NUMERO: 1258

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Cetani

MATERIA: Analisi Matematica II

Prof. Bacciotti

SERIE NUMERICHE

SUCCESSIONI

Una successione reale è una f. definita in $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$ il cui dominio contiene un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ per qualche intero $n_0 \geq 0$.

a è la successione a_n è l'immagine dell'intero n La successione si indica con $\{a_n\}$

COMPORTAMENTO DI UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

→ $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ CONVERGE l finito

→ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ DIVERGE

→ $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste INDETERMINATA

Nello studio di una successione, il comportamento dei primi termini è ininfluente ⇒ si dice che una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ verifica definitivamente una certa proprietà se esiste un intero $N \geq n_0$ tale che la successione $\{a_n\}_{n \geq N}$ verifica tale proprietà.

TEOREMI SULLE SUCCESSIONI

1) Teorema dell'unicità del limite: il limite di una successione, se esiste, è unico.

2) Teorema di limitatezza: una successione convergente è limitata.

3) Teorema di esistenza del limite delle successioni monotone: sia data una successione definitivamente monotona. Se essa è limitata allora è convergente; se non è limitata allora è divergente ($a +\infty$ se è crescente, $a -\infty$ se è decrescente)

4) Primo teorema del confronto: siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che esistono, finiti o infiniti, i limiti $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$. Se definitivamente vale $a_n \leq b_n$, allora $l \leq m$.

5a) Secondo teorema del confronto - caso finito: siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$. Se definitivamente vale $a_n \leq b_n \leq c_n$ allora $\lim_{n\to\infty} b_n = l$

Esempi: data $a_n = q^n$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ +\infty & q>1 \\ \text{non esiste} & q\le -1 \end{cases}$$

Data $a_n = \sqrt[n]{p}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = p^0 = 1$$

Data $a_n = \sqrt[n]{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

SERIE NUMERICHE "somma di infiniti numeri"

Data la successione $\{a_k\}_{k\ge 0}$ si costruisce la SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI O DELLE RIDOTTE $\{s_n\}_{n\ge 0}$ nel seguente modo:

$s_0 = a_0 \qquad s_1 = a_0 + a_1 \qquad s_2 = a_0 + a_1 + a_2$

in generale

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$$ successione delle ridotte

Si nota che $s_n = s_{n-1} + a_n$

formalmente si ha:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è la SERIE NUMERICA $\quad$ a_k è il TERMINE GENERALE della serie.

COMPORTAMENTO delle SERIE NUMERICHE

Data la successione $\{a_k\}_{k\ge 0}$ e posto $\sum_{k=0}^{n} a_k = s_n$ si considera il $\lim_{n\to\infty} s_n$

(1) Se il limite esiste (finito o infinito), il suo valore s viene detto SOMMA DELLA SERIE e si scrive:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Se $q>1$ $\quad s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = +\infty$

la serie per $q>1$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ diverge a $+\infty$.

Per $q \le -1$ il $\lim_{n\to\infty} s_n$ non esiste e la serie è pertanto indeterminata.

PROPRIETÀ: Il comportamento di una serie non cambia se si aggiunge oppure modifica oppure elimina un numero finito di termini.

ATTENZIONE: Il valore della serie, invece può benissimo cambiare!

Esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Esempi di SERIE TELESCOPICHE:

Data la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ $\qquad$ SERIE DI MENGOLI

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} \qquad s_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ $\quad$ la serie converge e la somma vale 1.

Data la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k$$

$$s_1 = \log 2 \qquad s_2 = \cancel{\log 2} + \log 3 - \cancel{\log 2} \qquad s_n = \log(n+1)$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$ $\quad$ la serie diverge positivamente

PROPRIETÀ: Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una SERIE CONVERGENTE, allora $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Quindi CONDIZIONE NECESSARIA $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ per $\to$ SERIE CONVERGENTE ma NON SUFFICIENTE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO Date 2 serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

a termini positivi, se le successioni $\{a_k\}_{k\geq 0}$ e $\{b_k\}_{k\geq 0}$ sono asintotiche per $k \to \infty$, allora il comportamento delle 2 serie coincide.

- Dire che le successioni $\{a_k\}_{k\geq 0}$ e $\{b_k\}_{k\geq 0}$ sono asintotiche per $k\to\infty$ vuol dire

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

Esempio Data la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{k+3}{2k^2+5}}_{a_k}$ la posso confrontare con la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{b_k}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+3}{2k^2+5}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+3k}{2k^2+5} = \frac{1}{2}$$ pertanto sono asintotiche

ed essendo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergente per il criterio del confronto asintotico

anche $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{2k^2+5}$ diverge positivamente.

CRITERIO DEL RAPPORTO Sia data la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ con $a_k > 0$, $\forall k > 0$

Si supponga che esista, finito o infinito, il limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

Allora se $l < 1$ la serie converge

se $l > 1$ la serie diverge

Se $l = 1$ nulla posso sapere

Esempio Data la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ $\quad a_k = \frac{k}{3^k}$ $\quad a_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k(k+1)}{k\,3^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\,\frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1$$

la serie converge per il criterio del rapporto

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNATO

Sono serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \quad \text{con } b_k > 0, \ \forall k \geq 0$$

<u>CRITERIO DI LEIBNIZ</u> Data una serie a termini di segno alterno $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ se valgono le seguenti condizioni:

① $\lim_{k \to \infty} b_k = 0$

② la successione $\{b_k\}_{k \geq 0}$ è <u>monotona decrescente</u> $b_k \geq b_{k+1}$

<u>allora</u> la <u>serie è convergente</u>.

Detta S la sua somma si ha: $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$

<u>Esempio</u> Data la <u>SERIE ARMONICA GENERALIZZATA</u> a segni alterni $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 0$.

$\lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$

Inoltre $\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{(k+1)^\alpha} \Rightarrow$ monotona decrescente

$\Rightarrow$ allora per il criterio di Leibniz la serie converge.

Per studiare le serie a termini di segno arbitrario, è utile introdurre il concetto di <u>convergenza assoluta</u>:

<u>DEFINIZIONE</u>: Si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ <u>CONVERGE ASSOLUTAMENTE</u> se converge la serie a termini positivi $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

<u>CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA</u>: se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora essa converge e si ha: $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

<u>IDENTITÀ</u> $\cos \pi n = (-1)^n$

Il concetto di convergenza puntuale non è, in molti casi, sufficiente per garantire che certe proprietà soddisfatte dalle singole funzioni f_n che compongono la successione possano trasferirsi alla funzione limite f.
La continuità, la derivabilità e l'integrabilità sono alcune di queste proprietà a cui bisogna far attenzione.

CONVERGENZA PUNTUALE | Riformulazione con definizione di limite

Si dice che $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ converge puntualmente su A se esiste
$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ finito $\forall x \in A$. Dove $f(x)$ è il limite puntuale della successione stessa.

Ovvero (riformulando): $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ converge puntualmente su A
se per $\forall x\in A$ e per ogni $\varepsilon>0$ $\exists\, \bar{n}$ | $\forall n\geq n_0$, $n>\bar{n} \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

In generale $\bar{n}$ dipende da ε e da x, ossia $\bar{n}=\bar{n}(\varepsilon,x)$. Ovvero l'indice $\bar{n}$ a partire dal quale i valori $f_n(x)$ approssimano $f(x)$ a meno di ε può variare da punto a punto.

CONVERGENZA UNIFORME | La successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge uniformemente in A alla funzione limite f se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

Ossia per ogni $\varepsilon>0$ $\exists\, \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon)$ tale che $\forall n\geq n_0$, $n>\bar{n} \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in A$.

Cioè la convergenza è uniforme quando l'indice $\bar{n}$ può essere scelto indipendente da x.

Si scrive $f_n \to f$ uniformemente in A.

NORMA INFINITO Si introduce la notazione

$$\|g\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |g(x)|$$

dove $g: A\to\mathbb{R}$ denota una funzione limitata su A. Tale quantità è detta norma infinito di g su A.

La condizione di convergenza uniforme può essere scritta:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0$$

PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI UNIFORMEMENTE CONVERGENTI

TEOREMA Sia $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ una successione di funzioni continue su un intervallo I della retta reale, che convergono uniformemente ad una funzione f su I $\Rightarrow$ Allora f è continua su I.

Dimostrazione: Ricordo la tesi:

$$\text{Fissato } x_0 \in I, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Per ipotesi di convergenza uniforme si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ | \ n \geq n_0, \ n \geq \bar{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Per ipotesi di continuità di $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ si ha:

$$\text{Fissato } x_0 \in I, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \Rightarrow \text{disuguaglianza triangolare}$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\varepsilon} \leq 3\varepsilon$$

Risulta la tesi: $|f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon$ purché $|x - x_0| < \delta$

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

TEOREMA
- Sia $I = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato
- Sia $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ una successione di funzioni integrabili su I e tali che $f_n \to f$ uniformemente in I.

Allora $\to$ f è integrabile su I e si ha:

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{per } n \to \infty$$

ovvero

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

il che mostra che la proprietà di convergenza uniforme permette lo scambio tra le operazioni di limite e di integrazione.

DEFINIZIONE Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge assolutamente in A se in ogni $x \in A$ converge la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} |f_k(x)|$.

DEFINIZIONE Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente alla funzione somma S in A se la successione delle ridotte $\{S_n\}_{n \geq k_0}$ converge uniformemente a S in A.

CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE (non vale il viceversa)

CONVERGENZA UNIFORME $\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE

Esempio: Data la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ $\quad f_k = x^k$

$$\begin{cases} |x|<1 & S_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{1-x} = S(x) \\ x=1 & S_n(x) = n+1 \quad \quad " = +\infty \\ x>1 & S_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \quad " = +\infty \end{cases}$$

converge puntualmente $A=(-1;1)$ $\forall x \in A$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \quad \forall x \in A \rightarrow S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x} = S(x)$$

Converge assolutamente in A

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{-x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} < \varepsilon$$

$|x| \leq a$

$1-x \geq 1-a$ $\rightarrow$ prendo $\dfrac{a^{n+1}}{1-a}$ successione maggiorante

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(x) - S(x)\|_{\infty, A} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$$

la serie converge uniformemente a $S(x)$ in A.

TEOREMA Se $\{f_k\}_{k \geq k_0}$ una successione di funzioni continue su intervallo I della retta reale tali che la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a una funzione S su I. Allora S è continua su I.

TEOREMA - INTEGRAZIONE PER SERIE Sia $I=[a,b]$ un intervallo compatto. Sia $\{f_k\}_{k\geq k_0}$ una successione di funzioni integrabili su I e tali che la serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a $S(x)$ su I.

Allora S è integrabile su I $\quad \displaystyle\int_a^b \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$

Pertanto per il criterio di Weierstrass la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^4 x}{k\sqrt{k}}$ converge assolutamente e uniformemente su $\mathbb{R}$. È dunque anche puntualmente.

SERIE DI POTENZE

Le serie di potenze sono un caso (particolare) notevole di serie di funzioni, in cui ciascuna funzione f_k è un particolare polinomio.

DEFINIZIONE Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\{a_k\}_{k\geq 0}$ una successione numerica.

Si chiama SERIE DI POTENZE una serie della forma

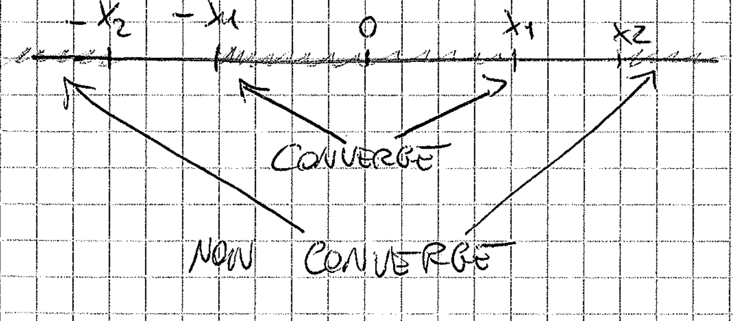
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Il punto x_0 è detto centro della serie e i numeri $\{a_k\}_{k\geq 0}$ coefficienti della serie.

La serie converge nel suo centro qualunque siano i coefficienti.

PROPOSIZIONE Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{x}^k$, con $\bar{x} \neq 0$, ha i termini limitati, in particolare se converge, allora la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge assolutamente per ogni x tale che $|x| < |\bar{x}|$ (*) dimostrazione

COROLLARIO Se una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge in un punto $x_1 \neq 0$, allora converge assolutamente nell'intervallo aperto $(-|x_1|, |x_1|)$; se non converge in un punto $x_2 \neq 0$, allora non converge in nessun punto delle semirette $(|x_2|, +\infty)$ e $(-\infty, -|x_2|)$.



L'insieme di convergenza di una serie di potenze è un intervallo simmetrico, esclusi eventualmente gli estremi, rispetto al suo centro.

TEOREMA DI ABEL Si abbia $\rho > 0$ finito. Se la serie converge in $x = \rho$, allora la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[a, \rho] \subset (-\rho, \rho]$. Analogo risultato vale se la serie converge in $x = -\rho$.

METODI PER IL CALCOLO DI ρ

TEOREMA - CRITERIO DEL RAPPORTO Data la serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

con $a_k \neq 0$ per ogni $k \geq 0$, se esiste il limite $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$

allora il raggio di convergenza ρ è dato da:

$$\rho \begin{cases} \text{se } \ell = 0 & \rho = +\infty \\ \text{se } \ell = +\infty & \rho = 0 \\ \text{se } \ell > 0 & \rho = \frac{1}{\ell} \end{cases}$$

Dimostrazione: Si suppone per semplicità $x_0 = 0$ e sia $x \neq 0$.

Si applica il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |x| = \ell |x|$$

- Se $\ell = +\infty$ ovvero $\ell|x| > 1$ la serie non converge per ogni $x \neq 0$ ossia $\rho = 0$.
- Se $\ell = 0$ ovvero $\ell|x| < 1$ la serie converge per ogni x ossia $\rho = +\infty$
- Se ℓ è finito e non nullo, la serie converge per ogni $x \mid \ell|x| < 1$ ovvero $|x| < \frac{1}{\ell}$ e non converge per $|x| > \frac{1}{\ell}$ pertanto $\rho = \frac{1}{\ell}$.

TEOREMA - CRITERIO DELLA RADICE Data la serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

se esiste il limite $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell$

allora ρ è $\begin{cases} 0 \text{ se } \ell = +\infty \\ +\infty \text{ se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} \text{ se } \ell > 0 \end{cases}$

OPERAZIONI ALGEBRICHE SULLE SERIE DI POTENZE

TEOREMA Date due serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, rispettivamente con raggio di convergenza ρ_1 e ρ_2; la serie somma $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)x^k$ ha raggio di convergenza ρ soddisfacente $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$.

Se $\rho_1 \neq \rho_2$ allora necessariamente $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$

Nel caso $\rho_1 = \rho_2$ il raggio ρ può essere strettamente maggiore di entrambi a causa di cancellazioni nei termini della somma.

Esempio Date le serie

$$① \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{4^k-2^k} x^k \qquad ② \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{4^k+2^k} x^k$$

la serie ① $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k+1}{4^k-2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k(1+\frac{1}{2^k})}{2^k(2^k-1)} = 0 \qquad \frac{2^k+1}{4^k-2^k} \sim \frac{1}{2^k}$

applico criterio rapporto $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\cdot 2^k} \cdot 2^k = \frac{1}{2} \qquad \rho_1 = 2$

Per la serie ② il procedimento è analogo e si ricava $\rho_2 = 2$.

la serie somma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4^k-1}$ ha però raggio $\rho = 4$

TEOREMA Date due serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, rispettivamente con raggio di convergenza ρ_1 e ρ_2, la serie prodotto

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)$, con $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}$ ha raggio di convergenza ρ soddisfacente $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$

PRODOTTO ALLA CAUCHY

Il prodotto di due serie viene definito in modo che valga la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto. Si ha pertanto:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)\cdot(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2$$

	b_0	b_1	b_2	$\dots$
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	$\dots$
a_1	a_1b_0	a_1b_1		
a_2	a_2b_0			
$\vdots$	$\dots$			

Ogni termine c_k è la somma degli elementi che si trovano sulla k-esima antidiagonale della matrice.

Esempi: Data la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $x \in (-1,1)$

Derivando termine a termine (per $x \in (-1,1)$) si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Sostituendo $-x$ a x nella serie di potenze e integrando termine a termine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad x \in (-1,1)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \log(1+x)$$

Sostituendo invece $-x^2$ a x nella serie di potenze e integrando termine a termine si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in (-1,1)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan x$$

PROPOSIZIONE: Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$. I coefficienti della serie si esprimono mediante le derivate della funzione somma $S(x)$ come:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} S^{(k)}(x_0), \quad \forall k \geq 0.}$$

Dim: $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

$$S''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$$

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_k (x-x_0)^{k-m}$$

Se $x = x_0$

$S(x_0) \dots$

$S'(x_0) \dots$

$S''(x_0) \dots$

$\vdots$

$$S^{(k)}(x_0) = k!\, a_k \Rightarrow a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad x \in (-1,1)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

<u>Esempio</u> Scrivere lo sviluppo in serie in $x_0=0$ e in $x_0=1$ di $\ln(3+4x)$

<u>in $x_0=0$</u> $\rightarrow$ $x-x_0=x$ sviluppo di McLaurin. NB: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

$$\ln(3+4x) = \ln\left[3\left(1+\frac{4}{3}x\right)\right] = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{4}{3}x\right) = \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{4}{3}x\right)^k$$

<u>in $x_0=1$</u> $\rightarrow$ $x-x_0 = x-1 = t \Rightarrow x = t+1$

$$\ln(3+4x) = \ln\left[3+4(t+1)\right] = \ln\left[3+4t+4\right] = \ln(7+4t) = \ln\left[7\left(1+\frac{4}{7}t\right)\right] =$$

$$= \ln 7 + \ln\left(1+\frac{4}{7}t\right) = \ln 7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{4}{7}t\right)^k = \ln 7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left[\frac{4}{7}(x-1)\right]^k$$

Un'armonica elementare può essere anche rappresentata come

$$A\,\mathrm{sen}(\omega x+\phi) = \alpha\cos\omega x + \beta\,\mathrm{sen}\,\omega x \quad \text{dove} \quad \alpha = A\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad \beta = A\cos\phi$$

F. INVERSE

$$A=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad \phi = \arctan\frac{\alpha}{\beta}$$

Ci si limita allo studio di funzioni periodiche di $T=2\pi$ in quanto i risultati che si ottengono si possono applicare a funzioni di periodo arbitrario con un semplice cambio di variabile.

La sovrapposizione di armoniche elementari con frequenze multiple di una fissata frequenza fondamentale (posta per semplicità $f=\frac{1}{2\pi}$) dà luogo ai polinomi trigonometrici.

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ È detto <u>POLINOMIO TRIGONOMETRICO</u> di ordine (o grado) n, ogni combinazione lineare finita nella forma:

$$P(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\,\mathrm{sen}\,x + \dots + a_n\cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx)$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono <u>costanti reali</u> e <u>uno almeno tra a_n e b_n è non nullo</u>.

Rappresentando le armoniche elementari in termini di ampiezza e fase, un polinomio trigonometrico può anche scriversi nella forma:

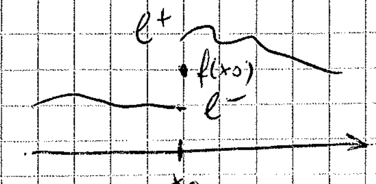
$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,\mathrm{sen}(kx+\varphi_k)$$

COEFFICIENTI E SERIE DI FOURIER

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ Una funzione f periodica di periodo 2π si dice <u>CONTINUA A TRATTI</u> se è continua su $[0,2\pi]$ tranne al più un numero finito di punti. <u>In tali punti si ha una discontinuità eliminabile o di prima specie</u>, vale a dire esistono finiti i limiti destro e sinistro.

Inoltre f si dice <u>REGOLARIZZATA</u> se, in ogni punto di discontinuità x_0, risulta

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)$$



dove $f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

L'insieme di funzioni $F = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \dots, \cos kx, \operatorname{sen} kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ costituisce un sistema ortogonale in $\tilde{C}_{2\pi}$ → il cui sistema ortonormale associato è:

$$\hat{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

Ricordando che:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 kx \, dx = \pi \qquad \forall k \geq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \operatorname{sen} lx \, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \cos lx \, dx = 0 \qquad \forall k, l \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx \, dx = 0 \qquad \forall k, l \geq 0, \; k \neq l$$

Il sistema ortonormale trovato per $\tilde{C}_{2\pi}$ ha lo stesso ruolo della base normale canonica $\{e_k\}$ in $\mathbb{R}^n$: ogni elemento dello spazio si scrive in modo unico come combinazione lineare del sistema, con l'importante differenza che tale combinazione lineare è in forma di serie infinita.

Le serie di Fourier rappresentano il modo in cui le funzioni di $\tilde{C}_{2\pi}$ si sviluppano in termini del sistema ortonormale $\hat{F}$.

DEFINIZIONE: Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$. È detto PROIEZIONE ORTOGONALE di f su P_n l'elemento $S_{n,f}$ di P_n così definito

$$\boxed{S_{n,f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)}$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx, \quad k \geq 1$$

DEFINIZIONE Si chiama <u>SERIE DI FOURIER</u> di $f \in \check{C}_{2\pi}$ la serie di funzioni:

$$\boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)}$$

dove a_0, a_k, b_k $(k \geq 1)$ sono numeri reali detti coefficienti di Fourier di f definiti (come già visto)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx$$

Si può scrivere

$$\boxed{f \simeq a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)}$$

Si usa il simbolo $f = \ldots$ <u>solo se</u> la serie converge puntualmente a f

<u>Esempio</u> Scrivere la serie di Fourier per l'<u>ONDA QUADRA</u> $f(x) \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0, \pm\pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$

Si ricorda che $\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -1\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1\, dx = \frac{-x|_{-\pi}^{0}}{2\pi} + \frac{x|_0^{\pi}}{2\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -1 \cos kx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cos kx\, dx = \frac{-\frac{1}{k} \operatorname{sen} kx|_{-\pi}^{0}}{\pi} + \frac{\frac{1}{k} \operatorname{sen} kx|_0^{\pi}}{\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -1 \operatorname{sen} kx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \operatorname{sen} kx\, dx = \frac{\cos kx|_{-\pi}^{0}}{\pi} - \frac{\cos kx|_0^{\pi}}{\pi} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k} + \frac{2}{\pi k} = \frac{4}{\pi k} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k = \text{pari} \end{cases}$$

Scrivendo ogni k dispari come $k = 2m+1$

la serie di Fourier di f risulta:

$$f \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \operatorname{sen} kx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2m+1)} \operatorname{sen}(2m+1)x$$

se f è di classe C^1 su $\mathbb{R}$, tale rappresentazione vale anche sotto ipotesi più deboli sulla derivabilità di f (ad es. se f è derivabile di classe C^1 a tratti).

CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER

DEFINIZIONE Siano f e f_k, $k \geq 0$ funzioni definite e di quadrato integrabile su un intervallo compatto $[a,b]$. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ CONVERGE IN NORMA QUADRATICA alla funzione f nell'intervallo I se:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_2^2 = 0$$

Dalla definizione si vede che CONV. QUADRATICA non implica conv. uniforme, bensì CONV. UNIFORME implica CONV. QUADRATICA.

Dim: $$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\sup_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \right)^2 dx \leq$$
$$\leq (b-a) \left\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_{\infty,[a,b]}^2$$

Se l'ultima espressione è infinitesima per $n\to\infty$, anche la prima lo è.

TEOREMA Se $f \in \tilde{C}_{2\pi}$; allora la serie di Fourier di f converge a f in norma quadratica, ossia:

$$\lim_{n\to+\infty} \| f - S_n f \|_2 = 0$$

COROLLARIO Se $f \in \tilde{C}_{2\pi}$, vale L'IDENTITÀ DI PARSEVAL → serve a calcolare la somma di serie numeriche

$$\boxed{\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}$$

→ Significato: somma delle energie delle onde della k-esima armonica

↓

COROLLARIO - LEMMA DI RIEMANN Se $f \in \tilde{C}_{2\pi}$, allora:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Il risultato vale anche se la funzione di partenza non è regolarizzata: in tal caso la serie di Fourier, in un punto di discontinuità x_0, converge al valore regolarizzato $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

di f in x_0 e non a $f(x_0)$.

DEFINIZIONE Si dice che una funzione continua a tratti ammette pseudo-derivata sinistra oppure destra in $x_0 \in \mathbb{R}$ se esistono finiti i limiti:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0} \qquad f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$$

Si osservi che se f è continua in x_0, le pseudo-derivate non sono altro che le derivate sinistra e destra.

TEOREMA Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$. Se in $x_0 \in [0, 2\pi]$ esistono la pseudo-derivata sinistra e la pseudo-derivata destra, allora la serie di Fourier di f converge in x_0 al valore (regolarizzato) $f(x_0)$.

CONVERGENZA UNIFORME

DEFINIZIONE Una funzione $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ si dice di classe C^1 a tratti se è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti in $[0, 2\pi]$

TEOREMA Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ di classe C^1 a tratti.
Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su tutto $\mathbb{R}$.

TEOREMA Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ regolare a tratti in $[0, 2\pi]$.
Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni sottointervallo chiuso in cui la funzione è continua.

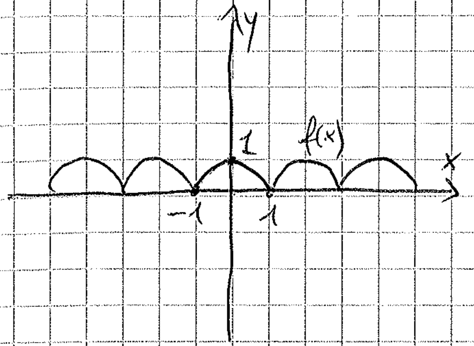
FORMA POLARE O COMPLESSA

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \quad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

$$t = k\omega x$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right) \Rightarrow c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{ik\omega x} + c_{-k} e^{-ik\omega x}\right)$$

Esempio: Scrivere serie di Fourier per la funzione $f(x) = 1 - x^2$ in $I = [-1,1]$ resa periodica di periodo 2.



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2+1 \\ f(-x) = -x^2+1 \end{array}\right] \rightarrow \text{la funzione è pari.}$$

$$-f(-x) = x^2 - 1$$

$$f \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} x + b_k \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{T} x \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,dx \rightarrow \text{essendo pari} \rightarrow \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = 1 \int_0^1 -x^2+1\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + x \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$b_k = 0$ essendo pari

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k \frac{2\pi}{T} x\,dx \Rightarrow \text{essendo pari} \Rightarrow \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos k \frac{2\pi}{T} x\,dx = 2 \int_0^1 (-x^2+1) \cos k\pi x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi} (-x^2+1) + \int \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi} (+2x)\,dx \right] = 2\left[\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi} (-x^2+1) + \frac{2}{k\pi} \int x \operatorname{sen}(k\pi x)\,dx \right] =$$

$$= 2\left[\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k\pi} (-x^2+1) - \frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2} 2x + 2\frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k^3\pi^3} \right]_0^1 = \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} \cdot 2 = \frac{4}{k^2\pi^2} (-1)^{k+1}$$

$$f \approx \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2\pi^2} (-1)^{k+1} \cos(k\pi x) \right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos(k\pi x)}{k^2}$$

La funzione $f(x)$ è di classe C^1 a tratti $\Rightarrow$ si ha convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ si ha anche convergenza puntuale.

In particolare si ha $f(0) = 1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

Pertanto si può ricavare la somma della serie armonica generalizzata a segni alterni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Teorema: Sia $\{y_n\}$ una successione monotona crescente.

Se $\{y_n\}$ è limitata superiormente, allora converge.

Se $\{y_n\}$ non è limitata superiormente, allora diverge positivamente.

SUCCESSIONI FONDAMENTALI

Def: Si dice che la successione $\{y_n\}$ è fondamentale se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che per ogni coppia di indici $n, m > N$ si ha

$$|y_n - y_m| < \varepsilon$$

Teorema: Se la successione $\{y_n\}$ converge, allora è fondamentale.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \begin{cases} 0 & \text{se } |a| < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ \text{indeterminato} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per qualunque } a > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a \leq 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \text{per qualunque } k > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{per qualunque } a \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0 \quad \text{per qualunque } a \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n!} = 0 \quad \text{qualunque } k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

PROPRIETÀ TOPOLOGICHE di $\mathbb{R}^N$

$\mathbb{R}^n \to$ è un insieme di oggetti formati da altri oggetti: $(x_1, \dots, x_n)$ ogni x_i è un numero reale da 1 a n. $\mathbb{R}^n$ ha una struttura formata da vettori in cui si possono considerare le distanze:

ad esempio, si chiami $X = (x_1, \dots, x_n)$ l'insieme composto da n elementi,

Si consideri ora l'insieme $\underline{A}$ sia vuoto.
Dunque $A = \emptyset$ allora $\mathring{A} = \emptyset$ ma dunque risulta $A = \mathring{A}$ e dunque l'insieme vuoto deve essere considerato aperto $\Rightarrow$ e di conseguenza $A^c = \mathbb{R}^n$ deve essere considerato chiuso.
Ma ogni punto di $\mathbb{R}^n$ è ovviamente interno ad $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ deve essere considerato aperto $\Rightarrow$ l'insieme vuoto deve essere considerato chiuso.
Risulta allora che l'insieme vuoto e l'intero spazio $\mathbb{R}^n$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono allo stesso tempo aperti e chiusi.

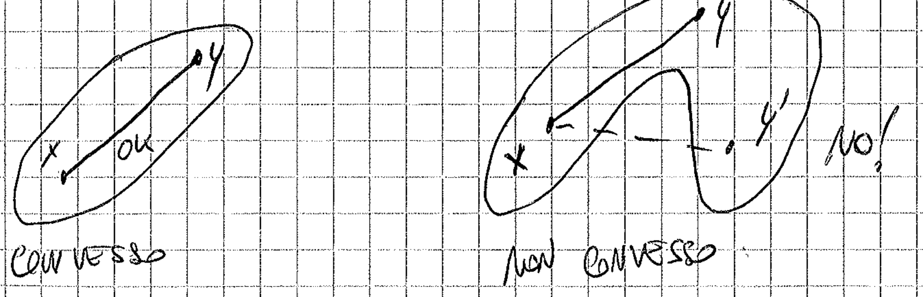
Def: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste un numero $r > 0$ tale che $A \subseteq B(r, 0)$. Dunque

1. Se $n = 1$, A è limitato se e solo se $\exists$ un intervallo $[a, b]$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) che lo contiene.
2. Se $n = 2$, A è limitato se e solo se $\exists$ un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) che lo contiene.
3. Se $n = 3$, A è limitato se e solo se $\exists$ un parallelepipedo che lo contiene.

Def: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice $\boxed{\text{COMPATTO}}$ se è limitato e chiuso.

Def: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ il segmento che unisce x e y è tutto contenuto in A.
↳ linea retta dunque!

Esempio



Dunque si otterremo le successioni di misure di questi plurirettangoli come approssimazioni della misura di A e si utilizzeremo per individuare il numero che mediante un passaggio a limite rappresenterà con esattezza tale misura.
Si considerino dunque le 2 successioni decrescente e crescente:

$$m(R_0), m(R_1), m(R_2), \dots \quad e \quad m(S_0), m(S_1), m(S_2) \dots$$

Risulta sempre per costruzione $\boxed{m(R_j) \geq m(S_i)}$ $\forall i, j$.
Dunque i 2 limiti $\lim_{n \to +\infty} m(R_n) = l_R$ $\quad \lim_{n \to +\infty} m(S_n) = l_S$

esistono e vale $l_R \geq l_S$.

Def: L'insieme A si dice misurabile se è possibile costruire le 2 successioni di plurirettangoli in modo che si ottiene $\boxed{l_R = l_S}$
Se A è misurabile, il valore $l_R = l_S$ sarà chiamato misura o area di A e si indica con $m(A)$.

Oss: Se A è misurabile, la sua misura è indipendente dal modo in cui sono costruite le successioni di plurirettangoli R_n e S_n.

Esempio: Insiemi non misurabili
Si consideri l'insieme del piano $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \text{ e } x, y \in \mathbb{Q}\}$
L'insieme sopracitato comprende un quadrato contenente tutti i numeri da 0 e 1 razionali $\Rightarrow$ è un insieme denso, ma non è possibile coprire tutti i numeri possibili perché esistono i numeri irrazionali $\notin \mathbb{Q}$.
Infatti l'insieme A contiene solo rettangoli degeneri e quindi la successione $\{m(S_n)\}$ essendo costantemente nulla, ha per limite zero.
Invece qualunque plurirettangolo contenente A dovrà contenere il quadrato di lato unitario e dunque $l_R \geq 1$.

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} m(R_n) \geq 1 & \Rightarrow l_R = 1 \\ m(S_n) = 0 & \Rightarrow l_S = 0 \end{array} \Big\} \text{ limiti diversi!} \Rightarrow \text{non misurabile!}$$

Prop: Un sottoinsieme limitato A del piano è misurabile se e solo se la sua frontiera ∂A ha misura uguale a zero.

Oss: $f^+ - f^- = f(x)$; $f^+ + f^- = |f|$

Def: Si dice che f è integrabile nel senso di Riemann su I se f^+ e f^- sono entrambi integrabili nel senso di R. su I e si definisce l'integrale definito:

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx = m(T_{f^+,I}) - m(T_{f^-,I})$$

Th: Ogni funzione $f(x)$ continua o monotona nell'intervallo $I = [a,b]$ è integrabile nel senso di Riemann. In generale vale per le $f(x)$ continue o monotone a tratti su $[a,b]$.

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITO

(1) ADDITIVITÀ RISPETTO AGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$
con f integrabile su I e $a,b,c \in I$ con $a<b<c$

(2) ADDITIVITÀ RISPETTO ALLE FUNZIONI INTEGRANDE

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
con f,g integrabili su I, $a,b \in I$ con $a<b$

(3) OMOGENEITÀ

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$
con f integrabile su I, $a,b \in I$ con $a<b$ e $k \in \mathbb{R}$

(4) MONOTONIA

Se $f(x) \leq g(x)$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ con f e g integrabili su I e $a,b \in I$ con $a<b$.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se è nota una $\forall$ primitiva $F(x)$ di $f(x)$ su I, e se a,b sono 2 numeri qualunque $\in I$ allora:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$
Formula di Torricelli-Barrow

PROPRIETÀ: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

INTEGRALE DOPPIO ESTESO AD UN RETTANGOLO

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $R = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo contenuto nel dominio di f. Si suppone f limitata su R. $\boxed{x_3 = f(x_1, x_2)}$

Caso $f(x_1,x_2) \geq 0$ si ottiene

$$T_{f,R} = \{(x_1,x_2,x_3) : a \leq x_1 \leq b,\ c \leq x_2 \leq d,\ 0 \leq x_3 \leq f(x_1,x_2)\}$$

Se $T_{f,R}$ è misurabile $\Rightarrow$ f si dice integrabile nel senso di Riemann su R:

$$\iint_R f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = m(T_{f,R})$$

Caso $f(x_1,x_2) \leq 0$ si ottiene:

$$\iint_R f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = -\iint_R -f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = -m(T_{f,R})$$

Caso generale per funzione generica $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si considera la parte positiva f^+ e la parte negativa f^-:

$$\iint_R f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = m(T_{f^+,R}) - m(T_{f^-,R})$$

NB: limitatezza o domini di integrazione rettangolare è una restrizione inaccettabile!

INTEGRALE DOPPIO ESTESO AD UN INSIEME MISURABILE

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e sia R un rettangolo che lo contiene. Si consideri ora la seguente funzione:

$$h(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) \in R \setminus A \end{cases}$$

Teorema: $h(x_1,x_2)$ è integrabile su R se e solo se A è misurabile in $\mathbb{R}^2$, in tal caso

$$\iint_R h(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = m(A)$$ [area] perché altezza unitaria

Si consideri ora $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile, sia R un rettangolo contenente A e sia f una funzione il cui dominio contenga A. Si definisce

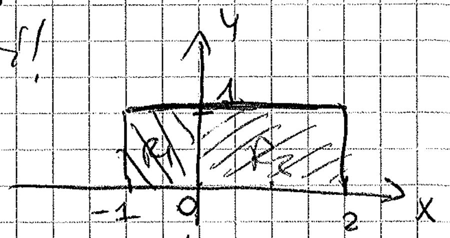
$$\tilde{f}(x_1,x_2) \begin{cases} f(x_1,x_2) & \text{se } (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) \in R \setminus A \end{cases}$$

Def: Si dice che $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è integrabile nel senso di Riemann su A se $\tilde{f}$ è integrabile su R e si definisce l'integrale doppio di f

ESEMPIO $f(x,y)=|x|+y \qquad R=[-1,2]\times[0,1]$

Bisogna suddividere l'integrale in 2 parti!

Ricordando che $|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\ge 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$



$$\Rightarrow \iint_R (|x|+y)\,dx\,dy = \iint_{R_1}(|x|+y)\,dx\,dy + \iint_{R_2}(|x|+y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{R_1}(-x+y)\,dx\,dy + \iint_{R_2}(x+y)\,dx\,dy = \text{ fisso } y \Rightarrow$$

$$= \int_0^1\left(\int_{-1}^0(-x+y)\,dx\right)dy + \int_0^1\int_0^2 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[-\frac{x^2}{2}+yx\right]_{-1}^0 dy + \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_0^2 dy =$$

$$= \int_0^1\left[+\frac{1}{2}+y\right]dy + \int_0^1\left[2+2y\right]dy = \left[\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[2y+y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2+1=4$$

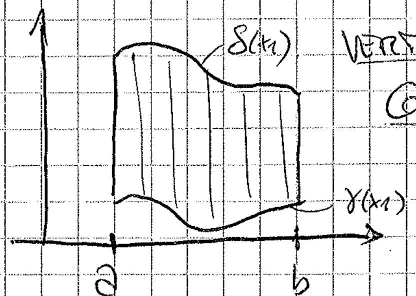
ESEMPIO $\boxed{f(x_1,x_2)=\varphi(x)\cdot\psi(y)} \qquad R=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_R \varphi(x)\cdot\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d \varphi(x)\cdot\psi(y)\,dy\right)dx =$$

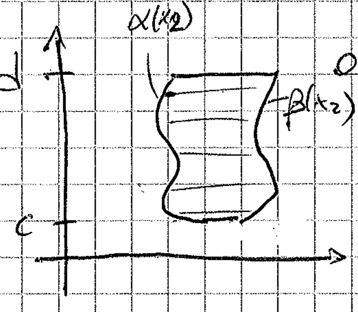
$$= \int_a^b\varphi(x)\cdot\left(\int_c^d\psi(y)\,dy\right)dx = \boxed{\int_a^b\varphi(x)\,dx\cdot\int_c^d\psi(y)\,dy}$$

Ora si procede ad estendere il calcolo degli integrali doppi per domini non rettangolari.

Si definiscono 2 regioni:



VERTICALMENTE CONVESSO



ORIZZONTALMENTE CONVESSO

$A=\{(x_1,x_2): x_1\in[a,b],\ \gamma(x_1)\le x_2\le\delta(x_1)\}$

Se $f(x,y)$ è continua $\Rightarrow F(x_1)=\int_{\gamma(x_1)}^{\delta(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2$ allora $F(x_1)$ è continua

$$\boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_a^b\left(\int_{\gamma(x_1)}^{\delta(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2\right)dx_1}$$

$A=\{(x_1,x_2): x_2\in[c,d],\ \alpha(x_2)\le x_1\le\beta(x_2)\}$

Se $f(x_1,x_2)$ è continua $\Rightarrow F(x_2)=\int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} f(x_1,x_2)\,dx_1$ allora $F(x_2)$ è continua

$$\boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_c^d\left(\int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} f(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2}$$

$$= 4\left[\frac{5}{3}x_2 - \frac{x_2^3}{3}\right]_0^1 = 4\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{16}{3}$$

CAMBIAMENTI DI COORDINATE

L'integrazione può richiedere differenti forme del dominio di integrazione -> risulta utile in molti casi fare ricorso a trasformazioni di tipo geometrico mediante le quali la forma del dominio viene semplificata -> tali cambiamenti nella sostanza sono dei cambiamenti di coordinate le quali in generale modificano la misura dell'area del dominio e dunque dell'integrale stesso.
Bisognerà tenerne conto mediante un termine correttivo opportuno.
Nel caso di integrali semplici il cambiamento di coordinate coincide con la tecnica di sostituzione:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx} \qquad \text{dove } x=\varphi(t) \in C^1,\ \varphi(t):[c,d]\to[a,b]}$$

Per le funzioni a 2 variabili $f(x_1,x_2)$ si ha:
e sia $f(x_1,x_2)$ continua e sia A un insieme misurabile

$$\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$$

Si consideri il cambiamento di coordinate $T: \underset{(u_1,u_2)}{\mathbb{R}^2} \to \underset{(x_1,x_2)}{\mathbb{R}^2}$ che sia CONTINUA, DIFFERENZIABILE e INVERTIBILE.

$$\boxed{T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1,u_2) \\ x_2 = \varphi_2(u_1,u_2)\end{cases}} \qquad T^{-1}(A) = B \text{ oppure } T(B) = A$$

e sia $JT(u_1,u_2)$ la funzione Jacobiana:

$$JT(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

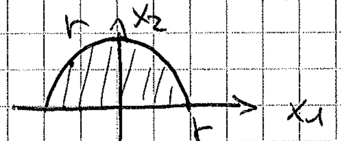
Sia B la regione descritta da u_1 e u_2 e A quella descritta da x_1 e x_2, allora

$$\Rightarrow \boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint_B f(\varphi_1(u_1,u_2), \varphi_2(u_1,u_2)) \cdot |\det(J_T)|\,du_1\,du_2}$$

COORDINATE ELLITTICHE

$$T=\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho \,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad J_T = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\,\text{sen}\,\theta \\ b\,\text{sen}\,\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} \qquad |\det J_T| = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\,\text{sen}^2\theta = ab\rho$$

Esempio Si calcoli $\int_A (x_1+x_2)\,dx_1dx_2 =$ con $A = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 \le r,\ x_2 \ge 0\}$

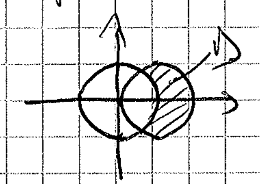


$$= \int_0^r \int_0^\pi (\rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^r\int_0^\pi \rho^2(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi (\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\,d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r \cdot \left[+\text{sen}\,\theta - \cos\theta\right]_0^\pi = \left[\frac{r^3}{3}\right]\left[1+1\right] = \frac{2r^3}{3}$$

Esempio [IMPORTANTE] Calcolare l'area della regione definita da

$$x^2+y^2 \ge 1 \quad e \quad x^2-2x+y^2 \le 0$$



Area: $\int_D dx\,dy \Rightarrow$ coord. polari $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\end{cases}$

$D \xrightarrow{T} A$

$x^2+y^2 \ge 1$

$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta \ge 1 \Rightarrow \rho^2 \ge 1 \Rightarrow \rho \ge 1$

$\to 2\cos\theta = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$x^2+y^2-2x \le 0$

$\rho^2 - 2\cos\theta \le 0 \Rightarrow \rho^2 \le 2\rho\cos\theta \Rightarrow \rho \le 2\cos\theta$

$1 \le \rho \le 2\cos\theta$

$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

$$A = \{(\rho,\theta) : 1 \le \rho \le 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^{2\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{2\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[2\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right]d\theta =$$

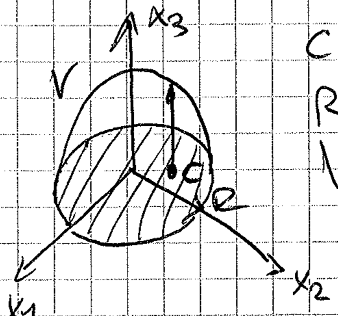
$$= 2\left[\cancel{2}\,\frac{\theta + \cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{2}} - \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

Formule di riduzione per gli integrali tripli

Per gli integrali tripli si hanno 2 strade:

- **Integrazione per strati**: l'integrale triplo è scritto come un doppio seguito da uno semplice $\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \int dz$
- **Integrazione per fili**: l'integrale triplo viene scritto come un semplice seguito da un doppio $\iiint_V dx\,dy\,dz = \int dx \iint_A dy\,dz$

Si consideri una sfera (una semi-sfera per la precisione)



C = area di base
R = raggio area di base
V = volume del solido

Si ha: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2 \Rightarrow \boxed{x_3=\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}}$

Integrazione per fili: si mantengono costanti le prime 2 variabili e si varia soltanto la terza

$$\int_V dx_1dx_2dx_3 = \iint_C\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}} 1\,dx_3\right)dx_1dx_2 =$$

da cui $= \iint_C \sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2 \Rightarrow T = \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= [\theta]_0^{2\pi}\left[-\frac{\cancel{2}}{3}\frac{(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\cancel{2}}\right]_0^R = 2\pi\left[\frac{1}{3}R^3\right] = \frac{2}{3}\pi R^3$$ metà volume sfera

Integrazione per strati: si mantiene costante x_3 e si "affetta" e "strata" la nostra sfera: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=R^2-x_3^2>0$

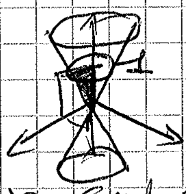
$$\int_V dx\,dy\,dz = \int_0^R\left(\iint_{C_{x_3}} 1\,dx_1dx_2\right)dx_3 = \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-x_3^2}}\rho\,d\rho\,d\theta\right)dx_3 =$$

$$= \int_0^R\left[(2\pi)\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x_3^2}}\right]dx_3 = \int_0^R\left[\cancel{2}\pi\frac{(R^2-x_3^2)}{\cancel{2}}\right]dx_3 = \int_0^R\pi(R^2-x_3^2)\,dx_3 =$$

$$= \left[\pi R^2x_3-\pi\frac{x_3^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

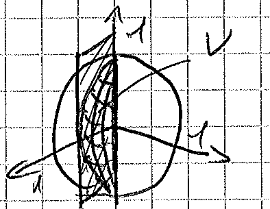
$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{x_3}^1 \rho\, d\rho\, d\theta\, dx_3 = \int_0^1 [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{x_3}^1 dx_3 = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{x_3^2}{2}\right] dx_3 =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[x_3-\frac{x_3^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{12}$$



Esempio Si calcoli $\iiint_V x_3\, dx_1 dx_2 dx_3$ dove V spicchio sfera unitaria compreso tra 2 semipiani uscenti x_3 $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$T = \begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta\, \mathrm{sen}\varphi \\ x_2 = \rho\,\mathrm{sen}\theta\, \mathrm{sen}\varphi \\ x_3 = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad |\det J_T| = \rho^2 \mathrm{sen}\varphi$$



$0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ $\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1$ $\qquad \mathrm{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$0 \le \varphi \le \pi$ $\qquad \rho^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + \rho^2\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi \le 1$

$\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\mathrm{sen}^2\theta - \rho^2\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi \le 1$

$\rho^2 - \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi \le 1$

$0 \le \rho \le 1$

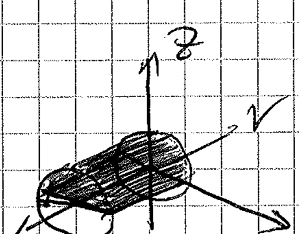
Dunque $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho\cos\varphi\ \rho^2\mathrm{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$

$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{\pi}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{24}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi}{24}\left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{24}\left[-1+1\right] = 0$$

Esempio Calcolare volume solido definito da

$0 \le x \le 1 \quad y^2+z^2 \le 1 \quad z \ge 0$



Conviene usare effettuare coord. cilindriche:

Per fili sarebbe

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_A\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\right) dx\,dy \qquad T \to \begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\theta \\ x = x \end{cases}$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho\, d\rho\, d\theta\, dx = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 [\theta]_0^{\pi}[x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

per strati

GEOMETRIA DELLE MASSE

Calcolo dei baricentri e momenti d'inerzia.

BARICENTRO designa il punto che rappresenta la "media" di una distribuzione di massa sopra una figura data. La sua posizione dipende dalla geometria e densità di distribuzione delle masse.

Def: definito $\rho(x)$ densità distribuzione delle masse il baricentro ha coordinate

$$G = (g_1, g_2, g_3) = \left(\frac{\iiint x_1 dx_1 dx_2 dx_3}{\iiint \rho(x) dx_1 dx_2 dx_3}, \frac{\iiint x_2 dx_1 dx_2 dx_3}{\iiint \rho(x) dx_1 dx_2 dx_3}, \frac{\iiint x_3 dx_1 dx_2 dx_3}{\iiint \rho(x) dx_1 dx_2 dx_3} \right)$$

$= \text{massa}$

Per il piano, se $\rho(x) = 1 = \text{cost}$ si ottiene

$$\begin{cases} g_1 = \frac{1}{M} \iint_A x_1 dx_1 dx_2 \\ g_2 = \frac{1}{M} \iint_A x_2 dx_1 dx_2 \end{cases}$$

MOMENTO D'INERZIA Rappresenta la resistenza che esercita il corpo quando subisce una sollecitazione rotazionale.

Def: Sia A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^3$ e una retta r in $\mathbb{R}^3$. Il momento di inerzia di A rispetto a r è dato da

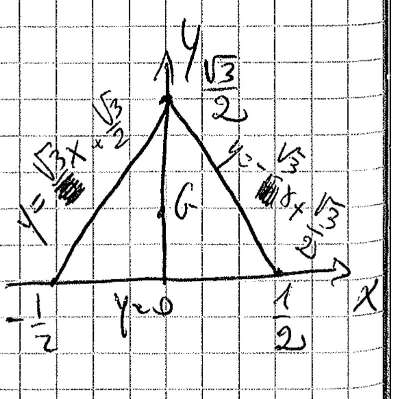
$$I_r = \iiint_A (d(P,r))^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

dove $d(P,r) = \min_{Q \in r} d(P,Q)$

Per il piano:

$$I_0 = \iint_A (x_1^2 + x_2^2) \overset{\text{densità nel piano}}{\mu(x)} dx_1 dx_2$$

Esempio Calcolo baricentro triangolo equilatero



$G = (x_G, y_G)$ $\quad x_G = \frac{\iint_A x \, dx dy}{M}$ $\quad y_G = \frac{\iint_A y \, dx dy}{M}$

$M = \iint_A dx dy = 2 \cdot \text{area triangolo} = 2 \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ area totale

$$x_G = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}} x \, dx dy}{M} \to \text{dom. conv. simm. rispetto } y \text{ e dispari risp. } x \Rightarrow x_G = 0$$

$= 2\pi \iint_S y\,dy\,dz$ ovvero la tesi.

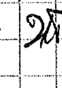
Risulta interessante esprimere il risultato in funzione delle coordinate del baricentro:

$$\boxed{\iiint_V dx\,dy\,dz} = 2\pi \iint_S y\,dy\,dz \cdot \frac{\iint_S dy\,dz}{\iint_S dy\,dz} = 2\pi \iint_S dy\,dz \, \frac{\iint_S y\,dy\,dz}{\iint_S dy\,dz} =$$

$$= \boxed{2\pi \cdot m(S) \cdot y_G}$$ dove $m(S)$ è l'area.

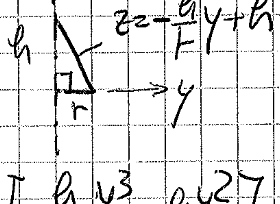
Si nota che il volume del solido di rotazione è pari alla area S moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro durante la rotazione.

Esempi: Calcolo dei volumi dei seguenti solidi:



• CILINDRO raggio r e altezza h

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\pi \int_0^r\int_0^h y\,dy\,dz = 2\pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^r [z]_0^h = 2\pi \frac{r^2}{2} h = \pi r^2 h$$

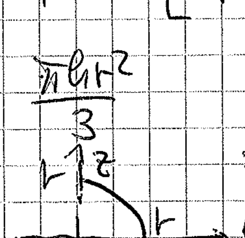


• CONO RETTO base raggio r e altezza h

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\pi \int_0^r\int_0^{-\frac{h}{r}y+h} y\,dy\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^r [y \cdot z]_0^{-\frac{h}{r}y+h} dy = 2\pi \int_0^r \left[-\frac{h}{r}y^2 + hy\right] dy = 2\pi \left[-\frac{h}{r}\frac{y^3}{3} + h\frac{y^2}{2}\right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{h}{\cancel{r}}\frac{r^{\cancel{3}\,2}}{3} + h\frac{r^2}{2}\right] = 2\pi\left[\frac{hr^2}{6}\right] = \frac{\pi h r^2}{3}$$



$z^2 + y^2 \le r^2$

$z \le \pm\sqrt{r^2 - y^2}$

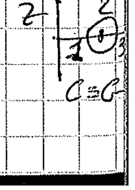
• SFERA di raggio r

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\pi \iint_S y\,dy\,dz = 2\pi \int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} 2y\,dy\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^r [yz]_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dy = 4\pi \int_0^r y\sqrt{r^2-y^2}\,dy = 4\pi\left[-\frac{\cancel{2}}{3}\frac{(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{\cancel{2}}\right]_0^r =$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{3} r^3\right] = \frac{4}{3}\pi r^3$$

• Calcolo volume TORO così definito: rotazione attorno asse z del cerchio contenuto in ~~x~~ $=0$, con centro $C(0,2,0)$ e $r=1$.



$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\pi \cdot A \cdot y_G = 2\pi \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi^2$$

Esempio Dato $\gamma(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ [è una curva con sostegno una circonferenza]

Trovare l_γ $\quad \gamma'(t) = \begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = \cos t \end{cases}$

$$l_\gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \quad \text{ok}$$

Esempio Data la parabola $y = x^2$, $x \in [0,1]$

$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in [0,1]$ trovare l_γ

$$l_\gamma = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt =$$

$$= \dots = \frac{\sqrt5}{2} + \frac14 \ln(2+\sqrt5)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \int \sqrt{1+y^2}\, dy & \int \sqrt{1-y^2}\, dy \\ y = \operatorname{senh}^{-1}(t) + c & y = \arcsin(t) \\ \multicolumn{2}{l}{\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1} \\ \multicolumn{2}{l}{\int \operatorname{senh}(x)\, dx = \cosh(x) + c} \end{array}}$$

Esempio Data la catenaria $y = \cosh x$

$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases}$ $t \in [-1, 1]$

$$l_\gamma = \int_{-1}^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + \operatorname{senh}^2 t}\, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 t}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^1 \cosh t\, dt = \int_{-1}^1 \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt = \frac12 \left[e^t - e^{-t}\right]_{-1}^1 = \frac12 \left[e^1 - e^{-1} - e^{-1} + e^1\right]$$

$$= e^1 - e^{-1} = e - e^{-1} \quad \text{ok}$$

VERSORE TANGENTE

Sia $\gamma(t) = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e si avere:

$$\boxed{s(t) = \int_a^t \sqrt{(\gamma_1'(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'(\tau))^2}\, d\tau}$$

$s(t)$ rappresenta la distanza percorsa lungo la curva a partire dall'estremo iniziale fino al parametro t.

Essendo la curva regolare, con $s(a) = 0$, $s(b) = l_\gamma$, si ha

$$s'(t) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} > 0$$

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \quad \text{strettamente crescente}$$

OSS: Se $f=1$ l'integrale restituisce la misura della lunghezza γ

PARAMETRIZZAZIONI COMUNI

RETTA $\gamma = \begin{cases} x = ut+p \\ y = vt+q \end{cases}$ $\gamma' \begin{cases} x' = u \\ y' = v \end{cases}$ $\|\gamma'\| = \sqrt{u^2+v^2}$

CIRCONFERENZA (unitaria)

$\gamma = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $\gamma' = \begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = \cos t \end{cases}$ $\|\gamma'\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$

CIRCONFERENZA di raggio R

$\gamma = \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t \end{cases}$ $\gamma' = \begin{cases} x' = -R\operatorname{sen} t \\ y' = R\cos t \end{cases}$ $\|\gamma'\| = \sqrt{R^2\operatorname{sen}^2 t + R^2\cos^2 t} = R$

ARCO DI PARABOLA

$\gamma = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $\gamma' = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \end{cases}$ $\|\gamma'\| = \sqrt{1+4t^2}$ $t \in [0,1]$ si considera una porzione

$l_\gamma = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\,dt = \dots = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{4}$

ARCO DI ELLISSE

Caso complesso -> calcolo approssimato del tipo $\sqrt{1+A\operatorname{sen}^2 t}$

CICLOIDE

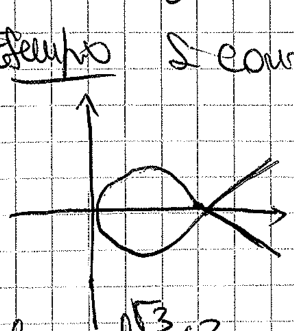
$\gamma = \begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\gamma' = \begin{cases} x' = 1-\cos t \\ y' = \operatorname{sen} t \end{cases}$

$\|\gamma'\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2-2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$

$l_\gamma = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt =$

$= 4\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt = 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 4$

Esempio Si consideri la curva



$\gamma = \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}$ $\gamma' = \begin{cases} x' = 2t \\ y' = t^2-1 \end{cases}$

$t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ $\|\gamma'\| = \sqrt{4t^2+t^4-2t^2+1} = \sqrt{t^4+2t^2+1} = t^2+1$

$l_\gamma = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2+1\,dt = \left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}+\sqrt{3}+\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}+\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Esempio C.V. $F(x,y,z) = (x,y,z)$ $\quad \gamma(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}$ $\quad t = [0, 2\pi]$

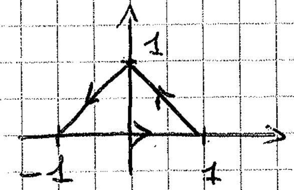
$\gamma'(t) = \begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = \cos t \\ z' = 1 \end{cases}$

$$\int_\gamma F \cdot t = \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \cancel{-\operatorname{sen} t \cos t} + \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} + t \, dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

Esempio C.V. $F(x,y) = (y, -x)$ $\quad$ Calcolare integrale di linea.

Curva costituita 3 lati triangolo $\quad$ verso: antiorario.



Si può scegliere la parametrizzazione.

$\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t \in [-1, 1]$ $\quad \gamma_2 \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases}$ $t \in [0,1]$ $\quad \gamma_3 \begin{cases} x = -t \\ y = 1-t \end{cases}$ $t \in [0,1]$

Dunque

$$\int_\gamma F \cdot t = \int_{\gamma_1} F \cdot t + \int_{\gamma_2} F \cdot t + \int_{\gamma_3} F \cdot t = \int_{-1}^1 (0, -t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 (t, t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt +$$

$$+ \int_0^1 (1-t, t) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0 + \int_0^1 (\cancel{-t} + \cancel{t} - 1) dt + \int_0^1 (\cancel{t} - 1 - \cancel{t}) dt = 2(-1) = -2$$

OPERATORI DIFFERENZIALI

Per operatore differenziale si intende in generale ogni trasformazione che richiede l'uso delle derivate.

GRADIENTE ∇f o $\operatorname{grad} f$

Trasforma un campo scalare $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel suo campo vettoriale $\nabla f(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

Esempio Sia campo scalare $z = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

allora $\nabla z = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

NOTA: se derivo campo scalare $\to$ vettore (gradiente); se derivo campo vettoriale $\to$ matrice (Jacobiana)

ROTORE $\operatorname{rot} F$ o $\nabla \times F$

Si applica ai campi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ ovvero per $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esso è un campo vettoriale che non cambia la natura della funzione a cui è associato infatti $\operatorname{rot} F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Sia $F = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k}$ e sono $f_1, f_2, f_3 \in C^1$ allora

CAMPI CONSERVATIVI IN $\mathbb{R}^n$

Def: Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo, definito su un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Si dice che $\boxed{F \text{ è conservativo su } A}$ se esiste una funzione scalare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita su A e di classe C^1 tale che

$$\boxed{F(x_1, \dots, x_n) = \text{grad}\, f(x_1, \dots, x_n)}$$

La funzione f si dice POTENZIALE del campo F su A.

Esempio $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ $\quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ F è conservativo

Esempio $F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $\quad f(x,y) = xy$ $\quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ F è conservativo

Esempio $F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ $\quad f(x,y) = +xy + \varphi(y)$

ma $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + \varphi'(y) = -x$ e chiedendo $\varphi'(y) = 0 \ \forall x,y$

si ricava $x = -x \Rightarrow$ Assurdo!

Dunque $F(x,y)$ non è conservativo perché non ammette potenziale.

Def: Un campo vettoriale $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice conservativo se ammette potenziale.

PROPRIETÀ

Se $F(x_1, x_2, x_3)$ è conservativo, allora ammette potenziale $f(x,y,z)$

e dunque $\text{grad}\, f = F$

Allora necessariamente $\boxed{\text{rot grad}\, f = \text{rot}\, F = 0}$

Se un campo F è conservativo, allora è irrotazionale.

Teorema: Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1 definito su A aperto $\subset \mathbb{R}^n$.

Se F è conservativo, allora

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{con } i \neq j}$$

Condizione necessaria per la conservatività di F.

In particolare:

per $n = 2 \Rightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ $\quad$ per $n = 3 \Rightarrow \text{rot}\, F = 0$

PROPRIETA' GEOMETRICHE DI A

INSIEMI CONNESSI

Def: Un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$ si dice connesso se per ogni coppia di punti $P_0, P_1 \in A$ $\exists$ una curva continua $\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^n$ il cui sostegno sia interamente contenuto in A e tale che $\gamma(a) = P_0$ e $\gamma(b) = P_1$. In pratica è una "restrizione" della def. di insieme connesso. A convesso $\Rightarrow$ A connesso. A connesso $\not\Rightarrow$ A convesso!

Teorema: Sia A aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$. Sia $F: A \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo continuo.
Se f e g sono entrambi potenziali di F su A, allora $\exists$ una costante reale k tale che
(Potenziali diversi differiscono per una costante) $f(x) = g(x) + k$ per ogni $x \in A$.

Teorema $\boxed{\text{CONDIZIONE SUFFICIENTE}}$

Sia A aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$. Sia $F: A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Se per $\boxed{\text{ogni}}$ coppia di punti $P_0, P_1 \in A$ e per ogni coppia di curve regolari a tratti γ, δ aventi entrambe P_0 come primo estremo e P_1 come secondo estremo (nell'ordine) si ha che

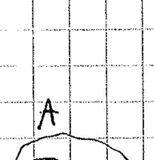
$$\boxed{\int_\gamma F \cdot T = \int_\delta F \cdot T}$$ cond. sufficiente

allora F ammette potenziale cioè è conservativo.

TEOREMA DI GREEN

Per semplicità di trattazione si esaminerà il caso $n=2$.

Teorema: Sia $\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare, semplice e chiusa.
Sia Ω la regione aperta del piano delimitata da γ e sia Γ il suo sostegno. Si suppone che γ sia parametrizzata in modo che il senso di percorrenza sia quello antiorario.



Sia inoltre $F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$ un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ di classe C^1, definito su A aperto tale che $\boxed{K = \Omega \cup \Gamma \subset A}$

allora vale: $$\boxed{\int_\gamma F \cdot T = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \right) dx_1 dx_2}$$ Teo. di Green

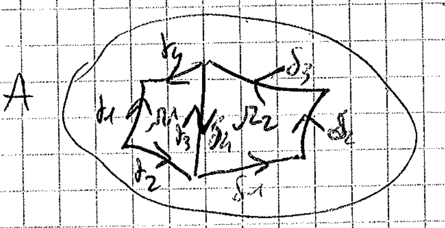
GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI GREEN

Sia F campo vettoriale di classe C^1 definito su A aperto $\subset \mathbb{R}^n$. Sia ora $\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa, semplice, regolare a tratti allora vale: ① [$\gamma(t)$ regolare a tratti] γ percorsa antiorariamente.

$$\int_\gamma F\cdot \bar{t} = \int_{\gamma_1} F\cdot\bar{t} + \dots + \int_{\gamma_N} F\cdot \bar{t} = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

② Si considerino 2 curve γ_1 e γ_2 di $\mathbb{R}^2$, chiuse, semplici e regolari a tratti, percorse in senso antiorario. Definiamo gli insiemi Ω_1 e Ω_2 delimitate da tali curve che sono disgiunte ma che i loro sostegni Γ_1 e Γ_2 abbiano un tratto in comune.

Posto $K_1 = \Omega_1 \cup \Gamma_1$ e $K_2 = \Omega_2 \cup \Gamma_2 \Rightarrow K = K_1 \cup K_2 \subset A$.



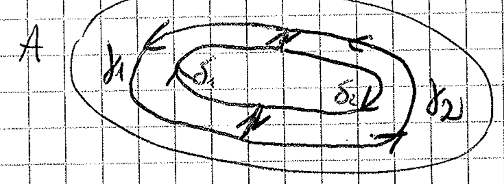
Deve valere

$$\int_\gamma F\cdot\bar{t} + \int_\delta F\cdot \bar{t} = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

con attenzione a

$$\int_{\gamma_3} F\cdot\bar{t} = -\int_{\delta_4} F\cdot\bar{t} \Rightarrow$$ uguali ed opposti, si cancellano automaticamente

③ Si supponga come in figura



$$\underbrace{\int_\gamma F\cdot \bar{t}}_{\text{ESTERNO ANTIORARIO}} + \underbrace{\int_\delta F\cdot \bar{t}}_{\text{INTERNO ORARIO}} = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$

SOMMARIO SUI CAMPI CONSERVATIVI

In $\mathbb{R}^2$ $F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

$F(x,y)$ è campo conservativo se e solo se:

① $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$ $\forall x,y \in A \subset \mathbb{R}^2$ | CONDIZ. NECESSARIA | COND. NECESSARIA E SUFFICIENTE

② A semplicemente connesso

Allora esiste il potenziale $\varphi(x,y)$ così definito:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2$$

Esempio Si consideri $F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 3x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$. $\exists$ potenziale f?

Dom $F = \mathbb{R}^2 \Rightarrow A$ semplicemente connesso.

Deve valere $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \Rightarrow 2x = 2x$ (OK) $\Rightarrow F$ è conservativo

$\exists\, f(x,y)$. Ricerco: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$

Calcolo

$f(x,y) = \int f_1 dx + \varphi(y) = \int 2xy + 3x^2 dx + \varphi(y) = x^2 y + x^3 + \varphi(y)$

Si ricava $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2 + \varphi'(y)$

Impongo il confronto

$$\frac{\partial}{\partial y} f = f_2 \Rightarrow \cancel{x^2} + \varphi'(y) = \cancel{x^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = k$$

Dunque $f(x,y) = yx^2 + x^3 + k$ (OK)

Esempio Si consideri $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. $\exists\, f(x,y,z)$?

Dom $F = \mathbb{R}^3 \Rightarrow A$ sempl. connesso.

Deve valere $\operatorname{rot} F = \bar{0}$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+2yz & y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 2y \\ 0 - 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rot} F = \bar{0} \Rightarrow F \text{ è conservativo}$$

Allora $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_3$

$f(x,y,z) = \int f_3 dz + \varphi(y) + \varphi(x) = \int y^2 dz + \dots = zy^2 + \varphi(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz + \varphi'(x,y)$

Impongo confronto: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 = 2xy = \varphi'(x,y) \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{2yx^2}{2} + k = yx^2 + k$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_2 = x^2 + \cancel{2yz} = \cancel{2yz} + \varphi'(x,y) \Rightarrow \varphi'(y) = x^2 \Rightarrow \varphi(y) = x^2 y + k$ <u>verificato</u>

Dunque $f(x,y,z) = x^2 y + zy^2 + k$

$$= \int_{-1}^{0} 5t + 2(-t-1)^4 - 8t(-t-1)^3 - 2\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} -5\,\mathrm{sen}\,t\cos t - 2\,\mathrm{sen}^3 t\,\mathrm{sen}^2 t + 8\cos^2 t\,\mathrm{sen}^3 t - \cos t\,dt$$

$$= \dots = \frac{167}{30}$$

$$I_1(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_2}\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\sigma_3}{\partial u_2}\right)-\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\sigma_3}{\partial u_1}\right)$$

$$I_2(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_2}\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\sigma_3}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\sigma_1}{\partial u_2}\right)-\left(\frac{\partial\sigma_3}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\sigma_1}{\partial u_1}\right)$$

$$I_3(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial u_2}\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\sigma_2}{\partial u_2}\right)-\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial\sigma_2}{\partial u_1}\right)$$

Pertanto risulta $\boxed{N(u_1,u_2)=(I_1,I_2,I_3)}$

e la norma: $\boxed{\|N\|=\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}>0}$

poiché $I_1^2+I_2^2+I_3^2>0$ essendo rango 2 della J_σ.

L'equazione del piano tangente alla superficie nel punto P di coordinate $P(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ risulta essere:

$$\boxed{N(P)\cdot\begin{pmatrix}x_1-\bar{x}_1\\x_1-\bar{x}_2\\x_1-\bar{x}_3\end{pmatrix}=0}$$

eq. piano tangente alla sup. in $P(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$

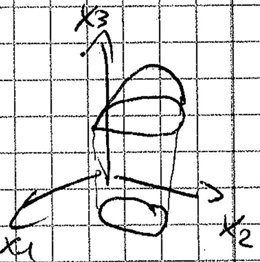
e dunque

$$\boxed{I_1(x_1-\bar{x}_1)+I_2(x_2-\bar{x}_2)+I_3(x_3-\bar{x}_3)=0}$$

Con $\begin{cases}\bar{x}_1=\sigma_1(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\\ \bar{x}_2=\sigma_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\\ \bar{x}_3=\sigma_3(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\end{cases}$

OSS Se $f(x_1,x_2)=x_3$ di classe $C^1(A)$.

la superficie definita da $\sigma=\begin{cases}x_1=u_1\\x_2=u_2\\x_3=f(u_1,u_2)\end{cases}$



Allora $J_\sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ \frac{\partial f}{\partial u_1}&\frac{\partial f}{\partial u_2}\end{pmatrix}$ = rango 2

Il vettore normale

$$N(P)=(I_1,I_2,I_3)=\left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1,u_2),-\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1,u_2),1\right)$$

Def: L'integrale di superficie di f esteso alla calotta $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ si definisce come l'integrale doppio:

$$\boxed{\int_\sigma f\,dS = \iint_K f(\sigma_1(u_1,u_2),\sigma_2\dots,\sigma_3\dots)\underbrace{\sqrt{I_1^2+I_2^2+I_3^2}}_{\|N\|}\,du_1\,du_2}$$

OSS: se $f \equiv 1 \Rightarrow \int_\sigma f\,dS = m(\sigma)$ misura dell'area.

Esempio: si vuole calcolare area paraboloide $z = x^2+y^2$

$\to$ si una forma parametrica $\sigma = \begin{cases} x = u_1 \\ y = u_2 \\ z = u_1^2+u_2^2 \end{cases}$ $(u_1,u_2)\in C$ con C cerchio origine e $R=1$

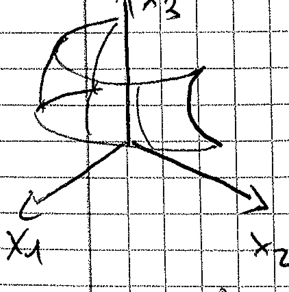
$$J\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u_1 & 2u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 \qquad N = (-2u_1, -2u_2, 1)$$

$$\int_\sigma f\,dS = \iint_C 1\sqrt{4u_1^2+4u_2^2+1}\,du_1\,du_2 \overset{\text{polari}}{\Rightarrow} \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{1}{2}\sqrt{4\rho^2+1}\,2\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= [\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{12}\left[5^{\frac{3}{2}}-1\right] = \frac{\pi}{6}\left[5^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

OSS: L'integrale di superficie di un campo scalare non dipende dalla parametrizzazione.

SUPERFICI DI ROTAZIONE



Sia $\gamma(t): [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare.
Se sul sostegno Γ della stessa si ipotizza distribuzione massa uniforme di densità unitaria, allora il baricentro di γ è definito:

$$g_1 = \frac{\int_\gamma x_1\,ds}{\int_\gamma ds} = \frac{\int_\gamma x_1\,ds}{l_\gamma} \qquad g_2 = \frac{\int_\gamma x_2\,ds}{l_\gamma} \qquad g_3 = \frac{\int_\gamma x_3\,ds}{l_\gamma}$$

Si consideri che Γ di γ sia contenuto nel semipiano $\{(0,x_2,x_3); x_2 \geq 0\}$

Esempio Determinare il flusso del campo vettoriale $F = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$ attraverso superf. $z = xy$ sul quadrato $A = \{(x,y): -1<x<1, -1<y<1\}$.

Superficie parametrizzata così:

$$\sigma(u_1,u_2) = \begin{cases} x = u_1 \\ y = u_2 \\ z = u_1 u_2 \end{cases} \qquad N(u_1 u_2) = (-u_1, -u_2, 1)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$ Dunque il flusso vale

$$\int_\sigma F \cdot \overline{n} = \iint_A (u_1, -u_2, 1) \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ 1 \end{pmatrix} du_1 du_2 =$$

$$= \iint_A -u_1^2 + u_2^2 + 1 \, du_1 du_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -u_1^2 + u_2^2 + 1 \, du_1 du_2 =$$

$$= 4\int_0^1 \left[-\frac{u_1^3}{3} + u_2^2 u_1 + u_1\right]_0^1 du_2 = 4\int_0^1 u_2^2 + \frac{2}{3} = 4\left[\frac{2}{3}u_2 + \frac{u_2^3}{3}\right]_0^1 = 4$$

TEOREMA DI STOKES

o

TEOREMA DEL ROTORE

Teorema: Sia V insieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $F: V \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Sia inoltre σ una calotta di $\mathbb{R}^3$ con sostegno $\subset V$, allora

$$\boxed{\int_{\partial\sigma} F \cdot \overline{t} = \int_\sigma \text{rot} F \cdot \overline{n}}$$ Teor. di Stokes

INTEGRALE DI LINEA — INTEGRALE DI FLUSSO

Def: Siano $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, classe C^1 2 campi vettoriali. Si dice che F è un POTENZIAL-VETTORE di G se

$$\boxed{G = \text{rot} F}$$

COROLLARIO: Se G ammette un potenziale-vettore allora gli integrali di flusso di G non dipendono dalla

Se F è solenoidale $\Rightarrow$ il flusso uscente è nullo.

Esempio Dato $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia V regione delimitata da $\sigma: z=1$ e paraboloide definito

Si vuole calcolare il flusso totale.

$P: \begin{cases} x = u_1 \\ y = u_2 \\ z = u_1^2 + u_2^2 \end{cases}$ $C = \{(u_1,u_2) : u_1^2+u_2^2 \le 1\}$

Per definizione

$$\phi = \phi_\sigma + \phi_p = \int_\sigma F \cdot \bar{n} + \int_p F \cdot \bar{n} =$$

$J_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $I_3 = 1$ $\quad J_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u_1 & 2u_2 \end{pmatrix}$

$I_1 = -2u_1$
$I_2 = -2u_2$
$I_3 = 1$
$\Downarrow$
$I_1 = 2u_1$
$I_2 = 2u_2$
$I_3 = -1$

$$= \iint_C (-x, -y, 1) \cdot N du_1 du_2 + \iint_p F \, N du_1 du_2 =$$

$$= \iint_C 1 \cdot 1 \, du_1 du_2 + \iint_C -(2u_1^2 + 2u_2^2 + 1) du_1 du_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho \, d\rho \, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 -(2\rho^2+1)\rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{2}} + 2\pi \left[-\left[\frac{1}{2}\rho^4 + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \right] = \pi - 2\pi = -\pi \quad \text{ok}$$

Con Gauss si sarebbe seguito $\quad \operatorname{div} F = -1-1 = -2$

$$\int_\sigma F \cdot \bar{n} = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iiint_V -2 \, dx dy dz = \text{per fili}$$

$$\iint_C \int_0^{x^2+y^2} -2 \, dz \, dx dy = \iint_C -2 \left[x^2+y^2\right] dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2\rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= -2\pi (2) \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -4\pi \frac{1}{4} = -\pi \quad \text{ok}$$

FORME DIFFERENZIALI

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. È detto differenziale di f in x_0 la funzione che associa al numero reale h il prodotto $f'(x_0)h$. Il differenziale è una funzione lineare:

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

Per una ragione di notazioni $\rightarrow$ $\quad df = f'(x_0) dx$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{df}{dx}$$

Esempio Si consideri il campo $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$ dom $F = \mathbb{R}^3$

Calcolare l'integrale di linea lungo $\gamma = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 0 \end{cases}$ $t = [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma F \cdot t = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t \, dt =$$

$= -2\pi$ OK

Si dimostra che il campo F non è conservativo anche calcolando $\operatorname{rot} F$:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \bar{0} \Rightarrow F \text{ non è conservativo}$$

Applicando Stokes:

la curva viene parametrizzata $\gamma(t) = \begin{cases} x = u_1 \\ y = u_2 \\ z = 0 \end{cases}$ con $u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \Rightarrow J_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $I_3 = 1$

$$\int_{\partial\gamma} F \cdot t = \iint_\gamma \operatorname{rot} F \cdot \bar{n} = \iint_\gamma -2 \cdot 1 \, du_1 du_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2\rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$-2 [2\pi] \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = -2\pi \quad \text{OK}$$

Esempio Dato il campo $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$ dom $F = \mathbb{R}^2$

Si consideri $V = A \cap B$ dove $A = \{ z \geq x^2 + y^2 - 1 \}$ paraboloide

Calcolare il flusso uscente da V $\quad B = \{ z \leq 1 - x^2 - y^2 \}$ paraboloide

$\operatorname{div} F = y + z + x$

Sfrutto Gauss:

$$\phi = \int_V \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \text{per fili} = \iint_C \int_{1-x^2-y^2}^{x^2+y^2-1} (y+z+x) dz \, dx\,dy = \iint_C 2y(x^2+y^2-1) + (x^2+y^2-1)^{2z} dx\,dy$$

$$+ \frac{(x^2-y^2-1)^2}{2} - \frac{(-x^2-y^2+1)^2}{2}$$

$$= \iint_C 2y(x^2+y^2-1) + 2x(x^2+y^2-1) dx\,dy = 2\iint_C \operatorname{sen}\theta(\rho^2-1) + \cos\theta(\rho^2-1)\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(\rho^2-1)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 d\theta = 2[-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}\left[-1+0-(-1)+0\right] = 0$$

ESEMPIO SERIE GEOMETRICA

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$ serie geometrica di ragione x.
$x \in \mathbb{R}$.

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + x$

$S_2 = (1+x) + x^2$

$S_3 = (1+x+x^2) + x^3$

$\vdots$

$S_n = (1+x+\dots) + x^n$

Se moltiplico per $(1-x)$:

$S_n(1-x) = (1+x+\dots+x^n)(1-x) =$

$= (1+x+\dots x^n) - (x+\dots+x^{n+1}) =$

$= 1 + x^{n+1}$

$\Rightarrow S_n = \frac{1+x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}$

Dunque $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} x=1 \Rightarrow \text{diverge positivamente} \\ |x|>1 \Rightarrow \text{diverge positivamente} \\ |x|<1 \Rightarrow \overset{\text{somma}}{S} = \frac{1}{1-x} \quad \text{la serie converge} \\ x \leq -1 \Rightarrow \underset{0 \text{ e } 1}{\text{alternante}} \rightarrow \text{INDETERMINATA} \end{cases}$

OSS: Il comportamento di una serie non cambia se si cambiano, si eliminano o si aggiungono un numero finito di termini della serie;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

OSS: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, , \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ serie somma

Se c = costante $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Teorema Date 2 serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e posto $a_n \leq b_n$, allora:

① Se $\{b_n\}$ serie maggiorante CONVERGE, allora converge anche la minorante

② Se la serie $\{a_n\}$ minorante DIVERGE, allora diverge anche la maggiorante

Dimostrazione:

Si indichino con $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ la successione delle somme parziali delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Essendo $a_n \leq b_n$ allora anche $s_n \leq \sigma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se la maggiorante converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma < +\infty$, inoltre $\sigma_n \leq \sigma$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_n \leq \sigma$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dunque essendo crescente e limitata, la successione $\{s_n\}$ converge e il suo limite $s \leq \sigma$.

ESEMPIO SERIE ARMONICA

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$ Dimostrare che diverge

$a_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ Cond. necessaria superata

Applico criterio del confronto

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Ma $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente.

ESEMPIO $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$ $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ Cond. necessaria superata

Dimostrare che converge

Si consideri $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow b_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ cond. nec. superata

$$s_n = -\cancel{\frac{1}{2}} + 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \Rightarrow$ Converge

⑤ CRITERIO DI MAC LAURIN

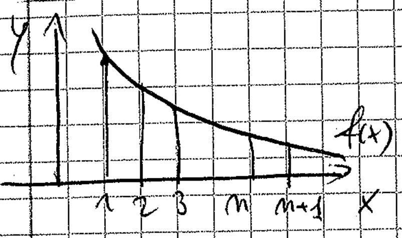
Teorema: Se $f(x)$ fz reale, decrescente e continua su $[1,+\infty)$ e tale che $f(x) \geq 0$.

Allora la serie di termine generale $a_n = f(n)$ converge se e solo se converge l'integrale improprio $\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$

in tal caso

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)}$$

Dimostrazione



Supposto $f(x)$ decrescente, per ogni n-fissato si ha:

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$
$$\forall n, \forall x \in [n, n+1]$$

l'intervallo $[n, n+1]$ che comprende 1 pezzo

per la monotonia si ha:

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

e dunque

$$f(n+1)\, x\Big|_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)\, x\Big|_n^{n+1}$$

risulta

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

Trasformando in serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

③ ② ①

Applicando 2 volte il criterio del confronto risulta che se ① converge $\Rightarrow$ ② converge e se ② converge $\Rightarrow$ ① converge.

Bisogna mostrare infine che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

ESEMPIO Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}}_{a_n}$$

a_n è infinitesimo di ordine superiore > 1 $\frac{1}{n^\alpha}$

Applicando il criterio $f(x) = \frac{1}{x\log x}$ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx \Rightarrow$ diverge

ESEMPIO Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2\log(n+1)}$$

a_n infinitesimo superiore > 2 $\frac{1}{n^\alpha}$

$\nexists\ \alpha > 1$ esatto tale che sia l'infinit. ordine

CONVERGE $\Leftarrow$ sup $\circ$ = a quello di $\frac{1}{n^\alpha}$

SERIE A SEGNI ALTERNI

Sono serie i cui termini sono, alternativamente, uno positivo e uno negativo; assumono la forma:

serie a segni alterni $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \quad \text{con } b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

CRITERIO DI LEIBNIZ o DI CONVERGENZA PER LE SERIE A SEGNI ALTERNI

Teorema: Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$, con $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se

Hp: ① $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

② b_n sia decrescente: $b_{n+1} \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

allora la serie data converge e inoltre vale

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = S \Rightarrow \text{dunque } |S - S_n| \leq b_{n+1}$$

ESEMPIO SERIE ARMONICA a segni alterni

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{verifica ① Leibniz}$$

$$b_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} < b_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{verifica ② Leibniz}$$

$\Rightarrow$ la serie CONVERGE per Leibniz.