLOGIE DI ESPERIMENTI, COME AD ESEMPIO IL LANCIO DI UNA MONETA, LA MISURA DI UN CORPO RIGIDO CON IL METODO DELLE ALZATE, O LE COORDINATE (x,y) DEL PUNTO DI CADUTA DI UN OGGETTO.

⟶ PORTANDO LO STRUMENTO DI MISURA ALLA MIGLIOR PRECISIONE POSSIBILE, OVVERO AL LIMITE DELLA SENSIBILITÀ DELLO STRUMENTO, POTRÒ DIRE CHE È IMPOSSIBILE A PRIORI PREDIRE CON ESATTEZZA IL RISULTATO DELL'ESPERIMENTO.
RIPETENDO L'ESPERIMENTO SI POTRANNO INFATTI AVERE RISULTATI DIVERSI.

CIÒ ACCADE PERCHÈ, NEL COMPIERE L'OPERAZIONE DI MISURA, SI COMPIONO DEGLI "ERRORI".

TIPOLOGIE DI ERRORE:

1) ERRORI GROSSOLANI

SONO I PIÙ BANALI, DOVUTI AD ESEMPIO ALLA DISATTENZIONE

2) ERRORI SISTEMATICI

SONO TIPOLOGIE DI ERRORE CHE CONSERVANO MEDESIMO VALORE E SEGNO AL RIPETERE DELLA MISURA. SI TRATTA AD ESEMPIO DELL'IMPERFETTA TARATURA DI UNO STRUMENTO.

⟶ QUESTE DUE PRIME TIPOLOGIE DI ERRORE NON SONO DI INTERESSE STATISTICO

LE VARIABILI CASUALI SI DISTINGUONO IN:

VARIABILE CASUALE DISCRETA → L'INSIEME DEI RISULTATI S È FORMATO DA UN NUMERO DISCRETO DI PUNTI SUI QUALI È CONCENTRATA UNA PROBABILITÀ. F(x) È DISCONTINUA.

VARIABILE CASUALE CONTINUA → IN QUESTO CASO LA PROBABILITÀ CHE X ASSUMA UN SINGOLO VALORE È SEMPRE UGUALE A ZERO. F(x) È CONTINUA.

ESEMPIO DI VARIABILE CASUALE DISCRETA → LANCIO DI UNA MONETA

AFFINCHÉ SI POSSA PARLARE DI VARIABILI CASUALI È INDISPENSABILE ASSOCIARE DEI NUMERI REALI AI TERMINI DELL'ESPERIMENTO.

$S = \{\phi, 0, 1\}$

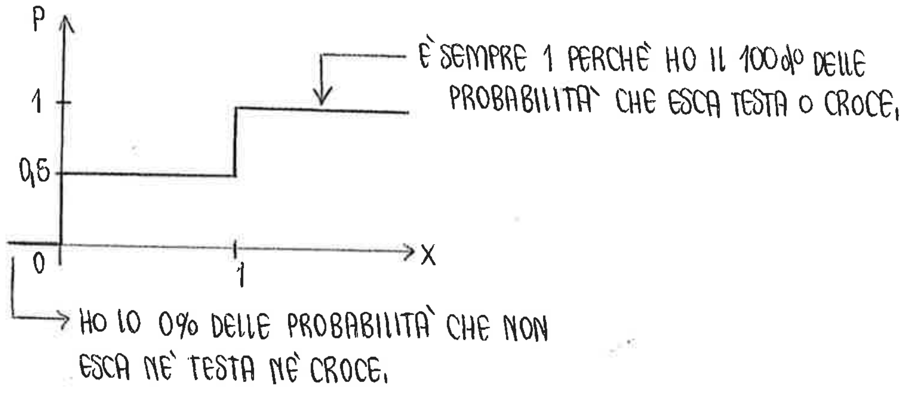
TESTA (0) → PROBABILITÀ = 0,5
CROCE (1) → PROBABILITÀ = 0,5

IN QUESTO CASO LA VARIABILE SI CHIAMA DISCRETA PERCHÉ È COSTITUITA DA UN INSIEME DEFINITO, COMPOSTO IN QUESTO CASO DA DUE SOLI NUMERI. NON SI HANNO POSSIBILITÀ AL DI FUORI DI TESTA O CROCE E QUINDI DI ZERO O UNO.

I VALORI ARGOMENTALI NON ERANO RAPPRESENTABILI IN $\mathbb{R}$, MA GLI È STATO ASSOCIATO UN NUMERO CHE LE HA RESE VARIABILI CASUALI.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \longrightarrow \text{VALORI ARGOMENTALI} \\ P = 1/2 \quad P = 1/2 \longrightarrow \text{PROBABILITÀ} \end{cases}$$

PER	F(x)
$x < 0$	0
$0 \leq x \leq 1$	1/2
$x > 1$	1

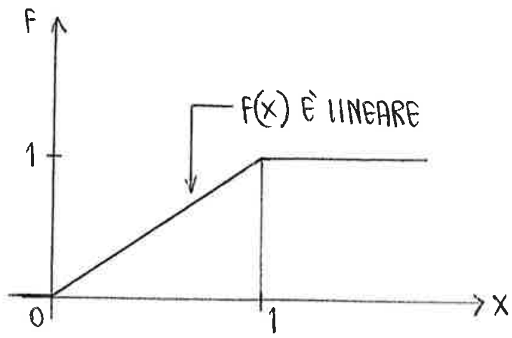


ESEMPIO DI VARIABILE CASUALE CONTINUA

SI CONSIDERA UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEFINITA IN $[0,1] \in \mathbb{R}$, TALE CHE $P(a \leq x \leq b) = b - a = \text{COST}$ (LA DISTRIBUZIONE È UNIFORME).

LA SUA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE SARÀ:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \leq 0 \\ F(x) = x & 0 < x \leq 1 \\ F(x) = 1 & x > 1 \end{cases}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 170

LA DIFFERENZA SOSTANZIALE TRA VARIABILE CASUALE E VARIABILE STATISTICA È DI CONTENUTO.
LA VARIABILE CASUALE MISURA INFATTI UN GRADO DI POSSIBILITÀ CHE IL RISULTATO DELL'ESPERIMENTO ABBIA VALORE x_i. NELLA VARIABILE STATISTICA LA FREQUENZA RELATIVA f_i NON FA CHE REGISTRARE IL FATTO CHE SU N RIPETIZIONI SI SONO OTTENUTI f_i RISULTATI CON VALORE x_i.

⟶ LA PROBABILITÀ È UN ENTE APRIORISTICO ASSIOMATICO

⟶ LA FREQUENZA È UN INDICE CHE MISURA A POSTERIORI RISULTATI EMPIRICI, OVVERO REALMENTE MISURATI.

LA VARIABILE CASUALE DEFINISCE QUINDI, A PRIORI, LA POSSIBILITÀ CHE SI ABBIA UN RISULTATO.
LA VARIABILE STATISTICA SI RIFERISCE INVECE AI REALI RISULTATI DEGLI ESPERIMENTI EFFETTUATI.
LE FLUTTUAZIONI ACCIDENTALI FANNO SI CHE I RISULTATI DEGLI ESPERIMENTI SI DIVERSIFICHINO, DISCOSTANDOSI TALVOLTA DA CIÒ CHE ERA STATO "PREDETTO" PER MEZZO DELLA VARIABILE CASUALE.
SE FACESSIMO TENDERE IL NUMERO DI MISURE A INFINITO, VARIABILE CASUALE E VARIABILE STATISTICA TENDEREBBERO A COINCIDERE. OVVIAMENTE CIÒ NON È POSSIBILE.

VARIABILE STATISTICA COME ESTRAZIONE DA VARIABILE CASUALE

LA VARIABILE STATISTICA PUÒ ESSERE VISTA COME UN'ESTRAZIONE A PARTIRE DA UN CERTO NUMERO DI CAMPIONI DI VARIABILI CASUALI.
IN BASE A QUESTA IDENTITÀ FORMALE, LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $F(x)$ VALIDA PER LE VARIABILI CASUALI PRENDE IL NOME DI FUNZIONE CUMULATIVA DI FREQUENZA $F(x)$ PER LE VARIABILI STATISTICHE.

LA FUNZIONE CUMULATIVA DI FREQUENZA RAPPRESENTA LA % DI ELEMENTI DELLA POPOLAZIONE IL CUI VALORE ARGOMENTALE x_i RISULTA MINORE O UGUALE DI x:

$$F(x) = \sum_i f_i = \frac{\sum N_i}{N} \qquad \forall x_i \leq x$$

$f_i = \frac{N_i}{N}$ — N_i ⟶ NUMERO VOLTE PER CUI SI HA AVUTO UN RISULTATO; N ⟶ NUMERO TOTALE DI LANCI

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ

UNA VARIABILE CASUALE PUÒ CARATTERIZZARSI ATTRAVERSO LA SUA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE.
SE LA VARIABILE CASUALE x È CONTINUA, QUALE SARÀ LA PROBABILITÀ CHE x STIA IN UN INTERVALLINO $[x_0, x_0+\Delta x]$?

$$P(x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x) = F(x_0+\Delta x) - F(x_0)$$

$$P(x_0 \leq x \leq x_0+\Delta x) = dF(x_0) = F'(x_0)\Delta x = f(x_0)\Delta x$$ (SE Δx È PICCOLO E F DIFFERENZIABILE)

$f(x)$ È LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ ⟶ $\boxed{f(x_0) = F'(x_0)}$

PER LE CARATTERISTICHE DI $F(x)$, SI HA SEMPRE CHE LA FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ È CRESCENTE PER OGNI x.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA MEDIA È UN OPERATORE LINEARE:

$$M[x+y] = M[x] + M[y]$$
$$M[kx] = kM[x]$$

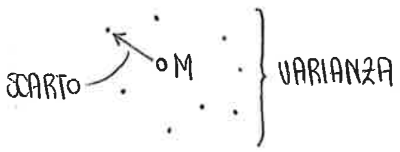
LA VARIANZA

LA VARIANZA È UN INDICE CHE MISURA IL GRADO DI CONCENTRAZIONE DI UNA VARIABILE CASUALE X ATTORNO ALLA MEDIA. DIMENSIONALMENTE LA VARIANZA SI ESPRIME CON IL QUADRATO.
PER DEFINIZIONE, SE ESISTE:

$$\sigma^2[x] = M[(x-m_x)^2]$$

SI DEFINISCE LA VARIABILE SCARTO V $\longrightarrow$ $V=(x-m_x)$ PER SCARTO SI INTENDE QUANTO DISTA UN RISULTATO DALLA MEDIA DEI PRECEDENTI.

GRAFICAMENTE:



LA RADICE QUADRATA DELLA VARIANZA SI CHIAMA SCARTO QUADRATICO MEDIO SQM.
L'SQM È MOLTO PIÙ USATO DELLA VARIANZA PERCHÈ È DIMENSIONALMENTE OMOGENEO A X.
SI HA:

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2 f(x)\,dx$$ PER UNA VARIABILE CASUALE CONTINUA

$$\sigma^2(x) = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i$$ PER UNA VARIABILE CASUALE DISCRETA

$$S^2(x) = \sum_i (x_i - m_x)^2 \frac{N_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_J (x_J - m_x)^2 = \frac{\sum_{J=1}^{N} V_J^2}{N}$$ PER UNA VARIABILE STATISTICA

LA VARIANZA È LA MEDIA DEL QUADRATO DEGLI SCARTI.

LE ULTIME DUE ESPRESSIONI SONO VALIDE PER UNA VARIABILE STATISTICA NON ORDINATA

DALLA DEFINIZIONE DI $\sigma^2(x)$, TENENDO CONTO DELLA LINEARITÀ DELL'OPERATORE MEDIA E SVILUPPANDO, SI HA:

$$\sigma^2(x) = M[(x-m_x)^2] = M[x^2 - 2m_x x + m_x^2] = M[x^2] - 2m_x M[x] + m_x^2 = M[x^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[x^2] - m_x^2$$

POSSIAMO RICAVARE LA PROBABILITÀ CHE X APPARTENGA A VARI INTERVALLI ATTORNO A m.

$$\left.\begin{aligned} P(|x-m|<\sigma) &= \Phi(1)-\Phi(-1) = 0{,}683 \\ P(|x-m|<2\sigma) &= \Phi(2)-\Phi(-2) = 0{,}954 \\ P(|x-m|<3\sigma) &= \Phi(3)-\Phi(-3) = 0{,}997 \end{aligned}\right\} \text{SONO DELLA AREE}$$

⟶ SI TRATTA DI VALORI TABULATI PER VARIABILI STANDARDIZZATE.

2) DISTRIBUZIONE χ^2 (CHIQUADRO)

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ SONO n VARIABILI CASUALI INDIPENDENTI, AVENTI UNA DISTRIBUZIONE NORMALE E STANDARDIZZATA ($m=0$, $\sigma=1$) LA SOMMA χ^2 DEI LORO QUADRATI È ANCORA UNA VARIABILE CASUALE:

$$\chi^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$$

z = VARIABILE GAUSSIANA LA CUI SOMMA DEI QUADRATI COSTITUISCE LA VARIABILE χ^2

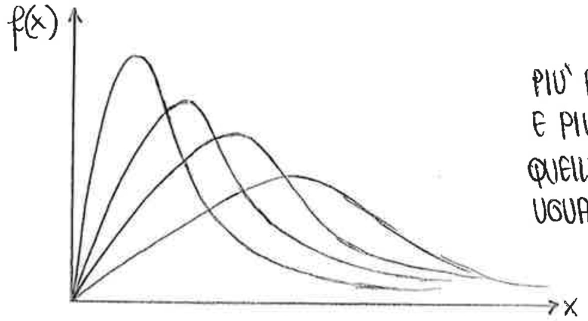
LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ (PONENDO $\chi^2 = y$) È FORNITA DA:

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \, y^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLA VARIABILE χ^2 DIPENDE ANCHE DA UN PARAMETRO n DETTO GRADO DI LIBERTÀ. Γ È LA FUNZIONE DI EULERO. Γ PER NUMERI INTERI EQUIVALE AL FATTORIALE MENTRE, IN QUESTO CASO, È LA SUA GENERALIZZAZIONE.

SI DIMOSTRA CHE:

$$\begin{cases} m(\chi^2) = n & \longrightarrow \text{LA MEDIA DELLA DISTRIBUZIONE } \chi^2 \text{ È UGUALE AL GRADO DI LIBERTÀ} \\ \sigma^2(\chi^2) = 2n \quad \sigma = \pm\sqrt{2n} & \longrightarrow \text{LA VARIANZA DI } \chi^2 \text{ È UGUALE A } 2n \end{cases}$$



PIÙ AUMENTA IL GRADO DI LIBERTÀ E PIÙ LE CURVE ASSOMIGLIANO A QUELLA DI GAUSS, CON INTEGRALE UGUALE A 1. AL CRESCERE DI n LE CURVE DIVENTANO PIÙ O MENO SIMMETRICHE.

NELLA PRATICA OCCORRE TROVARE LA PROBABILITÀ TOTALE DEI VALORI ARGOMENTALI DI χ^2 CHE SUPERANO χ_0^2.

$$P(\chi^2 > \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^{\infty} f(y)\,dy = 1 - F(\chi_0^2)$$

QUESTI VALORI SONO TABULATI IN FUNZIONE DI χ_0^2 E DI n.

LA DIFFERENZA TRA LA VARIABILE χ^2 E LA VARIABILE DI GAUSS È CHE IN QUESTO CASO ABBIAMO IL QUADRATO E DUNQUE TUTTI I VALORI NEGATIVI DIVENTANO POSITIVI. LA CURVA PERCIÒ NON PARTIRÀ PIÙ DA $-\infty$, BENSÌ DA 0. AUMENTO IL GRADO DI LIBERTÀ SI AVVICINERANNO AD UNA VARIABILE DI GAUSS NEL SEMIASSE POSITIVO. LA CURVA È TRASLATA E NON PARTE DA $-\infty$ BENSÌ DA 0.

VARIABILE CASUALE IN FUNZIONE DI UN'ALTRA VARIABILE CASUALE

SIA X LA VARIABILE CASUALE CHE RAPPRESENTA IL LANCIO DI UN DADO. CERCHIAMO LE PROBABILITÀ:

$$\text{A PRIORI} \begin{cases} P(X \in \text{NUMERI PARI } P) = 1/2 \\ P(X \in \text{NUMERI DISPARI } D) = 1/2 \end{cases}$$

$\{X \text{ PARI}\} \cup \{X \text{ DISPARI}\} = S \longrightarrow$ L'UNIONE FORNISCE L'INSIEME DEI VALORI ARGOMENTALI S

$\{X \text{ PARI}\} \cap \{X \text{ DISPARI}\} = \phi \longrightarrow$ L'INTERSEZIONE FORNISCE INSIEME NULLO PERCHÉ NON ESISTONO NUMERI SIA PARI CHE DISPARI.

LA VARIABILE CASUALE FINORA CONSIDERATA VIENE MESSA IN CORRISPONDENZA CON UNA SECONDA VARIABILE CASUALE Y, RAPPRESENTATA DAL LANCIO DI UNA MONETA.
LA FUNZIONE CHE CARATTERIZZA QUESTA CORRISPONDENZA È $Y = g(X)$.

$$\underset{\text{MONETA}}{Y} = g(\underset{\text{DADO}}{X}) = \begin{cases} X \text{ PARI} \longleftrightarrow Y \text{ TESTA} \\ X \text{ DISPARI} \longleftrightarrow Y \text{ CROCE} \end{cases}$$

I DUE ESPERIMENTI VENGONO ASSOCIATI E DUNQUE RISULTANO UNO IN FUNZIONE DELL'ALTRO.

$$Y = \begin{cases} 1/2 \quad 1/2 \longrightarrow \text{PROBABILITÀ} \\ \text{TESTA} \quad \text{CROCE} \longrightarrow \text{POSSIBILI VALORI} \end{cases}$$

SI TRATTA DI VARIABILI CASUALI CONCENTRATE

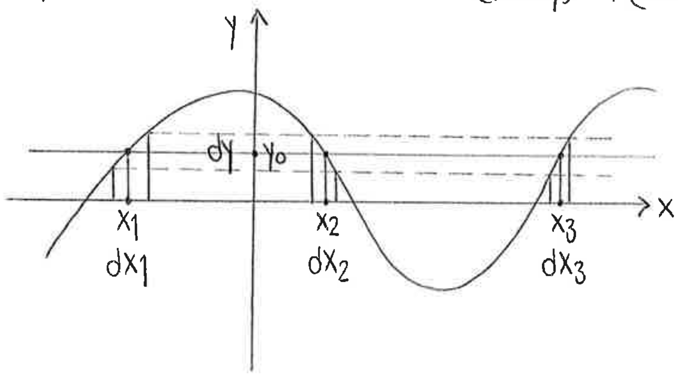
$$X = \begin{cases} 1/6 \quad 1/6 \quad 1/6 \quad 1/6 \quad 1/6 \quad 1/6 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{cases}$$

$g(2) = g(4) = g(6) \longrightarrow$ TESTA

$g(1) = g(3) = g(5) \longrightarrow$ CROCE

IL PROCEDIMENTO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO ANCHE NEL CASO DI VARIABILE CONTINUA IN CUI UNA FUNZIONE NUMERICA $Y = g(X)$ SIA DEFINITA SULL'INSIEME S_X DEI VALORI ARGOMENTALI DELLA X.
LA $g(X)$ TRASFORMA LO SPAZIO S_X NELL'IMMAGINE S_Y.
SIA A_Y UN SOTTINSIEME DI S_Y. VI SARÀ CORRISPONDENZA $A_X \in S_X$ TALE CHE:

$$g(A_X) = A_Y \quad \text{CIOÈ, PER DEFINIZIONE} \longrightarrow P(Y \in A_Y) = P(X \in A_X)$$



A y_0 CORRISPONDONO x_1, x_2, x_3 CON IL RELATIVO INTERVALLO dx.
AL dy CORRISPONDONO DIVERSI dx PERCHÉ LA FUNZIONE NON È MONOTONA. SE FOSSE MONOTONA CI SAREBBE UNA SOLA CORRISPONDENZA.

$A_X \longrightarrow$ INTERVALLO SULL'ASSE DELLE X

$A_Y \longrightarrow$ INTERVALLO SULL'ASSE DELLE Y

ESEMPIO 2

CONSIDERO UNA FUNZIONE NON LINEARE:

$$y = x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{y} \\ x_2 = +\sqrt{y} \end{array}$$

$$g'(x_1) = y' \longrightarrow \begin{array}{l} g'(x_1) = -2\sqrt{y} \\ g'(x_2) = 2\sqrt{y} \end{array}$$

$$f_Y(y) = \Sigma \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \Sigma \frac{f_X(-\sqrt{y})}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{f_X(\sqrt{y})}{|2\sqrt{y}|} = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{|2\sqrt{y}|}$$

CONSIDERO LA NORMALE DI GAUSS STANDARDIZZATA, CON MEDIA $m=0$ E $V=1$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \quad (\text{PER } y \geq 0)$$

IN QUESTO CASO, PUR AVENDO COMPIUTO GLI STESSI PASSI DELL'ESEMPIO 1, SI OTTIENE UNA VARIABILE NON DI GAUSS, MA UNA χ^2.

RIASSUNTO PASSAGGI

1) HO UNA FUNZIONE LINEARE O NON LINEARE
2) CALCOLO LA X ISOLANDOLA DALLA FUNZIONE DI PARTENZA
3) CALCOLO LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI PARTENZA
4) SOSTITUISCO I TERMINI ALL'INTERNO DI $f_Y(y_0) = \Sigma \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$
5) METTO A SISTEMA CON LA GAUSSIANA

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, g'(x)} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

6) VALUTO SE IL RISULTATO È ANCORA UNA GAUSSIANA.

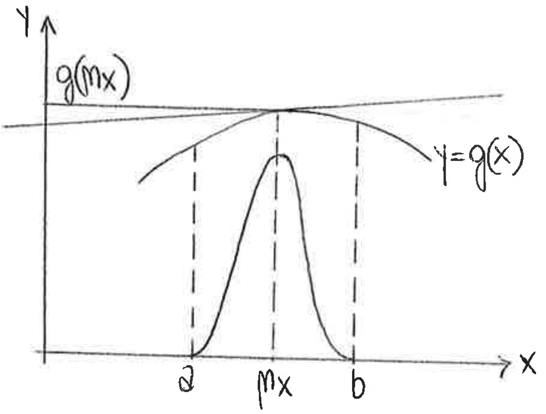
COROLLARIO 2

SI CONSIDERA $y = g(x)$.

SOTTO OPPORTUNE IPOTESI E CON UNA CERTA APPROSSIMAZIONE VALE: $m_y = M_y[y] \cong g(m_x)$

FUNZIONE CALCOLATA NELLA MEDIA DI X

DIMOSTRAZIONE



SIA X UNA VARIABILE CASUALE ABBASTANZA CONCENTRATA ATTORNO A m_x (CON σ_x PICCOLO).
SI SUPPONE POI CHE $g(x)$ ATTORNO A m_x ABBIA ANDAMENTO MOLTO REGOLARE (PERLOMENO IN $[a,b]$).

SVILUPPANDO E LINEARIZZANDO $g(x)$ SI HA:

$$g(x) \cong g(m_x) + g'(m_x)(x - m_x)$$

$$m_y = M[y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x)dx \cong \int_{-\infty}^{\infty} [g(m_x) + g'(m_x)(x-m_x)] f_x(x)dx$$

$$m_y \cong g(m_x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx}_{=1} + g'(m_x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x) f_x(x)dx}_{=0}$$

LO SCARTO È NULLO PERCHÈ LA FUNZIONE È POCO DISPERSA ATTORNO ALLA MEDIA

$m_y \cong g(m_x)$ C.V.D.

L'UGUAGLIANZA È RIGOROSA SE $y = g(x)$ È LINEARE.
LA FUNZIONE NON ANDREBBE INFATTI LINEARIZZATA E SUL GRAFICO COINCIDEREBBE CON $g(m_x)$.

ESEMPIO

DI UN ANELLO SI È PIÙ VOLTE MISURATO IL DIAMETRO OTTENENDO IL VALORE $\bar{x}$. SI DESIDERA LA SUPERFICIE INTERNA MEDIA.

$$y = \frac{\pi x^2}{4} \longrightarrow \bar{y} = \frac{\pi \bar{x}^2}{4}$$

APPLICAZIONE PRATICA: POSSO CONOSCERE LA MEDIA DELLA MISURA INDIRETTA (SUPERFICIE) CONOSCENDO LA MEDIA DELLA MISURA DIRETTA (DIAMETRO).

GRAZIE AL TEOREMA DELLA MEDIA E DELLA PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA, BASTA INFATTI PORRE:

$z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ E SI AVRÀ: $M[z] = \frac{1}{\sigma_x} M[(x - m_x)] = 0$

$$\sigma^2[z] = \frac{1}{\sigma_x^2} M[(x - m_x)^2] = \frac{1}{\cancel{\sigma_x^2}} \cdot \cancel{\sigma_x^2} = 1$$

ESEMPIO

NEL CALCOLO DELLA SUPERFICIE INTERNA DI UN ANELLO SI HA IL DIAMETRO $\bar{x} = 5\,cm \pm 0{,}01\,cm$.
CALCOLARE LA SUPERFICIE MEDIA E LA RELATIVA VARIANZA.

$5\,cm \to m_x$, $0{,}01\,cm \to \sigma_x$

$$\bar{y} = \frac{\pi \bar{x}^2}{4} = \frac{\pi (5)^2}{4} = 19{,}63495409\ cm^2$$

$\sigma_y^2 = (g'(m_x))^2 \cdot \sigma_x^2$ APPLICAZIONE DELLA LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{2\pi\bar{x}}{4}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 \longrightarrow \sigma_y = \pm\left(\frac{2\pi\bar{x}}{4}\right) \cdot \sigma_x \longrightarrow \sigma_y = \pm\left(\frac{\pi\bar{x}}{2}\right) \cdot \sigma_x = \pm\left(\frac{\pi \cdot 5}{2} \cdot 0{,}01\right) = 0{,}0785\ cm^2$$

$\sigma_y = 0{,}0\underline{7}85$

→ PRIMA CIFRA SIGNIFICATIVA. HA QUINDI SENSO DEFINIRE $\bar{y}$ AD AL MASSIMO DUE CIFRE DECIMALI. IL NUMERO DI DECIMALI DA ASSEGNARE A UNA MISURA INDIRETTA È QUINDI FORNITO DAL CALCOLO DELLO SQM.

$\underline{\bar{y} = 19{,}63\ cm^2}$

UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ VIENE CHIAMATA VARIABILE CASUALE QUANDO È DEFINITA LA PROBABILITÀ PER OGNI INSIEME DEL TIPO:

$$\{x_1 \leq x_{01}; \cdots x_n < x_{0n}\}$$

$$P(x_1 \leq x_{01}; \cdots x_n \leq x_{0n}) = F(x_{01}; x_{02}; \cdots x_{0n}) = F(\underline{x_0}) \longrightarrow$$ FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DELLA VARIABILE CASUALE $\underline{X}$

LA FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI X, SE ESISTE, È DEFINITA ATTRAVERSO:

$$\underline{X} \equiv (x_1, x_2) \qquad f(\underline{x}) = \lim_{\rho \to 0} \frac{P(A)}{\omega(A)}$$

$P(A) \longrightarrow$ PROBABILITÀ

$\omega(A) \longrightarrow$ MISURA DEL CAMPIONE A

ρ È IL "DIAMETRO" DELL'INSIEME A, CHE TENDE A ZERO ATTORNO AL PUNTO $\underline{X}$ IN $\mathbb{R}^N$.

LA FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ PUÒ ESSERE RISCRITTA CON:

$$f(\underline{x}) = \frac{dP(x)}{dV(x)}$$

$dP(x) \longrightarrow$ PESO, PROBABILITÀ

$dV(x) \longrightarrow$ ELEMENTO DI VOLUME IN $\mathbb{R}^N$ ATTORNO A $\underline{X}$. SI CONSIDERA UN VOLUME PERCHÈ SIAMO IN PIÙ DIMENSIONI.

PER UNA VARIABILE CASUALE CONTINUA SI PUÒ SCRIVERE:

$$P(x \in A) = \int_A f(\underline{x})\, dV(\underline{x})$$

$$F(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}) = \int_{-\infty}^{x_{01}} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_{0n}} f(\underline{x})\, dx_n \longrightarrow f(\underline{x}) = \frac{\partial^n F(\underline{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

SI USANO GLI INTEGRALI PERCHÈ SI HA A CHE FARE CON VARIABILI CASUALI CONTINUE. NEI CASI PIÙ SEMPLICI È INFATTI POSSIBILE DISCRETIZZARE LA VARIABILE CASUALE, MA NON SEMPRE CIÒ È POSSIBILE.

ESEMPIO

IN UN'URNA SONO CONTENUTE DUE PALLINE BIANCHE (b, B) E DUE NERE (n, N). SCRIVERE LE VARIABILI CASUALI DISCRETE CHE DESCRIVONO:

a) L'ESTRAZIONE IN BLOCCO DI DUE PALLINE.

IN QUESTO PRIMO CASO LE PALLINE CONTENUTE NELL'URNA SONO 4 E SE NE ESTRAGGONO 2 CONTEMPORANEAMENTE. È QUINDI IMPOSSIBILE ESTRARRE DUE PALLINE IDENTICHE POICHÈ OGNI PALLINA È UNICA.

QUESTA SITUAZIONE È CERTAMENTE PREFERIBILE, PERCHÈ NEL CASO DELL'ELLISSE CI SONO DIREZIONI PREFENZIALI DA CUI LA MISURA DIPENDE. È QUINDI PREFEBILE UNA CIRCONFERENZA UN PO' PIÙ GRANDE AD UN ELLISSE, PERCHÈ ALMENO LA MIA INCERTEZZA NON È FUNZIONE DI UNA DIREZIONE.

SU UN CAPOSALDO L'ELLISSE D'ERRORE È ZERO, POICHÈ IL CAPOSALDO HA QUOTA NOTA. NEL CASO IN CUI SI ABBIA IL RIFERIMENTO DI UN PUNTO MISURATO DA UN COLLEGA, SI AVRÀ ANCHE SQM E QUINDI ELLISSE D'ERRORE. È POSSIBILE DETERMINARE L'ELLISSE D'ERRORE ANCHE DELLE LETTURE EFFETTUATE.

DISTRIBUZIONI MARGINALI

SI CONSIDERA L'EVENTO A:

$$A = \{x_1 \in dx_1 (x_{01}) ; -\infty < x_2 < \infty ; \dots -\infty < x_n < \infty\}$$

LA CLASSE DI QUESTI EVENTI DIPENDE SOLO DELLA VARIABILE CASUALE x_1.
CI SI CHIEDE QUALE SIA LA PROBABILITÀ CHE x_1 STIA NELL'INTERVALLO dx_1 PER OGNI $x_2 \dots x_n$.
SI GENERA UNA DISTRIBUZIONE UNIDIMENSIONALE E UNA CORRISPONDENTE VARIABILE CASUALE x_1 |

$$P(x_1 \in dx_1) = P(\underline{x} \in A) = dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f(x_{01}, x_2, \dots x_2)$$

QUESTA VARIABILE CASUALE È DETTA MARGINALE DELLA X E HA DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$f_{x_1}(x_{01}) = \frac{P(x \in A)}{dx_1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n f(x_{01}, x_2 \dots x_n)$$

$$f_{x_1}(x_{01}) = \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_{01}, +\infty, +\infty, \dots +\infty)$$

IN GENERALE, LA VARIABILE CASUALE A n DIMENSIONI AVRÀ n MARGINALI.

LE DISTRIBUZIONI MARGINALI RISPONDONO ALLA DOMANDA:

QUAL È LA PROBABILITÀ CHE UN CERTO GRUPPO DI COMPONENTI $x_{i1} \dots x_{im}$ APPARTENGANO AD UN CERTO ELEMENTO DI VOLUME dV_m PER OGNI VALORE ASSUNTO DALLE ALTRE COMPONENTI.

AD ESEMPIO, LA VARIABILE DOPPIA $f(x_1, x_2)$ HA DUE MARGINALI:

$$\left.\begin{aligned} f_{x_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 f(\bar{x}_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1, \bar{x}_2) \end{aligned}\right\} \text{MARGINALI DI UNA VARIABILE BIDIMENSIONALE.}$$

MEDIA DI UNA VARIABILE CASUALE n-DIMENSIONALE

PER UNA VARIABILE CASUALE A n-DIMENSIONI SI GENERALIZZANO I CONCETTI VISTI A UNA DIMENSIONE.

DEFINIZIONE LA MEDIA DELLA VARIABILE CASUALE $\underline{X}$, SE ESISTE, È UN VETTORE n-DIMENSIONALE m_X DATO DA

$$m_X = M[\underline{X}] = \int_{R^N} dV_N(\underline{x})\, f_X(\underline{x}) \cdot \underline{x}$$

PRODOTTO SCALARE

LA COMPONENTE i-ESIMA DI m_X VALE:

$$m_{X_i} = M[X_i] = \int_{R^N} dV_n(\underline{x})\, f_X(\underline{x}) \cdot \underline{x}_i$$

PER CALCOLARE m_{X_i} BASTA LA DISTRIBUZIONE MARGINALE DI X_i, INFATTI:

$$m_{X_i} = \int_{\mathbb{R}^N} dx_i \cdot dV_{n-1}\, x_i f_X(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_i \cdot x_i \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_n f(\underline{x})$$

$$\longrightarrow m_{X_i} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_i\, x_i\, f_{X_i}(x_i)$$

LA COMPONENTE i-ESIMA DELLA MEDIA DI $\underline{X}$ È UGUALE ALLA MEDIA DELLA COMPONENTE i-ESIMA.

AD ESEMPIO, PER UNA VARIABILE A DUE DIMENSIONI:

$$\left.\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 f(x_1,x_2) \\ f_{X_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1,x_2) \end{aligned}\right\} \text{MARGINALI} \longrightarrow m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, f(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 dx_1\, f(x_1,x_2)$$

AD ESEMPIO, NEL CASO DI VARIABILE STATISTICA DOPPIA:

$$\begin{cases} X = x_1, x_2, \dots, x_r \\ Y = y_1, y_2, \dots, y_s \end{cases} \longrightarrow \text{TABELLA CHE RAPPRESENTA UNA VARIABILE STATISTICA DOPPIA}$$

LA MEDIA DI UNA VARIABILE STATISTICA n-DIMENSIONALE È UN VETTORE

$$M[x] = \bar{x} = \frac{1}{r} \sum x_i$$

$$M[y] = \bar{y} = \frac{1}{s} \sum y_i$$

$\longrightarrow$ r, s MISURE TOTALI

TEOREMA DELLA MEDIA

COME NEL CASO DI VARIABILI CASUALI MONODIMENSIONALI, È POSSIBILE, ANCHE PER LE VARIABILI CASUALI A N-DIMENSIONI, DEFINIRE IL TEOREMA DELLA MEDIA.

SIA $y = g(x)$ UNA TRASFORMAZIONE DA $\mathbb{R}^N$ A $\mathbb{R}^M$ E SIA $\underline{x}$ UNA VARIABILE CASUALE IN $\mathbb{R}^N$ E $\underline{y}$ LA CORRISPONDENTE IN $\mathbb{R}^M$. PER DEFINIZIONE:

$$M_x = [g(\underline{x})] = \int_{\mathbb{R}^N} g(\underline{x})\, f_x(\underline{x})\, d\underline{x} = m_y$$

POSTO CHE ESISTA LA MEDIA DI y:

$$M_y[\underline{y}] = M_x[g(\underline{x})]$$

RIGOROSAMENTE

COROLLARIO 1

SE g È LINEARE, CIOÈ $\underline{y} = A\underline{x} + \underline{b}$ ALLORA

$$\longrightarrow \underline{m_y} = A\underline{m_x} + \underline{b}$$

COROLLARIO 2

SE LA VARIABILE $\underline{x}$ È BEN CONCENTRATA IN UNA ZONA DI $\mathbb{R}^N$ ATTORNO A m_x E, NELLA STESSA ZONA, LA $y = g(x)$ È LENTAMENTE VARIABILE, ALLORA:

$$\underline{m_y} = g(\underline{m_x})$$

$$\underline{m_y} = M_x[\underline{g(x)}] \cong g(\underline{m_x})$$

(DIMOSTRAZIONI SOLO NEL CASO MONODIMENSIONALE)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 170

OSSERVANDO CHE OGNI MARGINALE È NORMALIZZATA PER SUO CONTO SI TROVA, PER $i \neq k$, CHE:

$$M[x_i x_k] = m_{x_i} m_{x_k}$$

$$c_{ik} = M[x_i x_k] - m_{x_i} m_{x_k} \longrightarrow c_{ik} = \sigma_{ik} = 0 \quad \forall i \neq k$$

CIO' SIGNIFICA CHE, PER COMPONENTI DI $\underline{x}$ INDIPENDENTI, LA MATRICE C_{xx} È DIAGONALE E ASSUME LA FORMA

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

SI PUO' VERIFICARE IN MOLTI CASI CHE NON È VERO IL VICEVERSA, CIOÈ LA FORMA DIAGONALE DI C_{xx} NON SIGNIFICA NECESSARIAMENTE CHE LE n-COMPONENTI SIANO FRA LORO INDIPENDENTI.

LA PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA NEL CASO LINEARE A n-DIMENSIONI

COME NEL CASO MONODIMENSIONALE CI SI CHIEDE COSA VALGA LA MATRICE DI VARIANZA COVARIANZA DI UNA VARIABILE CASUALE $y \in \mathbb{R}^m$ FUNZIONE DI UNA SECONDA VARIABILE $x \in \mathbb{R}^n$.
L'IPOTESI È CHE LA RELAZIONE g SIA LINEARE, CIOÈ $\underline{y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}$ E CHE $m \leq n$.

PER IL TEOREMA DELLA MEDIA:

$$\underline{m}_y = \underline{\underline{A}}\,\underline{m}_x + \underline{b}$$

$$\begin{array}{rcl} \underline{y} &=& \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b} \quad - \\ \underline{m}_y &=& \underline{\underline{A}}\,\underline{m}_x + \underline{b} \quad = \\ \hline (\underline{y} - \underline{m}_y) &=& \underline{\underline{A}}\,(\underline{x} - \underline{m}_x) \end{array}$$

SOSTITUZIONE

PER DEFINIZIONE:

$$C_{yy} = M[(y - m_y)(y - m_y)^T] = M[A(x - m_x)(x - m_x)A^T]$$

SFRUTTANDO LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE MEDIA:

$$C_{yy} = A\,M[(x - m_x)(x - m_x)^T]\,A^T \longrightarrow \boxed{C_{yy} = A\,C_{xx}\,A^T}$$

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA NEL CASO LINEARE

(DALLA MATRICE DI VARIANZA COVARIANZA DELLE MISURE DIRETTE OTTENGO QUELLA DELLE MISURE INDIRETTE).

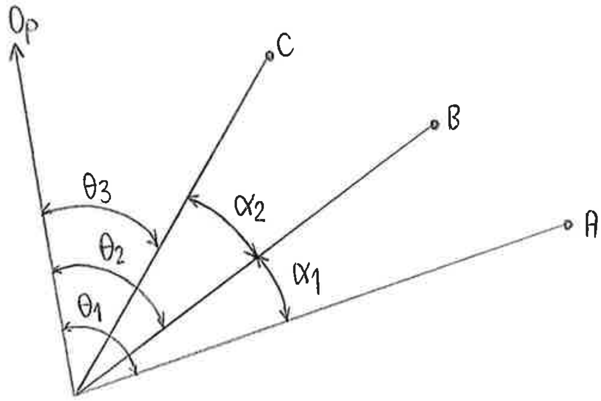
ESERCIZIO 1

CON UN TEODOLITE SI MISURANO LE DIREZIONI $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, CHE IPOTIZZIAMO ESTRATTE DA UNA VARIABILE CASUALE A TRE DIMENSIONI CON MEDIA $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3)$, INDIPENDENTI FRA DI LORO E CON VARIANZE:

$$\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2} = \sigma_{\theta_3} = \pm 10 \cdot 10^{-4} \text{ GON} = \sigma$$

SI DETERMINI VALOR MEDIO, VARIANZA E COVARIANZA DEGLI ANGOLI AZIMUTALI α_1 E α_2 COSÌ DEFINITI:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \theta_1 - \theta_2 \\ \alpha_2 = \theta_2 - \theta_3 \end{cases}$$



(DATA LA MATRICE

$$C_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

SI APPLICHI IL TEOREMA DELLA MEDIA E DELLA PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA DA $\mathbb{R}^3$ A $\mathbb{R}^2$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 170

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA NEL CASO DI FUNZIONI NON LINEARI

CI SI PONE NEL CASO (m,n) DIMENSIONALE IN CUI $m \leq n$ E SIA $\underline{y} = g(\underline{x})$ UNA FUNZIONE NON PIÙ LINEARE DELLA VARIABILE CASUALE $\underline{x}$.

NELL'IPOTESI CHE $\underline{x}$ SIA BEN CONCENTRATO ATTORNO ALLA SUA MEDIA μ_x E $\underline{y}$ SIA POCO VARIABILE ATTORNO A $g(\underline{\mu_x})$ SI PUÒ OPERARE LA LINEARIZZAZIONE:

$$y \cong \underbrace{g(\mu_x)}_{b} + \underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]}_{A \text{ MATRICE DISEGNO}} (\underline{x} - \underline{\mu_x})$$

È UNA MATRICE

SOSTITUZIONI

$$\longrightarrow y = \underline{b} + \underline{\underline{A}}(\underline{x} - \underline{\mu_x})$$

PERCIÒ:

$$\begin{cases} M[y] = \underline{b} & \longrightarrow \text{LA MEDIA DELLA FUNZIONE È UGUALE A } b \text{ PERCHÈ LA MEDIA DI } (x-\mu_x) \text{ È NULLA.} \\ y - M[y] = \underline{\underline{A}}(\underline{x} - \underline{\mu_x}) \end{cases}$$

$$\longrightarrow C_{yy} = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right] C_{xx} \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]^T$$

LE MATRICI C_{yy} E C_{xx} SONO SEMPRE STRETTAMENTE DEFINITE POSITIVE, CIOÈ (DEF)

$$C_{xx} > 0 : \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \underline{a}^T \underline{\underline{C_{xx}}}\, \underline{a} > 0$$

$\longrightarrow$ DUNQUE C_{xx} È REGOLARE, INVERTIBILE E SIMMETRICA.

È POI SEMPRE POSSIBILE EFFETTUARE LA SCOMPOSIZIONE:

$$C_{xx} = K^2 = \underline{\underline{U}}\, \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{\underline{U}}^T$$

$\Lambda \longrightarrow$ MATRICE DEGLI AUTOVALORI, DIAGONALE

$U \longrightarrow$ AUTOVETTORI

SI HA CHE $U^T U = U U^T = I$ MATRICE IDENTITÀ CHE CONTIENE GLI AUTOVETTORI DI C_{xx}.

SI DIMOSTRA INFINE CHE:

$$K = U \Lambda^{1/2} U^T$$

$$K^T = U^T \Lambda^{-1/2} U$$

PER IL CASO LINEARE

$$C_{yy} = A C_{xx} A^T$$

30

SI APPLICA INFINE IL TEOREMA DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA:

$$C_{\eta\eta} = A\, C_{\varepsilon\varepsilon} A^T$$

$$\longrightarrow C_{\eta\eta} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-10^6}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{10^6\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-10^6}{2} & \frac{10^6\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & -1{,}30 \\ -1{,}30 & 3{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \pm\sqrt{1{,}75}\ \text{mm} = 1{,}3\ \text{mm}$$

$$\sigma_y = \pm\sqrt{3{,}25}\ \text{mm} = 1{,}8\ \text{mm}$$

b) PER RISPONDERE ALLE ULTIME DUE DOMANDE APPLICHIAMO ANCORA IL TEOREMA DELLA MEDIA ALLA MISURA INDIRETTA - SUPERFICIE A - FUNZIONE DELLE DUE MISURE DIRETTE ρ E θ,

$$\bar{A} = \bar{\rho}^2 \operatorname{sen}\bar{\theta} \cos\bar{\theta} \longrightarrow \bar{A} = 0{,}433 \cdot 10^6\ \text{m}^2$$

APPLICANDO IL PRINCIPIO DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA SI RICAVA:

$$\sigma_A^2 = \left(\bar{\rho}\ \operatorname{sen}\frac{2\bar{\theta}}{2}\right)^2 \sigma_\rho^2 + \left(\bar{\rho}^2 \cos 2\theta\right)^2 \sigma_\theta^2 = \left(10^{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1\right) \frac{1+10^{24}}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 10^{-12}$$

$$\sigma_A = \pm 1{,}323\ \text{m}^2$$

DEFINIAMO IL NUMERO ρ_{xy} COME

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{(PER DEFINIZIONE)}$$

ρ_{xy} SI CHIAMA <u>INDICE DI CORRELAZIONE LINEARE</u> DI X E Y.

<u>CASO 1</u> $\rightarrow$ INDIPENDENZA $\sigma_{xy} = 0$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

$\rightarrow$ SE $\rho_{xy} = 0$ X E Y SONO INCORRELATE MA NON È DETTO CHE SIANO INDIPENDENTI. NEL DISCORSO NON VALE INFATTI IL VICEVERSA.

<u>CASO 2</u> $\rightarrow$ DIPENDENZA LINEARE $\sigma_{xy} = a\sigma_x^2$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \pm 1$$

<u>ESEMPIO</u>

$$C_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rho_{xy} = \frac{0{,}9}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$$

<u>PROPRIETA' DELL'INDICE ρ_{xy}</u>

1) È INVARIANTE IN MODULO PER TRASFORMAZIONI LINEARI

2) SE X E Y SONO INDIPENDENTI $\rho_{xy} = 0$, SE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI $\rho_{xy} = \pm 1$.

$\rho_{xy} = +1$ SE $a > 0$

$\rho_{xy} = -1$ SE $a < 0$

3) SE $\rho_{xy} = 0$ LE DUE VARIABILI CASUALI SONO LINEARMENTE INCORRELATE, MA NON SICURAMENTE INDIPENDENTI.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE VARIABILI NORMALI

1) IL CONCETTO DI CORRELAZIONE ED INDIPENDENZA STOCASTICA SI EQUIVALGONO.

DI PER SÈ I DUE CONCETTI SONO TRA LORO DIVERSI.

 ⟶ PUNTI COSÌ DISTRIBUITI SONO INCORRELATI MA NON INDIPENDENTI

 ⟶ PUNTI COSÌ DISTRIBUITI SONO CORRELATI MA INDIPENDENTI

PER QUANTO RIGUARDA LE VARIABILI NORMALI I CONCETTI SI EQUIVALGONO.

2) TUTTE LE TRASFORMAZIONI LINEARI TRASFORMANO VARIABILI CASUALI NORMALI IN VARIABILI CASUALI A LORO VOLTA NORMALI, CIOÈ:

SE $\begin{cases} \underline{x} = N[\underline{m}_x, \underline{\underline{C}}_{xx}] \\ \underline{y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b} \end{cases}$ ⟶ VARIABILI NORMALE

$$\longrightarrow \underline{y} = N[\underline{\underline{A}}\,\underline{m}_x + \underline{b} \; ; \; \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_{xx}\underline{\underline{A}}^T]$$ AMMESSO CHE $m \leq n$ CON $r(A) = m$

$$z = C^{-1/2}(x-m)$$

$$z^T = (x-m)^T (C^{-1/2})^T$$

$$z^T z = (x-m)^T C^{-1}(x-m) \longrightarrow \boxed{(x-m)^T C_{xx}^{-1}(x-m) = z^T z = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \chi_n^2}$$

È DISTRIBUITO COME UNA χ^2 A n GRADI DI LIBERTÀ E DIMENSIONI.

CIÒ CONSENTE DI TROVARE ATTORNO AL VETTORE MEDIA UNA REGIONE SIMMETRICA NELLA QUALE SIA CONTENUTA UNA PREFISSATA PROBABILITÀ p

LA REGIONE $(x-m)^T C_{xx}^{-1}(x-m) \leq \bar{\chi}_n^2$ RISULTA ESSERE UN IPERELLISSOIDE.

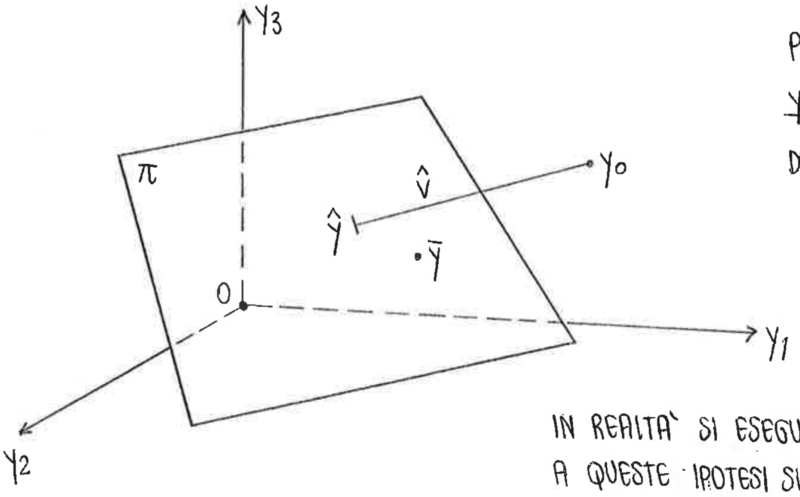
AD ESEMPIO, PER $n=2$ E UGUAGLIANDO ALLA COSTANTE $\bar{\chi}_n^2$ SI OTTIENE UN ELLISSE CHE SI CHIAMA ELLISSE D'ERRORE E HA SEMIASSI

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 4\sigma_{xy}^2}$$

INCLINATI RISPETTO AGLI ASSI x, y DI

$$\tan 2\alpha = \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}\right)$$

MINIMI QUADRATI



PONIAMO DI AVERE ALCUNE MISURE $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ CHE TEORICAMENTE DEVONO SODDISFARE UNA LEGGE LINEARE.

$$\boxed{\pi = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = b}$$

PIANO DELLE MISURE AMMISSIBILI

IN REALTA' SI ESEGUONO ALTRE MISURE y_0 CHE SODDISFANO A QUESTE IPOTESI SU MEDIA M E DISPERSIONE:

$$\begin{cases} M[y_0] = \underline{y} \\ C_{yy} = I \end{cases}$$

SE EFFETTUASSIMO UN NUMERO INFINITO DI MISURE, ALLORA LA LORO MEDIA GIACEREBBE EFFETTIVAMENTE ALL'INTERNO DEL PIANO. MA FACENDO UN NUMERO FINITO DI MISURE CIO' DI SOLITO NON AVVIENE. CIO' ACCADE PERCHE' LE VARIABILI PRESE IN CONSIDERAZIONE SONO VARIABILI STATISTICHE CHE PRESENTANO TALVOLTA DEGLI ERRORI ACCIDENTALI.
DEVO PERCIO' TROVARE UN CRITERIO CHE MI PERMETTA DI MIGLIORARE LE MISURE PRESE IN ESAME.
LA SOLUZIONE E' CONSIDERARE LE STIME, OVVERE DELLE MISURE TEORICHE CORRELATE A QUELLE REALI.
IL MEZZO DI CORRELAZIONE E' COSTITUITO DAL METODO DEI MINIMI QUADRATI, CHE CONSISTE NELLO SCEGLIERE LA MINOR DISTANZA DI y_0 DAL PIANO DELLE MISURE AMMISSIBILI SINO A PORTARLE NEL PIANO. IL CRITERIO DEI MINIMI QUADRATI E' QUINDI GEOMETRICAMENTE SEMPLICE.

A PARTIRE DALLE MISURE EFFETTUATE SI AVRA':

$$a_1 y_{01} + a_2 y_{02} + a_3 y_{03} - b = \underbrace{v'}_{\text{ERRORE DI CHIUSURA}} \neq 0 \longrightarrow$$ SICCOME E' DIVERSO DA ZERO FINISCE FUORI DAL PIANO.

CERCHIAMO DUNQUE UNA STIMA $\hat{y}$ DI y CHE SIA LA PIU' VICINA POSSIBILE A y_0 MA CHE APPARTENGA ANCORA AI VALORI AMMISSIBILI DEL PIANO π. SI SCEGLIE PERCIO' LA NORMALE A π CONDOTTA DA y_0 CIOE'

$$d^2 = \hat{v}^T \hat{v} = (y_0 - \hat{y})^T (y_0 - \hat{y}) = \text{MIN}$$

NEL CASO IN CUI LE MISURE ESAMINATE NON ABBIANO LA STESSA PRECISIONE SI APPLICA LA SEGUENTE FORMULA:

$$d^2 = (y_0 - \hat{y})^T C_{yy}^{-1} (y_0 - \hat{y}) = \text{MIN}$$

$\longrightarrow$ CON $C_{yy} \neq I$

SI UTILIZZA LA MATRICE DEI PESI P PERCHÈ SI CONOSCE IL RAPPORTO TRA LE VARIANZE MA NON I LORO VALORI. È INFATTI SUFFICIENTE SAPERE IN CHE RAPPORTO STANNO TRA LORO GLI SCARTI SENZA NECESSARIAMENTE CONOSCERE IL VALORE DI CIASCUNO. PIÙ È PICCOLO $\sigma^2_{y_J}$ PIÙ LA MISURA È PRECISA.

$$P_J = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2_{y_J}} \longrightarrow \text{RAPPORTO TRA LE VARIANZE}$$

IL MINIMO RAPPRESENTA IL MINIMO DI UNA DISTANZA GENERALIZZATA SECONDO LA METRICA P.
LE n CONDIZIONI AGGIUNTIVE ESPRIMONO INVECE IL FATTO CHE ALLE VARIABILI CASUALI y SONO LEGATI n PARAMETRI AGGIUNTIVI x CHE DIPENDONO IN MODO LINEARE DALLE MISURE y.

IL PROBLEMA SI RISOLVE PER MEZZO CON I <u>MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.</u>

$$\boxed{\phi(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\lambda}_{\text{SCALARE}}\, g(\bar{x})}$$

$$\phi(\hat{x},\hat{y}) = \frac{1}{2}(y_0-\hat{y})^T P (y_0-\hat{y}) + \underbrace{(\hat{y} - A\hat{x} - a)}_{\text{CONDIZIONE}}\, \overset{\text{SCALARE}}{\lambda} = \text{MIN} \qquad \left(\text{CON } \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}\right)$$

$\hat{x}$: PARAMETRI TEORICI

$\hat{y}$: MISURE TEORICHE

P: AVENDO LA MATRICE DEI PESI DOVRÒ NECESSARIAMENTE AVERE ANCHE UN NUMERO CHE ME LA CORREGGA RESTITUENDO LA MATRICE DI VARIANZA COVARIANZA

PER CALCOLARE I MINIMI CONDIZIONATI DEVO CALCOLARE LE DERIVATE E UGUAGLIARLE A ZERO. PER FAR CIÒ LA QUANTITÀ VA DERIVATA SIA PER x CHE PER y.
I MINIMI CONDIZIONATI CONTENGONO DUNQUE LA FUNZIONE DA MINIMIZZARE E λ VOLTE LA CONDIZIONE.

$$d\phi = -d\hat{y}^T P(y_0-\hat{y}) + d\hat{y}^T\lambda - d\hat{x}^T A^T\lambda$$

$$d\phi = d\hat{y}^T\left(-P(y_0-\hat{y})+\lambda\right) + d\hat{x}^T\left(-A^T\lambda\right) = 0 \longrightarrow \text{PONGO UGUALE A ZERO I DUE DIFFERENZIALI}$$

$$\begin{cases} +A^T\lambda = 0 \\ -P(y_0-\hat{y})+\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = P(y_0-\hat{y}) = P(y_0-A\hat{x}-a) = P(y_0-a) - PA\hat{x} \end{cases}$$

SOSTITUISCO NELLA 1° EQUAZIONE

$$A^T P(y_0-a) - (A^TPA)\hat{x} = 0 \longrightarrow (A^TPA)\hat{x} = A^TP(y_0-a)$$

$$\boxed{\hat{x} = (A^TPA)^{-1} A^T P (y_0-a)}$$

A = MATRICE DISEGNO
È UNA MATRICE RETTANGOLARE

DEFINITO ℓ VETTORE DEI TERMINI NOTI $\boxed{\ell = (y_0 - a)}$

E DEFINITA N MATRICE NORMALE $\boxed{N = A^T P A}$

SI PUÒ SOSTITUIRE NELL'ESPRESSIONE RICAVATA IN PRECEDENZA, OTTENENDO:

$$\boxed{\hat{x} = N^{-1} A^T P \ell}$$

SI PUÒ INFINE DIMOSTRARE CHE LA STIMA $\hat{\sigma}_0^2$ DI σ_0^2 VALE

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(y_0 - \hat{y})^T P (y_0 - \hat{y})}{m-n} = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m-n} \longrightarrow r = m - n \text{ RIDONDANZA}$$

RAPPRESENTA IL NUMERO DI MISURE CHE SUPERA IL NUMERO DI PARAMETRI.

$\hat{\sigma}_0^2$ È TANTO PIÙ PICCOLO QUANTO PIÙ AUMENTA $m-n$. PIÙ MISURE VENGONO EFFETTUATE RISPETTO AL MINIMO PIÙ SARÀ GRANDE $m-n$.
LO SCALARE $\hat{\sigma}_0^2$, A PARTE LA COSTANTE r, RAPPRESENTA DUNQUE LA DISTANZA QUADRATICA DEL VETTORE $\hat{v}$ NELLA METRICA P.

$$\hat{v} = (y_0 - \hat{y}) = \ell + a - A\hat{x} - a = \ell - A\hat{x} \longrightarrow \boxed{\hat{v} = \ell - A\hat{x}}$$

STIMA DEGLI SCARTI.
LO SCARTO ANDRÀ CONFRONTATO CON LO SQM PER CAPIRE SE LE MISURE SONO CORRETTE.

SI PUÒ INFINE DIMOSTRARE CHE LA MATRICE $R = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} P \cdot C_{\hat{v}\hat{v}}$ È UNA MATRICE DI DIMENSIONE $m \cdot n$ DETTA DI RIDONDANZA, CONTENENTE DEI NUMERI PURI E INDIPENDENTE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO. LA PROPRIETÀ DI QUESTA MATRICE È INDICARE IL CONTRIBUTO CHE OGNI SINGOLA MISURA APPORTA ALLA RIDONDANZA GLOBALE $r = m - n$. SI PUÒ DIMOSTRARE INFATTI CHE:

$$TR(R) = \underbrace{\sum_1^m r_{ij}}_{\text{RIDONDANZA LOCALE DELL'OSSERVATORE } J} = (m-n) = r \longrightarrow$$

LE MISURE IMPORTANTI HANNO ij MOLTO GRANDE, QUELLE AFFATTO IMPORTANTI HANNO $r_{ij} = 0$.

SI NOTA CHE È POSSIBILE RICAVARE R SENZA AVER ESEGUITO LE MISURE y_0. SIMILMENTE SI PUÒ NOTARE CHE ANCHE ALTRE FORMULE GIÀ RICAVATE NON DIPENDONO DALLE MISURE ESEGUITE.

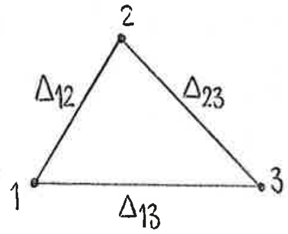
PIÙ IN GENERALE, NEL CASO IN CUI IL PROBLEMA SIA LA COMPENSAZIONE DI UNA RETE TOPOGRAFICA, SI POSSONO RICAVARE A PRIORI LE PRECISIONI DEI PARAMETRI, LA PRECISIONE DELLE MISURE DOPO LA COMPENSAZIONE, IL CONTRIBUTO DELLE STESSE ALLA RIGIDITÀ DELLA RETE.

È CIOÈ POSSIBILE, SIA IN FASE DI PROGETTO DELLA RETE, PREVEDERE LE PRECISIONI FINALI, TOGLIERE LE MISURE POCO SIGNIFICATIVE O CHE POTREBBERO NASCONDERE ERRORI CHE PIÙ FACILMENTE SFUGGONO AI TEST DI CONTROLLO, E QUINDI MIGLIORARE L'AFFIDABILITÀ DELLA RETE.

ESERCIZIO

COMPENSIAMO SECONDO IL METODO DEI PARAMETRI AGGIUNTIVI UNA RETE DI LIVELLAZIONE COSTITUITA DA TRE VERTICI E TRE MISURE DI DISLIVELLO. SI SONO MISURATI I DISLIVELLI:

$$\Delta_{12} = Q_2 - Q_1$$
$$\Delta_{23} = Q_3 - Q_2$$
$$\Delta_{13} = Q_3 - Q_1$$



$$y = \begin{pmatrix} \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{13} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{12} \\ \hat{\Delta}_{23} \\ \hat{\Delta}_{13} \end{pmatrix} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} \Delta^0_{12} \\ \Delta^0_{23} \\ \Delta^0_{13} \end{pmatrix}$$ VALORI MISURATI E QUINDI NOTI

I DISLIVELLI POSSONO RITENERSI MISURATI IN MODO INDIPENDENTE.

SI CONOSCE $\boxed{\sigma_{\Delta_{ij}} = \pm 1\,mm\sqrt{D}}$

LO SCARTO QUADRATICO MEDIO È PROPORZIONALE ALLA RADICE DELLA SOMMA DELLE DISTANZE.
CONCETTO LEGATO ALLA PRECISIONE DELLE LIVELLAZIONI. (DOMANDA!)

PER QUESTE IPOTESI SI PUÒ PORRE:

$$P = Q^{-1} = \text{DIAG}\left(\sigma^2_{\Delta_{12}}, \sigma^2_{\Delta_{23}}, \sigma^2_{\Delta_{13}}\right)^{-1} \longrightarrow P = (1\,mm)^{-2}\ \text{DIAG}\left(\frac{1}{D_{12}}, \frac{1}{D_{23}}, \frac{1}{D_{13}}\right)$$

I PARAMETRI INCOGNITI SONO LE QUOTE DEI TRE VERTICI, Q_1, Q_2 E Q_3.

IN QUESTO CASO HO TRE DISLIVELLI PER TRE QUOTE INCOGNITE. QUESTO GENERE DI PROBLEMA NON È PERÒ RISOLUBILE CON IL PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI PERCHÈ PER USARE I MINIMI QUADRATI DEVO AVERE m EQUAZIONI IN n INCOGNITE DOVE $m > n$.

OTTERREI

$$Q_2 - Q_1 = \Delta_{12} \qquad Q_3 - Q_2 = \Delta_{23} \qquad Q_3 - Q_1 = \Delta_{13}$$

E QUINDI

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{13} \end{pmatrix}$$

SI TRATTA PERÒ DI UN ERRORE PERCHÈ NON POSSO RICAVARE L'INVERSA DI QUESTA MATRICE DAL MOMENTO CHE LE EQUAZIONI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, SOSTANZIALMENTE IL PROBLEMA È CHE DA UN NUMERO DI DISLIVELLI NON POTRÒ MAI RICAVARE UNA QUOTA SE NON CONOSCO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO, OVVERO SE NON CONOSCO IL PUNTO ZERO DI UNA QUOTA.

OCCORRE DEFINIRE, ANCHE ARBITRARIAMENTE, QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO, DETTO DATUM, DAL QUALE DIPENDONO I PARAMETRI AGGIUNTIVI. NEL CASO IN ESAME CIO' SI FA, SENZA PERDERE DI GENERALITA', FISSANDO AD ESEMPIO LA QUOTA DEL PUNTO 1, AD ESEMPIO $Q_1 = 100$ m. IN TAL MODO RIMANGONO INCOGNITE SOLO LE QUOTE DEI PUNTI 2 E 3.

NELL'ESEMPIO SI AVRA' QUINDI $n=2$ (NUMERO DEI PARAMETRI INCOGNITI) E $m=3$ (NUMERO DELLE MISURE) PER CUI $r=1$. LA RELAZIONE LINEARE DIVENTA:

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{12} \\ \hat{\Delta}_{23} \\ \hat{\Delta}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -Q_1 \\ 0 \\ -Q_1 \end{pmatrix}}_{\text{NOTO!}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\hat{x}} + a$$

IN QUESTO MODO HO TRE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE PERCHE' HO FISSATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO SULL'ASSE z DELLE QUOTE.

UNA DISTANZA RIMANE LA STESSA A PRESCINDERE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSATO. LO STESSO VALE PER L'ANGOLO. UNA DISTANZA E UN ANGOLO SONO PERCIO' INVARIANTI PER ROTAZIONI E TRASLAZIONI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO. PRIMA DI COMPENSARE UNA RETE DEVO QUINDI FISSARE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CON DUE TRASLAZIONI E UNA ROTAZIONE. NEL CASO IN CUI CI SIANO ANCHE ANGOLI E' NECESSARIO FISSARE ANCHE UNA SCALA E QUINDI IL QUARTO GRADO DI LIBERTA'.

$$(y_0 - a) = \ell = \begin{pmatrix} \Delta^0_{12} + Q_1 \\ \Delta^0_{23} \\ \Delta^0_{13} + Q_1 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE NORMALE VALE:

$$A^T P A = N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{DIAG}(D_{ij})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_{23}} & -\frac{1}{D_{23}} \\ -\frac{1}{D_{23}} & \frac{1}{D_{23}} + \frac{1}{D_{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T P \ell = \ell = \begin{pmatrix} \Delta_{12} + Q_1 \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{13} + Q_1 \end{pmatrix}$$

IL VETTORE b, FORMATO DA DUE VALORI, RISULTA:

$$A^T P \ell = b$$

$$b_1^1 = \frac{1}{D_{12}}(\Delta_{12} + Q_1) - \frac{1}{D_{23}} \Delta_{23}$$

$$b^1 = \frac{1}{D_{23}} \Delta_{23} + \frac{1}{D_{13}}(\Delta_{13} + Q_1)$$

ORA SI PUO' RISOLVERE IL SISTEMA O INVERTIRE LA MATRICE N E RICAVARE $\hat{x} = N^{-1}b$.
SI VERIFICA INOLTRE CHE LA SOLUZIONE DELLE MISURE $\hat{y} = A(N^{-1}b)+d$ È LA STESSA RICAVATA CON IL METODO DELLE SOLE EQUAZIONI DI CONDIZIONE.

SI RICAVANO INFINE GLI SCARTI $\hat{v} = y_0 - \hat{y} = \Delta_{ij} - \hat{\Delta}_{ij}$

$$\longrightarrow \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{3-2} = \text{MIN}$$

m n

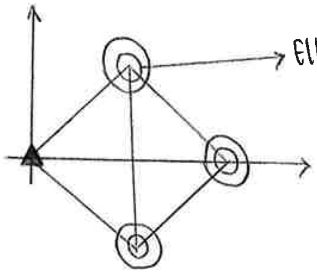
RIEPILOGO

MATRICE DI RIDONDANZA R $\longrightarrow$ DÀ LA PRIORITÀ TRA LE MISURE E DICE QUALI SONO QUELLE PIÙ IMPORTANTI. SI UTILIZZA SE SI PROGETTA LA RETE IN QUANTO LA MATRICE R È NOTA ANCHE PRIMA DI AVER EFFETTUATO LE MISURE. LO STESSO VALE PER LA MATRICE DEI PESI.

MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA $\longrightarrow$ SI UTILIZZA PER CAPIRE LA PRESENZA DI ERRORI GROSSOLANI NELLA RACCOLTA DELLE MISURE.

MATRICE C_{xx} $\longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varphi_2} & \sigma_{\varphi_2\varphi_3} \\ \sigma_{\varphi_2\varphi_3} & \sigma^2_{\varphi_3} \end{pmatrix}$ $\quad C_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ CON $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m-n}$

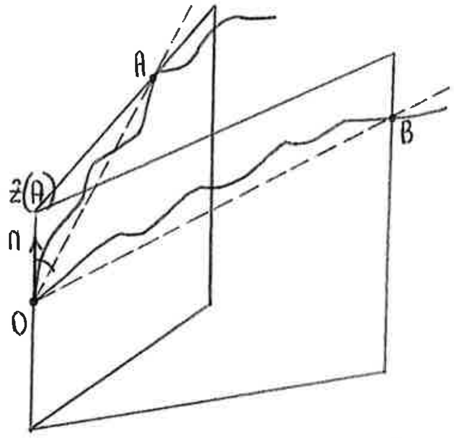
NON HO LA C_{xx} FINO ALLA FINE DELLA COMPENSAZIONE, MA HO UNA MATRICE PROPORZIONALE SE NON CONOSCO $\hat{\sigma}_0^2$. $\longrightarrow C_{xx} \cong N^{-1}$
QUESTO CAPITA SOSTITUENDO AL $\hat{\sigma}_0^2$ RICAVATO (CHE ANCORA NON CONOSCO), UNA STIMA OPPURE IL VALORE INIZIALE. PERCIÒ SENZA AVER FATTO MISURE POSSO RICAVARE UNA MATRICE PROPORZIONALE ALLA C_{xx} E PERCIÒ POSSO RICAVARE GLI ELLISSI D'ERRORE PROPORZIONALI A QUELLI FINALI.



ELLISSE D'ERRORE: È PIÙ PICCOLO DI QUELLO REALE MA FORNISCE GIÀ LA PROPORZIONALITÀ ESISTENTE TRA LE VARIABILI. PER QUESTO MOTIVO SI UTILIZZA MOLTISSIMO PRIMA DELLE COMPENSAZIONI.

TEODOLITE

SERVE A MISURARE ANGOLI AZIMUTALI, DISTANZE ZENITALI E DISLIVELLI.



ANGOLO AZIMUTALE → $A\hat{O}B$

ANGOLO ZENITALE → $z(A)$

DISTANZA REALE $\overline{OA}$ → SEGMENTO CHE CONGIUNGE O E A

DISTANZA TOPOGRAFICA → LUNGHEZZA DELL'ARCO DI GEODETICA CHE CONGIUNGE I PUNTI.

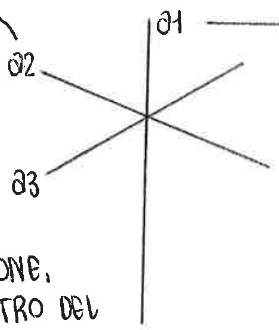
DISLIVELLO Δ_{OA} → DIFFERENZA DI QUOTA TRA I PUNTI

SCHEMA DI FUNZIONAMENTO

FUNZIONAMENTO → MECCANICO

LETTURA AI CERCHI → OTTICO O ELETTRONICO

SI DISTINGUONO TRE ASSI:



a_1 → ASSE PRIMARIO. VI RUOTA L'ALIDADA. DEVE ESSERE VERTICALE.

a_2: ASSE SECONDARIO ATTORNO A CUI RUOTA IL CANNOCCHIALE INCERNIERATO NELL'ALIDADA

a_3: ASSE DI COLLIMAZIONE. CONGIUNGE IL CENTRO DEL RETICOLO CON IL PUNTO NODALE INTERNO ALL'OBIETTIVO

CONDIZIONE DI RETTIFICA: GLI ASSI SONO A DUE A DUE ORTOGONALI TRA LORO.

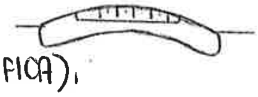
MESSA IN STAZIONE

1) RESA VERTICALE DELL'ASSE PRIMARIO
   → SI RENDE ORIZZONTALE IL PIANO SU CUI GIACCIONO a_2 E a_3 PER MEZZO DELLA LIVELLA TORICA.
2) ASSE PRIMARIO PASSANTE PER IL PUNTO DI STAZIONE
   → PIOMBINO OTTICO O PIOMBINO A GRAVITA'

VERTICALITA' ASSE PRIMARIO

AFFINCHE' L'ASSE PRIMARIO DEL TEODOLITE SIA VERTICALE, LA SUA BASE DEVE ESSERE ORIZZONTALE.

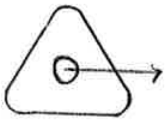
(OPERAZIONE ITERATIVA) → SI USA LA LIVELLA TORICA (DESCRIZIONE E CONDIZIONI RETTIFICA).



(*)

TREPPIEDE

COSTITUITO DA GAMBE ALLUNGABILI
→ INCERNIERATE ALLA PIASTRA D'APPOGGIO



→ IL FORO PERMETTE IL FISSAGGIO DELLO STRUMENTO TRAMITE VITONE

TALVOLTA AL TREPPIEDE VIENE FISSATO UN DISPOSITIVO INTERMEDIO CHIAMATO BASETTA

- PIASTRA DI BASE (SOLIDALE ALLA PIASTRA D'APPOGGIO)
- PIASTRA BASCULANTE
- VITI CALANTI, UNISCONO LE PIASTRE

LE VITI CALANTI HANNO UN'AUTONOMIA DI POCHI cm E QUINDI IL TEODOLITE VA POSTO APPROSSIMATIVAMENTE ORIZZONTALE.

CENTRAMENTO PUNTO DI STAZIONE

1) TRASLARE MANUALMENTE LO STRUMENTO IN PROSSIMITA' DEL PUNTO, VARIANDO ANCHE LA LUNGHEZZA DELLE GAMBE, O AGENDO SULL'ESCURSIONE DEL VITONE.

2) UTILIZZARE GLI STRUMENTI DI PERFEZIONAMENTO:

PIOMBINO A GRAVITA' →

DIRETTO SECONDO $\vec{n}$ (1-2mm) (ATTENZIONE AL VENTO)

PIOMBINO OTTICO → PRECISIONE MIGLIORE, CONSENTE IL CENTRAMENTO FORZATO.

LA MESSA IN STAZIONE E' ONEROSA NELL'ECONOMIA DEL LAVORO. RICHIEDE DIVERSI MINUTI.
→ CASE COSTRUTTRICI HANNO BREVETTATO METODI DI SCONNESSIONE PER CUI IL TREPPIEDE IN STAZIONE RIMANE DOV'E', MENTRE IL TEODOLITE PUO' ESSERE SOSTITUITO CON UN SEGNALE DA COLLIMARE. (SCONNESSIONE TRAMITE VITE).

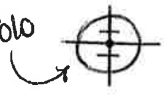
ORGANI DI COLLIMAZIONE

COLLIMARE = TRAGUARDARE UN OGGETTO ATTRAVERSO UNA LINEA IDEALE FORMATA DA DUE PUNTI CHE, ALLINEATI CON L'OCCHIO, FORNISCONO UNA LINEA DI MIRA.

SI USA UN CANNOCCHIALE CHE PERMETTE DI COLLIMARE OGGETTI LONTANI.
SI COLLIMANO SEGNALI O PUNTI BEN MATERIALIZZATI.

CANNOCCHIALE ASTRONOMICO

NON PIU' USATO. A LUNGHEZZA VARIABILE CON LENTE OBIETTIVA E OCULARE. DOPO LA PRIMA LENTE IMMAGINE REALE, CAPOVOLTA E RIMPICCIOLITA. POI INGRANDITA DALLA SECONDA LENTE.
ASSE OTTICO E ASSE DI COLLIMAZIONE DEVONO COINCIDERE → CONDIZIONE VERIFICATA SOLO SE L'IMMAGINE DI P SI FORMA IN CORRISPONDENZA DEL CENTRO DEL RETICOLO



(VITI DI MOVIMENTO MICROMETRICO)

CONDIZIONI DI RETTIFICA

1) ASSE a_1 PASSANTE PER IL CENTRO DEL GONIOMETRO AZIMUTALE E ORTOGONALE AL SUO PIANO.
2) ASSE a_2 NORMALE AD a_1 E LO INTERSECA. PASSA PER IL CENTRO DEL GONIOMETRO VERTICALE.
3) a_3 NORMALE AGLI ALTRI DUE
4) I TRE ASSI SI INCONTRANO IN UN PUNTO DETTO "CENTRO STRUMENTALE".

→ IL TEODOLITE È POSTO IN STAZIONE CON a_1 VERTICALE.

ERRORI LETTURE AZIMUTALI

(ERRORI RESIDUI DI RETTIFICA)

SI VERIFICANO ERRORI QUANDO LE CONDIZIONI DI RETTIFICA NON SONO RISPETTATE.

1) ERRORE DI INCLINAZIONE

a_2 NON ORIZZONTALE.

ERRORE

$\varepsilon_i = i \cot z$ → DISTANZA ZENITALE

→ INCLINAZIONE DELL'ASSE

L'ERRORE HA SEGNO CONTRARIO SE SI RICOLLIMA IL PUNTO DOPO AVER RUOTATO IL CANNOCCHIALE IN DIREZIONE DELL'OSSERVATORE.

$$\rightarrow \; l = \frac{l_S + l_D \pm \pi}{2}$$

SEGNO DI π DIPENDENTE DALL'ANGOLO RISULTANTE

2) ERRORE DI COLLIMAZIONE

a_2 E a_3 NON ORTOGONALI.

$$\varepsilon_c = \frac{c}{\operatorname{sen} z}$$

c → ANGOLO CHE MANCA O ECCEDE I 90°

L'ERRORE HA SEGNO UGUALE E CONTRARIO SULLE LETTURE FATTE AI LEMBI CONIUGATI DEL CERCHIO.

$$\rightarrow \; l = \frac{l_S + l_D \pm \pi}{2}$$

3) ERRORE DI VERTICALITÀ

a_1 NON VERTICALE.

$$\varepsilon_v = (\alpha' - \alpha) = v \operatorname{sen}\alpha \cot z$$

v → INCLINAZIONE DELL'ASSE RISPETTO AD a_1

L'ERRORE NON PUÒ ESSERE ELIMINATO CON LA REGOLA DI BESSEL PERCHÈ NON SI CONOSCE L'INCLINAZIONE v.

→ L'ERRORE È RIDOTTO RIFACENDO LA MESSA IN STAZIONE (LETTURA A STRATI).

4) ERRORE DI ECCENTRICITÀ ALIDADA

a_1 NON PASSA PER IL CENTRO DEL GONIOMETRO AZIMUTALE.

→ DI SOLITO ELIMINATO AUTOMATICAMENTE CON L'USO DI STRUMENTI CHE SFRUTTANO IL SISTEMA DI LETTURA CONIUGATO.

Aromitalia
Dal 1942 Ingredienti di Qualità

aromitalia
divisione gelateria e pasticceria

Geinectar
RICERCHE AROMATICHE

G.E.I. S.p.A.

Sede Legale e Amministrativa:
Strada Cebrosa, 23/25
10036 SETTIMO T.SE (TO) - ITALY
Tel. ++39 011 8182301 - Fax. ++39 011 887865
CAP.SOC. € 1.001.000 - R.E.A. TO N.569024
Reg. Imp. To/C.F./P.IVA IT 02594800019

CLIENTE
EIS CAFE CORTINA INH FEDERICO DA COL
GRABEN STRASSE 27/29
44787 BOCHUM DE DE

DESTINATARIO
EIS CAFE CORTINA INH FEDERICO DA COL
GRABEN STRASSE 27/29
44787 BOCHUM DE DE DE
GERMANIA

CODICE CLIENTE	PARTITA IVA/CODICE FISCALE	ZONA	PAG.
CLAG13395	DE 290908586	1B11	2

TIPO DOCUMENTO
FATTURA ACCOMPAGNATORIA

DATA	NUMERO	NUMERO DI SPEDIZIONE	
05/06/2014	2295 /2014	WG / 2253 05/06/2014	

MODALITÀ DI PAGAMENTO	BANCA D'APPOGGIO	VALUTA
Bonifico bancario 60 gg D.F.	-	EURO

AGENTE	CAPO AREA	RESA	GIORNO DI CHIUSURA
FOA000597 NO ACTIVE	FOA000508 LAURIA GIOVAN	FRANCO DESTINO	

CODICE ARTICOLO E DESCRIZIONE	UM	QUANTITÀ	N.COLLI	PREZZO	%SC./M	IMPORTO	%IVA
Merce omaggiata (-)						107,45	
Totale Netto Merce						344,05	
CONTRIBUTO CONAI ASSOLTO OVE DOVUTO							
ASSOLVE GLI OBBLIGHI DI CUI ALL'ART.62, COMMA 1, DEL D.L. 24/01/2012, N.1 CONVERTITO, CON MODIFICAZIONI, DALLA LEGGE 24 MARZO 2012 N.27.							

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 170

aromitalia
divisione gelateria e pasticceria

Geinectar
RICERCHE AROMATICHE

Aromitalia
Dal 1942 Ingredienti di Qualità

G.E.I. S.p.A.

Sede Legale e Amministrativa:
Strada Cebrosa, 23/25
10036 SETTIMO T.SE (TO) - ITALY
Tel. ++39 011 8182301 - Fax. ++39 011 887865
CAP.SOC. € 1.001.000 - R.E.A. TO N.569024
Reg. Imp. To/C.F./P.IVA IT 02594800019

CLIENTE
EIS CAFE CORTINA INH FEDERICO DA COL

GRABEN STRASSE 27/29
44787 BOCHUM DE DE

DESTINATARIO
EIS CAFE CORTINA INH FEDERICO DA COL

GRABEN STRASSE 27/29
44787 BOCHUM DE DE DE
GERMANIA

CODICE CLIENTE	PARTITA IVA/CODICE FISCALE	ZONA	PAG.
CLAG13395	DE 290908586	1B11	1

TIPO DOCUMENTO
FATTURA ACCOMPAGNATORIA

DATA	NUMERO	NUMERO DI SPEDIZIONE	
05/06/2014	2295 /2014	WG / 2253 05/06/2014	

MODALITÀ DI PAGAMENTO	BANCA D'APPOGGIO	VALUTA
Bonifico bancario 60 gg D.F.	-	EURO

AGENTE	CAPO AREA	RESA	GIORNO DI CHIUSURA
FOA000597 NO ACTIVE	FOA000508 LAURIA GIOVAN	FRANCO DESTINO	

CODICE ARTICOLO E DESCRIZIONE		UM	QUANTITÀ	N.COLLI	PREZZO	%SC./M	IMPORTO	%IVA
	Saldo Vs. Ordine N. ORD del 31/05/2014							
1448	BON BON R... SET	KG	14,00	2	16,90	+	236,60	08C
	Lotto: 140401110 Scad. 30/04/2016							
	Codice doganale: 21069098							
1655	GIOTTO SET	KG	7,00	1	15,35	+	107,45	08C
	Lotto: 140501276 Scad. 31/05/2016							

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 170

Aromitalia
Dal 1942 Ingredienti di Qualità

aromitalia
divisione gelateria e pasticceria

Geinectar
RICERCHE AROMATICHE

G.E.I. S.p.A.

Sede Legale e Amministrativa:
Strada Cebrosa, 23/25
10036 SETTIMO T.SE (TO) - ITALY
Tel. ++39 011 8182301 - Fax. ++39 011 887865
CAP.SOC. € 1.001.000 - R.E.A. TO N.569024
Reg. Imp. To/C.F./P.IVA IT 02594800019

CLIENTE
EISCAFE FONTANA DI TREVI INH MORELLI
CLAUDIO
BUENDER STR. 379
32120 HIDDENHAUSEN DE DE

DESTINATARIO
EISCAFE FONTANA DI TREVI INH MORELLI
CLAUDIO
BUENDER STR. 379
32120 HIDDENHAUSEN DE DE DE
GERMANIA

CODICE CLIENTE	PARTITA IVA/CODICE FISCALE	ZONA	PAG.
CLAG13156	DE 269213958	1B00	3

TIPO DOCUMENTO
FATTURA ACCOMPAGNATORIA

DATA	NUMERO	NUMERO DI SPEDIZIONE	
18/06/2014	2627 /2014	WG / 2596 18/06/2014	

MODALITÀ DI PAGAMENTO	BANCA D'APPOGGIO	VALUTA
Bonifico bancario 60 gg D.F.	-	EURO

AGENTE	CAPO AREA	RESA	GIORNO DI CHIUSURA
FOA000449 ZONA SCOPERTA	FOA000508 LAURIA GIOVAN	FRANCO DESTINO	

CODICE ARTICOLO E DESCRIZIONE	UM	QUANTITÀ	N.COLLI	PREZZO	%SC./M	IMPORTO	%IVA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 170

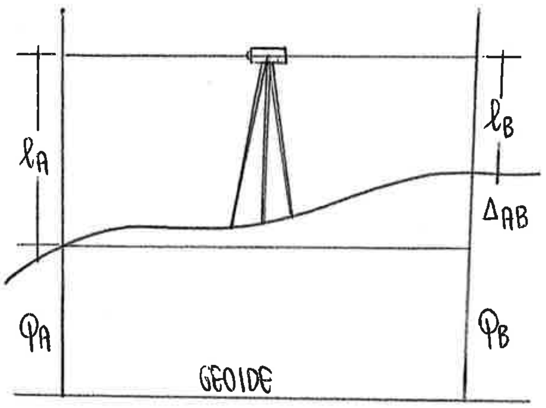
CLASSIFICAZIONE LIVELLI

VALUTATA IN BASE ALL'ERRORE QUADRATICO MEDIO DI UNA LIVELLAZIONE IN ANDATA E RITORNO SU UN TRATTO DI 1 KM.

1) BASSA PRECISIONE $\longrightarrow$ $\sigma \geq 5mm$
2) DA INGEGNERIA $\longrightarrow$ $2mm \leq \sigma \leq 5mm$
3) DI PRECISIONE $\longrightarrow$ $1mm \leq \sigma \leq 2mm$
4) DI ALTA PRECISIONE $\longrightarrow$ $\sigma < 1mm$

QUESTE TIPOLOGIE DI STRUMENTO SI ABBINANO SEMPRE A NASTRO INVAR E LAMINA PIANPARALLELA. $\longrightarrow$ STRUMENTI TECNOLOGICAMENTE AVANZATI CHE NE MANTENGONO LA PRECISIONE

LIVELLAZIONE GEOMETRICA DAL MEZZO



IL GEOIDE PER PICCOLE DISTANZE E' APPROSSIMATO A PIATTO.
PER PUNTI NON DIRETTAMENTE VISIBILI SI EFFETTUA UNA BATTUTA DI LIVELLAZIONE:

$$\Delta_{CD} = \sum_{i=C}^{a=D} \ell_i - \sum_{i=C}^{a=D} \ell_a$$

$$\Delta_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \ell_A - \ell_B$$

$\longrightarrow$ SOMMATORIA DI TUTTE LE MISURE EFFETTUATE

LA LIVELLAZIONE DAL MEZZO, NEL CALCOLO DEL DISLIVELLO, ELIMINA TUTTI I TIPI DI ERRORI CHE GRAVANO SULLA MISURA.

LIVELLAZIONE GEOMETRICA RECIPROCA

USATA QUANDO NON E' POSSIBILE POSIZIONARSI NEL MEZZO.
CI SI PONE PRIMA IN CORRISPONDENZA DEL PUNTO INDIETRO E POI DEL PUNTO AVANTI.

$$\Delta AB = \frac{(\ell'_A - \ell'_B) + (\ell''_A - \ell''_B)}{2}$$ (MEDIA DEI DISLIVELLI CALCOLATI)

ERRORI

1) ERRORE DI CURVATURA TERRESTRE $x = \frac{d^2}{2R}$

2) ERRORE DI RIFRAZIONE $\longrightarrow$ DOVUTO ALLA PRESENZA DELL'ATMOSFERA.
LA RADIAZIONE LUMINOSA NON ATTRAVERSA INFATTI IL VUOTO MA SI PROPAGA IN UN FLUIDO RIFRANGENTE CON COEFFICIENTE DI RIFRAZIONE VARIABILE. IL RAGGIO VIENE DEVIATO VERSO LA TERRA. $\varepsilon = k\frac{\omega}{2}$ ANGOLO DI DEVIAZIONE

$\downarrow$

QUESTI ERRORI VENGONO ELIMINATI NELLA LIV GEOM DAL MEZZO

SI ESEGUONO DUE LETTURE, UNA GREZZA E UNA FINE E POI SI SOMMANO.

LETTURA GREZZA → 1,47
LETTURA FINE → 24
} LETTURA COMPLESSIVA 1,4724 m

AUTOLIVELLI

ORIZZONTALITA' AUTOMATICA DELL'ASSE DI COLLIMAZIONE → COMPENSATORE

MECCANISMI
→ OTTICI: RETICOLO SOLIDALE AL CANNOCCHIALE
→ MECCANICI: RETICOLO MOBILE NELLO STRUMENTO

IL COMPENSATORE DEVE ESSERE ESTREMAMENTE SENSIBILE PER ESSERE ALTRETTANTO PRECISO. INFATTI ENTRA IN AZIONE PER PICCOLE INCLINAZIONI DELL'ASSE MECCANICO DEL CANNOCCHIALE.

SQM $\cong \pm 0{,}1'', \pm 0{,}2''$

LIVELLI ELETTRONICI

SI TRATTA DI UN BUON AUTOLIVELLO. DI ELETTRONICO C'È SOLO LA LETTURA ALLA STADIA.
→ LA LETTURA ALLA STADIA SOMIGLIA ALLA LETTURA DI UNA SEQUENZA DI CODICI A BARRE.

DIFFERENZE CON IL CODICE A BARRE:

1) IL CODICE A BARRE DI UN PRODOTTO DI CONSUMO VIENE LETTO IN MODO COMPLETO, MENTRE LA STADIA VIENE LETTA SOLO IN PARTE
2) NEL CASO DELLA STADIA BISOGNA LEGGERE LA POSIZIONE DEL NUMERO BINARIO RISPETTO AL FILO MEDIO. È IL SOLO MODO PER CONOSCERE LA POSIZIONE DELLA LETTURA RISPETTO ALL'INTERA STADIA.
   → NUMERO PSEUDO-CASUALE. NON POSSONO ESSERCI RIPETIZIONI OLTRE UNA CERTA MISURA, ALTRIMENTI NON SE NE CONOSCEREBBE LA POSIZIONE.

SIMILITUDINI CON IL CODICE A BARRE:

1) LA SCALA CON CUI VIENE LETTO IL CODICE DIPENDE DALLA DISTANZA A CUI SI TROVA IL SENSORE.

LA LETTURA DI UNA PARTE DELLA STADIA (E QUINDI DI UNA PARTE DEL NUMERO BINARIO) CONSENTE IL CONFRONTO CON L'INTERA STADIA. È COSÌ POSSIBILE STABILIRE LA POSIZIONE DEL PUNTO DI COLLIMAZIONE.