www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1259

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Raparelli

MATERIA: Elettrotecnica

Prof. Canavero

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

A.A. 2013 / 2014

ELETTROTECNICA

2/10/2013

Ricorda: NON ci sono dimostrazioni x l'esame

ELETTROTECNICA → applicazione di fenomeni tecnici
→ serve x quantificare
→ si basa sulla fisica

L'elettricità classica si basa sul concetto di carica elettrica e di interazione fra cariche

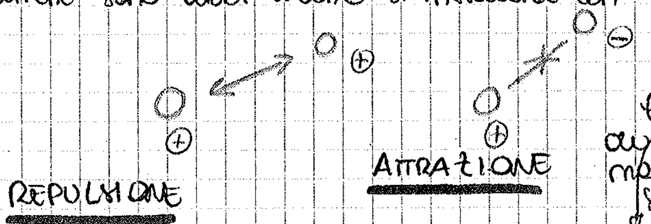
CARICHE ELETTRICHE (Q) → sono di 2 tipi: ⊕ positive e ⊖ negative

Es. la q associata a e^- è negativa

e^- il "granulo" fondamentale x l'elettricità

Le cariche el. si misurano in **C** ⇒ coulomb = [q]

Se 2 cariche sono abb. vicine si instaura un'interazione → secondo la regola "gli opposti si attraggono"



la legge è lo stesso tipo di quella gravitazionale, ma in qst caso esiste solo attrazione

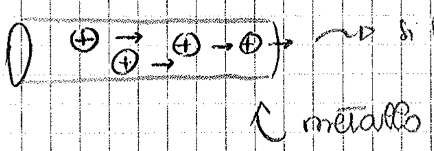
quindi la forza esercitata =

$$\boxed{F = k \frac{qQ}{r^2}}$$

r → distanza fra le cariche

Le cariche elettriche non sono facilmente misurabili, così come le interazioni

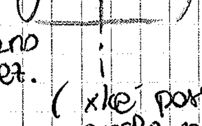
sono in tutti i costituenti della materia, nei conduttori elettrici (metalli) queste sono "libere" e possono quindi muoversi (CORRENTE)



→ si fanno scorrere ⊕ nel metallo

Si valuta una sezione del cilindro → quante cariche in Δt attraversano S?

Δq = quantità di cariche che attraversano la sez.



Decido di contare le cariche che vanno in → qst direzione (x ké possono muoversi anche in senso opposto)

verso scelto dallo sperimentatore

Si misura la quantità di carica / l'intervallo in cui è avvenuta la misura

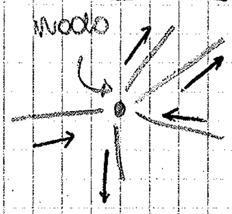
→ in qst modo si ottiene una quantità indip. dal tempo

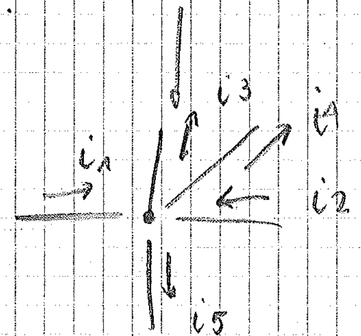
Divido × Δt $\Rightarrow$ $i_A = i_B + i_C$ (*)

la corrente entrante è uguale a quella uscente — "legge delle correnti" → legge di KIRCHHOFF delle correnti (LKC)

si basa sulla conservazione della carica

In generale la LKC dice che se esiste un **punto di saldatura** fra + conduttori (**NODO**), la corrente, fissato un verso x ogni conduttore, entrante nel nodo è uguale alla corrente uscente dal nodo.

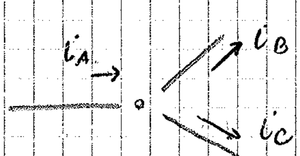




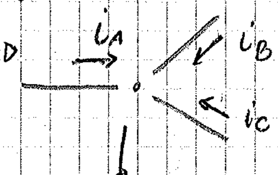
$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 + i_5$$

(*) $i_A - i_B - i_C = 0$

$i_A + (-i_B) + (-i_C) = 0$



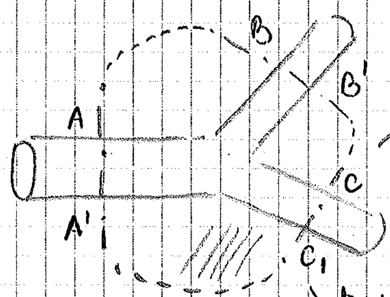
↳



quindi la somma delle cariche, considerate entranti nel nodo, è = 0

entranti → anche se fossero uscenti

è sempre la legge di KIRCHHOFF, ma in un'altra forma



→ si ottiene una **sup. chiusa** attorno al nodo

↳ unisco le tracce delle sezioni

la legge vale xké la sup. aggiunta è priva di corrente (//)

Quindi, la KCL vale x una sup. chiusa

KCL 1° forma: $\sum_n i_n = \sum_m i_m$

i_n: correnti entranti; i_m: correnti uscenti — attraverso una sup. chiusa

2° forma: $\sum_p i_p = 0$ → correnti (tutte entranti o tutte uscenti)

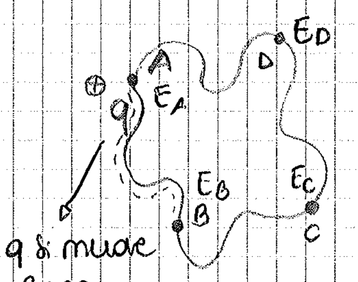
la cons. della carica si traduce in qst legge.

X $\bar{AK}$, se si sceglie $A\oplus$, $\Delta E < 0$
Quindi $V \lessgtr 0$

- $\underline{V > 0}$ se $E_A > E_B$ } dove A è $\oplus$
  $\underline{V < 0}$ se $E_A < E_B$

Altra notazione: V_{AB}
punto di partenza

$\dot{Q}^{\oplus}$ fissa



q si muove lungo il spazio, fino a tornare in A

tratto AB, $A\oplus$, $V = \frac{\Delta E}{q} = \frac{E_A - E_B}{q}$

tratto BC, $V = \frac{E_B - E_C}{q}$ (con $B\oplus$)

tratto CD, $V = \frac{E_C - E_D}{q}$ (con $C\oplus$)

tratto DA, $V = \frac{E_D - E_A}{q}$ (con $D\oplus$)

RICORDA ⇒ l'en. dipende dalla posizione / distanza rispetto a Q

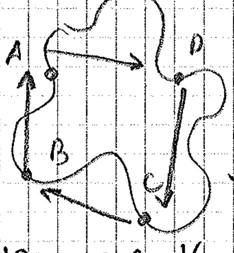
Sommo: $V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = \frac{E_A - \cancel{E_B}}{\cancel{q}} + \frac{\cancel{E_B} - E_C}{q} + \frac{\cancel{E_C} - E_D}{q} + \frac{\cancel{E_D} - E_A}{q} = 0!$

q non incide, si ottiene la **LEGGE DELLE TENSIONI**
↳ legge di KIRKHHOFF delle tensioni (KTL)

Quindi se muovo una carica lungo un percorso chiuso
la somma delle tensioni parziali su un percorso chiuso deve essere $= 0$

- $\sum_q V_q = 0$ ⇝ V_q deve essere presa in accordo con il senso di rotazione di q (ovvero sempre valore ~~finale~~ iniziale meno ~~iniziale~~ finale)
  $V_A - V_B$, $V_B - V_C$ ecc.

Infatti:



⇝ le frecce delle tensioni si rincorrono

↻ rotazione

Quindi x sommare V_q, esse devono essere equiverse lungo il percorso.
Se cambio punto di arrivo e partenza $A \longrightarrow \overset{\oplus}{B}$ $\frac{E_B - E_A}{q} = -V_{AB}$

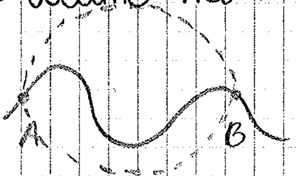
Infatti $V_{AB} = \frac{E_A - E_B}{q}$ ⇒ $\frac{E_B - E_A}{q} = -V_{AB}$

- **KTL 2° forma** $\sum_n V_n = \sum_m V_m$
  percorso chiuso
  tensioni in senso orario sul percorso
  tensioni in senso antiorario sul percorso

q perde en. anche a causa di attriti

q usa en. potenziale elettrica x convertirla in un altro tipo di energia
→ calore
→ en. cinetica
→ en. chimica

Nel volume fra A e B quindi avviene una trasformazione di en.



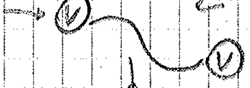
I volumi in cui avvengono trasformazioni di en. si chiamano **ELEMENTI ELETTRICI**, in tutti i sistemi elettrici

non importa la lunghezza

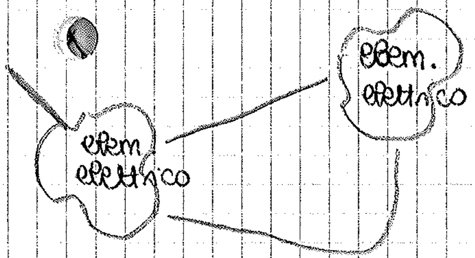
Solitamente, x convenzione, si considerano i conduttori di collegamento come ideali

avvero non avvengono trasformazioni o perdite

volumi



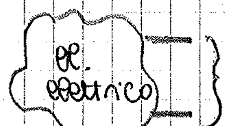
conduttore di collegamento



=> **CIRCUITO ELETTRICO o RETE ELETTRICA**

insieme di el. elettrici collegati fra loro.

Caso particolare di el. elettrico:

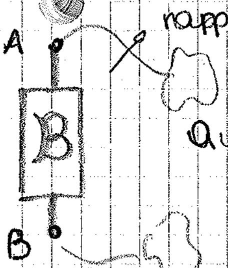


solo 2 conduttori di collegamento

TERMINALI o POLI che lo collegano al mondo esterno

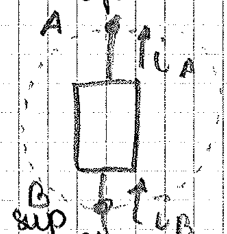
=> **BIPOLO**

infatti ha 2 poli



rappresentaz. tipica

Quando B è collegato su A e B ci sarà una corrente i_A e i_B



→ scelgo verso di i

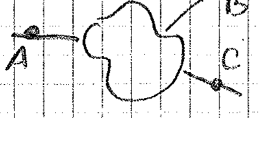
Applico la KCL su una sup. chiusa: $i_A = i_B$

uscente dalla sup. chiusa

Quindi la corrente che attraversa un qualsiasi B è una sola

Un el. elettrico con tre poli (TRIPOLO) invece si comporta diversamente.

=> $i_A = i_B + i_C$

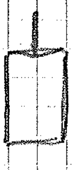


Se ogni p_i è $=0$, non c'è fenomeno elettrico.

Invece se $\underbrace{p_i > 0 \text{ e } p_k < 0}$, si compensano e si ottiene $\sum_n p_n = 0$

↓ utilizzando la convenzione

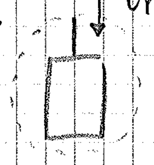
quindi **in un sistema c'è almeno un generatore**



→ può esistere un sistema con un solo polo? Si

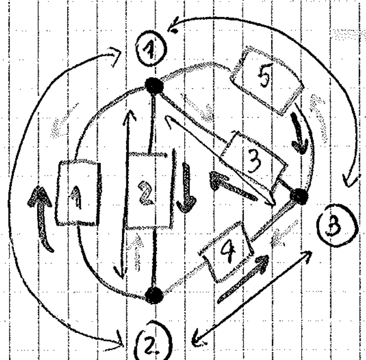
⇓

MONOPOLO

Considero una sup. chiusa →  i_n x KCL → $i_n = 0$

Quindi un monopolo ha sempre $i = 0$ e $p = 0$

↓ non ha interesse dal punto di vista elettrico



⇒ circuito di bipolo

● = NODI

ogni collegamento fra 2 nodi è un RAMO o LATO

Per ogni B considero i e v con la CONVENZIONE COORDINATA

↳ scelgo una delle 2 e di conseguenza l'altra

In generale x un circuito con ℓ rami ci sono 2ℓ grandezze elettriche (i e v) → incognite del problema

Applico KCL e KVL

① ci sono 2 i uscenti e 2 i entranti

$i_5 + i_2 = i_1 + i_3$

Ho bisogno di percorsi chiusi. x un circuito disegnabile su un piano (circuito planare) esistono percorsi chiusi attraverso i rami che non includono altri rami:

↳ regola generale ⊛

② $i_1 + i_4 = i_2$

③ $i_3 = i_4 + i_5$

Ci sono 5 rami, quindi 10 grandezze el.

$$\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases} \quad i_5 + \cancel{i_1} + i_4 = \cancel{i_1} + i_3 \; = ③$$

⇒ si dimostra quindi che la combinazione di 2 equaz. da come risultato la 3ª

⇒ le KCL su tutti i nodi non sono linearmente indipendenti (in qst caso 2 su 3)

Si ha che N = n° nodi, **in un circuito con N nodi si hanno $N-1$ equazioni KCL indipendenti** (libere)

EQ di funzionamento dell' elemento o eq caratteristica

$v = e \,, \forall i$ => quindi la tensione del bipolo è $= e$

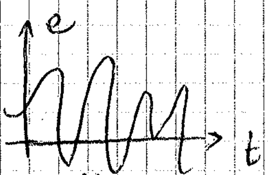
e: fornita dal costruttore (volt)

e non è un numero, può anche essere una funzione dip. dal t. (infatti è minuscola)

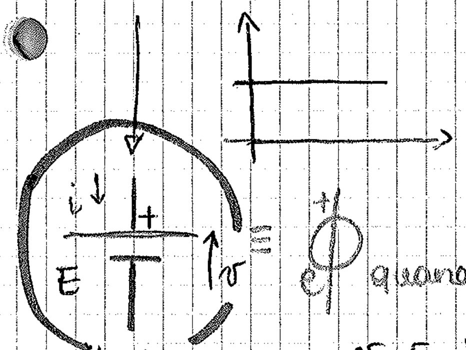
$\forall i$: indica che B funziona indipendentemente da i, sia che ci sia o no ($\forall i$)

posso anche non rispettare la convenzione, quindi

se $e \rightarrow e(t)$



se invece $e = K$



$e \Rightarrow E$, B ha sempre la stessa tensione

batterie (x esempio)

quando e è costante

$v = E \,, \forall i$

- se $e = 0$, $v = 0$, $p = 0$

CORTOCIRCUITO

simbolo:

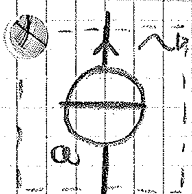
simbolo alternativo:

a livello pratico non si trova

N.B il simbolo è sempre un generatore

2) Generatore ideale di corrente

ci si avvicina le carica batterie, ma non è ideale



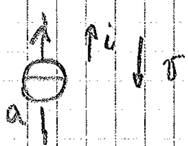
i: data dal costruttore

↑ verso di i) → poi io farò la scelta del verso di i, ma è conveniente scegliere lo stesso verso. Di conseguenza scelgo v

EQ. DI FUNZIONAMENTO:

$i = a \,, \forall v$

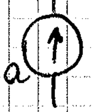
vedi prima $\forall i$, stesso discorso



se $a = K \Rightarrow A$

$i = A$

Simbolo alternativo:



- se $a = 0$, $i = 0$, $p = 0$ → le cariche non scorrono, è come se il filo conduttore fosse tagliato

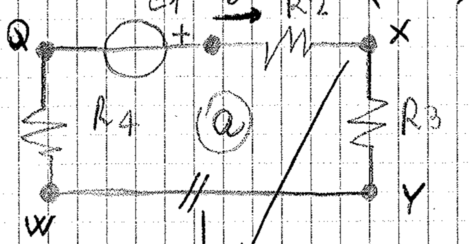
CIRCUITO APERTO

se $G=0$, $i=0$, $\forall v$ $\Rightarrow$ non passa corrente (è come se fosse un filo tagliato)

purché non sia ∞ — CIRCUITO APERTO

CIRCUITI

e_1 i R_2 v $\Rightarrow$ scelgo io



$\Rightarrow$ circuito planare, (a) è l'unica maglia

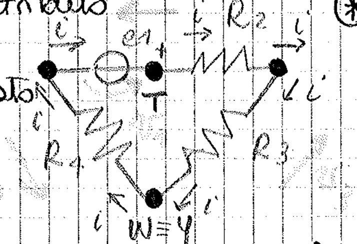
Nel circuito scelgo i (o v) e di conseguenza v (o i)

connessione tra bipolo 1 e bipolo 2 = NODO $\rightarrow$ applico KCL e noto che $i_2 = i_3$

qst è un cortocircuito, quindi $\overline{WY}$ non dà contributo

può essere eliminato tranquillamente

(*)



qst circuito è equivalente

Su tutti i nodi applico KCL e vedo che i è uguale su tutti i nodi

è sempre la stessa su tutto il circuito

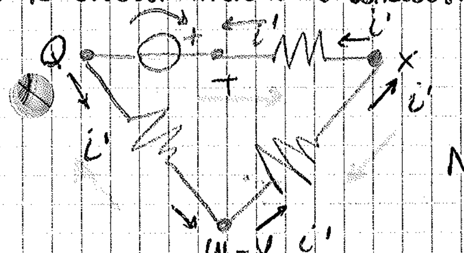
T è il "nodo di verifica"

OSS. Bipoli legati in modo da essere attraversati dalla stessa i si dice che sono collegati IN SERIE.

Noto che sul generatore v è (*) i, quindi NON rispetta la convenzione, ma io so che $v = e$, $\forall i$, quindi non c'è problema

$\times$ il costruttore

E se avessi iniziato l'analisi a partire da un'altra i?



v è scelta come il costruttore, i' di conseguenza

Applico KCL e su T verifico che tutto funziona

Nelle due esperienze trovo che $i' = -i$

RICORDA: una volta scelta i (o v) devo essere coerente nel considerare v (o i)

Quindi, nel disegno aggiungo

Considero (a) e applico KVL (*) $\Rightarrow$ v_1; v_2, v_3 e v_4 sono tutte ↻

v_1 è l'unica ↺

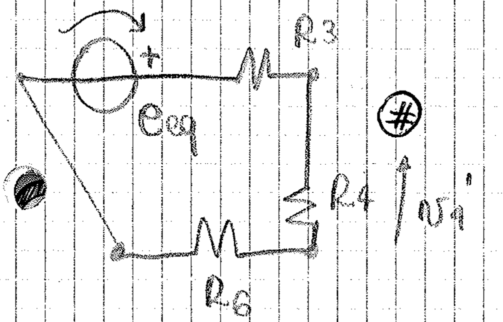
$$v_1 = v_2 + v_3 + v_4 \quad (*)$$

$$\underline{e_1} = \underline{R_2} i + \underline{R_3} i + \underline{R_4} i \quad \text{— = date dal costruttore}$$

$$i = \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \text{risultato}$$

$\rightarrow$ deve essere sempre espresso in quantità NOTE del costruttore

Quindi
$$v_1 = (R_2 + R_3 + R_4)\, i$$



(#)

REGOLA

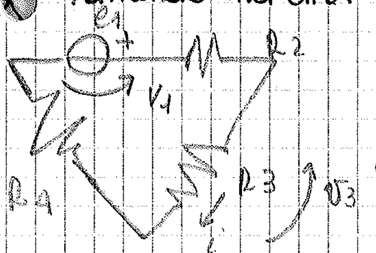
Hp: circuito in serie con ≠ generatori di tensione

th: Unico generatore di tensione equivalente

$$e_{eq} = \sum_n (\pm e_n)$$

indica che devono essere omogenei alla notazione

Tornando indietro:



$$i = \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}$$

$$v_3 = R_3 i = R_3 \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}$$

v_3 dà una notazione alla maglia opposta rispetto a e_1 => è sempre così (?)

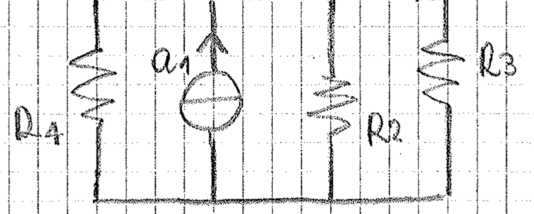
(#) Quindi in qst caso R_4 dà una tensione v_4' opposta a e_{eq}, applicando la regola del partitore =>

$$v_4' = e_{eq} \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_6}$$

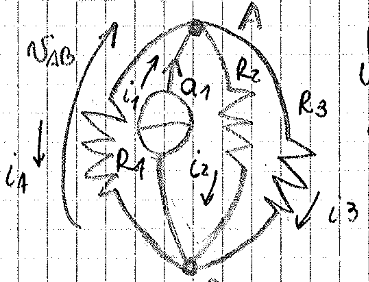
In (#) (vedi dietro) si ha:

$$i = -\frac{e_{eq}}{(R_2 + R_4 + R_6)} \quad e \quad v_4 = R_4 i = -e_{eq} \frac{R_4}{R_2 + R_4 + R_6}$$

$v_4 = -v_4'$, risultato coerente xké v_4' ↑ e v_4 ↓. ciò dimostra che la scelta dei segni è ininfluente.



∼



Posso dire che fra A e B c'è un'unica tensione v_{AB}

Def: Circuiti con tutti i bipoli collegati fra gli stessi 2 punti (cioè con la stessa tensione su tutti i bipoli) si dice collegato **IN PARALLELO**

Scelta v_{AB} ↑, i_4 è diretta ↓ (x forza):

$i_4 = G_4 v_{AB}$ $\left(G_1 = \frac{1}{R_1}\right)$ ↳ stessa cosa vale x R_2 e R_3)

i_1 è diretta ↑ x la costruzione del generatore di i (x forza)

A e B sono nodi, quindi KCL

(A) $i_1 = i_2 + i_3 + i_4$ (come x (B))

↳ xké ci sono KCL indipendenti = Nodi − 1

↓

in questo caso $2-1=1$

$a_1 = G_2 v + G_3 v + G_4 v$

$= \underbrace{(G_2 + G_3 + G_4)}_{\text{coeff. di proporzionalità} = G_{eq}} v_{AB}$ ⤳ ricorda $i = Gv$

REGOLA

Hp: C.to //

Th: Posso trovare una $G_{eq} = \sum_n G_n$ (se ci sono N resistenze ≠)

$= \sum_n \frac{1}{R_n}$

Nel ns caso: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ ⇒ $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}}$

CASO PARTICOLARE: se ci sono solo 2 resistori in //, $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

tornando a monte: $a_1 = G_{eq} v_{AB}$; $v_{AB} = \frac{a_1}{G_{eq}}$

x trovare le singole i ⇒ $i_4 = G_4 v_{AB}$

$i_2 = G_2 v_{AB}$

$i_3 = G_3 v_{AB}$

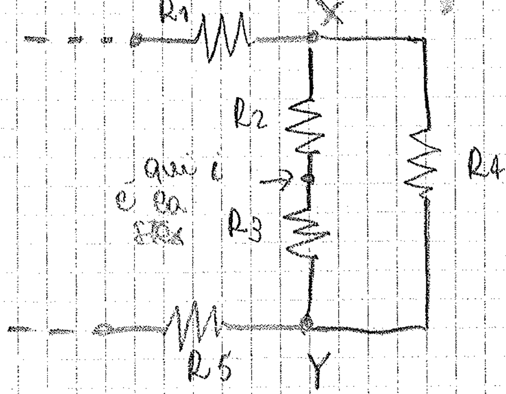
REGOLA DEL PARTITORE DI CORRENTE

Hp: C.to // con 1 generatore di corrente (a_1)

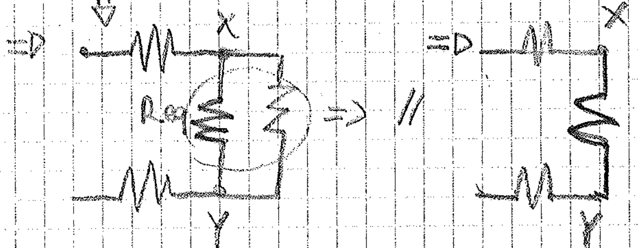
Th: $i_k = a_1 \frac{G_k}{G_{eq}}$ ⇒ vale x le correnti di verso opposto rispetto al generatore di corrente. Infatti in A, a_1 è ↑, le correnti parziali sono tutte ↓

CIRCUITI MISTI

non importa la geometria del circuito, ma i collegamenti!



x studiare qst circuito bisogna procedere x gradi e ragionare su serie e //; poi bisogna sostituire con Req



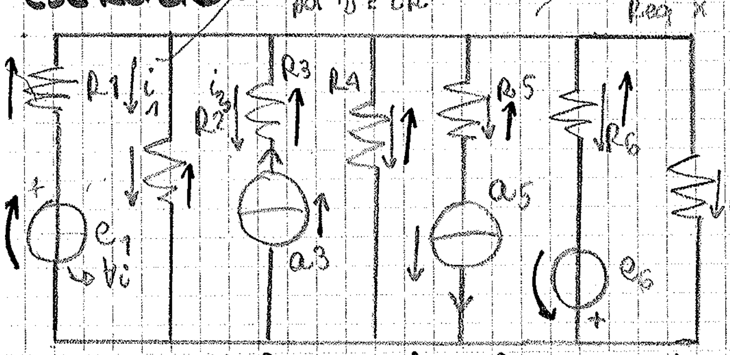
$$R'_{eq} = \frac{R_{23} \cdot R_4}{R_{23} + R_4}$$

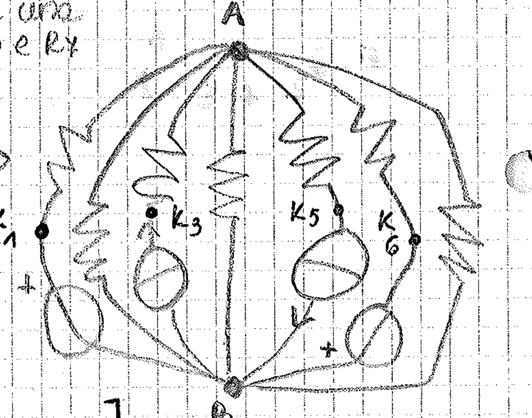
qst è in serie e ottengo una R''_{eq}

ESERCIZIO

scelgo i e poi $v = iR$

potevo trovare una Req x R_2, R_4 e R_7





Circuito con 11 elementi. Sono legati in // 7 rami

K_1 è un collegamento in serie (così come gli altri K_i)

circuito misto

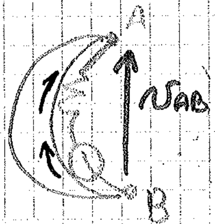
Non posso applicare le regole subito, ma devo procedere x gradi

riconosco // e //, in $K_3 \to i_3 = -a_3$

$K_5 \to i_5 = a_5$

Considero un percorso chiuso (NON una maglia) →

e applico KVL A - R1 - e1 - B - A



$v_{AB} = v_1 + e_1$

$v_1 + e_1 - v_{AB} = 0$

RICORDA: Tensione = differenza di en. potenziale fra 2 punti: NON è necessario un bipolo.

quindi fra A e B c'è una ΔV

a seconda di come scelgo il senso del percorso v può essere ↻ o ↺ ma se cambio uno cambiano tutti i segni degli altri v

APPLICO KVL a tutti i bracci

$R_1 i_1 + e_1 = v_{AB}$

Braccio 2 => KVL => $v_{AB} = v_2 = R_2 i_2$

Braccio 3 => c'è un generatore di corrente, quindi non so come scrivere v_{a3}

Braccio 4 => $v_{AB} = v_4 = R_4 i_4$

Braccio 5 => stessa cosa che x il braccio 3

Braccio 6 => $v_{AB} + e_6 = v_6 = R_6 i_6$

Braccio 7 => $v_{AB} = R_7 i_7$

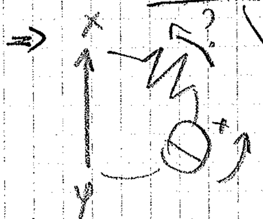
$$V_{xy} = \frac{\oplus\frac{e_3}{R_3} + a_1}{\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_3}}$$

e_3 punta a X

- Se fosse stata richiesta V_3? (associata a R_3)

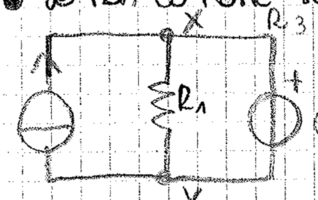
$\Rightarrow$ uso Millman e trovo V_{xy} (*) applicato qui :)

$\Rightarrow$ KVL $\Rightarrow$ $V_{xy} = e_3 + V_3$



È un utilissimo passaggio intermedio

- Se non ci fosse stata R_3?



Dovrei fare $\frac{e_3}{R\text{ cortocircuito} = 0}$ quindi non posso applicare Millman

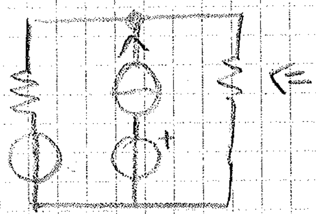
Inoltre, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{0}$

Infatti $\lim_{R_3 \to 0} \frac{\frac{e_3}{0} + a_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{0}} = \frac{\frac{e_3}{0}}{\frac{1}{0}} = e_3$ ($\frac{e_3}{0} \to \infty$, $\frac{1}{0} \to \infty$)

Basta fare $V_{xy} = e_3$

$\Downarrow$

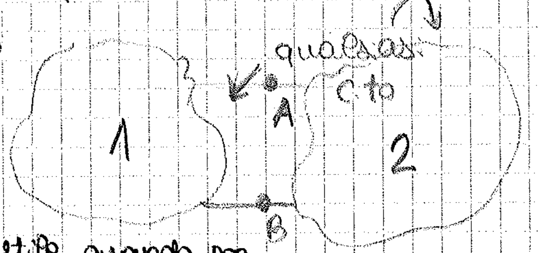
è un ragionamento fisico



tutte le volte che c'è un a in serie a qualcos'altro, a domina e impone la sua corrente

$\Downarrow$

è un corollario



nota V_{AB} (calcolata o misurata)

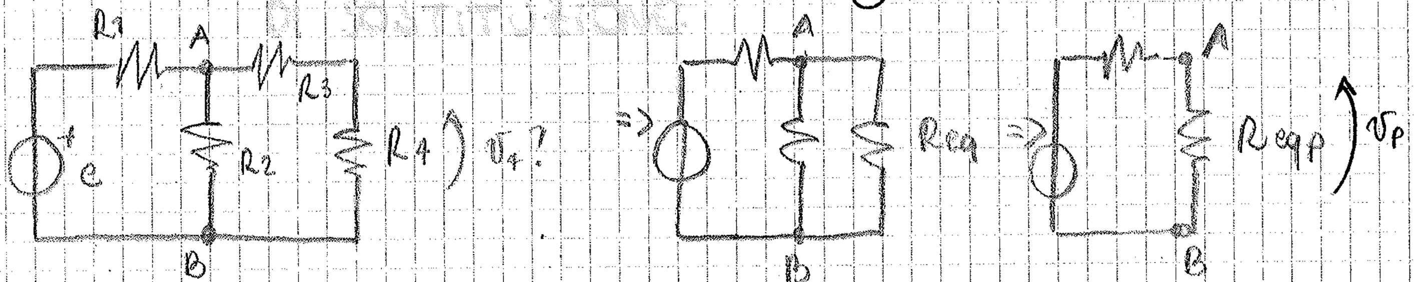
$\Downarrow$

Posso SEMPRE sostituirla con un generatore di tensione coerente $e = V_{AB}$

in qualsiasi circuito (*)

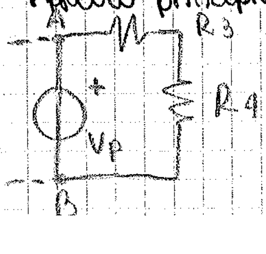
utile quando non posso usare Millman

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE



Trovo $V_P = e \frac{R_P}{R_1 + R_P}$ (partitore di tensione)

Applico principio di sostituzione $\Rightarrow$ fra A e B ho trovato V_P, quindi:



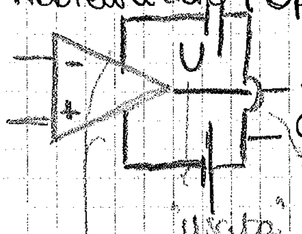
e con il partitore di tensione trovo $V_4 = V_P \frac{R_4}{R_3 + R_4}$

AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

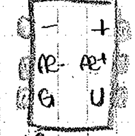
dispositivo elettronico complesso e integrato

non è un bipolo ha + collegamenti

Abbreviazione (Op Amp)



=>



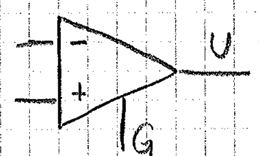
~> maniglie

si scavalcano senza LD contatto

è una scatoletta

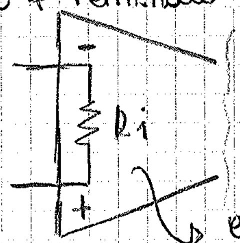
qst sono collegamenti relativi all'alimentazione

Semplificato:



=> faccio come se le alimentazioni a batteria fossero incorporate

Ha 4 terminali => QUADRIPOLO



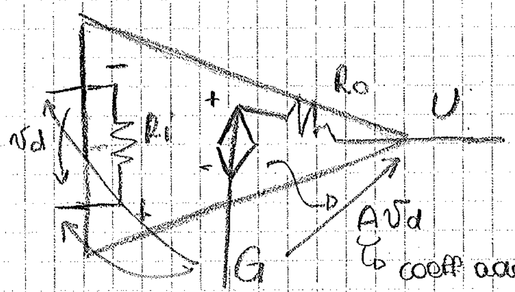
Ri ha un valore elevato, di solito $> 10^5$ Ohm

è come se fra ⊖ e ⊕ ci fosse una R_i

È un circuito vero e proprio

Tutto il funzionamento del transistor può essere riassunto in un gen. pilotato di tensione

non esistono quasi, ma sono utili x descrivere dei fenomeni.

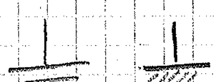


$A > 10^5$

Ro è spesso trascurabile ($R_0 \sim \Omega$)

A Vd ↳ coeff adimensionato (valore pilotante)

G =>



è il riferimento delle tensioni

"Ground"

infatti ci sono 3 tensioni

V_+ => G => ⊕

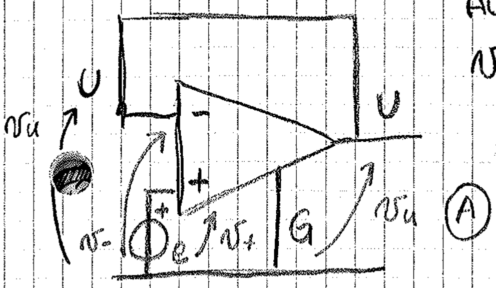
V_- => G => ⊖

V_u => G => U

KVL su Ⓖ → ⊖ → ⊕ → Ⓖ ottengo $V_+ = V_- + V_d$

$$\boxed{V_d = V_+ - V_-}$$

V_d => TENSIONE DIFFERENZIALE



ALTRO CASO: (no approssimazioni)

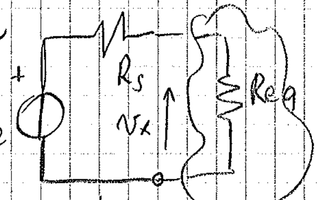
$v_+ = e$, $v_- = e$, $v_{+-} = 0$, $v_u = e$ (xké è tutto un cortocircuito)

INSEGUITORE DI TENSIONE

↓

ha la stessa tensione del generatore

Sensore



qst è un circuito

$$v_x = e \cdot \frac{R_{eq}}{R_s + R_{eq}}$$ → partitore di tensione

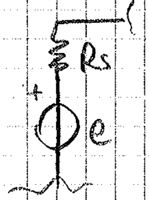
↓ ricevuta da c.to

↓ produce una v molto piccola di x (e)

↓ qst sensore è attaccato a c.to

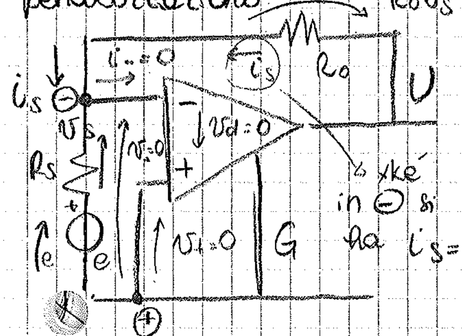
Se attacco il sensore al circuito di utilizzo ottengo una v_x piccola!

Quindi se ad (A) aggiungo Rs



=> la i che ci passa è 0, quindi Rs è ininfluente sulla tensione

Se a un c.to di utilizzo collego l'inseguitore, la v_x è $= v_u$ quindi non ho penalizzazioni



v_u?

$e + v_s = 0$

$v_s = R_s i_s$

$$i_s = -\frac{e}{R_s}$$

xké in ⊖ si ha $i_s = i_{R_o}$

⇐ ALTRO CASO

KVL: $v_u = R_o i_s$

$$\boxed{v_u = -e\frac{R_o}{R_s}}$$ => dipende solo dalle cose esterne all'operazionale

↓ riducente

può essere amplificatore o meno

N.B. c'è il segno ⊖

=>

AMPLIFICATORE INVERTENTE

↓

generatore collegato al terminale ⊖

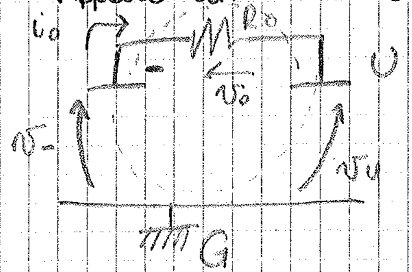
se collegato a ⊕ (vedi prima), non invertente

Se avessi n generatori e collegati in // sarebbe sempre $i_n = -\frac{e_n}{R_n}$

KCL su K => $i_1 + i_2 + i_3 + i_- + i_0 = 0$ => sono tutte uscenti

$-\frac{e_1}{R_1} - \frac{e_2}{R_2} - \frac{e_3}{R_3} + 0 + i_0 = 0$ => ricavo i_0

Applico un KVL esterno



$v_- = v_0 + v_u$

$0 = R_0 i_0 + v_u$ e trovo $v_u = -R_0 \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} \right)$

queste sono correnti

corrente × R da una tensione quindi dimensionalmente è ok!

$$v_u = -\left(e_1 \frac{R_0}{R_1} + e_2 \frac{R_0}{R_2} + e_3 \frac{R_0}{R_3} \right)$$

⇓

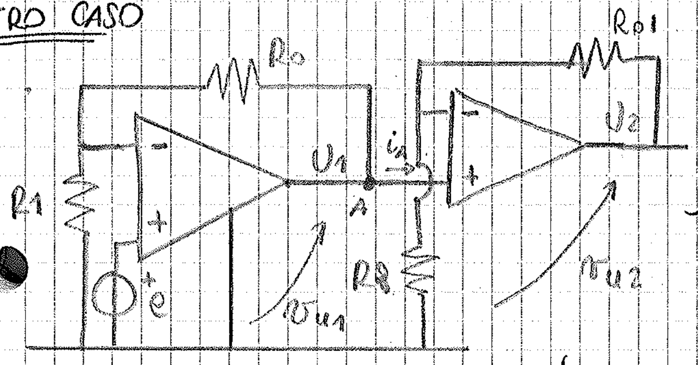
SOMMA PESATA DEI GENERATORI

Infatti ogni ⓔ è moltiplicato x qualcosa (le R_n le posso scegliere io)

=> CIRCUITO SOMMATORE → consente di sommare ≠ gen di tensione

RICORDA: vari ⓔ sono dei sensori, uso qst c.to quando ad esempio voglio fare una media dei dati misurati, a seconda delle R inserite

ALTRO CASO



questo è non invertente

$i_p = 0$! xké collegata al ⊕ di un operazionale

$$v_{u2} = v_{u1} \left(\frac{R_0'}{R_2} + 1 \right)$$

⇓

COLLEGAMENTO IN CASCATA

non invertente

⇓

$$v_{u1} = e \left(\frac{R_0}{R_1} + 1 \right)$$

(dalla regola delle altra volta)

è come se la tensione v_{u1} fosse collegato a ⊕, quindi c.to non invertente

$$\underbrace{v_{u2}}_{\text{in uscita dalla cascata}} = \underbrace{e}_{\text{all'inizio della cascata}} \left(\frac{R_0}{R_1} + 1 \right) \left(\frac{R_0'}{R_2} + 1 \right)$$

il singolo generatore ⓔ moltiplicato x dei rapporti che dipendono dai singoli operazionali :)

=> METODO DELLE EQ. AI NODI O METODO NODALE

È un modo automatico x costruire un sistema di eq. di un circuito.
⇓
posso anche, quindi, programmarlo al computer

mi restituisce il sistema completo del cto.

Posso scrivere il sistema come una matrice $(N-1)\times(N-1)$

coefficienti: incognita (vettore) vettore termini noti

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B} & -\frac{1}{R_B} \\ -\frac{1}{R_B} & \frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

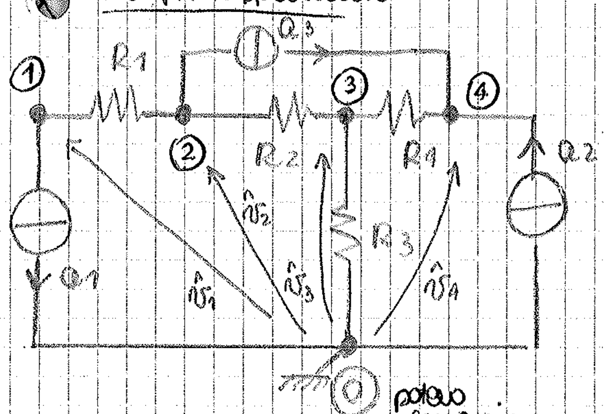
=> METODO AUTOMATICO NODALE

e le inserisco in un pc.

m = posso riempire guardando il circuito :)

Se ci fosse 10 nodi, ottengo 10 eq. che possono essere inserite in qst matrice

Esempio applicativo:



scegliere un nodo qualsiasi

Ho 4 KCL e 4 incognite

(1,2) indica il nodo 1 collegato alla tensione di 2. Può essere 0, se $R \Rightarrow \infty$ e quindi non c'è contributo di conduttanza

Quindi ho una matrice 4×4 => metodo automatico

Ogni riga è un nodo, la colonna rapp. la tensione nodale => es. (2,2) indica il nodo due e ci metto la Σ delle G a lui attaccate

I termini fuori dalla diagonale hanno segno ⊖

non c'è colleg. fra 1 e 3 !!

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_3 \\ 0 \\ +a_3+a_2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coeff è sempre simmetrica

E se ci fossero anche dei generatori (e)?
⇓
collegati a (∅)

KCL ② $\quad \frac{\hat{v}_2}{R_2} + \underbrace{\frac{\hat{v}_2 - e_1}{R_1}}_{i_{2,1}} + i_{2,3} = 0$

— = v

— = i

$i_{2,1}$ (ottenuta con KVL)

③ $\quad a_0 + i_{2,3} = \frac{\hat{v}_3}{R_3}$

KVL → ② → ③ → ∅ → ② : $\quad e_2 + \hat{v}_3 = \hat{v}_2$

Combo le tre equazioni xké ho tre incognite

$$\begin{cases} \frac{\hat{v}_2 - e_1}{R_1} + \frac{\hat{v}_3}{R_3} + \frac{\hat{v}_2}{R_2} - a_0 = 0 \\ e_2 + \hat{v}_3 = \hat{v}_2 \end{cases}$$

=> le incognite sono solo le t. nodali

$$\begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array} \begin{cases} \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \hat{v}_3\left(\frac{1}{R_3}\right) = a_0 + \frac{e_1}{R_1} \\ \hat{v}_2(+1) - \hat{v}_3 = e_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \frac{e_1}{R_1} \\ e_2 \end{bmatrix}$$

→ non funziona la regola automatica

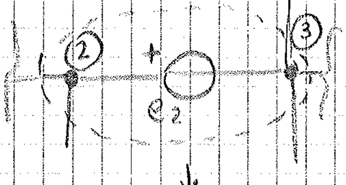
se K = gen. ⓔ attaccati a ∅ è vero N − 1 − K = eq. (ns. caso 2)

se gen. ⓔ a cavallo non abbassa la matrice e la sconvolge

↳ fra 2 nodi

Devo estendere la regola.

Considero la sep. chiusa che ingloba l' ⓔ a cavallo

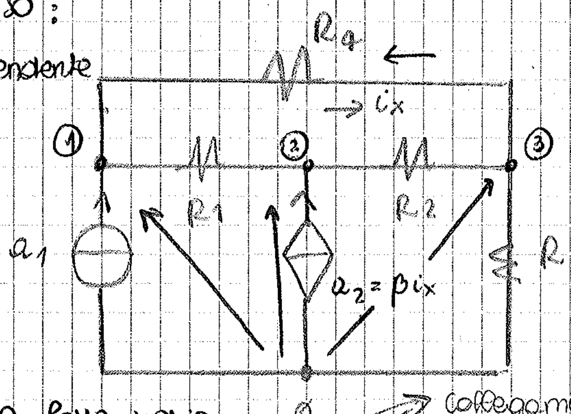


È un SEPERNODO (modifica la matrice)

ns caso, e' collegato con 3 ≠ R

ALTRO CASO :

gen. indipendente collegato a ∅



Come se a_2 fosse indip.

collegamenti fra 1 e 2 e 1 e 3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +a_1 \\ +a_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

^ REGOLA AUTOMATICA

$v_4 = \hat{v}_1 - \hat{v}_3$ (KVL)

$i_4 = i_x = \frac{v_4}{R_4}$

$a_c = \beta \frac{v_4}{R_4}$ => si inseriscono nei termini noti delle incognite!

$$\det(A) = (G_A + G_B + G_C)(G_C + G_D) - G_C^2$$

$$\det\begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{a}_2 \end{bmatrix} = (e_0 G_A - a_1)(G_C + G_D) + G_C(a_0 + a_1)$$

$$\det\begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{b} \end{bmatrix} = (G_A + G_B + G_C)(a_0 + a_1) + G_C(e_0 G_A - a_1)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{e_0 G_A(G_C + G_D) + a_0 G_C - \cancel{a_1 G_C} - a_1 G_D + \cancel{a_1 G_C}}{(G_A + G_B)(G_C + G_D) + \cancel{G_C^2} + G_C G_D - \cancel{G_C^2}} \Rightarrow G_x = (G_A + G_B)G_C + G_D(G_A + G_B + G_C)$$

$$= \frac{e_0 G_A (G_C + G_D)}{G_x} + \frac{a_0 G_C}{G_x} + a_1\frac{(-G_D)}{G_x}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{a_0(G_A + G_B + G_C) + a_1(G_A + G_B) + \cancel{a_1 G_C} - \cancel{a_1 G_C} + e_0 G_A G_C}{G_x}$$

$$= e_0 \frac{G_A G_C}{G_x} + a_0 \frac{(G_A + G_B + G_C)}{G_x} + a_1 \frac{(G_A + G_B)}{G_x}$$

Noto che $\hat{v}_2$ e $\hat{v}_3$ hanno la stess struttura: $e_0 k + a_0 k' + a_1 k''$, dove "k" contiene solo le conduttanze del c.to (Anche se ci fosse un c.to pilotato, esso sarebbe "inglobato in k). Inoltre $e_0 k \Rightarrow k$ NON contiene ⓐ

$a_n k \Rightarrow k$ NON contiene ⓔ

Quindi: REGOLA ($\forall$ c.to!)

In ogni c.to, ogni variabile elettrica (tensione o corrente) può essere scritta come somma di contributi dei gen. indip. con coefficienti che dipendono solo dai parametri del c.to $\Rightarrow$ resistenze $\underbrace{R}_{\text{quindi } G}$, α, $\underbrace{\beta, r_M}_{\text{gen.}}$, G_M pilotati

$$\underbrace{y}_{\text{variabile elettrica}} = e_0 k_0 + e_1 k_1 + \dots + a_0 H_0 + a_1 H_1 + \dots$$

Quindi in un c.to le variabili elettriche sono una combinazione lineare dei gen. indipendenti

$$\Rightarrow y = \sum_{k} e_k K_k + \sum_{m} a_m H_m$$

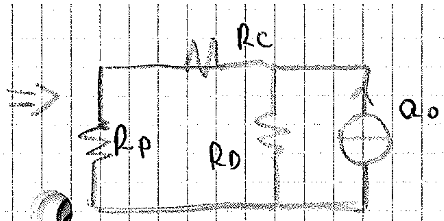
gen. indip. di tensione — gen. indip. di corrente

$(R, \alpha, \beta, r_M, G_M)$

$\Rightarrow$ **TEOREMA DI LINEARITÁ DEI CIRCUITI**

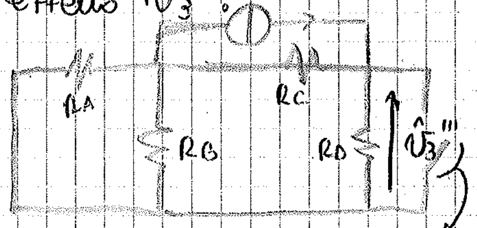
Tornando a monte:

$\hat{v}_3 = e_0 K_0 + a_0 H_0 + a_1 H_1 \rightarrow$ so $\forall$ c.to che la soluzione è di qst tipo.



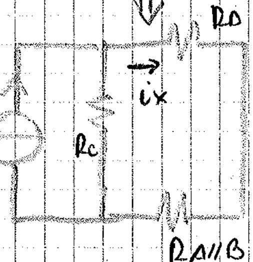
$$\hat{v}_3'' = a_0 \underbrace{(R_P + R_C) /\!/ R_D}_{\text{questo è il coeff. } H_0}$$

effetto $\hat{v}_3'''$:



applico KVL e noto che $\hat{v}_3'''$ è proprio quella che attraversa a_1

riduco il circuito
RA e RB sono //



posso applicare il partitore di corrente

$$i_x = \frac{R_C}{R_D + R_C + R_{A/\!/B}} \cdot a_1$$

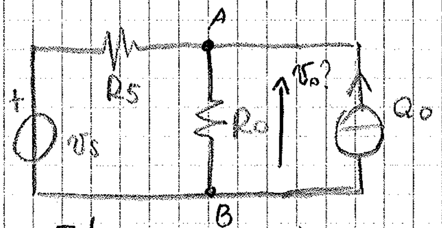
$$\hat{v}_3''' = R_D i_x \Rightarrow a_1 \underbrace{\frac{R_D R_C}{R_D + R_C + R_{A/\!/B}}}_{H_1}$$

<u>SOLUZIONI X I CIRCUITI</u>

METODO DEI NODI
METODO DELLE MAGLIE ⇒ automatico (non lo studiamo)
METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI → risolve il circuito, però analizza j circuiti, dove j è il numero di gen. ⓔ e ⓐ che sono presenti nel c.to
↓
si applica x trovare i o v
METODO MILLMAN

può essere molto lungo però!

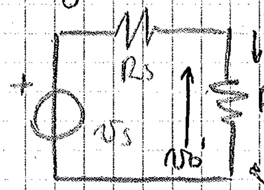
Altro metodo:



$$v_o = \underbrace{v_s K}_{v_o'} + \underbrace{a_0 H}_{v_o''}$$

⇒ ci sono 2 gen. indip., quindi devo risolvere 2 c.ti

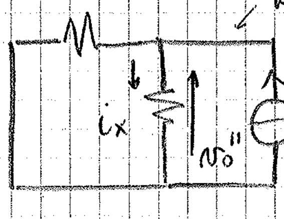
effetto v_o' ⇒



$$v_o' = v_s \underbrace{\frac{R_o}{R_s + R_o}}_{K} \quad \text{(partitore)}$$

KVL!

effetto v_o'' ⇒



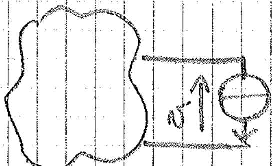
$$i_x = a_0 \frac{R_s}{R_s + R_o} \quad \text{(partitore)}$$

$$v_o'' = i_x R_o = a_0 \underbrace{\frac{R_s R_o}{R_s + R_o}}_{H}$$

Analizzo le potenze assorbite:

① $p_o' = v_o' i'$ (convenzione utilizzatori) → assorbita da Ro

$$= v_o' \frac{v_o'}{R_o} = \frac{(v_o')^2}{R_o} = \frac{R_o}{(R_s + R_o)^2} \cdot (v_s)^2$$



i => ho eliminato (A2) con il principio di sostituzione

(A1)

Quanto vale v? (aggiunto dopo)

Dalla LINEARITÁ so che $\underbrace{v}_{\text{oppure una qualsiasi grandezza elettrica}} = \underbrace{e_1 K_1}_{v'} + \underbrace{e_2 k_2}_{v''} + \ldots + a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots + iQ$

questo é un gen. indipendente!

Se considero tutti i contributi di v (fino a quello "prima" di iQ) e li sommo ottengo i contributi di tutti i

gen. in (A1) = v_{A1} (é la somma) ⟶ tensione dovuta ai gen. indip. interni

iQ = contributo gen. esterno

$v = v_{A1} + iQ$

↳ deve avere le dimensioni di Ω, quindi é come una resistenza

$Q \Rightarrow R_0$

$v = v_{A1} + iR_0$. x trovare R_0 devo porre = 0 tutti gli altri gen. indipendenti! (gen A1 = 0)

coefficiente che viene dal contributo di i con tutti i gen $A_1 = 0$

=> é una resistenza con i gen. spenti

R_0 é la RESISTENZA EQUIVALENTE del circuito A_1

TEOREMA DI THEVENIN

Hp: c.to generale scomponibile in 2 parti collegate solo da 2 conduttori

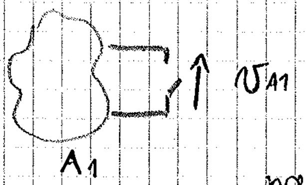
se A_1 e A_2 sono a loro volta divisibili va bene lo stesso, ma i due blocchi devono esserci

Th: a) la tensione v letta fra i 2 conduttori di collegamento é:

$$v = \underbrace{v_{A1}}_{\text{contributi gen. interni ad } A_1} + \underbrace{i}_{\text{gen. esterno}} \underbrace{R_0}_{\text{resistenza equivalente di } A_1}$$

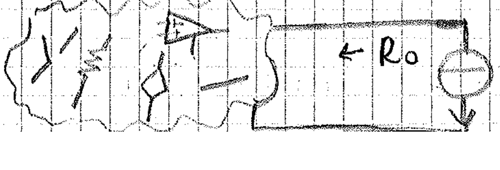
b) v_{A1} é la tensione equivalente ai generatori interni, fra i 2 conduttori, con $i = 0$ (sovrapposizione effetti), cioé con c.to aperto fra i 2 conduttori

① v_{A1} => TENSIONE A VUOTO



② R_0 => RESISTENZA EQUIVALENTE di A_1 con gen. indipendenti int = 0

i gen. dip. non vanno eliminati



=> quindi i gen. pilotati sono pilotati da tensioni o correnti che sono attivate da (i)

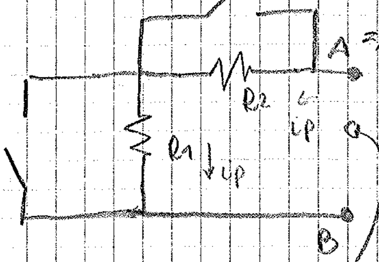
$v_1 = R_1 i_x$.

Uso KVL $\Rightarrow v_T = R_2 a_2 + R_1 \underbrace{a_1}_{i_x}$

Ho trovato v_T !

X trovare R_T, devo avere: gen. interni spenti e il gen esterno ⓐ acceso

$\downarrow$ n.s caso i_p

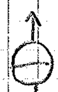


$\Rightarrow$ ⓐ₁ con gen spenti!

Qual è la Req del c.to = R_T

$$R_{eq} = \underbrace{R_1 + R_2}_{\text{xké sono in serie}}$$

A qst c.to aggiungo



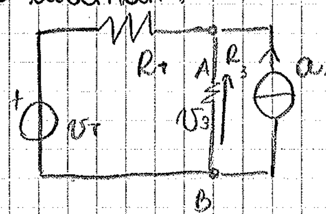
Adesso sul c.to "scorre" una stex i_p

$v_{AB} = R_2 i_p + R_1 i_p = i_p(R_2 + R_1)$

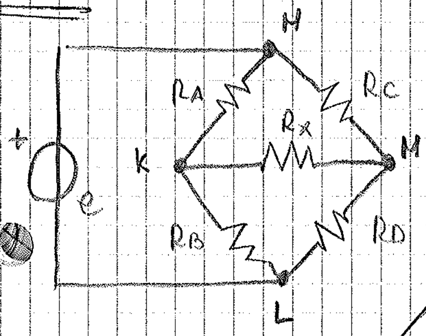
Da thevenin $v = v_T + R_T i_p$ infatti $R_T = R_{eq} = R_2 + R_1$!

Adesso ho tutto, applico Millman:

$$v_3 = \frac{\frac{v_T}{R_T} + a_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} \iff$$

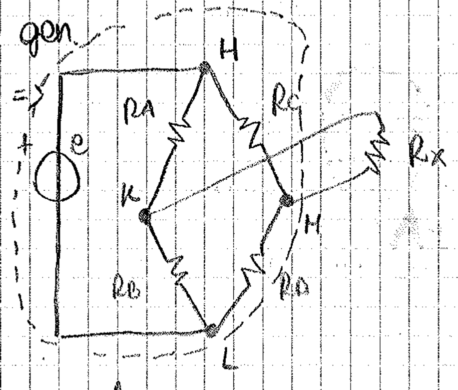


Esercizio

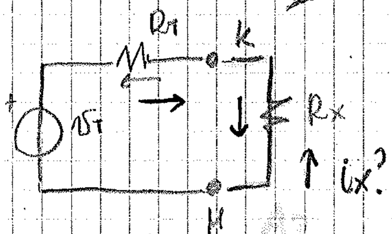


Potrei usare il metodo dei nodi, ma la matrice è scomoda e il metodo di sovrapp. non si può usare xké c'è un solo gen.

THEVENIN $\Rightarrow$



A_1

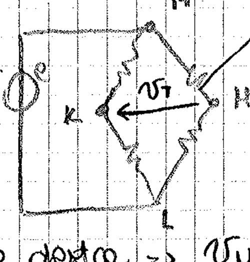


A_1

$$\Rightarrow v_T + R_T i_x + R_x i_x = 0$$

$$i_x = -\frac{v_T}{R_T + R_x}$$

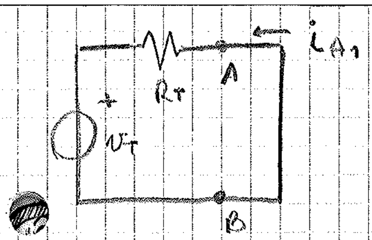
$v_T \Rightarrow$ Applico thevenin ad A_1



tensione a vuoto sui fili di collegamento con A_2

R_A e R_B sono in serie e sottoposte ad ⓔ, applico il partitore.

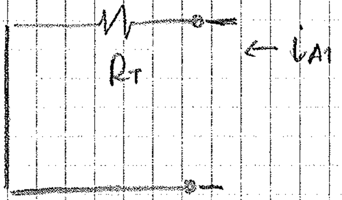
$v_{KL} = e \frac{R_B}{R_A + R_B}$. Anche sulla parte destra $\Rightarrow v_{ML} = e \frac{R_D}{R_D + R_C}$



$$v_T + R_T i_{A1} = 0$$

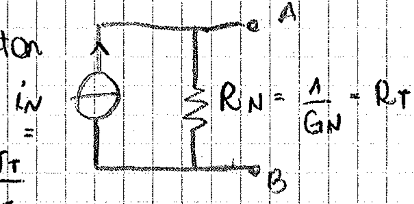
$$i_{A1} = -\frac{v_T}{R_T}$$

$G_N \rightarrow$ è il contributo del cortocircuito A_1 con i gen spenti.



Quindi $G_N = \frac{1}{R_T}$

Passo all'equivalente Norton



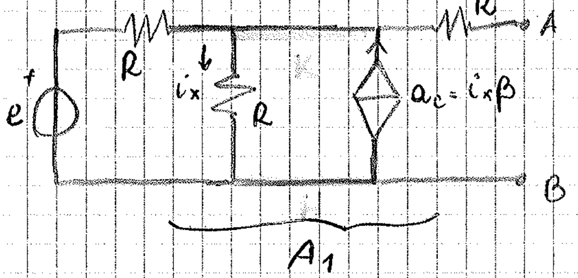
$$i_N = -i_{A1} = +\frac{v_T}{R_T}$$

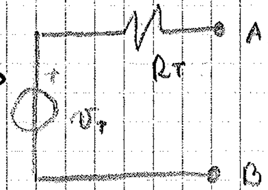
$$R_N = \frac{1}{G_N} = R_T$$

Posso passare da un equivalente all'altro senza problemi :)

$$R_T = \frac{v_T}{i_N} = \frac{\text{tens. a vuoto di Th}}{\text{corrente di corto c.to di Norton}}$$

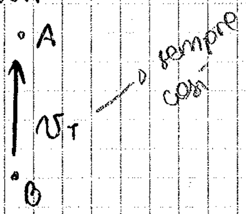
Come passo ad un equivalente di thevenin e di Norton se c'è un gen. pilotato?





equivalente in thevenin

$v_T \Rightarrow$ tensione a vuoto (ovvero quella in A_1)
↓
quindi su R non passa corrente e quindi $v = 0$, è un monopolo



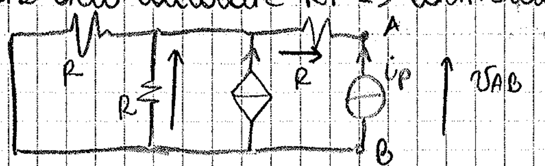
sono due nodi, posso applicare Millman

$$v_T = \frac{\frac{e}{R} + a_c}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \qquad a_c \rightarrow i_x \beta \qquad i_x = \frac{v_{KH}}{R}, \qquad v_{KH} = \frac{\frac{e}{R} + \beta\frac{v_{KH}}{R}}{\frac{2}{R}}$$

v_{KH} è uguale a v_T !! (Millman e KVL)

$$v_{KH} = \frac{e}{2-\beta} = v_T \text{ di thevenin}$$

Ora devo calcolare $R_T \Rightarrow$ contributo di A_1 con gen. spenti e gen. ext attivo



$$\Rightarrow R_T = \frac{v_{AB}}{i_p}$$

è il coeff. di proporzionalità fra v e i in uscita.

X trovare i_x:

KVL $\quad i_x R + e_C + v_{AB} = 0$

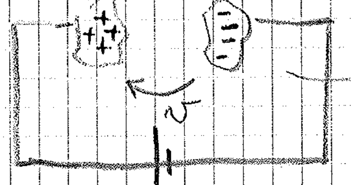
$$i_x = \frac{-v_{AB}}{R + r_m}$$

sostituisco nel calcolo precedente e trovo $v_{AB} = \underbrace{\frac{R}{3\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r_m}{R + r_m}\right)}}_{\text{questa è } R_T} \cdot i_p$

13/11/2013

Lezione 10

CONDENSATORI



due piatti di metallo sottoposti a v

$\oplus q = \ominus q$

$q \propto v$ — diff. di en. potenziale sui due piatti

$$\boxed{q = C v}$$

C: costante x ogni condensatore. > 0 e indica quante cariche si può accumulare se il cond. è sottoposto a una certa v

C = CAPACITÀ e $[C] = \frac{C}{V} = F$ (Farad)

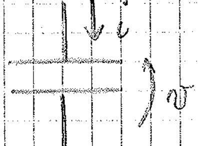
Ricordo che $i = \frac{dq}{dt}$, quindi differenzio la precedente relazione.

$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} = \boxed{i = C\frac{dv}{dt}} \Rightarrow$ **EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO** (esprime i)

C è una costante!

quindi il condensatore è un ELEMENTO DIFFERENZIALE, in quanto nella sua eq. compare una derivata

SIMBOLO:



$\Rightarrow$ uso convenzione degli utilizzatori e quindi $C > 0$, (dato dal costruttore)

$v(t)$? $\Rightarrow$

$$i\,dt = C\,dv$$

$$\frac{1}{C} \cdot i\,dt = dv$$

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt = \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv$$

(t: variabile di integrazione)

$$v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

EQ INTEGRALE

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt} \Rightarrow$$

EQ. DI FUNZIONAMENTO DEL CONDENSATORE CHE ESPRIME v

La v sul condensatore è quindi SEMPRE continua, non fa salti

Invece $i(t)$ può non essere continua, in quanto è derivata di $\frac{dv}{dt}$, quindi può fare dei "salti"

Sul condensatore, con la conv. degli utilizzatori, ho una P assorbita

$$P = vi = v\underbrace{C}_{>0}\frac{dv}{dt} \gtrless 0$$

, dipende dalle condizioni di v nel tempo

Una P assorbita <0 è una potenza generata $\to$ il cond. è come un generatore!

Approccio energetico con $P = \frac{dEn}{dt}$ (energia $\Leftrightarrow$ lavoro)

$$\int_{t_0}^{t} d\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t} P\,dt \to \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^{t} vC\frac{dv}{dt}\,dt$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + C\int_{t_0}^{t} v\,dv$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + C\left.\frac{v^2}{2}\right|_{v(t_0)}^{v(t)}$$

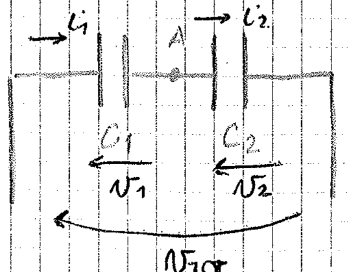
Scelgo t_0 come il tempo in cui è "costruito" il condensatore, quindi non ha sopra alcuna $\mathcal{E}$ e alcuna v $\Rightarrow \mathcal{E}(t_0) = 0$, $v(t_0) = 0$

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = C\frac{v^2(t)}{2}} \Rightarrow \text{ENERGIA SUL CONDENSATORE}$$

≥ 0 SEMPRE

Quindi il condensatore assorbe $\mathcal{E}$, xchè qst rapp. l'en. presente sul condensatore.
Tuttavia ci sono dei momenti in cui $P_{ass} < 0$, quindi il condensatore "sputa" fuori energia, ma qst sarà sempre $\leq$ della en. totale presente su di esso xkè $\mathcal{E} \geq 0$,
quindi non può mai andare in negativo di energia (ANALOGIA $\Rightarrow$ conto in banca)

Il cond è + flessibile di R, in quanto R assorbe solo una $P > 0$



KCL in A $\Rightarrow i_1 = i_2 = i$ (anche x la definizione di serie)

KVL $\Rightarrow v_{TOT} = v_1 + v_2$

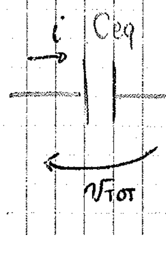
$\Rightarrow$ CONDENSATORI IN SERIE

Hp: in $v(t_0) = 0$

$$v_{TOT} = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i_1\,d + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i_2\,dt$$

$$v_{TOT} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt$$

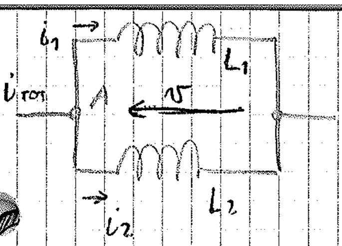
$\Rightarrow$ qst è la eq. di funzionamento di un condensatore $\leftarrow$ quindi



$$v_{TOT} = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i\,dt$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

$\Rightarrow$ le C sono in SERIE



(A) $i_{TOT} = i_1 + i_2$

$$i_{TOT} = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Hp: $i(t_0) = 0$

$$i_{TOT} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

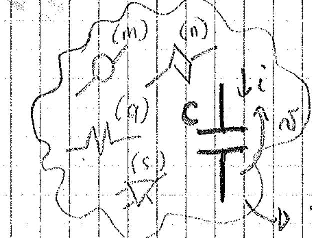
=> INDUTTORI IN PARALLELO

$$i_{TOT} = \left(\frac{1}{L_{eq}}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}}$$

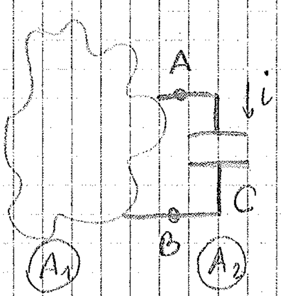
CIRCUITI CON UN SOLO EL. DIFFERENZIA = LE

↳ condensatore
↳ induttore

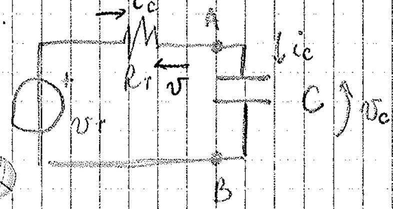


1 solo condensatore

=>



Posso applicare thevenin:



KVL => $e_T = v + v_C$

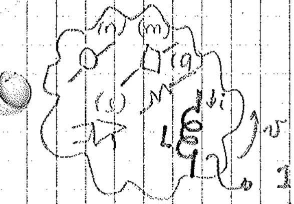
uso eq. differenziale del cond.

$e_T = R_T i_C + v_C$

$e_T = R_T C \dfrac{dv_C}{dt} + v_C$

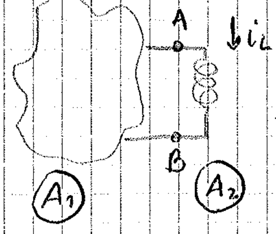
$$\underbrace{\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_T C} = \frac{e_T}{R_T C}}_{}$$ => in qst eq. v_C è l'unica incognita (R_T la ricavo con thevenin)

eq. differenziale di v_C!
I° ORDINE (appare solo la derivata prima)
a coefficienti costanti (xké 1, $\frac{1}{R_T C}$, $\frac{e_T}{R_T C}$ sono costanti)
e non omogenea (xké ∃ il termine noto)



1 solo induttore

=>



Quindi sia nel caso Thevenin che Norton e_T e a_N sono costanti, xke dipendono dai c.ti contenenti e_n e a_m.

$e_T = k$, $a_N = C$, quindi $S = cost = S$ (da tabella)

Sapendo che x_p $\underbrace{\text{dipende da } S}_{\text{da Analisi I, } S = \text{"sorgente"}}$, se S è costante => IPOTESI DI SOLUZIONE $x_p = K_p$

Sostituisco:

$$\frac{dx_p}{dt} + \frac{x_p}{\tau} = \frac{S}{\tau}$$

$$\underbrace{\frac{dK_p}{dt}}_{0} + \frac{K_p}{\cancel{\tau}} = \frac{S}{\cancel{\tau}} \Rightarrow K_p = S$$

$$x = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + S$$ => conosco tutto tranne K

Da analisi I, devo conoscere le $\underbrace{\text{condizioni iniziali}}_{\text{devono essere note dal problema}}$ x risolvere un'eq. differenziale

$$\underbrace{x(0)}_{\text{condizione iniziale}} = Ke^{-\frac{0}{\tau}} + S$$

$$K = x(0) - S$$

$$\boxed{x(t) = (x(0) - S)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + S}$$ => soluzione del sistema con le addotte Hp.

se $t \to +\infty$ $\quad x(\infty) = (x(0) - S)\underbrace{e^{-\infty}}_{0} + S$

$x(\infty) = S$ => quindi S è il valore della funz. all'infinito, non c'è neanche bisogno di calcolarla esplicitamente

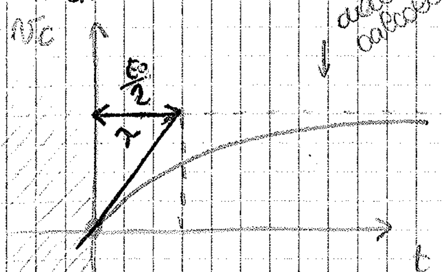
$$x(t) = (x(0) - x(\infty))\, e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)$$ => qst vale dopo la cond. iniziale, quindi $t \geq 0$

Gli el. differenziali sono ELEMENTI CON MEMORIA, in quanto nell'integrale tengono conto di tutta "la storia" di v e i, a partire da $t_0 = 0$

$$v_C(t) = \left(0 - \frac{E_0}{2}\right) e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2}$$

$$= \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{3RC}}\right) \quad \text{per } t \geq 0$$

Graficamente:



N.B. facendo la tg in 0 sull'esponenziale e prolungandola fino al valore costante (l'asintoto) ottengo τ (la costante dell'esponenziale)

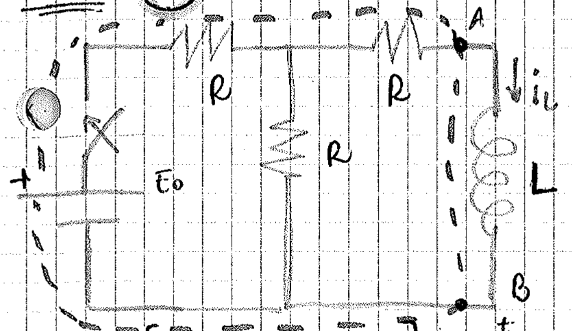
o quando la variabile è = 0

la distanza sull'asse dei tempi

N.B. X un tempo pari a 4-5τ, $v_C \Rightarrow \frac{E_0}{2}$, quindi al valore costante

vale in generale

Esempio 2 **CIRCUITO RL**



N.B. Studiare IL TRANSITORIO di un c.to, vuol dire trovare la soluz. nel tempo del c.to stesso

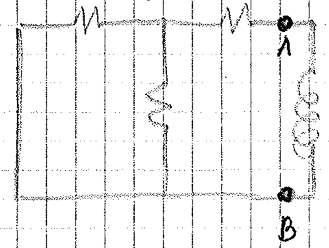
$$i_L(t) = \left[i_L(0) - i_L(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(+\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

Devo trovare $i_L(0)$, $i_L(+\infty)$ e τ

$i_L(0) \Rightarrow$ sfrutto la proprietà di L / i_L è funz. continua, quindi $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

Dato che in $t = 0^-$ la corrente è = 0 xké il c.to è inerte, $i_L(0) = 0$

$\tau \Rightarrow \frac{L}{R_N} \rightarrow R_N = R_T$



$$R_{eq} = R, R \parallel + R = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2} R$$

$$\tau = \frac{2L}{3R}$$

$i_L(+\infty) \Rightarrow$ dalla formula e x l'osservazione generale $i = \text{cost}$

Uso eq. di funzionamento $\Rightarrow v = L\frac{di}{dt}$, quindi $v(+\infty) = 0$!

L diventa un corto circuito (*) (un solo L)

$$v_{AB} = \frac{\frac{E_0}{R}}{\frac{3}{R}} = \frac{E_0}{3}$$

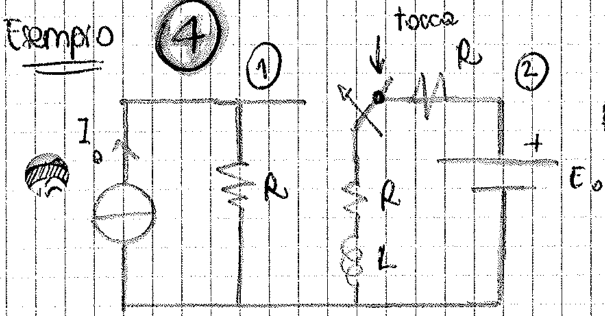
Millman

$$i_L = \frac{v_{AB}}{R \text{ (su cui passa } i_L)} = \frac{E_0}{3R}$$

la conv. degli utilizzatori è rispettata

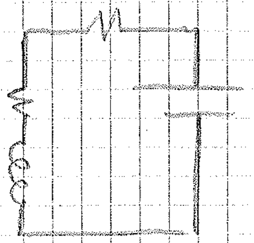
$$i_L(t) = \left[0 - \frac{E_0}{3R}\right] e^{-\frac{3R}{2L}t} + \frac{E_0}{3R} \Rightarrow \frac{E_0}{3R}\left(1 - e^{-\frac{3R\,t}{2L}}\right) = i_L(t)$$

Esempio ④

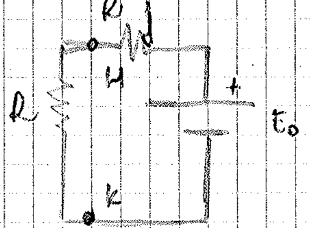


Hp: generatori = cost

per $t<0$ ② $-\infty<t<0$ condizione stazionaria → variabili costanti



$v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$! ⇒ CORTOCIRCUITO



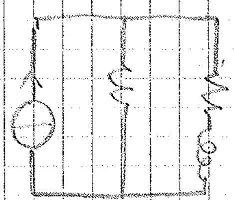
$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(+\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(+\infty)$

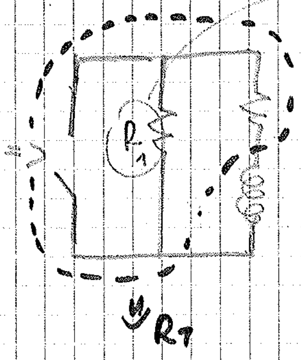
$i_L(0)$ → continua, quindi $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = i_L(-\infty)$ → stazionario

Partitore su ② → $v_{HK} = \frac{E_0 R}{2R}$

$i(0) = \frac{E_0}{2R} R : R = \frac{E_0}{2R}$

$\tau \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow \frac{L}{R_N = R_T}$



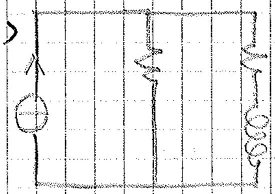


non è inerte
~~Non~~ è collegato a L

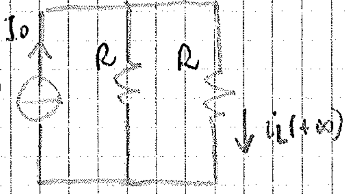
le 2 R sono in serie
$R_{eq} = 2R = R_T$

$\tau = \frac{L}{2R}$

$i_L(+\infty)$ ⇒

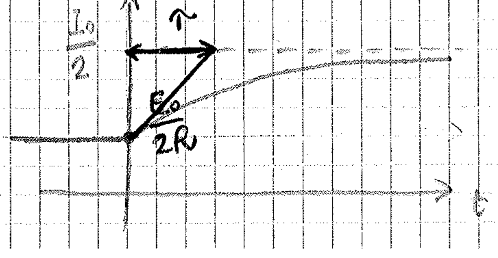


⇒ $v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$ (STATIONARIETA')



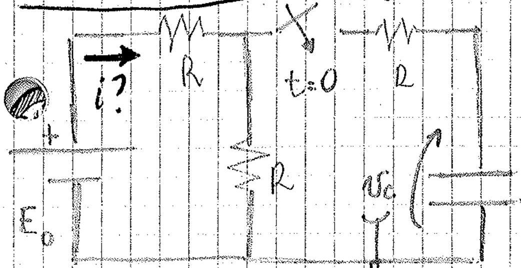
$i_L(+\infty) = \frac{I_0}{2}$ (partitore di corrente)

$i_L(t) = \left[\frac{E_0}{2R} - \frac{I_0}{2}\right] e^{-\frac{2Rt}{L}} + \frac{I_0}{2}$



⇒ Stex durano 4-5τ

Esempio x il calcolo di $y(0^+)$



$$i(t) = \left[i(0^+) - i(+\infty) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} + i(+\infty) \text{, per } t \geq 0$$

$i(t)$ → variabile generica

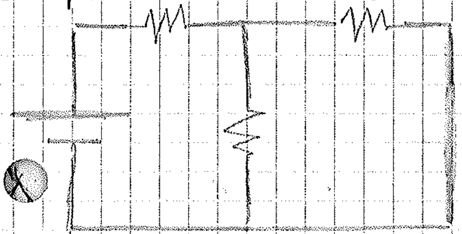
devo sempre operare così!

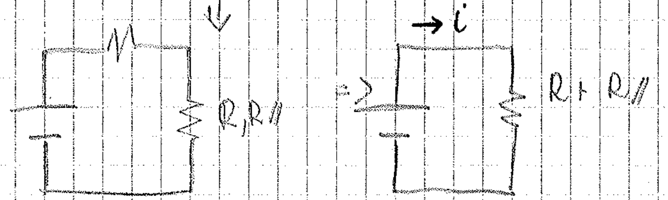
① $i(0^+)$

a) Innanzitutto conosco $v_c(0)$ xké è continua, quindi per $t \to 0^-$, il c.to a dx è inerte (il condensatore è spento), e $v_c = 0$, quindi $v_c(0^+) = v_c(0^-) = v_c(0)$

b) Ora, costruisco il c.to esattamente nell'istante $t = 0^+$

Condensatore è un cortocircuito xké $v_c(0^+) = 0$!

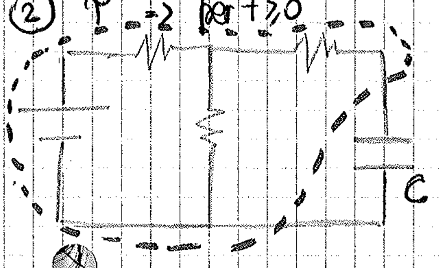




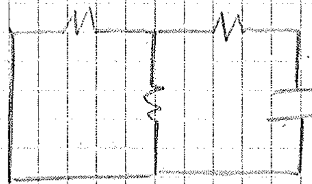
$$i(0^+) = \frac{E_0}{R + \frac{R}{2}} = \frac{2E_0}{3R}$$

$\frac{R}{2}$ → R //

② τ → per $t \geq 0$



⇒ R_T

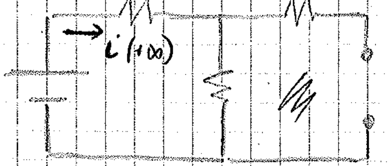


$$R_T = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\tau = \frac{3RC}{2}$$

③ $i(+\infty)$

Sul cond, x $t \to +\infty$, v_c = costante e $i_c = C \frac{dv_c}{dt} = 0$, e il condensatore diventa un c.to aperto

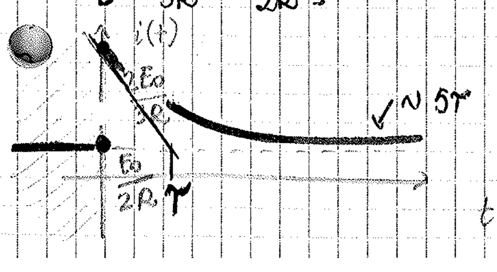


questa parte è inerte xké $i = 0$

Quindi, $i(+\infty) = \frac{E_0}{2R}$ ⇒ OHM

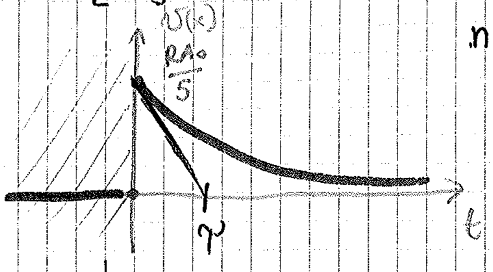
2R → serie

$$i(t) = \left[\frac{2E_0}{3R} - \frac{E_0}{2R} \right] e^{-\frac{2t}{3RC}} + \frac{E_0}{2R}$$



τ ⇒ dove interseca l'asintoto!

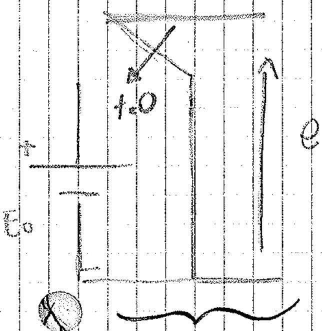
$$v_x(t) = \left[\frac{RA_0}{5} - 0\right] e^{-\frac{t\,5R}{3L}} + 0$$

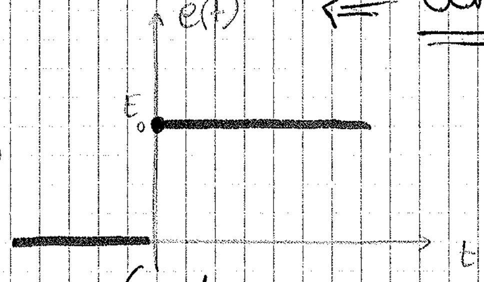


in $t=0^-$, dal c.to vedo che la parte dx è inerte, quindi $v_x = 0$!

discontinuo!

COMPLETAMENTI





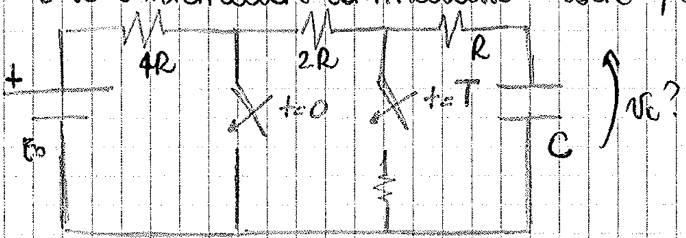
l'interruttore commuta in $t=0$

grafico a gradino

$e(t)$

posso quindi interpretarlo come un gen. costante e usarlo x i calcoli differenziali

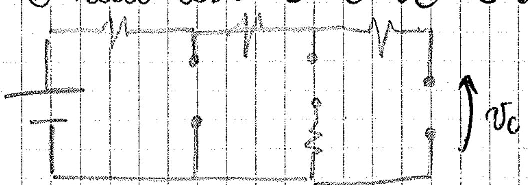
E se l'interruttore commutasse + volte, quindi in tempi $\neq$?



a) studio il c.to solo nella prima commutazione ($t=0$) e ignoriamo la seconda commutazione

$$v_C(t) = \left[v_C(0) - v_C(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(+\infty) \quad \text{per } t \geq 0$$

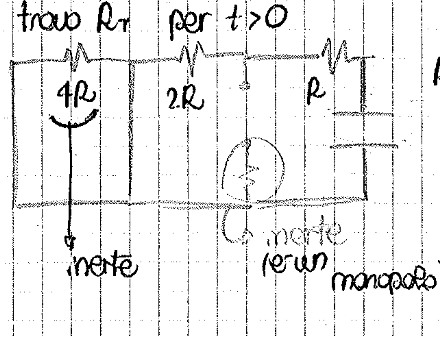
$v_C(0^-)$, l'interruttore è aperto e il circuito è in cond. stazionarie ($v_C(-\infty)$), quindi è tutto costante e $i_C = C\,\frac{dv_C}{dt} = 0$



$v_C = E_0$ (KVL)

tutte le R sono inerti xké non percorse da i

$\tau \Rightarrow$ trovo R_τ per $t>0$

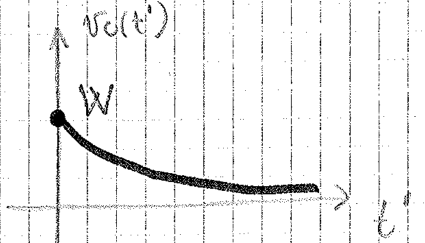


$R_\tau = 3R$

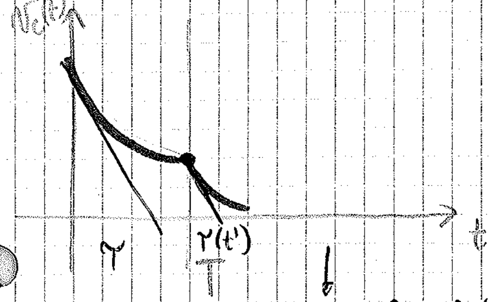
$\tau = 3RC$

$$v_C(t') = [W-0]e^{-\frac{t'}{\tau}} + 0$$

$$= We^{-\frac{3t'}{5CR}} \quad \text{per } t' \geq 0$$



N.B. v_C è continua



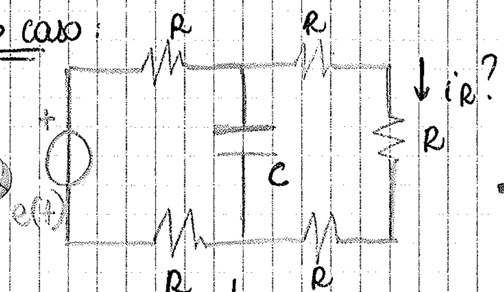
↓

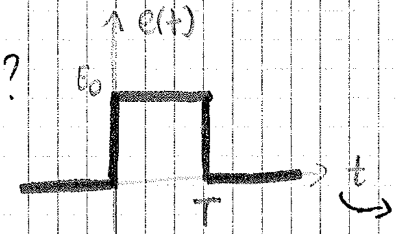
qui $\tau < \tau(t)$, quindi è esponenziale "cade" + velocemente

Quindi => devo risolvere i circuiti in cascata e ogni volta introduco una variabile di tempo diversa.

Se studio una variabile di stato ottengo una funz. continua, altrimenti ho un salto x ogni nuova commutazione

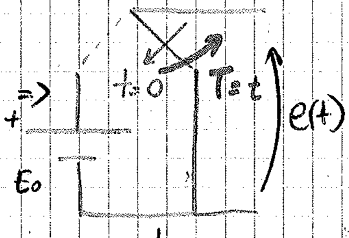
Altro caso:





↳ trasmissione di un bit in un c.to digitale = funzione porta

↓ rispetto le Hp: 1 solo el differenziale e GEN (e) costante a tratti



↓ sono commutazioni successive dello stesso interruttore (DOPPIA COMMUTAZIONE)

a) prima commutazione ($t=0$)

$t \geq 0$

$$i_R(t) = [i_R(0^+) - i_R(+\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_R(+\infty)$$

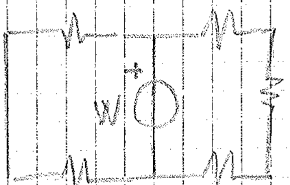
xkè i_R non è continua

trovo $i_R(0^+)$ → uso le variabili di stato

$v_C(0^+) = v_C(0^-) = v_C(0) = 0$ xkè non passa i sul C, quindi è un cortocircuito

$$v_C(T)(t) = \frac{3E_0}{5}\underbrace{\left(1 - e^{-\frac{5T}{6CR}}\right)}_{W \text{ (costante)}}$$

Dopo la 2° commutazione: $t' = 0^+$

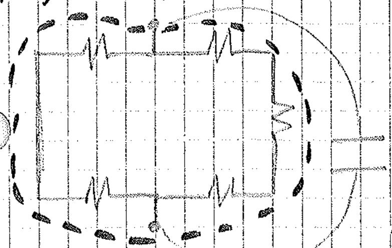


i_R C ha una tensione $= W$ che mantiene

$$i'_R = \frac{W}{3R} \quad (t' = 0^+)$$

resistenze in serie

$\tau(t') \Rightarrow CR_T(t')$



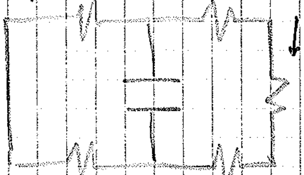
$\Rightarrow R_T$

$$R_T = 3R \,/\!/\, 2R = \frac{6}{5}R$$

$\tau(t) = \tau(t')$

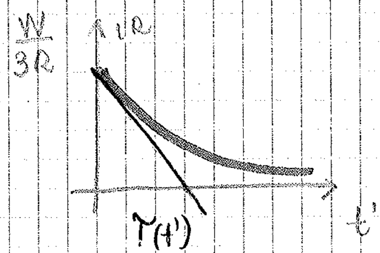
N.B. Non è sempre così

$i_R(+\infty)(t')$ (tutto costante!)

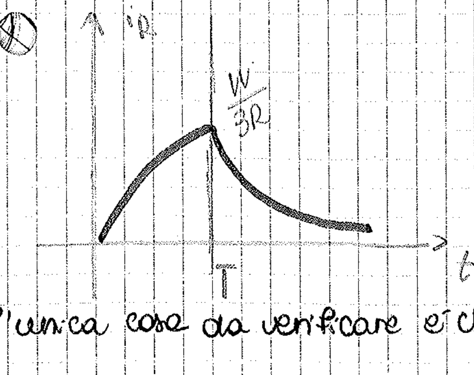


Non ci sono generatori! Quando è un c.to inerte

$$i_R(+\infty)(t') = 0$$



$$i_R(t') = \left[\frac{W}{3R} - 0\right] e^{-\frac{5T}{6RC}} + 0 \quad \text{per } t' \geq 0,\ t \geq T$$



L'unica cosa da verificare è che $i_R(T^-)$ e $i_R(T^+)$ possono essere uguali, ma può esserci anche un salto!

n.s. caso!

In generale un c.to con 2 el. differenziali ho un'eq:

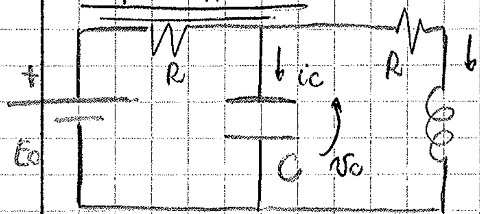
$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\underline{X} + \underline{U}$$

qst vettore dipende dai 2 el. considerati (v_C' e v_C'' ; v_C e i_L ; i_L' e i_L'')

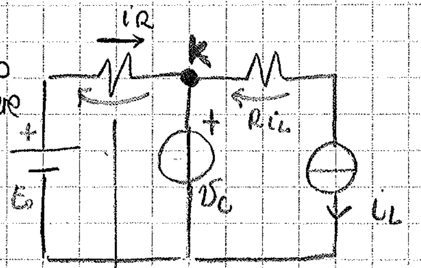
↳ è un vettore costante xké contiene solo delle costanti

la soluz. vale anche x n elementi → ho una matrice $n \times n$

Esempio applicativo



suppongo di conoscere => i_L e v_C



KCL in k → $i_C + i_L = \frac{E_0 - v_C}{R}$
(x esprimere ic)

da KVL = $E_0 - v_C = v_R$

$i_R = \frac{v_R}{R}$

v_L → KVL a dx : $v_C = Ri_L + v_L$

$$\begin{cases} i_C = -\frac{v_C}{R} - i_L + \frac{E_0}{R} \\ v_L = v_C - Ri_L + 0 \end{cases}$$

($\frac{E_0}{R}$) termine costante

$$\begin{cases} C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{R} - i_L + \frac{E_0}{R} \\ L\frac{di_L}{dt} = v_C - Ri_L + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} - \frac{i_L}{C} + \frac{E_0}{RC} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L} - \frac{Ri_L}{L} + 0 \end{cases}$$

Matrice:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{\underline{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{E_0}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{U}}$$

Come risolvo il SISTEMA DI STATO? → Esprimere $v_C(t)$ e $i_L(t)$

La soluzione è del tipo $\underline{X} = \underline{X_0} + \underline{X_p}$

$\underline{X_0}$: soluz. omogenea

$\underline{X_p}$ ↳ dip dal termine noto, ns caso è una costante xké dip da termini costanti

$$\begin{cases} (1)\ \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + U_1 \\ (2)\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + U_2 \end{cases}$$

matrice => scritta come sistema

$$p = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{(\alpha^2-\omega_0^2)(4)}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\underbrace{\alpha^2-\omega_0^2}_{\text{suppongo } >0}} \quad \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$

e quindi il risultato della radice è cmq < 0

⇓

Ho una soluzione SEMPRE < 0

$\underline{\underline{-\alpha \pm a}}$

quindi ho un esponenziale decrescente!

$$\underbrace{\underbrace{x_i(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}}_{\text{soluzione dell'omogenea}} + K_Q}$$

SOLUZIONE GENERALE DELL'EQ DEL 2° ORDINE

Per trovare i K, devo conoscere le condizioni iniziali (vale x tutte le eq. differenziali)

$x_i(0)$ e $\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_0$ => qst sono le condizioni iniziali

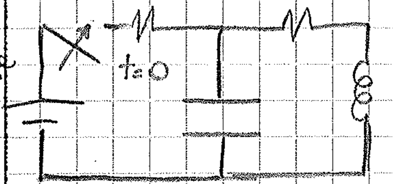
EQ. CARATTERISTICA => $p^2 + \left(\frac{1}{CR} + \frac{R}{L}\right)p + \frac{2}{CL} = 0$

dall'esempio

$$p = \frac{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{R}{L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{CR} + \frac{R}{L}\right)^2 - \frac{8}{CL}}}{2} = \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$

$v_C(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_Q$

devo sapere le cond. iniziali, quindi $v_C(0)$ che, x la continuità, è $= v_C(0^+) = v_C(0)$



$v_C(0^-)$ => tutto il c.to è inerte!

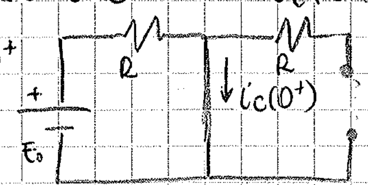
cond. iniziale sulla derivata della variabile

$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{0^+}$ (derivata calcolata in) $= \frac{dv_C}{dt} = \left.\frac{i_C}{C}\right|_{0^+}$ => v_C in 0^+ è $= 0$ e i_L è 0! Infatti $C \to |$ e $L \to$!

→ xké in 0^- è $= 0$!

per $t < 0$ dal c.to $v_C(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$

$t = 0^+$



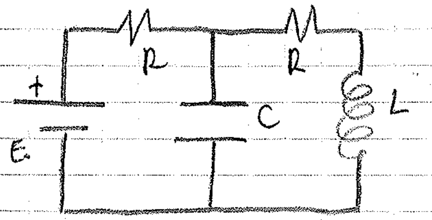
$i_C(0^+) = \frac{E_0}{R}$ (OHM)

→ qui è inerte

SOLUZIONE a REGIME (tutto costante) x trovare K_Q =>

↳ infatti K_Q è una costante, quindi non dipende da t!

SOLUZIONE IN CASO COMPLESSO (quello stesso esercizio)



$E_0 = 5V$
$R = 1\Omega$
$C = 1F$
$L = 1H$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \begin{cases} \frac{-2+2i}{2} = -1+i \\ \frac{-2-2i}{2} = -1-i \end{cases}$$

In generale $p_1 = \alpha + i\beta$ se caso complesso, α: 0 (ns caso)
$p_2 = \alpha - i\beta$
sono una coppia di COMPLESSI CONIUGATI

tutto ciò vale in generale

$K_2 = -\frac{5}{2i}\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$ moltiplico $\frac{\times i}{\times i}$ => $\frac{5i}{4} - \frac{5}{4}$

$K_2 = -\frac{5i}{4} - \frac{5}{4}$

sono anch'essi COMPLESSI CONIUGATI

$K_1 = \eta + i\theta$
$K_2 = \eta - i\theta$

$$V_C(t) = (\eta + i\theta)e^{(\alpha+i\beta)t} + (\eta - i\theta)e^{(\alpha-i\beta)t} + K_Q \rightarrow \frac{E_0}{2}$$

N.B. $\eta + i\theta$ = forma cartesiana
$\underset{\text{modulo}}{M} e^{i\varphi}$ = forma esponenziale (polare)
N° COMPLESSO

Il coniugato ha stesso modulo e φ diventa $-\varphi$

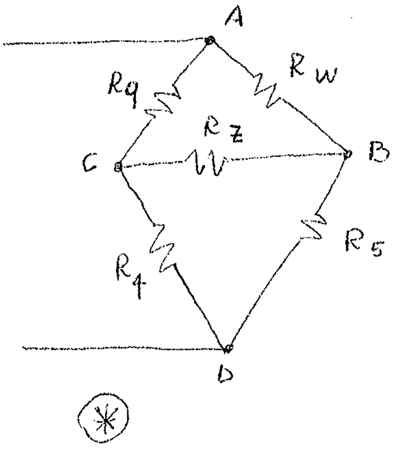
$$V_C(t) = Me^{i\varphi} \cdot e^{(\alpha+i\beta)t} + Me^{-i\varphi} \cdot e^{(\alpha-i\beta)t} + K_Q$$
$$= Me^{i\varphi} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} + Me^{-i\varphi} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} + K_Q$$
$$= Me^{\alpha t} \cdot \left(e^{i(\beta t+\varphi)} + e^{-i(\beta t + \varphi)}\right) + K_Q$$ => moltiplico $\frac{\times 2}{\times 2}$

$$= 2Me^{\alpha t}(\cos(\beta t + \varphi)) + K_Q$$

N.B. $\cosh ix = \cos x$

LEZIONE 5

16/10/2013



NO serie

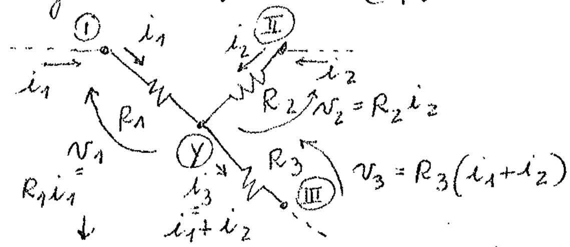
NO parallelo

$\Downarrow$

Come risolvo?

Trasformazione stella - triangolo:

- collegamento a stella (Y)



Lo ritrovo nel mio circuito!

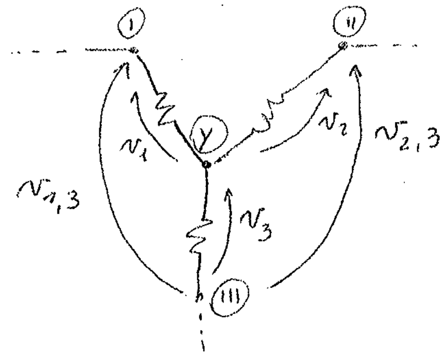
$\rightarrow i_3 = i_1 + i_2$

$\rightarrow v_1 = R_1 i_1$

$\rightarrow v_2 = R_2 i_2$

$\rightarrow v_3 = R_3 i_3 = R_3(i_1+i_2)$

Rifaccio collegamento a stella e posiziono tensioni tra i nodi



Applico KVL: I $\rightarrow$ Y $\rightarrow$ III $\rightarrow$ I

$$v_{1,3} = v_1 + v_3 \longrightarrow v_{1,3} = R_1 i_1 + R_3(i_1+i_2)$$

Applico KVL: II $\rightarrow$ Y $\rightarrow$ III $\rightarrow$ II

$$v_{2,3} = v_2 + v_3 \longrightarrow v_{2,3} = R_2 i_2 + R_3(i_1+i_2)$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{cases} v_{1,3} = i_1(R_1+R_3) + i_2 R_3 \\ v_{2,3} = i_1 R_3 + i_2(R_2+R_3) \end{cases}$$

N.B. $v_b = v_{1,3}$

$v_a = v_{2,3}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$ a STELLA

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \end{bmatrix}$$ a TRIANGOLO

$\Downarrow$

inverto:

$$\begin{bmatrix} v_{1,3} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ STELLA e TRIANGOLO sono equivalenti se

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_b+G_c & -G_c \\ -G_c & G_a+G_c \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{inverto questa:}}$$

$$\frac{1}{det} \begin{bmatrix} G_a+G_c & G_c \\ G_c & G_b+G_c \end{bmatrix} =$$

(Per invertire matrice 2x2 scambio termini su diagonale principale e cambio segno a termini sull'altra diagonale)

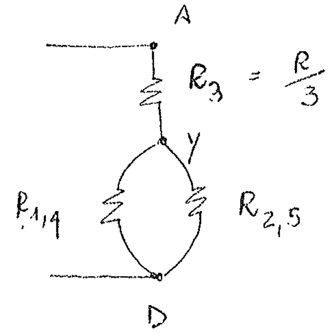
$$= \frac{1}{(G_a+G_c)(G_b+G_c) - G_c^2} \begin{bmatrix} '' & '' \\ '' & '' \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ eguaglio termini delle matrici:

- $R_1+R_3 = \dfrac{G_a+G_c}{(G_a+G_c)(G_b+G_c)-G_c^2} \Rightarrow R_1+R_3 = \dfrac{G_a+G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}$

- $R_3 = \dfrac{G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}$ (vale per posizioni 1,2 e 2,1)

- $R_2+R_3 = \dfrac{G_b+G_c}{G_aG_b+G_bG_c+G_aG_c}$

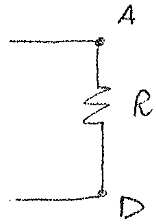


scrivo $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R}{3}$,
supponendo che $R_q = R_E = R_W = R$

$\Rightarrow$ $R_{1,4}$ e $R_{2,5}$ = in // $\longrightarrow$ $\frac{R_{1,4} \cdot R_{2,5}}{R_{1,4} + R_{2,5}} = R_p$

$\Downarrow$

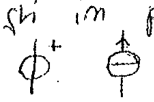
Ho semplificato il circuito



$R_{eq} = R_p + \frac{R}{3}$

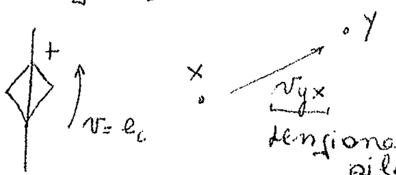
Generatori controllati (pilotati o dipendenti)

$\downarrow$ si oppongono ai generatori INDIPENDENTI visti in precedenza:



- di TENSIONE

(a)



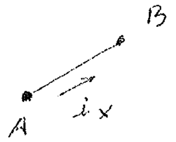
tensione pilotante

$e_c = \alpha v_{yx}$
$\downarrow$ costante adimensionale

$\rightarrow$ (a) pilotato in tensione

equazione di funzionamento: $\boxed{v = e_c}$

(b)



$\boxed{v = e_c'}$

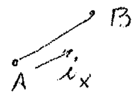
$e_c' = r_M i_x$
$\downarrow$ coefficiente costante // $\rightarrow$ non è + adimensionato, si misura in Ω

$\rightarrow$ (b) pilotato in corrente

- di CORRENTE

(a)

$a_c' = \beta i_x$

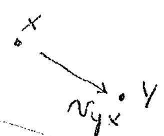


$\rightarrow$ (a) pilotato in corrente

equazione di funzionam.: $\boxed{i = a_c'}$

(b)

$a_c'' = g_M v_{yx}$



$\rightarrow$ (b) pilotato in tensione

$\boxed{i = a_c''}$

coeff. in siemens, S

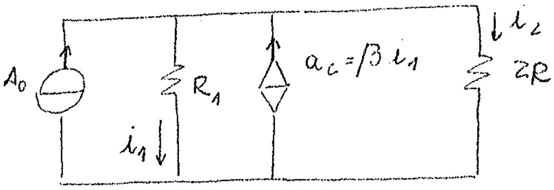
⇒ La 1ª tappa della risoluzione si divide in: → generatore come se fosse indipendente

→ soluzione

2) $e_c = r_M \dfrac{e}{R_1 + R_2 + r_M}$

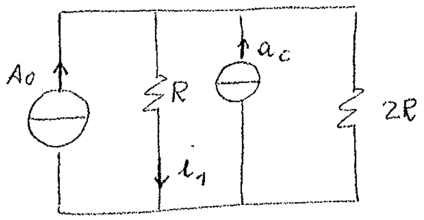
3) $v_2 = ?$ ⇒ $v_2 = R_2 i_x = \dfrac{R_2 e}{R_1 + R_2 + r_M}$ → ho trovato il risultato richiesto

Es:

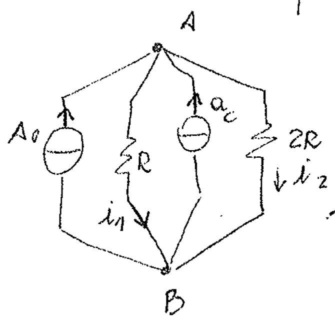


→ $i_2 = ?$

1a) Trovo la quantità pilotante i_1 come se  fosse indipendente



⇒



Applico MILLMAN:

$$v_{AB} = \frac{A_0 + a_c}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}}$$

Ma v_{AB} è anche = a $R i_1$

$$\Rightarrow R i_1 = \frac{A_0 + a_c}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} \rightarrow i_1 = \frac{A_0 + a_c}{\cancel{R} \cdot \frac{3}{2R}} = \frac{2}{3}\left(A_0 + a_c\right)$$

a_c ↓ non è un dato del problema, è $= \beta i_1$

1b) $\frac{3}{2} i_1 = A_0 + \beta i_1$

$$i_1\left(\frac{3}{2} - \beta\right) = A_0$$

$$\boxed{i_1 = \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta}}$$

2) $a_c = \beta \dfrac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta}$

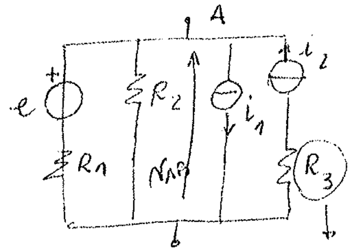
3) Trovo incognita i_2:

KCL su nodo A →

$$A_0 + a_c = i_2 + i_1$$

$$\Rightarrow i_2 = A_0 + \frac{\beta A_0}{\frac{3}{2} - \beta} - \frac{A_0}{\frac{3}{2} - \beta} = \rightarrow$$

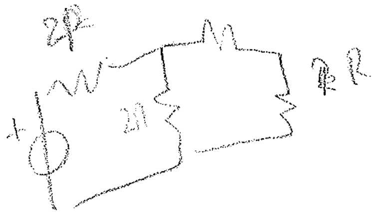
2.17



non comporta variazioni nella formula

MILLMAN:

$$v_{AB} = \frac{\frac{e}{R_1} + i_2 - i_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

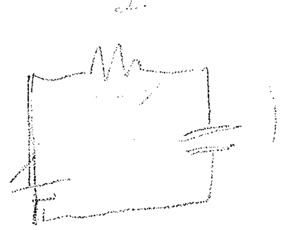


$$v = \frac{\frac{E_0}{2R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{\frac{E_0}{2R}}{\frac{3}{2R}}$$

$$\frac{\frac{E_0}{3} R}{2R} \qquad \frac{E_0}{3}$$

$E_0/6$:)

2



$iR = 2$

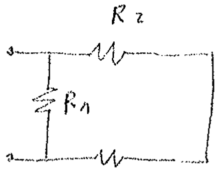
$3,4 \cdot 10^{-3}\, R = 2$

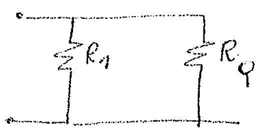
$41 \cdot 10^{-6}\, s = \tau = CR$

$\boxed{0,0697}$

$$R = \frac{2 \cdot 10^3}{3,4}$$

$R = 588\,\Omega$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

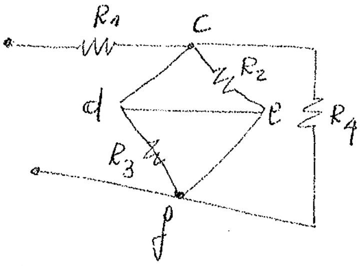
$R_4 = 1714{,}28\ \Omega$

$R_p = 2500 \,//\, 1000 = 714{,}28\ \Omega$

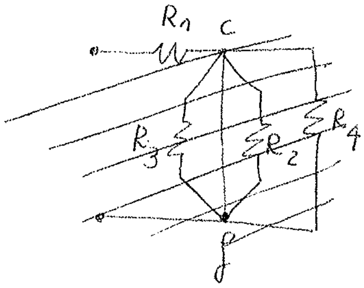
$\Downarrow$

$\boxed{R_{eq}} = R_1 \,//\, 1714{,}28\ \Omega = \boxed{631{,}58\ \Omega}$

2.9

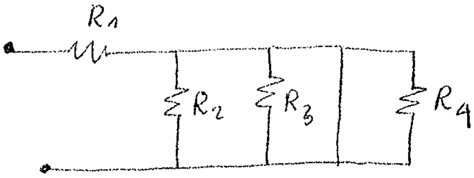


$\Rightarrow$



I tratti cd e ef sono di cortocircuito

$\Downarrow$



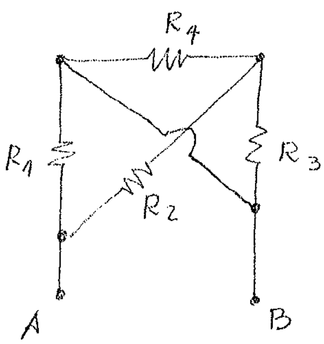
R_2, R_3, R_4 e il corto circuito sono in //:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{0}} = 0$$

N.B. Quando c'è cortocircuito collegato in //, porta la R a $0\ \Omega$

$\boxed{R_{eq} = R_1} \Leftarrow$

2.10



$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 20\ \Omega$

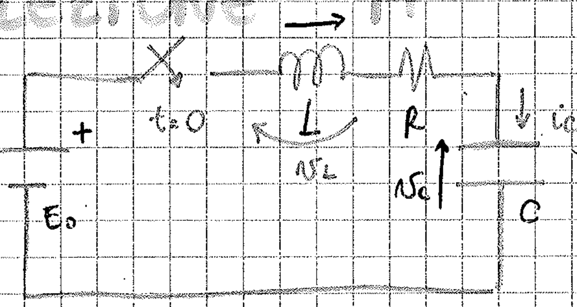
$R_3 = R_4 = 40\ \Omega$

$\rightarrow$ R_3 e R_4 sono in // perchè collegate da un tratto di CORTO CIRCUITO

ELETTROTECNICA (2)

LEZIONE 14

27/11/2013



) complementari

⇐ ESEMPIO

1) trovo il SISTEMA di STATO

$i_C = i_L$ (qst caso)

$v_L \Rightarrow$ KVL $\quad v_L = E_0 - v_C - R i_L$

ora scrivo in funz. delle variabili di stato

$$L \frac{di_L}{dt} = E_0 - v_C - R i_L$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \Rightarrow \overset{①}{\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L} \quad e \quad \overset{②}{\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_C + \frac{E_0}{L} - \frac{R i_L}{L}}$$

2) costruisco la matrice

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{u}_0} \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

3) Costruisco l'eq^{ne} differenziale del secondo ordine (Non è l'unico modo)

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} - T_A \frac{dv_C}{dt} + \Delta_A v_C = Q_0$$) contiene le costanti

Quindi $$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha} \frac{dv_C}{dt} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega_0^2} v_C = Q_0$$

Se tutto è costante v_L diventa 0 e $i_C = 0$

Quindi $W = E_0$ in quanto non passa corrente in R_1 che è inerte.

6) trovo le condizioni iniziali x det k_1 e k_2

$t = 0^-$, l'interruttore è aperto e quindi NO corrente → c.to inerte

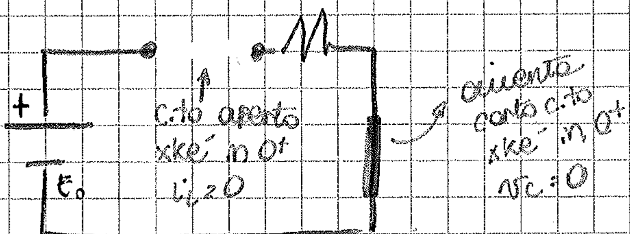
$$v_C(0^-) = 0 \quad e \quad i_L(0^-) = 0$$

$$= v_C(0^+) \qquad\qquad = i_L(0^+)$$

↓ prima condizione iniziale

Ora devo trovarne una seconda, xké ho 2 k da determinare

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{0^+}$$



Dato che:

$$\frac{dv_C}{dt} \cdot C = i_C(0^+)$$

→ $= 0$ xké nel c.to non passa i (è un c.to aperto!)

Quindi $\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{0^+} = 0$ → 2° cond. iniziale

Ora impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} ① \ \underbrace{v_C(0^+)}_{0} = k_1 e^{-\eta_1 (0^+)} + k_2 e^{-\eta_2 (0^+)} + W_0 = E_0 \\ ② \ \frac{dv_C}{dt}(0^+) = -\eta_1 k_1 e^{-\eta_1 (t)} - \eta_2 k_2 e^{-\eta_2 t} + 0 \end{cases}$$

→ derivo in dt

↓ calcolo in 0^+

$$\begin{cases} ② \ \frac{dv_C}{dt}(0^+) = -\eta_1 k_1 - \eta_2 k_2 \Rightarrow 0 = -\eta_1 k_1 - \eta_2 k_2 \\ ① \ 0 = k_1 e^0 + k_2 e^0 + E_0 \end{cases}$$

Quando $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

$p_1 = -\alpha + i\beta$

$p_2 = -\alpha - i\beta$

$$v_c(t) = k_1 e^{(-\alpha + i\beta)t} + k_2 e^{(-\alpha - \beta)t} + \underbrace{W_0 = E_0}_{\text{qst rimane la stessa}}$$

trovo $\underbrace{k_1 \text{ e } k_2}_{\text{qst cambiano}}$, quindi $\underbrace{v_c(0^+) \text{ e } \frac{dv_c}{dt}\Big|_{0^+}}_{\text{rimangono le stex xké non dip da } \beta}$

$$\begin{cases} v_c(0^+) = k_1 e^0 + k_2 e^0 + E_0 & (1) \\ \frac{dv_c(t)}{dt} = (-\alpha + i\beta) k_1 e^{(-\alpha+i\beta)t} + (-\alpha - i\beta) k_2 e^{(-\alpha - i\beta)t} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = k_1 + k_2 + E_0 & (1) \\ 0 = (-\alpha + i\beta) k_1 + (-\alpha - i\beta) k_2 & (2) \end{cases}$$

$(\alpha + i\beta) k_2 = (-\alpha + i\beta)(-k_2 - E_0)$

$K_2 = \frac{+E_0\alpha - i\beta E_0}{2i\beta}$ e $k_1 = -E_0 - \frac{E_0\alpha + i\beta E_0}{2i\beta} = \frac{-E_0\alpha - i\beta E_0}{2i\beta}$

$k_1 = -\frac{E_0(\alpha + i\beta)}{2i\beta}$, $k_2 = \frac{E_0(-\alpha + i\beta)}{-2i\beta}$

$$v_c(t) = -\frac{E_0(\alpha + i\beta)}{2i\beta} e^{(-\alpha + i\beta)t} + \frac{E_0(-\alpha + i\beta)}{-2i\beta} e^{(-\alpha - i\beta)t} + E_0$$

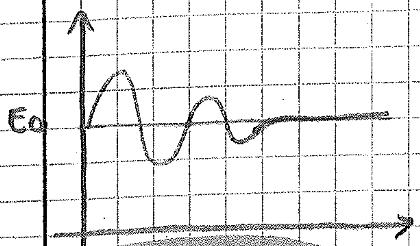
k_1 e k_2 sono complessi coniugati

moltiplico x i

$_1 = -\frac{E_0(i\alpha - \beta)}{-2\beta}$ e $k_2 = \frac{E_0(-i\alpha - \beta)}{+2\beta}$

$k_1 = i\frac{E_0\alpha}{2\beta} - \frac{E_0\beta}{2\beta}$ $\quad k_2 = -i\frac{E_0\alpha}{2\beta} - \frac{E_0\beta}{2\beta}$

GENERALMENTE se p_1 e p_2 sono complesse coniugate, lo sono anche k_1 e k_2 !



=> OSCILLAZIONE SMORZATA

3 Suppongo $\alpha = 0$ (caso particolare)

$p_1 = +i\beta$ e $p_2 = -i\beta$ => vedi prima

$v_c(t) = 2M e^{+0t} \cdot \cos(\beta t + \varphi) + E_0$

$= 2M \cos(\beta t + \varphi) + E_0$ => NON c'è smorzamento! (manca e)

=> OSCILLAZIONE NON SMORZATA

continue all'infinito

ampiezza massima del cos

Altro caso particolare $\alpha = \omega_0$, $\beta = 0$ e K_1 e K_2 avendo β al denominatore tendono all'infinito

$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

$\Downarrow$

RISONANZA

4 Caso in cui $p_1 = p_2$; nel nostro caso

$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$

(da sovrasmorzamento)

} e radice tendono a 0

$\downarrow$ p

$v_c(t) = (\underbrace{H_1}t + \underbrace{H_2})e^{pt} + \underbrace{Q_0}$ => deriva da Analisi I, caso in cui ho soluz. coincidenti

determinate con $v_0(0)$ e $\frac{dv_c}{dt}\Big|_{0^+}$

E_0 è sempre la condizione a regime

so che è uguale a 0

(1) $v_c(0^+) = (H_1(0) + H_2)e^0 + E_0$ => $0 = H_2 + E_0$; $H_2 = -E_0$

(2) $\frac{dv_c}{dt} = p(H_1 t + H_2)e^{pt} + H_1 e^{pt}$ => $0 = pH_2 + H_1$; $H_1 = pE_0$

derivata del prodotto

$$v_c(t) = \underbrace{K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}}_{\text{soluz. omogenea}} + v_p$$ soluzione permanente che dip. dal generatore

quindi è anch'essa oscillante

Come trovo v_p?

$v_p = W_M \cos(\omega t + \varphi)$ è un'ipotesi, ma è troppo lungo da verificare

piuttosto uso EULERO

$$e(t) = E_M \left(\frac{e^{i(\omega t + \theta)} + e^{-i(\omega t + \theta)}}{2} \right)$$

$$v_p = W_M \left(\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right)$$ → se qst fosse soluzione, deve rispettare l'eq. differenziale

devo sostituire

$$\frac{d^2 v_p}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d v_p}{dt} + \frac{v_p}{CL} = u$$

$$v_p = W_M \left(\frac{e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi} + e^{-i\omega t} \cdot e^{-i\varphi}}{2} \right)$$

$$\frac{d v_p}{dt} = \frac{W_M}{2} \left(i\omega\, e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} - i\omega\, e^{-i\varphi} \cdot e^{-i\omega t} \right)$$

$$= i\omega \frac{W_M}{2} \left(e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} - e^{-i\varphi} \cdot e^{-i\omega t} \right)$$

$$\frac{d^2 v_p}{dt^2} = i\omega \frac{W_M}{2} \left(i\omega\, e^{i\varphi} e^{i\omega t} + i\omega\, e^{-i\varphi} \cdot e^{-i\omega t} \right)$$

$$= (i\omega)^2 \frac{W_M}{2} \left(e^{i\varphi} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} \right)$$

Avevamo calcolato $\Rightarrow$ $v(t) = W_M \left(\frac{e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}}{2} \right)$

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} = (i\omega)^2 \frac{W_M}{2}\left(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\right)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = i\omega \frac{W_M}{2}\left(e^{i\varphi}e^{i\omega t} - e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\right)$$

$$u(t) = U_M \cos(\omega t + \psi)$$

Sostituisco:

$$(i\omega)^2 \frac{W_M}{\cancel{2}}\left(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\right) + \frac{R}{L}\, i\omega \frac{W_M}{\cancel{2}}\left(e^{i\varphi}e^{i\omega t} - e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\right)$$

$$+ \frac{1}{LC}\frac{W_M}{\cancel{2}}\left(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\right) = \frac{U_M}{\cancel{2}}\left(e^{i\psi}e^{i\omega t} + e^{-i\psi}e^{-i\omega t}\right)$$

$$W_M e^{i\omega t} e^{i\varphi}\left[(i\omega)^2 + \frac{i\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] + W_M e^{-i\varphi} e^{-i\omega t}\left[(i\omega)^2 - \frac{i\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] = U_M e^{i\psi} e^{i\omega t} + U_M e^{-i\psi} e^{-i\omega t}$$

sono le uniche $f(t)$

$\rightarrow$ è eq vale $\forall t$

$$e^{i\omega t}\Big[\underbrace{W_M e^{i\varphi}\left((i\omega)^2 + \frac{i\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right) - U_M e^{i\psi}}_{=0}\Big] + e^{-i\omega t}\Big[\underbrace{W_M e^{-i\varphi}\left((i\omega)^2 - \frac{i\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right) - U_M e^{-i\psi}}_{=0 \ (*)}\Big] = 0$$

devono essere $= 0$, xké l'eq è una combinazione lineare di funzioni

L, C, ω, R sono noti dal c.to

Non abbiamo W_M e φ

$$W_M e^{i\varphi}\left[(i\omega)^2 + \frac{i\omega R}{L} + \frac{1}{LC}\right] = U_M e^{i\psi}$$

$$W_M e^{i\varphi} = \frac{U_M e^{i\psi}}{(i\omega)^2 + \frac{i\omega R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$\rightsquigarrow$ qst elementi sono tutti noti!

(*) Se risolvo qst ottengo lo stesso risultato (è un'eq. con numeri complessi), la $W_M e^{i\varphi}$ soddisfa anche la seconda eq.

In forma cartesiana $F = F_R + iF_i$

X passare da polare a cartesiana:

$F = Me^{i\varphi} \Rightarrow F_R = M\cos\varphi$

$\qquad\qquad\qquad F_i = M\,\mathrm{sen}\,\varphi$

Passaggio inverso $\Rightarrow F = F_R + iF_i$

$$M = \sqrt{F_R^2 + F_i^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{F_i}{F_R}$$

N.B: Bisogna essere coerenti a gradi o rad.

RIPASSO SUI COMPLESSI

$Z_1 = a + ib \;,\; Z_1 = Me^{i\alpha}$

$Z_2 = c + id \;,\; Z_1 = Re^{i\beta}$

SOMMA $Z_1 + Z_2 = (a+c) + i(b+d)$ => quindi uso la forma cartesiana

$= Me^{i\alpha} + Re^{i\beta}$

anche x la differenza: $= (a-c) + i(b-d)$

PRODOTTO $Z_1 \cdot Z_2 = ac + ida + ibc - db$

$= (ac - db) + i(ad + bc)$

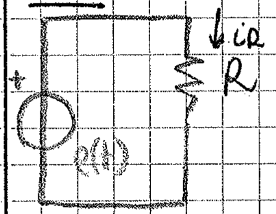
$= MRe^{i(\alpha+\beta)}$ => uso la forma polare

RAPPORTO $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)}$ = razionalizzo $\frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}$ ...

$= \frac{M}{R}e^{i(\alpha-\beta)}$ => uso forma polare

Esempio: 1

RESISTORE

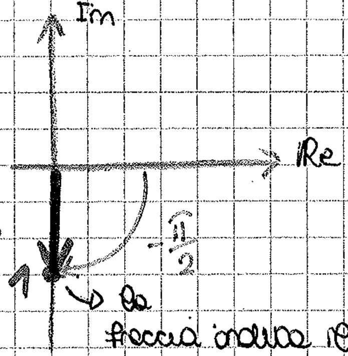


$e(t) = E_M\cos(\omega t + \theta)$

$i_R = \frac{E_M\cos(\omega t + \theta)}{R}$

Usando i fasori $\rightarrow e(t) \rightarrow \hat{E} = E_M e^{i\theta}$

$\hat{V}_L = -L\omega I_M \dfrac{e^{i\beta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$ → solo qst parte e la rappresento



$e^{-i\frac{\pi}{2}} = (0,-1)$ quindi è $-i$

$\hat{V}_L = +i\omega L I_M e^{i\beta}$

Confronto i risultati

$\hat{V}_L = V_M e^{i\delta}$; $i\omega L \underbrace{I_M e^{i\beta}}$

è il fasore $\hat{I}_0$

$\hat{V} = i\omega L \hat{I}_0$ => la legge di funzionamento degli induttori si trasforma in eq algebrica con n° complessi (se uso i fasori)

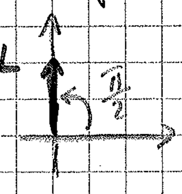
non è una sorpresa, infatti è un'eq. differenziale che diventa algebrica complessa usando i fasori (vedi prima)

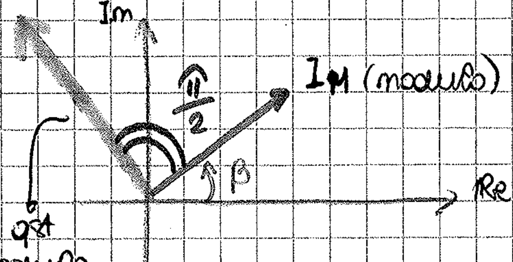
prodotto di n° complessi

$\hat{V} = (i\omega L)(\hat{I}_0) = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot I_M e^{i\beta} = \omega L I_M \cdot e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})}$

$i\omega L$ ha solo parte immaginaria

$\hat{I}_0$ → $I_M e^{i\beta}$

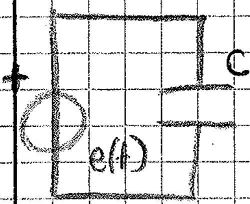




$\hat{V}$ è in anticipo di 90° rispetto a $\hat{I}_0$ (SEMPRE nell'induttore se adopero i fasori)

Esempio 3

CONDENSATORE



$e(t) = E_M \cos(\omega t + \theta)$

↳ $\hat{E} = E_M e^{i\theta}$

KVL: $v_c = e(t)$

$i_c = C\dfrac{dv_c}{dt} = -C E_M \omega \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$

$-C E_M \omega \cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})$