NUMERO: 1254 DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bechis

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc.

Prof. Serra

ANALISI I Serra Enrico

ESAME ① test 20dom/1h → 24
② Scritto → forse >24

h 11:30 - 14:30 aula 6D ∀ i giorni
RECUPERO

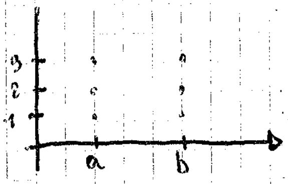
$\in$ APPARTIENE
$\subseteq$ CONTENUTO
$\notin$ NON APPARTIENE
$\cup$ UNIONE
$\cap$ INTERSEZIONE
$|$ TALE CHE
$\setminus$ DIFFERENZA
$\Longleftrightarrow$ SE e SOLO SE
$\wedge$ et (solo se ∀ vere)
$\vee$ vel (basta una vera)
$\exists$ esiste
$\forall$ per ogni
$\exists!$ esiste uno

Modificatori

ex $P(x;y): x+y=1$
$\forall x, \exists y \mid P(x;y)$ V
$\exists y, \forall x \mid P(x,y)$ X

Prodotto Cartesiano di Insiemi $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{a,b\}$ $\Rightarrow A \times B = \{1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b\}$



NB: $A \times B \times C \Rightarrow$ solido

▶ Proposizioni enunciati a cui è possibile attribuire un valore V o F
($3<2$ F ; $2<3$ V ; $2<$ Non è una proposizione)

NEGAZIONE: NOT $P(x)$

NEGARE PROP. QUANTIFICATE:

• NOT $(\forall x\, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x$ NOT $P(x)$

SCAMBIO

PRIMA

DAVANTI $P(x)$

NON è vero che ∀ le x rendono $P(x)$ vera.

ESISTE UN x (almeno) CHE RENDE $P(x)$ FALSA

• NOT $(\exists x\, P(x)) \Longleftrightarrow \forall x$ NOT $P(x)$

• NOT $(\exists x\, \forall y\, P(x,y)) \Longleftrightarrow \forall x\, \exists y$ NOT $P(x,y)$

• NOT $(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \Longleftrightarrow \exists x\, \forall y$ NOT $P(x,y)$

• NOT $(\forall x\, \exists y\, \exists z\, \forall t\, P(x,y,z,t)) \Longleftrightarrow \exists x\, \forall y\, \forall z\, \exists t$ NOT $P(\ldots)$

VALORE ASSOLUTO la distanza da un numero reale x da "0" si chiama $|x|$

es: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$|x-y|$ $\rightarrow$ distanza tra x e y

$|x| \leq 3$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$ — -3 0 $+3$

- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x| \cdot |y|$ o $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

Usato per descrivere insiemi ($\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < R\}$

① $\begin{cases} x - x_0 < R & \text{se } x \geq x_0 \\ x_0 - x < R & \text{se } x < x_0 \end{cases}$

$\begin{cases} x < x_0 + R & (x \geq x_0) \\ x > x_0 - R & (x < x_0) \end{cases}$

$x_0 - R$ x_0 $x_0 + R$

② Insieme x che hanno distanza da $x_0 < R$

R x_0 R)

NB: $\sqrt[2]{x^2} = |x|$ Per definizione è positiva.

MA $x^2 = 4$; $x = \pm 2$

TIPI DI INTERVALLI

$[a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ INT. CHIUSO DI ESTREMI a, b.

(a, b) $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ " APERTO DI " " .

$(a, b]$

$[a, b)$

$(a, +\infty)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ $(-\infty, b)$

$[a, +\infty)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ $(-\infty, b]$

Ex: $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5} \dots\right)$

- A è superiormente limitato? SI $\left(\frac{n}{n+1} < 1, \forall n\right)$
- $\exists$ MaxA? NO (se $M = \text{Max}A \Rightarrow M$ di tipo $K/K+1$ $K \in \mathbb{N}$ MA $\frac{K+1}{K+2} > \frac{K}{K+1}$ Assurdo)
- $\exists$ SupA? SI $= 1$

Conclusione: definisco SupA come il più piccolo dell'insieme dei maggioranti ma come faccio a sapere che quest'insieme ha un minimo? (← x limitato inferiormente)

$\Rightarrow$ Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$

"Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha l'estremo superiore (supA) in $\mathbb{R}$"

NB: In $\mathbb{Q}$ $\exists$ insiemi che non hanno l'estremo superiore $\left(A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}\right.$
- lim superiormente
- $\text{Sup}A = \varnothing$ $\left(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right)$

anche x InF lim (InFA)

⊛ Insieme A limitato: $\begin{cases} \text{Sup}A < +\infty \\ \text{InF}A > -\infty \end{cases}$ $=$ $\boxed{\text{Sup}|A| < +\infty}$

$m < A < M$ $(m, M \in \mathbb{R})$

IL VALORE ASSOLUTO L'HA FATTO x LE SUCCESSIONI (e quindi x le funz)

$\text{Sup}|a_n| < +\infty$

MA PENSO VADA ANCHE CON GLI INSIEMI.

GRAFICO DI UNA FUNZIONE

(RICORDO IL PRODOTTO CARTESIANO $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$)

definizione: $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in \cancel{X} (Dom(f))\}$

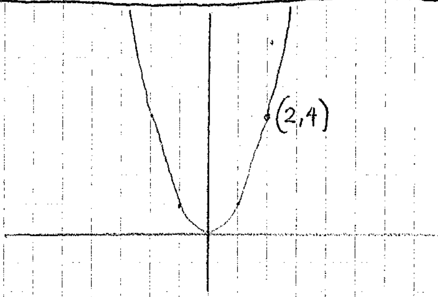
EX $f(x) = x^2$ $\rightarrow (3,9) \in G(f)$
$\rightarrow (2,5) \notin G(f)$

$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom(f)\}$

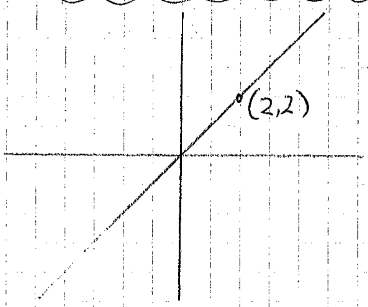
NB Il grafico come "disegnino" è un caso particolare in $\mathbb{R}^2$ (max $\mathbb{R}^3$).

$\boxed{\text{QUALCHE ES } G(f)}$

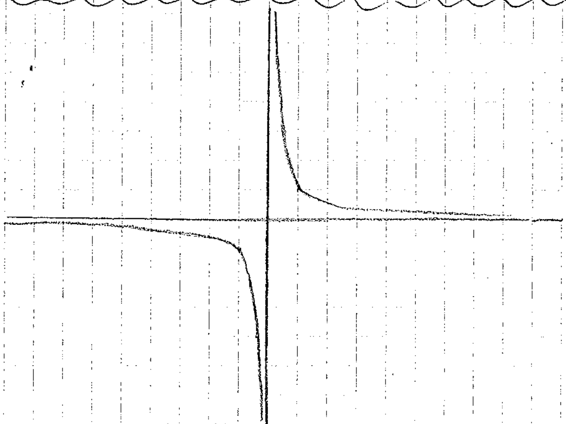
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $Dom(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ $Im(f) = [0, +\infty)$
$G(f) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $Dom(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = x$ (IDENTITÀ) $Im(f) = \mathbb{R}$
$G(f) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

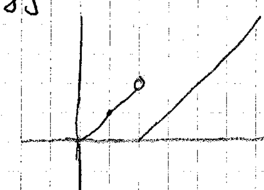


$f(x) = 1/x$
$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$G(f) = \{(x; 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

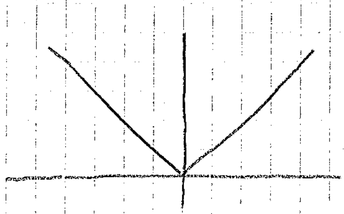


NB $\exists$ funzioni definite a tratti: funz in cui la legge cambia nei tratti

ex: $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \ x \in [0,1] \\ x & se \ x \in (1,2) \\ x-2 & se \ x \in [2,+\infty) \end{cases}$ $Dom(f) = [0, +\infty)$



$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \ x \geq 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases}$



⊛ FUNZIONE BIIETTIVA se è sia INIETTIVA che SURIETTIVA

$f(x)$ è BIIETTIVA $\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists! \; x \in X \mid f(x) = y$

∃! un unico

$\underbrace{x^2 + \sqrt{x} + 3x^5 = a}_{f(x) = a}$

- $f(x)$ SURIETTIVA se tale eq. ha almeno una soluz.
- $f(x)$ INIETTIVA se tale eq. ha al più una soluz.
  - Problema dell' UNICITÀ (se ∃ è unica)
  - Problema dell' ESISTENZA

| invertire ↔ esplicito la x. |

FUNZIONE INVERSA:

$f : X \to Y \mid f$ INIETTIVA $\Leftrightarrow$ se prendo $y \in Y$, ∃ AL PIÙ $x \in X \mid f(x) = y$
se $y \in Im(f)$, $\exists! \; x \in X \mid f(x) = y$

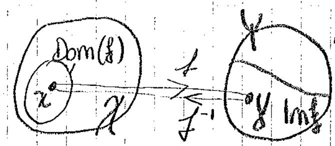
$\Rightarrow \exists$ una f che a $y \in Im(f)$ associa l'unico $x \in X \mid f(x) = y$

Def: $f : X \to Y$ INIETTIVA, si definisce f inversa di f,

$f^{-1} : Im(f) \to X$

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

$Dom(f^{-1}) = Im(f)$
$Im(f^{-1}) = Dom(f)$



Ex:
$f(x) = x^3$ INIETTIVA
$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{x}$
$2 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f^{-1}} 2$
$f^{-1}(8)$ è l'unico $x \mid x^3 = 8$

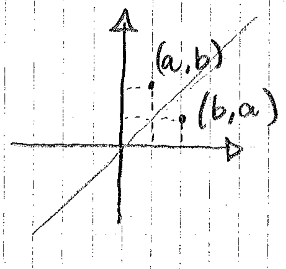
NB se una funzione è INIETTIVA si dice anche INVERTIBILE (ha f^{-1})

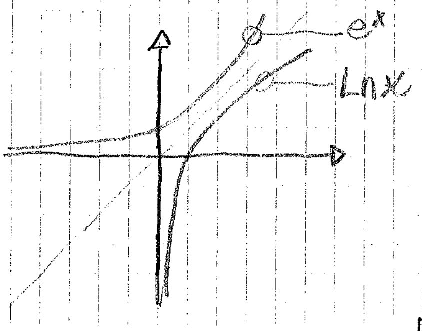
▶ È POSSIBILE, CONOSCENDO $G(f)$, RICAVARE $G(f^{-1})$?

$f : X \to Y$
f INIETTIVA

$(a,b) \in X \times Y \in G(f) \Leftrightarrow b \in f(a) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(b)$

$(b,a) \in G(f^{-1}) \Rightarrow G(f^{-1}) = \{(b,a) \in X \times Y \mid (a,b) \in G(f)\}$

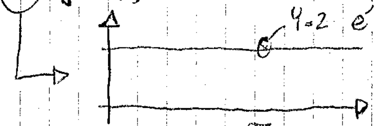




(a,b) e (b,a) come $G(f)$ e $G(f^{-1})$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice ($x = y$)

ALCUNE f hanno f^{-1} = sé stessa
Ex: $1/x = y$

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $I \subset \mathbb{R}$ "si dice che f è crescente su I se $\forall (x_1, x_2) \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$"



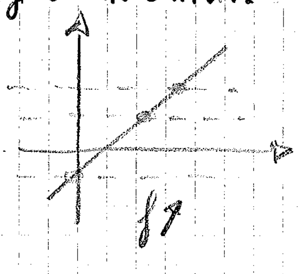
se $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ è strettamente crescente

$\left(\begin{array}{ll} f(x_1) \geq f(x_2) & \text{decrescente} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{strett. decrescente} \end{array} \right)$

NB Se f è crescente o decrescente su I si dice che f è MONOTONA (o strettamente monotona).

Proprietà: Se f è STRETTAMENTE MONOTONA su $I \Rightarrow f$ è INIETTIVA.

DIMOSTRO: $f \nearrow$ STRETTAMENTE | prendo $x_1 \neq x_2$
se $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ INIETTIVA
sia $x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



NB INIETTIVA non COMPORTA MONOTONA

Def: "Si dice che f è limitata superiormente su A se $f(A)$ è limitato superiormente" (= x inf) $(\exists m \mid \forall x \in A \Rightarrow f(x) \geq m)$

$$\left.\begin{array}{l} \exists M \mid \forall y \in f(A) \Rightarrow y \leq M \\ \quad\Downarrow \\ \forall x \in A \Rightarrow f(x) \leq M \end{array}\right\} \sup f(x) < +\infty$$

- Se è limitata sia superiormente che inferiormente si dice che f è LIMITATA $\Rightarrow$ ha $G(f)$ tra due rette orizzontali. (ex $y = \sin(x)$)

Def: "Estremo Superiore di f su A: $\sup\limits_{x \in A} f(x)$
$\sup f(x) = \sup f(A)$

se $\sup\limits_A f(x) = +\infty \Rightarrow f$ è illimitata superiormente su A

NB: Un punto x_0 in $A \mid f(x_0) = \sup\limits_A f$ si dice PUNTO DI MASSIMO per f su A.

Def: Sia a_n una successione, se $\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \geq M$ definitivamente
$\Rightarrow$ si dice $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$

Def: Sia a_n una successione, se $\forall M \in \mathbb{R}$ $a_n \leq M$ definitivamente
$\Rightarrow$ si dice $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty}$

Ex: $a_n = n^2$ | $n^2 \geq M$ definitivamente? $(\forall M \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} M<0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ M>0 & n \geq \sqrt{M} \end{cases}$

$a_n = -\sqrt{n}$ | $\lim_{n\to\infty} -\sqrt{n} = -\infty$; dato $M \in \mathbb{R}$ $-\sqrt{n} \leq M$ $\begin{cases} M>0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ M<0 & n \geq (-M)^2 \end{cases}$

Def: Una Successione a_n è crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Una Successione a_n è decresc. se $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ — MONOTONE
$>$ $<$ $\Rightarrow$ STRETTAMENTE

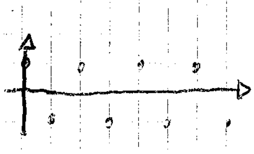
Teorema: Sia a_n una succ. crescente $\Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} a_n$ $\exists$ ed è $= \sup_n (a_n)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ $a_n \leq a_{n+1}$ $l = \sup(a_n)$

(decrescente $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n (a_n)$)

Corollario: Se a_n è crescente e $\sup_n (a_n) < +\infty$ $\Rightarrow$ a_n ha limite finito, è superiormente limitata.
Boh $\left\{ \right.$ (ogni successione superiormente limitata e crescente a limite finito).

Ex: $a_n = (-1)^n = \{1, -1, 1, -1, 1, \dots (-1)^n\}$



$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 1$

dimostraz x assurdo: Se $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = 1$
(Vero) $\Rightarrow |(-1)^n - 1| < \varepsilon$ definitivamente. Vera?

- n PARI: $|1-1| < \varepsilon$; $0 < \varepsilon$ $\forall n$ PARI
- n DISPARI: $|-2| < \varepsilon$; $2 < \varepsilon$ NO

(se $\varepsilon = 1$ x es.)

$\Rightarrow$ LE SUCCESSIONI MONOTONE (cresc. o decresc.) HANNO LIMITE $\begin{cases} l & (\sup/\inf) \\ \pm\infty \end{cases}$

SOTTOSUCCESSIONI

Presa una succ. a_n : $a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad \dots \quad a_\infty$

Posso selezionare $\quad \cdot\, a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad \dots$

NB: SEMPRE INFINITI NUMERI
NON POSSO MODIFICARE L'ORDINE (indice di a_n deve essere crescente)

Quindi faccio delle sottosuccessioni di a_n (succ. estratte da a_n).
che indico a_{n_k}

Ex: $n_k = 2k \qquad a_{n_k} = a_0, a_2, a_4, a_6 \dots$
$n_k = 2^k \qquad a_{n_k} = a_0, a_2, a_4, a_8, a_{16} \dots$

"UNA SUCCESSIONE a_n TENDE A ℓ $\Leftrightarrow$ OGNI SOTTOSUCCESSIONE DI a_n TENDE A ℓ."

$$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^k}{2^k+1} = 1$$

Ex: $a_n = (-1)^n$ NON HA Lim $(n \to \infty)$
$= 1, -1, 1, -1, 1, -1 \dots$

x dim: trovo 2 sottosuccessioni con lim $\neq$
① $a_{2n} = 1, 1, 1, 1, 1$ tende a $+1$
② $a_{2n+1} = -1, -1, -1, -1$ " a -1
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \nexists$ NON ESISTE

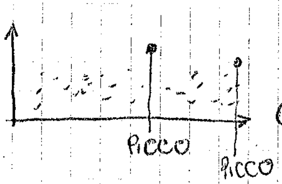
$a_n = 2^n \cdot \cos(n\pi)$

① $a_{2n} = 2^n \cdot \underbrace{+1}_{\cos(2n\pi)} \to +\infty$
② $a_{2n+1} = 2^n \cdot \underbrace{-1}_{\cos((2n+1)\pi)} \to -\infty$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \nexists$

---

teorema: "Da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione monotona"

DIMOSTRAZIONE: Da a_n voglio estrarre una sottosuccessione cresc o decresc.
Chiamo un termine della successione a_m e lo chiamo PICCO per la successione se $a_n \leq a_m \ \forall n \geq m$



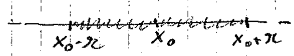
CASO I: ∞ PICCHI $(a_{m_1}, a_{m_2} \dots a_{m_\infty}) \mapsto a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_\infty}$
a_m è una sottosuccessione decrescente.

CASO II: Num PICCHI Finito
Sia a_m l'ultimo picco
a_{m+1} : non è un picco : $\exists m_1 > m+1 \mid a_{m_1} > a_{m+1}$
a_{m_1} : non è un picco : $\exists m_2 > m_1 \mid a_{m_2} > a_{m_1}$
a_{m_2} : " " " " : $\exists m_3 > m_2 \mid a_{m_3} > a_{m_2}$
$\Rightarrow a_{m_1} < a_{m_2} < a_{m_3} \dots$ succ. crescente.

LIMITI DELLE FUNZIONI

▸ L'INTORNO: simmetrico rispetto $x_0 \in \mathbb{R}$

$I_r(x_0)$ intorno di x_0 di raggio r



$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < r\}$

$I_r(x_0) \cap I_s(x_0)$ é sempre un intorno.

$I_r(x_0) \cup I_s(x_0)$ é sempre un intorno.

NB: Gli intorni sono tutti APERTI: $I_r(x_0) = (x_0-r, x_0+r)$

$I_r(+\infty) = (r^{*}, +\infty)$ DA RIVEDERE!

$I_r(-\infty) = (-\infty, r^{*})$ non $(-r)$

r é il raggio da x_0 sulla retta $\mathbb{R}$ "r" non coincide con $(x_0 \pm r)$ (*)

▸ PROPRIETÁ LOCALI DELLE FUNZIONI

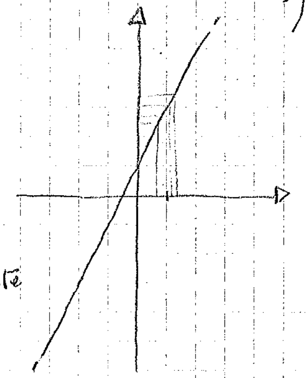
$P(x)$ vale in un intorno di 3

$\exists I_r(3)$ dove $P(x)$ é vera $\forall x \in I_r(3)$

Ex: $f(x) = 2x+1$ $\quad$ $P(x)$: f positiva

$P(x)$ é una proprietá locale in $I_r(1)$ $\quad$ $\left(\overbrace{|x-1| < r}^{I_r(1)} \;\; \forall x \in I_r(1)\right)$

$I_{\frac{1}{4}}(1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$



NB: f non é positiva in un intorno di $-\frac{1}{2}$: SI! (perché intendo l'intorno completo e non solo quello sinistro)

↓ Non é completamente positivo

▸ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \underbrace{\boxed{|a_n - \ell| < \varepsilon}}_{}^{a_n \in I_\varepsilon(\ell)} \;\; \boxed{\forall n > n_0}$ — $n \in I_{n_0}(+\infty)$

"traduzione" con I : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n \in I_{n_0}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(\ell)$

semplifico : $\forall I(\ell), \exists I(+\infty) \mid n \in I(+\infty) \Rightarrow a_n \in I(\ell)$

con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall I(\ell), \exists I(+\infty) \mid x \in I(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$

le $x \in I(+\infty)$ cadono nell' $I(\ell)$

↓ da $x > x_0$

$\left(x \in I(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I(\ell) \iff f(I(+\infty)) \subset I(\ell)\right)$

LIMITI AL FINITO (x tende a un punto $\in \mathbb{R}$ $(x \to x_0 \in \mathbb{R})$)

- Cosa fa una funzione f quando x si avvicina ad x_0?
- In genere $f(x_0)$ non centra nulla con il comportamento di f in $I(x_0)$
- CASO TIPICO: $x_0 \notin Dom(f) \Rightarrow$ TOGLIERE x_0 NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE ($I(x_0) \setminus \{x_0\}$ o $\mathring{I}(x_0)$ INTORNO BUCATO DI x_0)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ (\in \mathbb{R}): \ \forall I(\ell), \exists I(x_0) \mid x \in \mathring{I}(x_0) \Rightarrow f(x) \in I(\ell)}$$

Ex: $\lim_{x \to 2}(x^2) = 4$: $\forall I_\varepsilon(4), \exists I_\delta(2) \mid x \in \mathring{I}_\delta(2) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(4)$

$\forall \varepsilon(>0) \ \exists \delta \mid |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

solo perché è un raggio

$0 < |x-2| < \delta$

Per definire l'intorno BUCATO

$|x^2-4| < \varepsilon$; $|(x+2)(x-2)| < \varepsilon$; $|x+2||x-2| < \varepsilon$;

(NB: se $I_1(2) \Rightarrow = (1, +3)$
$\Rightarrow |x+2| \leq 5$ $(\cdot |x-2|)$ - da lt e 2 le parti)

$|x-2| \cdot \underbrace{|x+2|}_{\leq 5} < \varepsilon \Rightarrow |x-2| \cdot |x+2| \leq 5|x-2|$ se $x \in (1, +3)$

MAGGIORAZIONE
- $|x+2||x-2| < \varepsilon$
- $|x+2| \cdot |x-2| < 5|x-2|$

$\Rightarrow$ se $5|x-2| < \varepsilon$ anche $|x+2| \cdot |x-2| < \varepsilon$

$5|x-2| < \varepsilon$; $\boxed{|x-2| < \varepsilon/5} \to I_{\frac{\varepsilon}{5}}(2)$

Def: • Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che f è CONTINUA in x_0.

ex: $f(x) = \frac{1}{x}$ $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\Rightarrow f(x)$ CONTINUA in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $x_0 \in Dom(f)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \ \exists$ ed è $=$ a $f(x_0)$

$\Rightarrow$ l'intorno di x_0 può non essere bucato.

$\Rightarrow \forall I(f(x_0)), \exists I(x_0) \mid x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \in I(f(x_0))$ $\quad (f(I(x_0)) \subset I(f(x_0)))$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \mid |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- Se f è continua in tutti i punti di $A \subset \mathbb{R}$ si dice che f è continua in A.
- Se f è continua in tutti i punti di $Dom(f)$ si dice che f è continua.

NB: TUTTE LE FUNZIONI ELEMENTARI SONO CONTINUE (e le loro INVERSE)

1. Potenze (e radici) x^n, $x^{1/2}$
2. Polinomiali
3. esponenziali (a^x con $a>0$)
4. Logaritmiche
5. Trigonometriche
6. Iperboliche

esercizio:

- Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} \cos(x) = \nexists$:

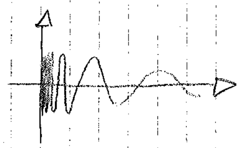
trovo 2 succ $(x_n, y_n) \to +\infty$

e verifico che $\lim_{n \to \infty} \cos(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} \cos(y_n)$

① $x_n = 2n\pi$ $\quad \lim_{n \to +\infty} 2n\pi = +\infty \quad \lim_{n \to +\infty} \cos(2n\pi) = +1$

② $y_n = (2n+1)\pi \quad \lim_{n \to +\infty} (2n+1)\pi = +\infty \quad \lim_{n \to \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1$ C.V.D.

- Dimostrare che $\lim_{x \to 0^+} \sin(1/x) = \nexists$

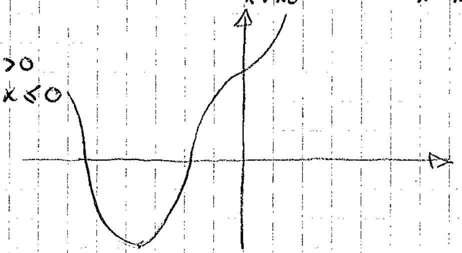


$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0^+ \ (n \to \infty) \quad \lim_{n \to +\infty} \sin(n\pi) = 0$

$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0^+ \ (n \to \infty) \quad \lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +1$ C.V.D.

NB: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ equivale a dire $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

ex: $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & se\ x > 0 \\ 3\cos(x) & se\ x \leq 0 \end{cases}$



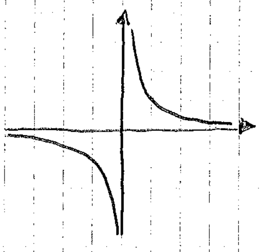
$\lim_{x \to 0} f(x) = 3 = \lim_{x \to x_0^-} 3\cos(x) = \lim_{x \to x_0^+} 3 + x^2 \left(= f(0) = 3 \cdot \cos(0) \Rightarrow f \text{ é CONTINUA in } 0. \right)$

solo x la parte tra parentesi

CASO 3) Tutti gli altri casi (DISCONTINUITÀ DI 2^a SPECIE)

- Almeno 1 dei 2 limiti unilaterali tende a ∞
  " " " " " " " non esiste.

$f(x) = \frac{1}{x}$



$\lim_{x\to 0} \nexists$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

($0 \notin Dom f$ MA non ricade nel caso 1 perché il limite non esiste finito)

Teorema del confronto: Se f, g e h sono funzioni definite in $I(c)\setminus\{c\}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e

$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to c} g(x) \exists$ ed è $= l$.

DIMOSTRO: $\lim_{x\to c} f(x) = l \quad \forall I_\varepsilon(l), \exists I'(c) \mid \boxed{x \in I'(c)\setminus\{c\}} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\lim_{x\to c} h(x) = l \quad \forall I_\varepsilon(l), \exists I''(c) \mid \boxed{x \in I''(c)\setminus\{c\}} \Rightarrow h(x) \in I_\varepsilon(l)$

$$\boxed{\begin{gathered}|h(x) - l| < \varepsilon \\ l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon\end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered}|f(x) - l| < \varepsilon \\ l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon\end{gathered}}$$

$\boxed{\begin{gathered}f, h, g \\ \text{definite almeno in un } I(c) \\ c = \begin{cases} \pm\infty \\ x_0 \\ x_0^\pm \end{cases}\end{gathered}}$

Prendo: $I(c) \cap I'(c)\setminus\{c\}$

$\underbrace{l-\varepsilon < f(x)}_{x\in I'(c)} \leq g(x) \leq \underbrace{h(x) < l+\varepsilon}_{x\in I''(c)}$

$x \in I'(c) \rightarrow$ vere $\leftarrow x \in I''(c)$

$\Rightarrow \quad l-\varepsilon \leq g(x) \leq l+\varepsilon$

$|g(x) - l| < \varepsilon$

$g(x) \in I_\varepsilon(l)$ (se $x \in I(c)$) $\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to c} g(x) = l}$

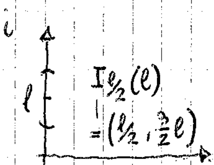
Teorema della permanenza del segno Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ e $l>0$ o $l=+\infty$ allora esiste un intorno di c dove f è positiva. $\quad \exists I(c) \mid \forall x \in I(c)\setminus\{c\} \Rightarrow f(x) > 0$ (se $l>0$)

DIMOSTRO: $\lim_{x\to c} f(x) = l \quad \forall I(l)\ \exists I(c) \mid x \in I(c)\setminus\{c\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

scelgo $I(l)$ contenuto nei numeri positivi

Dato $I_{l/2}(l)$ $\exists I(c) \mid x \in I(c)\setminus\{c\} \Rightarrow f(x) \in I_{l/2}(l)$

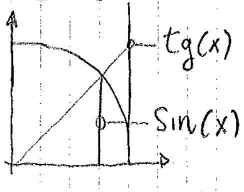
$\underline{f(x) > l/2 > 0}$ C.V.D.

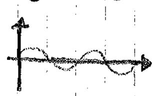


Applicazione del teorema del confronto

① DIMOSTRARE CHE $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

NB: $f(x)$ é pari $(f(x) = f(-x))$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Basta un lim unilaterale xk é = all' altro.)



$\sin(x) < x < tg(x)$ (se $x>0$  in $I^+_{\pi/2}(0)$) (vera in $I^+_{\pi/2}(0)$ MA Basta questo)

$\sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\left(\cdot \frac{1}{\sin(x)}\right)$ $1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$ $\xrightarrow{\text{INVERSA}}$ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

$\lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

② DIMOSTRARE CHE $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+1} = 0$

- (Numeratore) $x+\sin x \leq x+1$; $x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$
- (Denominatore) $x^2+1 \leq 2x^2$ (NB Non é vera sempre basta che lo sia in $I(+\infty)$)

$\frac{x^2}{2} \leq x^2+1 \leq 2x^2$

$\Rightarrow \frac{x-1}{2x^2} \leq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2/2}$; (al denominatore é inverso)

$\frac{x/2}{2x^2} \leq \frac{x-1}{2x^2} \leq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2/2} \leq \frac{2x}{x^2/2}$ (vera in $I(+\infty)$)

$\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{4x}} \leq \frac{x+\sin x}{x^2+1} \leq \underset{\downarrow 0}{\frac{4}{x}}$ $\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x^2+1} = 0$

corollario: Se f é limitata in $\dot{I}(c)$ ($\lim_{x\to c} f(x)$ se $\nexists$ é limitato)

e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$ ($0 \cdot n°$ Finito $= 0$)

DIMOSTRAZIONE: $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)g(x)| = 0$

f é limitata in $I(c)\setminus\{c\}$ $\Rightarrow$ $|f(x)| < K$ $K \in \mathbb{R}$

$\underbrace{0 \leq |g(x)f(x)|}_{0 \leq |...|} \leq K|g(x)|$

$\lim_{x\to c} 0 = 0$

$\lim_{x\to c} K|g(x)| = 0$ ($\lim_{x\to c} g(x) = 0$)

$\Rightarrow \lim_{x\to c} |g(x)f(x)| = 0$

NB $\frac{\sin x}{x} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x}} \cdot \overset{\text{limitata}}{\sin x}$ $\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

se $x \to \infty$

LIMITI NOTEVOLI (per risolvere le F.I.)

Padre di tutti: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ (definito come limite della succ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

1) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x = e^a}$

$\frac{a}{x}=\frac{1}{y}$; $y=\frac{x}{a}$; $x=ay$ $\quad x\to+\infty$ $\quad y\to+\infty$ $\quad a>0$

$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay}$; $\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a$ *

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$

* Perché è continua

2) $\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$ $\qquad \frac{1}{x}=y$ se $x\to 0$; $y\to+\infty$

$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

3) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log_e(a)}}$ $\qquad \left(\text{se } a=e \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

4) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a}$ $(a>0)$ $\qquad$ se $\boxed{a=e \Rightarrow \lim = 1}$

$y=a^x-1$ (se $x\to 0 \Rightarrow y\to 0$) $\quad a^x=y+1$; $x=\log_a(y+1)$

$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\log_a(y+1)}{y}\right)^{-1}$ $\qquad$ limite passa dentro f continua

?

$=\left(\frac{1}{\ln a}\right)^{-1} = \ln a$

5) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

$e^y=1+x$ (se $x\to 0 \Rightarrow y\to 0$)

$y=\ln(1+x)$

$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{y}\cdot\frac{y}{e^y-1} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}\cdot\frac{y}{e^y-1}\cdot\alpha$

$\alpha y = z$ $\qquad \lim_{y\to 0} = \underbrace{\frac{e^z-1}{z}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{y}{e^y-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\alpha}_{\to\alpha} = \alpha$

$\left(\begin{matrix} 0^\infty = 0 \\ \infty^0 = 1\end{matrix}\right)$

6) $\boxed{\lim_{x\to 0} x^\alpha|\ln x|^\beta = 0}$ $(\alpha,\beta>0)$

Se f è strettamente monotona $\Rightarrow$ è INIETTIVA ("0" ha al più una controimmagine)

Data $f(x) = e^x + x - 2\cos(x)$ su $[0,1]$

CONTINUA PERCHÉ SOMMA DI FUNZ. CONTINUE

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0 \\ f(1) = e + 1 - 2\cos(1) > 0 \end{array}\right\} \exists \text{ almeno } 1 \text{ zero in } [0,1]$$

Ma f è strett. monotona (somma funz. strett. $\nearrow$) e quindi iniettiva e c'è solo uno ZERO (controimmagine di "0")

- teorema dei valori intermedi

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA. "Se f assume due valori $\alpha < \beta$ allora assume tutti i valori tra α e β"

DIMOSTRAZIONE: assume 2 valori $\alpha < \beta$

$\exists x_\alpha, x_\beta \in [a,b] \mid f(x_\alpha) = \alpha$ e $f(x_\beta) = \beta$

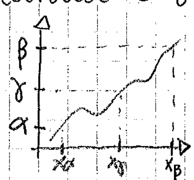
devo dim. che: $\forall \gamma \in (\alpha, \beta)$, $\exists x_\gamma$ dove $f(x_\gamma) = \gamma$

definisco: $g: [x_\alpha, x_\beta] \to \mathbb{R}$

$g(x) = f(x) - \gamma$ CONTINUA (f continua e γ CONTINUA)

$g(x_\alpha) = f(x_\alpha) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$

$g(x_\beta) = f(x_\beta) - \gamma = \beta - \gamma > 0$



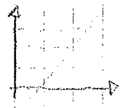
$\Rightarrow$ Per teorema esistenza degli zeri

$g(x)$ da qualche parte si annulla: $\boxed{\exists x_\gamma} \mid g(x_\gamma) = 0$

$f(x_\gamma) - \gamma = 0$

$\boxed{f(x_\gamma) = \gamma}$ CVD

esempio: $f(x) = \dfrac{e^{x^2} + \cos(\sin x) - x^{43}}{\mathrm{arctg}(x^2 + \sin x)}$ Ha Max e Min? Sì! 1) è continua
$[3,7]$
2) $[3,7]$ chiuso
3) WEIERSTRASS

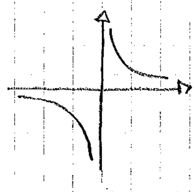


Conclusione ① f STRETTAMENTE MONOTONA $\Rightarrow$ f INIETTIVA
se f è anche continua:

1) STRETT. MON. $\rightarrow$ INIETTIVA
non contrario ($1/x$)

2) Iniettiva
Continua $\rightarrow$ STRETT. MON.
$\Downarrow$
$\boxed{\text{se f continua}}$
STRETT. MON. $\Leftrightarrow$ INIETTIVA

f STRETTAMENTE MONOTONA e CONTINUA $\Leftrightarrow$ f INIETTIVA e CONTINUA



INIETTIVA
(MA non CONTINUA)
$\Downarrow$
non strett. monotona

② f STRETTAMENTE MONOTONA e CONTINUA su I

$\Downarrow$
$\exists f^{-1}$

$\exists f^{-1}$ (perché f è iniettiva dato che è strett. monotona) ed è continua. continuità della f inversa

CONFRONTO LOCALE DI FUNZIONI

Faccio $\lim_{x \to c} f(x)/g(x)$ per confrontarle in un $I(c)$

- SIMBOLI DI LANDAU $f, g : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

① Si dice che f è **equivalente** a g per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = 1$

$f \sim g$ per $x \to c$

ex
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$\Rightarrow \sin x \sim x$ per $x \to 0$

② Si dice che f è **trascurabile** rispetto a g per $x \to c$ se $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = 0$

$f = \mathbf{o(g)}$ per $x \to c$

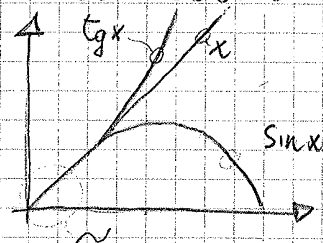
f è o PICCOLO di g per $x \to c$

ex
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, \frac{\sin x}{x} = 0$$
$\Rightarrow \sin x = o(\sqrt{x})$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{tg x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x / \cos x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$\sin x \sim tg x \sim x$

$\sin x \sim x$

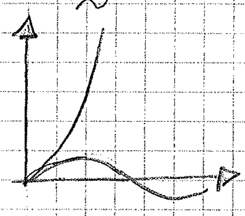


Nell $I(0)$ $\sin x \sim tg x \sim x$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = 0 \qquad x^2 = o(\sin x) \quad x \to 0$$

$\left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$

$\sin(1/100) = 0{,}0099$



Cose che in $I(c)$ sono trascurabili

PROPRIETÀ: Per $x \to c$ $\quad f \sim g \iff f = g + o(g)$

dim $f \sim g$: $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = 1$

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)/g(x) - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f - g = o(g) \;;\; f = g + o(g)$$

Algebra dei limiti (vedo il caso [illegible])

OSSERVAZIONI ▸ $o(f) = o(\alpha f)$ se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(se f è trascurabile non è α che cambia le cose)

$$\lim_{x \to 0} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{\alpha \sqrt{x}} = 0$$

$\sin x = o(\sqrt{x})$ NON SCRIVO PIÙ α.

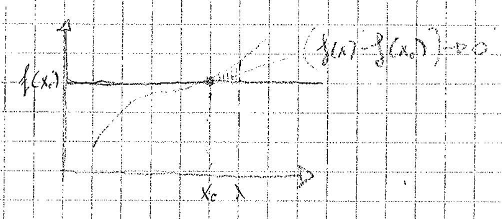
▸ $f = o(1)$ $\quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{1} = 0 \;;\; \lim_{x \to c} f(x) = 0$

▸ $\Rightarrow$ rivedo delle definizioni : FUNZIONE CONTINUA: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

$f(x) - f(x_0) = o(1)$

$f(x) = f(x_0) + o(1)$



Va usato IN COMBINAZIONE con la REGOLA DI SOSTITUZIONE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} \quad \begin{pmatrix} y=f(x) & f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \text{se } x\to 0 & \Rightarrow y \to 0 \end{pmatrix} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$\sin(f(x)) \sim f(x)$

$\sin(f(x)) = f(x) + o(f)$

- $e^t = 1+t+o(t) \quad t\to 0$

$e^{5x} = 1+5x+o(x) \quad x\to 0 \ (5x=t,\ t\to 0)$

- $\sqrt{1-3x^2} = 1+\frac{1}{2}\cdot -3x^2 + o(x^2)$

$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}t + o(t)$

Proprietà:
$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x\to c} \frac{f(x)+o(f)}{g(x)+o(g)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \ (*) \\ \lim_{x\to c} (f(x)+o(f))\cdot(g(x)+o(g)) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x)\end{gathered}}$$

NB: GLI o(..) LI TOLGO SOLO ALLA FINE!!
QSTA È LA PROPR IMPORTANTE

(*): DIM:
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)\left(1+{}^{o(f)}/_{f(x)}\right)}{g(x)\left(1+{}^{o(g)}/_{g(x)}\right)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to c} \underbrace{\frac{1+{}^{o(g)}/_{g(x)}}{1+{}^{o(f)}/_{f(x)}}}_{\downarrow\, 1} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$\to 0$

ex: • $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$

$1-\cos t = \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \quad (2x\to 0)$

$1-\cos(2x) = \frac{1}{2}(2x)^2 + o(2x)^2$

$1-\cos(2x) = 2x^2 + o(x^2)$

$\sin t = t + o(t) \quad (3x\to 0)$

$\sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$

$\sin^2(3x) = (3x+o(x))^2$

$= 9x^2 + 6x\,o(x) + o(x)^2$

$= 9x^2 + o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+o(x^2)}{9x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+x^3}{4x+\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{4x+x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

Una funzione f si dice INFINITESIMA per $x\to c$ (in c) se $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad (f=o(1))$

Una funzione f si dice INFINITA per $x\to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$

CONFRONTO TRA INFINITESIMI e INFINITI

Se f e g sono INFINITESIME in c $\lim_{x\to c} {}^{f(x)}/_{g(x)} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ si dice che f e g sono INFINITESIME DELLO STESSO ORDINE

Calcolo Differenziale

$f: I \to \mathbb{R}$

I é un intervallo

$x_0 \in I$

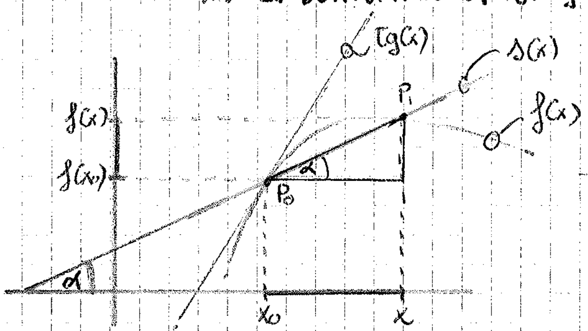
$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

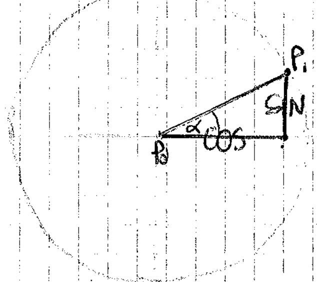
Rapporto Incrementale FISICAMENTE RAPPRESENTA UNA VELOCITÀ MEDIA $\frac{\Delta f (\text{spazio})}{\Delta t}$

NB IL LIMITE CALCOLATO INVECE UNA v ISTANTANEA

• DEFINIZIONE: Se il limite esiste finito si dice che f é derivabile in x_0. Il valore del limite si chiama derivata (prima) di f in x_0 ($f'(x_0)$; $Df(x_0)$; $\frac{df}{d(x)}(x_0)$)

NB LA DERIVABILITÀ DI f É UNA PROPRIETÀ PUNTUALE (DEL PUNTO)





NON é UGUALE a tg(x) NON è 1 RETTA è più valore

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg(\alpha)$$

tg(x) si esprime solo con le derivate (o in casi elementari tipo circonferenza)

$tg(x) = \lim_{P \to P_0} s(x)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ é la pendenza della retta che passa per i punti $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P_1(x, f(x))$; retta secante il grafico di $f(x)$ in P_0 e P_1 che chiamiamo $s(x)$

EQ. DI $s(x)$: $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$; $\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta f} = \frac{x - x_0}{\Delta x}$; $\boxed{f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\Delta f}{\Delta x}}_{\text{Pendenza della retta } s(x)} (x - x_0)}$

NB $s(x)$ con $x \to x_0$ (e l'avvicinarsi dei punti P_0 e P_1) diventa la $tg(x)$ ⊛ ed il suo coefficiente angolare (R.T.) diventa la derivata prima di $f(x)$ in x_0 ($f'(x_0)$) ⊛

$$tg(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cambio di Variabile:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{pmatrix} x - x_0 = h \\ x \to x_0 \\ h \to 0 \end{pmatrix} \quad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\Rightarrow tg(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ diventa $tg(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$

ORA LA VARIABILE É h ($= x - x_0$)

NB: Se f é derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ é $\boxed{\text{continua}}$ in x_0

DIM: se f é derivabile in x_0: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

ma con $x \to x_0 \Rightarrow (x-x_0) \to 0$: $f(x) = f(x_0) + o(1)$ o (é un $o(1)$)

$f(x) = f(x_0) + o(1) \Leftrightarrow f(x)$ é continua in x_0.

Regole di Derivazione (Algebra delle derivate)

① $(af+bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$ LINEARITÁ DELLA DERIVATA $(f+g)'(x) = f'+g'$ $(af)'(x) = a \cdot f'(x)$

② $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

DIM: $f(x+h)g(x+h) = (f(x)+hf'(x)+o(h))(g(x)+hg'(x)+o(h))$

$fg + hg'f + oh + hf'g + \underbrace{h^2 f'g'}_{o(h)} + o(h) + o(h)$

$= f(x)g(x) + h\underbrace{(f'(x)g(x)+g'(x)f(x))}_{=(f\cdot g)'(x)} + o(h)$

③ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

▶ POTENZE: $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow f'(x) = \alpha x^{(\alpha-1)}$

$(x+h)^\alpha = x^\alpha(1+h/x)^\alpha = x^\alpha\left(1+\alpha \frac{h}{x} + o(h)\right) = x^\alpha + \boxed{\alpha x^{\alpha-1}}\, h + o(h)$

▶ $\sin(x)$: $f(x) = \sin x$ $\Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$

$= \sin x(1 - \underbrace{\tfrac{1}{2}h^2 + o(h^2)}_{*o(h)}) + \cos x(h + o(h))$

$= \sin x + \boxed{\cos x}\, h + o(h)$

$\sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$\sin x = x + o(x)$

▶ $\cos(x)$: $f(x) = \cos x$ $\Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$

$= \cos x(1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \overset{*}{o}(h^2)) - \sin x(h + o(h))$

$= \cos x\ \boxed{-\sin x}\, h + o(h)$

▶ $tg(x)$: $f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2(x) \vee 1/\cos^2 x$

$D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ (caso 3)

▶ a^x: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$ $(a = e \Rightarrow f'(x) = e^x)$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{a^{(x+h)} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{a^x(a^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(a^h-1)}{h} \cdot a^x = a^x \cdot \ln a$

NB: $D(e^{-x}) = -e^{-x}$

RIEPILOGO ALGEBRA DERIVATE

1a $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

1b $(af)'(x) = a \cdot f'(x)$

$(af+bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$ Linearità della derivata

2 $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

4 $(g \circ f)'(x) \left(= D(g(f(x)))\right) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

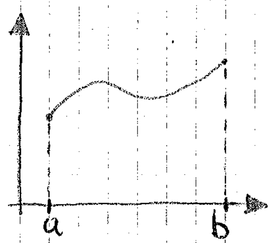
5 $(f^{-1})'(y) \quad \left(f(x) = y \rightarrow f^{-1}(y) = x\right) \quad = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ Sputa fuori le x $= 1/f'(x)$

ex: $f(2) = 5$, $f'(2) = 7$ $\quad ? = D(f^{-1}(5)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} \quad \begin{pmatrix} \text{se } f(2)=5 \\ f^{-1}(5)=2 \end{pmatrix} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{7}$

- $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \longrightarrow f'(x) = \alpha x^{(\alpha-1)}$
- $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = tg(x) \longrightarrow f'(x) = 1 + tg^2(x)$ o $\frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \ln a \quad (e^x \rightarrow e^x)$
- $f(x) = \log_a x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (\ln x \rightarrow 1/x)$
- $f(x) = \sinh x \longrightarrow f'(x) = \cosh x$
- $f(x) = \cosh x \longrightarrow f'(x) = \sinh x$
- $f(x) = \text{arctg}(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+y^2}$
- $f(x) = \arcsin(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $f(x) = \arccos(x) \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

6 $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -f'(x)/f^2(x)$

● Cosa succede se f non è derivabile in x_0



$\cancel{\lim_{x\to a}}$ MA $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$

$\cancel{\lim_{x\to b}}$ MA $\lim_{x\to b^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$

è derivabile se ∃ finito l (caso di disc eliminabile? il limite ∃ ma un soddisfatta: f derivabile in x_0 ⇒ f continua in x_0

PROPRIETÀ: f è derivabile in x_0 ⟺ f è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e le due derivate coincidono.

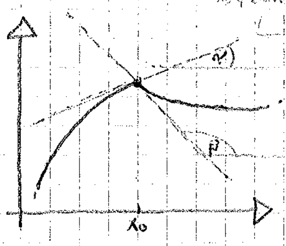
ex: $f(x) = \begin{cases} \cos x & (x<0) \\ 1+x^2 & (x\geq 0) \end{cases}$ $\cdot \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1+x^2-1}{x} = x = 0$ $\cdot \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{2}x = 0$

$f'_+ = 2x = 0$ $f'_- = -\sin x = 0$

● PUNTI DI NON DERIVABILITÀ f CONTINUE CHE IN UN PUNTO x_0: $f'(x_0) \nexists$ $\begin{pmatrix} \lim \nexists \\ \lim = \pm\infty \end{pmatrix}$

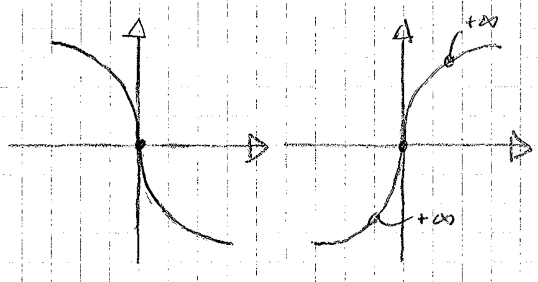
caso $x_0 \notin$ Dom — NN CONTINUA ← e l'eliminabile?
NN CONT. ← e $\lim_+ \neq \lim_-$?
↳ si può derivare in $x_0 \notin$ Dom?

① $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ ∃ finiti ma sono diversi.
x_0 è un PUNTO ANGOLOSO
(anche se solo uno è finito).



$tg(\alpha) = f'_-(x_0)$
$tg(\beta) = f'_+(x_0)$

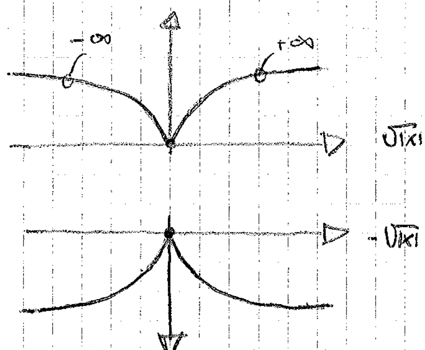
(2a) $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambi ∞.
(caso in cui la f non è derivabile)
ma hanno lo stesso segno.
x_0 è un PUNTO A TG VERTICALE



ex: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\underset{= +\infty}{(x=0)}$

(2b) $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambi ∞,
ma di segni diversi
x_0 è un PUNTO DI CUSPIDE

ex: $f(x) = \sqrt{|x|}$ $(x=0)$



$f(x) = \begin{cases} a\sin(2x) - 4 & (x<0) \\ b(x-1) + e^x & (x\geq 0) \end{cases}$ trova a, b | f derivabile in $x_0 = 0$

① $x<0$ derivabile (somma f elementari)
② $x>0$ ″
③ 0: trova a,b | f cont in x_0
④ $\lim_{x\to 0^\pm} (f'(x))$

USO DELLE DERIVATE

- Ottimizzazione TROVARE I MAX e MIN (ESTREMI)

__Def__: Sia f derivabile in x_0, se $f'(x_0)=0$ si dice che é un PUNTO CRITICO (STAZIONARIO)

__Teorema__: (di Fermat) Fermà

Se:
- f é definita in $I(x_0)$ __COMPLETO__
- x_0 é un estremo locale per f
- f é derivabile in x_0

$\Rightarrow x_0$ é CRITICO per f $(f'(x_0)=0)$

f può anche non essere continua in $I(x_0)$, solo in x_0! perché lì deve esser derivabile

__DIM__: x_0 é un Max locale $\exists I(x_0) \mid f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in I$

- $x \in I^+(x_0)\ (x > x_0)$ $\quad \dfrac{f(x)-f(x_0)\ \}\leq 0}{x-x_0\ \}>0} \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

Permanenza del segno

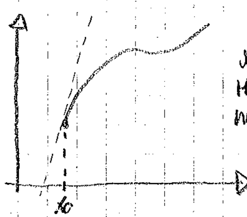
- $x \in I^-(x_0)\ (x < x_0)$ $\quad \dfrac{f(x)-f(x_0)\ \}\leq 0}{x-x_0\ \}<0} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\Rightarrow f$ é derivabile in x_0 $\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} = \lim\limits_{x\to x_0^-}\right) \Leftrightarrow f'(x_0)=0$

é un punto critico C.V.D.

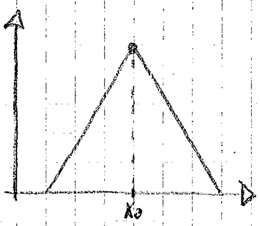
da verificare

__NB__: Non tutti gli estremi sono punti critici, ma tutti i punti critici sono estremi



x_0 é un Min locale ma $f'(x_0) \neq 0$

($I(x_0)$ non completo)

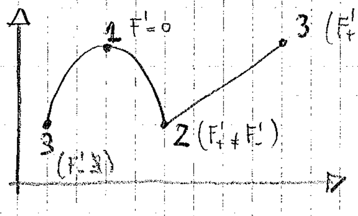


x_0 é un Max Locale ma $f'(x_0)\ \nexists$

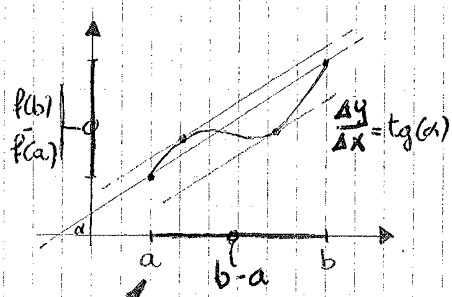
(f non derivabile in x_0)

- Dove cercare gli estremi:
  - ▶ TRA I PUNTI CRITICI ①
  - ▶ TRA I PUNTI DI NON DERIVABILITÀ ②
  - ▶ AGLI ESTREMI DEL DOMINIO ③

Intorno non completo



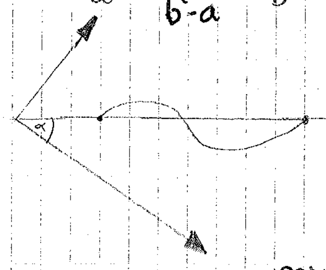
● TEOREMA DI LAGRANGE: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$



Supponiamo: • continua su $[a,b]$
• derivabile almeno in (a,b)

$\Rightarrow$ Esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$



SE RUOTO IL GRAFICO VIENE SIMILE A ROLLE (solo che qui i punti non hanno $f'(x)=0$ ma = al coefficiente angolare della retta ($\Delta f/\Delta x$) = $f'(c)$)

nella pratica non ruoto il grafico ma sottraggo alla $f(x)$ una retta per far prendere quella configurazione.

DIMOSTRAZIONE PRENDO: $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ← è una retta

$g(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

CALCOLO GLI ESTREMI: $g(a) = f(a) - \frac{\Delta f}{\Delta x}(a-a) = \boxed{f(a)}$

$g(b) = f(b) - \frac{\Delta f}{\cancel{\Delta x}}\cancel{(b-a)} = f(b) - (f(b) - f(a)) = \boxed{f(a)}$

$g(a) = g(b) = f(a)$ $\qquad \left(g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)$

APPLICO ROLLE: $\exists c \in (a,b) \mid g'(c) = 0$

IN c: $g'(c)$: $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$; $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Conseguenze teorema di Lagrange:

① CARATTERIZZAZIONE FUNZIONI COSTANTI "Se $f = k$ in $[a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$"

dimostrabile solo con Lagrange

DIMOSTRAZIONE: Sia $x \in [a,b]$, applico " a f in $[a,x]$

$\Rightarrow \exists c \in [a,x] \mid \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0$ (per ipotesi)

$f(x) = f(a) \quad \forall x \in (a,b)$

ex: $f(x) = arctg(x) + arctg(1/x)$

$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

da rivedere l'ex ... il succo anche f non cont in 0 ⇒ non vale!

② RELAZIONE TRA MONOTONIA e SEGNO DELLA DERIVATA

"Sia f derivabile su intervallo I

• f crescente su $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

• $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ è strettamente crescente"

(anche per decrescente)

DIMOSTRAZIONE: • f crescente su $I \Rightarrow f'(x) \geq 0$ ($\forall x \in I$)

$f(x+h) - f(x) \geq 0$ ($\forall h > 0$) $\quad f(x+h) \geq f(x)$ (f è crescente)

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ ($\to \geq 0$, $\to \geq 0$) ; $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'_+(x) \geq 0 = f'_-(x)$

permanenza del segno

perché è ipotesi è derivabile $f'_+ = f'_-$

▸ $f \rightsquigarrow f'$ definisco una funzione D: $D(f) = f'$

$D: C^2(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$

$D: C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$

$D: C^\infty \to C^\infty$

D INIETTIVA? NO! $D(f(x)) = f'(x)$

$D(f(x)+3) = f'(x)$

Definizione $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$

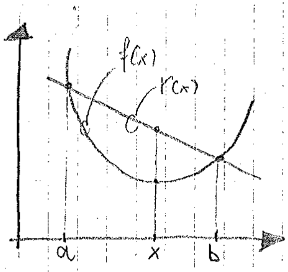
"Si dice che f é CONVESSA su I se $\forall x_1, x_2 \in I$ il grafico di f é sotto al segmento per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$"

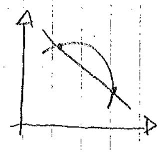
ANALITICAMENTE:

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad (r(x))$$

$$F \text{ CONVESSA}: f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

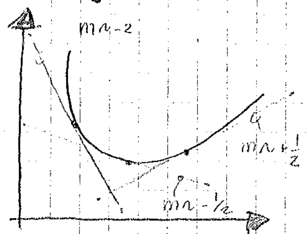
$x \in [a,b]$



(CONCAVA  $\forall x_1, x_2 \in I$ il $G(f)$ é sopra al segm per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$)

▸ f é derivabile:
- É CONVESSA ⟺ IL GRAFICO DI f STA SOPRA LA Tg
- SE É CONVESSA ⇒ f' é crescente ⇒ $(f')'$ é positiva

(contrario per concava)



Teorema: ① Se f é derivabile ed f' é crescente ⇒ f CONVESSA

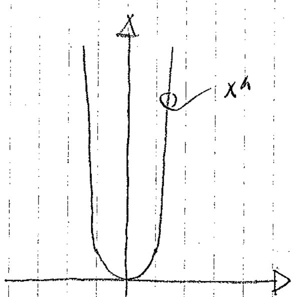
② Se f é derivabile 2 volte e $f'' \geq 0$ ⇒ f CONVESSA

es $f(x) = x^3 - x$ ∥ $f'(x) = 3x^2 - 1$ ∥ $f''(x) = 6x \geq 0 \iff x \geq 0$ (CONVESSA per $x \geq 0$; CONCAVA per $x < 0$)

PUNTI IN CUI f'' CAMBIA IL SEGNO: PUNTI DI FLESSO PER f

(se x_0 é un punto di flesso ⇒ $f''(x_0) = 0$ MA NON VICEVERSA

ESISTONO FUNZIONI CON PUNTI IN CUI $f''(x) = 0$ SENZA FLESSO (es x^4 in 0))



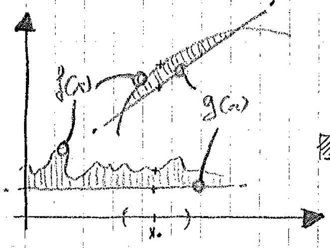
$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$ $(\geq 0 \ \forall x)$

$f''(0) = 0$

Ma in 0 non c'é un flesso

APPROSSIMAZIONE LOCALE DI FUNZIONI f data, cercare g più semplice di f, in modo che la differenza f-g sia piccola



DEVO RENDERE $\max\limits_{[a,b]} |R(x)|$ PICCOLO

▨ = R f - g = R (resto)

DEVO RENDERE PICCOLA L'AREA TRA f e g ‖ Non vicini in tutti i punti ma in media abb. vicini.

- l'approssimazione LOCALE (attorno a un punto x_0) si considera buona se $f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n)$ con n più grande possibile (+ n è grande + g sembra f).

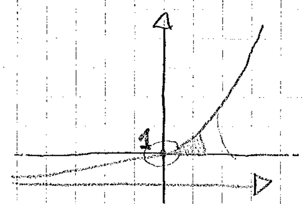
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$0<(x-x_0)<1 \Rightarrow (x-x_0)^n$ diventa piccolo al crescere di n.
+ GRANDE È n, + f-g È TRASCURABILE RISPETTO A UNA COSA PICCOLA (è sempre + "insignificante")

ex: $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$; In questo contesto si cerca tra i polinomi

1) Polinomio di grado 0 ($P_0(x)$)

$P_0 = 1$ $R = f(x) - P(x) = e^x - 1 = 0$ $(x\to 0)$



f continua in x_0

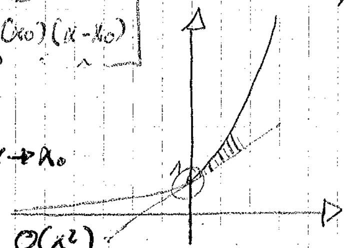
$\boxed{P_0 = f(x_0)}$ $f(x) = f(x_0) + o(1)$; $f(x) - P_0(x) = o(1)$ $(x\to 0)$

2) Polinomio di grado 1 ($P_1(x)$) ⟹ GUADAGNO UN ORDINE DI o PICCOLO (precisione>)
$a+bx$

$\boxed{P_1(x) = \underset{(a)}{f(x_0)} + \underset{(b)}{f'(x_0)}(x-x_0)}$
$x\to 0$

$R = \underset{f_x}{e^x} - \underset{a+bx}{(1+x)} = 1 + x + o(x) - 1 - x = o(x)$

f derivabile ⟹ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ $x\to x_0$



3) Polinomio di grado 2 ($P_2(x) = a+bx+cx^2$) ⟶ $f(x) - P_2(x) = o(x^2)$
$(x\to x_0)$

$e^x - P_2(x) = o(x^2) \Rightarrow \dfrac{e^x - a - bx - cx^2}{x^2} \to 0$ $(x\to 0)$
- $e^x \to 1$
- $a \to a$
- bx e $cx^2 \to 0$

VERIFICATO SE $a=1$!

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - bx - cx^2}{x^2} = \frac{0}{0}$$

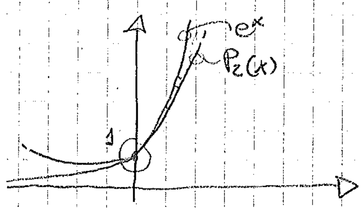
Hopital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - b - 2cx}{2x}$
- $e^x \to 1$
- $b \to b$
- $2cx \to 0$

VERIFICATO SE $b=1$ $= \frac{0}{0}$

Hopital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 2c}{2} = \dfrac{1-2c}{2} = 0$ se $c = \frac{1}{2}$ ⟹ $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

HO GUADAGNATO UN ORDINE SU o PICCOLO! (+ preciso)
MA f deve essere derivabile due volte

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
(a, b, c... NON CAMBIANO)



$$\boxed{P_2(x) = \overset{a}{f(x_0)} + \overset{bx}{f'(x_0)(x-x_0)} + \underset{\frac{1}{2}cx^2}{\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}}$$

SVILUPPO DI ORDINE n $\rightarrow$ $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$ BASTA CHE L'o PICCOLO SIA ORDINE n.

ex: $f(x) = 1 + x + o(x^{10})$ polinomio di grado 1 ma sviluppo di ORDINE 10

- Dimostrazione della non appartenenza di e ai n° razionali:

Per assurdo $e \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = p/q \mid p, q \in \mathbb{N}$

Formula di taylor con R di Lagrange all'ordine n per e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad c \in (0,1)$$

$$\Rightarrow p/q = 1 + 1 + \dots \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad \underbrace{\frac{p}{q} n!}_{\text{INTERO}} = \underbrace{n!\left(1 + \dots + \frac{1}{n!}\right)}_{\text{INTERO}} + \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad c \in (0,1)$$

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

? in $x = 1$? Ma $\Rightarrow$ non avrei $o(x-1)^n$?
Ma non ho usato quello $x_0 = 0$??

NB PUÒ SUCCEDERE DI GUADAGNARE UN ORDINE (x esempio sin e cos)

$*f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad f = C^\infty$

$$f(x) = T_{n-1}(x) + o(x^{n-1})$$
$$f(x) = T_n(x) + o(x^n)$$
$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{chi mi dice che } c = x_0 = 0$$
$$\overset{!}{=} T_{n-1}(x) + o(x^n) \quad (e\ f^{(n)}(x_0) = 0\ x)$$

NB La derivata di una f PARI è DISPARI e viceversa

- $f(x) = \sin x$ dispari $\Rightarrow$ derivata pari

$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{IV}(x) = +\sin x$	$f^{IV}(0) = 0$

ORDINE	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f^{(n)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \overset{f^{(n)}(0)}{(-1)^k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

sarebbe $2n+1$ ma tanto $2n+2$ pari (e vale 0)

- $f(x) = \cos x$ pari $\rightarrow$ derivata è dispari

$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = +\cos x$	$f^{IV}(0) = 1$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{\overset{\text{Guadagno 1 ordine}}{2n+1}})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

- Coefficiente Binomiale generalizzato: $\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} \end{cases}$ k n° di fattori da moltiplicare

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$
$$1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 \dots + o(x^n)$$

- esempio di come si sviluppa una frazione

SVILUPPO ALL'ORDINE 3 di $f(x) = tg(x) \left(= \frac{\sin x}{\cos x}\right)$ $(x=0)$

O PICCOLO HA UN GRADO IN PIÙ PERCHÉ IL TERMINE DOPO (a_4 per il sin e a_3 per il cos) VALE 0.
Sin è dispari ⇒ termini pari = 0
Cos è pari ⇒ termini dispari = 0
(vale x f. la pari e dispari)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$tg(x) = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)} \qquad \left(\frac{1}{1+t} = 1 - t + o(t) \quad (t \to 0)\right)$$

$$\frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) + \underbrace{\boxed{o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}}_{o(x^2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$ ‖ è lo sviluppo di $\frac{1}{\cos x}$

la Tg è dispari

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

- esempio di come sviluppo di f composte

$g(f(x))$ TROVARE SVILUPPO DI Mc LAURIN $(x_0 = 0)$ CONOSCENDO SVILUPPI DI g e DI f

- Bisogna che $f(x) \to 0$
- $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$
  $f(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m + o(x^m)$ ‖ non c'è a_0 perché $a_0 = 0$ dato che $f(x) \to 0$ (se fosse $= 5$ per $x \to 0 \Rightarrow f(x) \to 5$)
- $g(f(x)) = a_0 + a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \dots + a_n f^n(x) + o((f(x))^n)$

$$= a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m + o(x^m)) + a_2(b_1 x + \dots + b_m x^m + o(x^m))^2 + \dots$$

quanti ne vanno ... gli ultimi termini?

$$+ o\left(\left(b_1 x^r + o(x^m)\right)^n\right)$$

$b_1 x = \underbrace{o(x)}_{?}{}^n = o(x^n)$
com'è possibile $x = o(x)$???

ex: SVILUPPO ALL'ORDINE 3 $e^{\sin x}$ $(x_0 = 0)$

- $\sin x \to 0$ se $x \to 0$
- $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \boxed{o(\sin^3 x)}$ Si equivalgono

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + \boxed{o(x^3)}$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

- Se mi ritrovo con o piccoli e basta ⇒ ho troppi pochi termini

$\sin x - x = (x + o(x)) - x = o(x)$ dice solo che $(\sin x - x) \to 0$ + veloce di x
NON BASTA!

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \longrightarrow \text{ok}$$ → Parte Principale rispetto a $f(x) = x$

- Se mi ritrovo $o(x^{\text{Altissimo}})$ ho troppi termini
- • $f(x) = 2 - x \underbrace{+ 3x^4 + x^6 + o(x^6)}_{o(x)}$
  • $g(x) = x^2 + o(x^2)$

TEOREMA: Sia f derivabile n volte $(n>2)$ e sia

STUDIO DEI PUNTI CRITICI $\Leftarrow = 0$ — $f'(x_0) = \dots\dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$ a_0, a_1 come vuole

$f^{(m)}(x_0) \neq 0$

$(2 \leq m \leq n)$

$\Rightarrow$ • Se m è pari e $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un MINIMO

• Se m è pari e $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un MASSIMO

• Se m è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di FLESSO (tg orizzontale)

ex: $f(x) = -2 + 7(x-6)^8 + o(x-6)^8$

$f^{(8)}(6) = +7 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6$ è un Minimo

DIMOSTRAZIONE (per $m = 2n$ (pari) e $f^{(m)}(x_0) > 0$

• Sviluppo di Taylor all ordine m: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \dots}_{=0} + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$

$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$

$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x-x_0)^m}_{\substack{\text{pari} \\ \geq 0}} \left(\underbrace{\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}}_{>0} + \underbrace{o(1)}_{0} \right)$

$\Rightarrow$ Se x sufficientemente vicino a x_0, $\left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + o(1) \right) > 0$ sicuramente

$\Rightarrow$ In $I(x_0)$ $\quad f(x) = f(x_0) + (\text{QUANTITÀ} \geq 0)$; $f(x) \geq f(x_0) \rightarrow$ x_0 Min locale

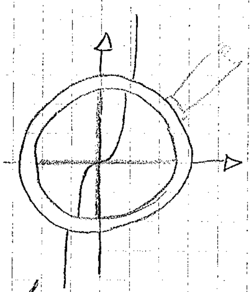
---

ex: $f(x) = \cos x^4 \ln(1+x^5)$

$= \left(1 - \frac{x^8}{2} + o(x^8)\right) \cdot \left(x^5 + o(x^5)\right) = x^5 + o(x^5)$

La prima derivata NON nulla è la $f^{(5)}(0) = 1$ DISPARI

$\Rightarrow x_0$ è un flesso



$f(x)$ aveva già potenze alte $\Rightarrow$ Basta lo sviluppo 1

NB $\quad \frac{e^{x^2} - \cos x}{x - \sin x} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{9}{x}$ SBAGLIATA (sarebbe giusta se: $= \frac{9 + o(x^2)}{x + o(x^3)}$)

1ª Uguaglianza è giusta ma la 2ª NO perché si possono togliere gli o piccoli (Princ. di eliminazione di Term. trasc) solo nel CALCOLO DEI LIMITI!

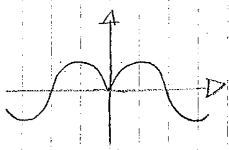
$x^2|x|$ è C^2

NB: $x^2|x| + e^{2x}$ lo sviluppo di Mclaurin è fino al 2° ORDINE al Max

non derivab 3 volte ↑ non cont in $x_0 = 0$

inf: $(x^2|x|)' = \begin{cases} 3x^2 & (x>0) \\ -3x^2 & (x<0) \end{cases}$ ✓; $(x^2|x|)'' = \begin{cases} 6x & (x>0) \\ -6x & (x<0) \end{cases}$ ✓ ; $(x^2|x|)''' = \begin{cases} 6 & (x>0) \\ -6 & (x<0) \end{cases}$

es: $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ -\sin x & x < 0 \end{cases}$



$? = \int f(x)\,dx$

- $x > 0$ $\quad F_1(x) = -\cos x + C_1$
- $x < 0$ $\quad F_2(x) = \cos x + C_2$

$\left(F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1 \ (x>0) \\ \cos x + C_2 \ (x<0) \end{cases} \quad F'(x) = f(x) \ \text{ se } x \neq 0 \right)$

- $F(x)$ deve essere continua in $x_0 = 0$

{ Per definizione F è derivabile in $\mathbb{R}$ e quindi continua $\Rightarrow$ raccordo F_1 con F_2

$F_1(0) = -1 + C_1$
$F_2(0) = 1 + C_2$ $\quad ; \quad 1 + C_2 = -1 + C_1 \quad ; \quad \underline{C_2 = C_1 - 2}$ || così usiamo solo una C.

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_1 & x \geq 0 \\ \cos x - 2 + C_1 & x < 0 \end{cases}$

- Così facendo (Rendendo F continua) ho verificato anche che $f(0) = 0$:

$\lim_{x \to 0} F'(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \left(\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} -\sin x = 0 \right)$

VALE SOLO SE F CONTINUA IN $x_0 = 0$ e DERIVABILE in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

- LINEARITÀ DELL' INTEGRALE: $f, g \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\int a f(x) + b g(x)\,dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx$ || Cost moltiplicative passano fuori; $\int$ SOMMA = SOMMA DI $\int$

Chiamo F e G 2 primitive di f e g $\Rightarrow D(aF + bG) = af + bg$
$(aF + bG)$ è una primitiva di $(af + bg)$

$\int \cos^2 x\,dx \left(\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

- REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad : \quad fg$ è una primitiva di $(f'g + fg')$

$\Rightarrow \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x)g(x) + C$

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

ex $\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x \cdot 1\,dx = e^x x - e^x = e^x(x-1) \boxed{+C}$

$f'(x) = e^x \xrightarrow{P} f(x) = e^x$
$g(x)dx = x\,dx \xrightarrow{D} g'(x) = 1$

SE INVERTI $g(x)$ e $f(x)$ COMPLICHI SOLO LE COSE (A VOLTE VA A VOLTE NO) VAI A TENTATIVI
SI PUÒ USARE + VOLTE (a mo' di l'Hopital)

- $\int \ln x\,dx = \int \underset{f'(x)}{1} \cdot \underset{g(x)}{\ln x}\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - x + C$

• Integrazione del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ $P(x), Q(x)$ polinomi / grado $P(x) <$ grado $Q(x)$

$\left(\int \frac{P}{Q}dx = \int H + \int \frac{R}{Q}\right)$ senno basta che divido.

1) grado $Q = 2$ $Q(x) = x^2+bx+c$ $(\Delta<0)$
grado $P = 0$
$\Rightarrow$ completo il quadrato al denominatore

$$\int \frac{1}{x^2-2x+10}dx = \int \frac{1}{x^2-2x+1-1-10}dx = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+9} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x-1}{3})^2+1}$$

$$\left(\text{arctg}'(\tfrac{x-1}{3}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{x-1}{3})^2+1}\right) \quad = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{1}{3}\frac{dx}{(\frac{x-1}{3})^2+1} = \frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right)+c$$

(si faceva anche per sostituzione)

2) grado $Q = 2$ $Q(x) = x^2+bx+c$ $(\Delta<0)$
grado $P = 1$
$\Rightarrow$ rendo $P(x) = Q'(x)$

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+4}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-4+4}{x^2-2x+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx}_{=\ln(x^2-2x+4)} + \frac{4}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2-2x+4}dx}_{\text{come caso } 1}$$

NO VALORE ASSOLUTO XK $\Delta<0$ nn si annulla mai

3) grado $Q = 2$ $Q(x) = x^2+px+q$ con 2 soluzioni α, β
grado $P = 1$
$\Rightarrow$ esistono A, B t.c. $\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx \quad \begin{pmatrix}\alpha=-2\\ \beta=+1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{x^2+x-2}\right)$$

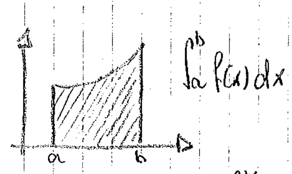
$(A+B)x = (1)x$
$2A-B = +5$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

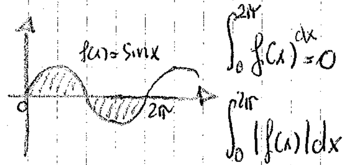
$3A = 6$ $\quad A=2$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{dx}{x+2} = 2\ln|x-1| - \ln|x+2|$$

- Se f è POSITIVA su $[a,b]$ $\Rightarrow$ area sotto il grafico di $f(x)$ è per definizione $\int_a^b f(x)dx$ -



- Se f cambia segno su $[a,b]$ $\Rightarrow$ area tra il grafico e la retta delle x é $\int_a^b |f(x)|dx$ -

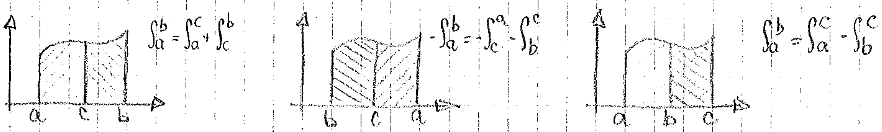


OSSERVAZIONE: è stato definito $\int_a^b f(x)dx$ con $a<b$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ si pone $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

- PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE.

① Additività: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



② Linearità: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$

③ Monotonia: se $f(x) \geq 0$ su $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

$f(x) \leq g(x) \quad g-f \geq 0 \quad \int_a^b g(x) - f(x)\, dx \geq 0 \quad \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

④ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

= solo se f è positiva su $[a,b]$

$\left(\begin{array}{l} \left|\int_a^b \sin x\, dx\right| = 0 \\ \int_a^b |\sin x|\, dx > 0 \end{array} \right)$

(esercizio: f continua su $[a,b]$, sia $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

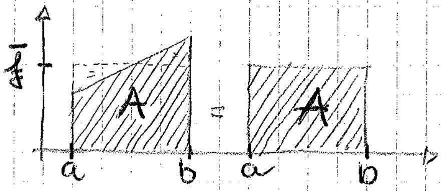
se f é costante su $[a,b] \Rightarrow \int_a^b c\,dx = c(b-a)$

dimostrare che se $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$)

Definizione: Si chiama media di f su $[a,b]$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \bar{f}$$

($\int_a^b f(x)dx = \bar{f}\,(b-a)$



$\bar{f}$ é l'altezza di un rettangolo con base $(b-a)$ è = area)

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (TFCI)

IPOTESI: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA (*)

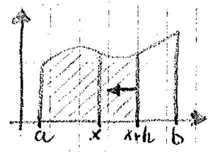
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funzione integrale di f.

TESI: F é una primitiva di f

F é derivabile in ogni $x \in [a,b]$ e $F'(x) = f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ $\left(\left(\int_a^x f(t)dt\right)'(5) = f(5) \right.$ e NON $\left. f(t) \right)$

DIMOSTRAZIONE: devo mostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$



$\int_a^{x+h} - \int_a^x = f(x)$ se $h \to 0$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

ADDITIVITÀ

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \text{Media di } f \text{ su } [x, x+h] \quad (\bar{f})$$

* Per il Teorema della media $\exists\, c_h$ t.c. $\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(c_h)$ $c_h \in [x, x+h]$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) \underset{*}{=} f(x) \quad \left(\text{se } h \to 0 \Rightarrow c_h \to x \right)$$

x c_h $x+h$

Corollario: FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f continua e sia G una delle primitive di f.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b = G(x)\Big|_a^b$$

DIMOSTRAZIONE: Per il TFCI $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f.

Sia G un'altra primitiva di f

Esiste una costante c t.c. $F(x) = G(x) + c \quad \forall x$

$$\begin{array}{r} F(b) = G(b) + c \\ - \; F(a) = G(a) + c \\ \hline F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \end{array} \; ; \; \int_a^b f(x)dx - \int_a^a \cancel{f(x)}dx = G(b) - G(a)$$

ex: $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ $\begin{pmatrix} y = e^x + 1 \\ dy = e^x dx \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \left(\int \frac{dy}{y} = \ln(y) = \ln(e^x+1) + c \right)$ $e^x + 1 > 0 \;\forall x$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1)\Big|_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2)$$

$\Rightarrow$ Dal T.F.C.I. le funzioni che hanno primitiva sono continue. ?

ex: TROVARE eq RETTA Tg AL GRAFICO DI $F(x) = \int_1^x e^{t^2} \sin^2(\pi/2 + t)\,dt$ in $x = 1$

$Tg(x_0) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$ $\qquad F(1) = \int_1^1 = 0$

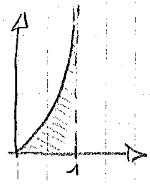
$Tg(1) = F(1) + f(1)(x-1)$ $\qquad f(1) = e \sin^2(\pi/2) = 1 \cdot e = e$

$\Rightarrow Tg(1) = e(x-1)$

$\int_x^5 e^{t^2} dt$ è crescente o decrescente?

$\int_x^5 e^{t^2} dt = -\int_5^x e^{t^2} dt$ $\left(\begin{array}{c}\text{si può} \\ \text{usare TFCI}\end{array}\right)$ $(F'(x) = -f(x))$ $\quad F'(x) = -e^{x^2} < 0 \Rightarrow$ DECRESCE

INTEGRALI IMPROPRI

- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 
- $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ $\left(\begin{array}{c}F \text{ non} \\ \text{limitata}\end{array}\right)$ 

▶ INTERVALLI $[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\quad f(x)$ continua in $[a, +\infty)$ (anche a tratti ma ambiguo)

$\int_a^R f(x)\,dx$; $\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\,dx = \begin{cases} \exists \text{ FINITO} \to \text{converge} \\ \exists\ \infty \to \text{diverge} \\ \nexists \to \text{oscilla (indeterminato)} \end{cases}$

ex:

- $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{x}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2} \ln(1+R) = +\infty$ Diverge.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^R = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg} R = \pi/2$ Converge.
- $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \cos x\,dx = \lim_{R\to+\infty} \sin(x) = \nexists$ indeterminato.

(al contrario con $-\infty$: $\int_{-\infty}^0 f(x) = \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 f(x)\,dx$)

▶ INTERVALLI $(-\infty, +\infty)$

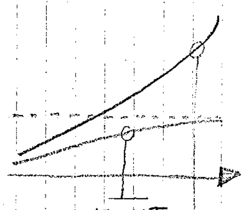
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$: Fisso un punto $x_0 \in \mathbb{R}$: $= \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$
- se uno diverge $\Rightarrow$ DIVERGE
- se entrambi convergono $\Rightarrow$ CONVERGE

se facessi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$ NON funziona perchè il risultato dipende da che "velocità" tende a $+\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra.

$\Rightarrow$ spezzo per evitare il conto "$+\infty - \infty$"

▸ Stabilire il carattere di un integrale improprio

$f(x) \geq 0$ su $[a,+\infty) \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} F(R)$



$\downarrow$

$F'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq a \Rightarrow F$ CRESCE

(Teorema) $\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} F(R)$ esiste ed è $= a \sup f$ < FINITO / $+\infty$

• Teorema del Confronto

Sia $\quad 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x\, [a,+\infty)$

• $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ Converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)$ converge — + GRANDE FINITO $\Rightarrow$ + PICCOLO ANCHE

• $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ Diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)$ Diverge — + PICCOLO INFINITO $\Rightarrow$ + GRANDE ANCHE

• STABILIRE IL CARATTERE (Non calcolare Primitiva!)

→ $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx \quad \left(\operatorname{arctg} x \leq \pi/2\right)$

$0 \leq \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$ $\qquad \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ CONVERGE $\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx \ \alpha>1\right)$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$ Converge

→ $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \quad \left(\text{se } x \geq 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} x \geq \pi/4\right)$

$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geq \frac{\pi}{4}\frac{1}{x} \geq 0$ $\qquad \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ DIVERGE $\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx \ \alpha \leq 1\right)$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$ DIVERGE

• Teorema del Confronto Asintotico

"Se per $x\to+\infty$ $f(x) \sim g(x)$ allora $\int_a f(x)$ e $\int_a g(x)$ hanno uguale carattere" (o convergono o divergono entrambi)

PER X SUFFICIENTEMENTE GRANDI $\quad \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2} \quad \left(f \underset{x\to+\infty}{\sim} g \text{ def di lim } (I_{\frac{1}{2}}(1))\right)$

$\cdot g(x): \quad \frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$

$\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} g(x) \leq \int_a^{+\infty} f(x) \leq \frac{3}{2}\int_a^{+\infty} g(x)$

$+\infty \Rightarrow +\infty \Leftarrow +\infty$

Finito $\Rightarrow$ Finito $\Leftarrow$ Finito

NUMERI COMPLESSI

1) $x^2+1=0$ Non ha soluzioni in $\mathbb{R}$
come x^2-2 Non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ ($\Rightarrow$ estensione $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$)
$\Rightarrow$ Si é cercata un estensione di $\mathbb{R}$

2) Eq. di 3° grado: nel risolverle compaiono spesso oggetti tipo $\sqrt{-1}$ (che spesso si semplificano dando 3 soluzioni reali)

$\Rightarrow$ Nuovo insieme in cui si definiscono due operazioni

$\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ coppie ordinate ((x,y) e (y,x) sono diversi)

- SOMMA: $(x_1, y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, \; y_1+y_2)$
- PRODOTTO: $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, \; x_1y_2 + x_2y_1)$

É L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$ (ESTENSIONE DI $\mathbb{R}$)

NB: Operazioni con numeri del tipo $(x,0)$ hanno risultati uguali alle operazioni in $\mathbb{R}$

$(x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2, 0)$
$(x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1\cdot x_2, 0)$
$(x,0)$ lo identifico con $x \in \mathbb{R}$ *

In questo insieme equazioni del tipo $x^2+1=0$ ammettono soluzioni.

▶ Denotiamo con i il numero immaginario puro $(0,1)$
osservando che $(x,0)+(0,y)=(x,y)$ e $(0,1)(y,0)=(0,y)$

$$\Rightarrow (x,y) = (x,0)+(0,1)(y,0)$$

(*)

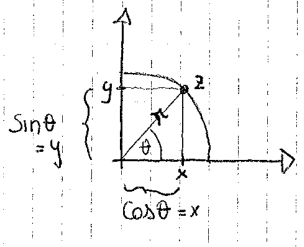
ossia: $\underbrace{z}_{\text{n° COMPLESSO } (x,y)} = \underbrace{x}_{\text{PARTE REALE } Re(z)} + i\cdot \underbrace{y}_{\text{PARTE IMMAGINARIA } Im(z)}$] FORMA ALGEBRICA n° COMPLESSO

del n° complesso

- $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$ (si identifica in $\mathbb{R}$: -1 ... in questo senso $i=\sqrt{-1}$)
- $z_1+z_2 = x_1+iy_1 + x_2+iy_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
  $= (x_1+x_2, \; y_1+y_2)$ ✓
- $z_1\cdot z_2 = (x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + iy_2x_1 + iiy_1y_2$
  $= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ ✓

- $(2+3i)\cdot(1+4i) = 2\cdot 1 + 2\cdot 4i + 1\cdot 3i + 3\cdot 4 i^2 = 2-12+11i = -10+11i$
  $(2,3)\cdot(1,4) = (2-12, \; 8+3) = (-10, +11)$

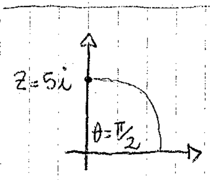
• RAPPRESENTAZIONE CON COORDINATE POLARI (semplifica calcoli potenze, radici ...)



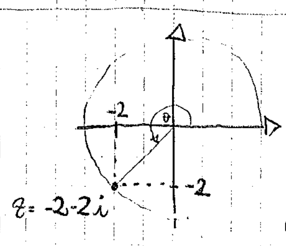
2 COORDINATE: • r (MODULO DI z) distanza dall'origine (≥ 0)
• θ (argomento di z) Angolo che individua punto sul cerchio di raggio r $[0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$



Polari: $(5, \pi/2)$



$r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \frac{5}{4}\pi$

Polari: $(2\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$

$z = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i$ $(6\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$

$r: \sqrt{6\cdot 4 + 36\cdot 2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

$$\theta \begin{cases} \cos\theta = x/r = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta = y/r = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = 1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta = \pi/6 \Rightarrow (4\sqrt{6}, \pi/6)$

NB $(3, \pi/2)$ e $(3, \pi/2 + 8\pi)$ SONO LO STESSO NUMERO!! $(3, \pi/2 + 2k\pi)$

$\Rightarrow$ se $z_1 = z_2$
1) Modulo z_1 = Modulo z_2 / $r_1 = r_2$ / $|z_1| = |z_2|$
2) Argomento z_1 = Argomento $z_2 + 2k\pi$

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z = x + iy = \underbrace{r}_{\text{Mod}(z)}(\cos\underbrace{\theta}_{\text{Arg}(z)} + i\sin\theta)$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + i(r_1r_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + r_1r_2\sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + ir_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)) + r_1r_2 i(\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

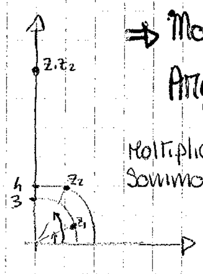
$\Rightarrow \text{Mod}(z_1z_2) = \text{Mod}(z_1)\cdot\text{Mod}(z_2)$

$\text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

• $(3\cos\pi/6 + 3i\sin\pi/6)(4\cos\pi/3 + 4i\sin\pi/3)$

$= 3\cdot 4\,(\cos(\pi/6 + \pi/3) + i\sin(\pi/6 + \pi/3))$

$= 12\cos\pi/2 + 12i\sin\pi/2 = +12i$



Moltiplico i raggi
Sommo gli angoli $(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{2})$

• $(3\cos\pi/6 + 3i\sin\pi/6)\cdot i$

$= (3\cos\pi/6 + 3i\sin\pi/6)(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)$

$= 3(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$

Moltiplicare per i significa ruotare di $\pi/2$

• $(3\cos\pi/6 + 3i\sin\pi/6)\cdot -1$

$= (3\cos\pi/6 + 3i\sin\pi/6)(\cos\pi + i\sin\pi)$

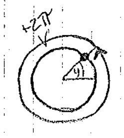
$= 3(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

Moltiplicare per -1 significa ruotare z di π

▶ ESPONENZIALE COMPLESSO

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

NB: e^z é periodica di $2\pi i$

INF: $e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^x e^{i(y+2\pi)}$  $= e^x e^{iy} = e^z$

$$\left(\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ w = \rho e^{i\varphi} \end{cases} \Rightarrow z \cdot w = r\rho \cdot e^{i(\theta+\varphi)} \qquad z^n = e^{in\theta} \cdot r^n \right)_{\text{ripassino}}$$

▶ RADICI COMPLESSE

Radice n-esima di numeri complessi:
Dato $w \in \mathbb{C}$ trovare tutti i numeri complessi z tali che $z^n = w$ $\quad w = \rho e^{i\varphi} \quad z = re^{i\theta} \quad (z^n = r^n e^{in\theta})$

IMPONIAMO: $z^n = w = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$

$$\Updownarrow$$

$k=0 \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{n}$

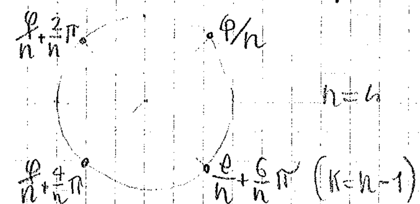
$k=1 \Rightarrow \theta = \frac{\varphi+2\pi}{n}$

$k=2 \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{4}{n}\pi$

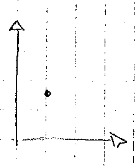
$$\boxed{r = \sqrt[n]{\rho} \qquad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}} \Leftarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$k=n \Rightarrow \theta = \frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ (= a $k=0$ ricomincia... $\Rightarrow$ A senso fino a $n-1$)

SE K VA DA 0 a $n-1$ $(0,1,2,\dots,n-1)$
$\Rightarrow$ OGNI NUMERO COMPLESSO HA
n RADICI n-ESIME.



es: $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$ $\qquad r = \sqrt{1+3} = 2$



$$\theta = \begin{cases} 2\cos\theta = 1 \\ 2\sin\theta = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\theta = 1/2 \\ \sin\theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi/3$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$$

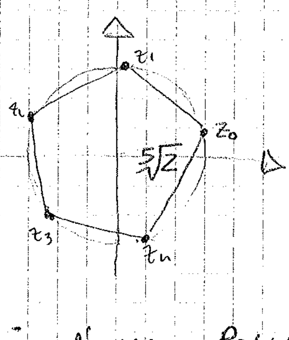
$$\Rightarrow \sqrt[5]{2}\, e^{\left(i\frac{\pi/3 + 2k\pi}{n}\right)}$$

$(k\ \{0,1,2,3,4\})$

$\Rightarrow z_0 = \sqrt[5]{2} e^{i\pi/15}$

$z_1 = \sqrt[5]{2} e^{i\pi/15 + \frac{2}{5}\pi}$

ecc...



Radici complesse stanno ai vertici di un POLIGONO REGOLARE di n LATI inscritto nella circonferenza.

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni con
- UNA FUNZIONE PER INCOGNITA (Y, $Y(x)$, $Y(t)$)
- IN CUI COMPAIONO DERIVATE DELL' INCOGNITA

LA PIÙ SEMPLICE: $Y' = f(x)$ ($f(x)$ data) $Y = F(x) + C$ (RICERCA DELLE PRIMITIVE)

ALTRI ESEMPI $Y' = Y$ ($f(x)$ con derivata se stessa) $Y = Ce^x$, $Y = 0$

$xY' + e^{2Y} - \frac{1}{Y} = \sin x$ (1° ORDINE)

$Y'' + 2Y' + \sin(Y) = x$ (2° ORDINE)

Definizione: L'ordine della più alta derivata dell' incognita si chiama ORDINE DELL' EQUAZIONE

Certe equazioni (IN FORMA NORMALE) si possono riscrivere come:

$Y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$Y' = f(x, y)$ forma normale per il primo ordine

$Y'' = f(x, y, y')$ " " " " secondo "

ex $Y' = e^{\frac{x}{y}}$ o $Y'' = x\sin(y) + \frac{x}{(y')^2}$

F = ma F(y) = Forza
y(t) = tempo
a = y''(t)
a = y''(t) = $\frac{1}{m}$F(y(t))

Data un eq. di ordine n in Forma normale

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Definizione: Una soluzione dell' eq. è una funzione y definita su un INTERVALLO I derivabile n volte e tale che $y^{(n)}_{(x)} = f(x, y_{(x)}, \dots, y^{(n-1)}_{(x)})$ $\forall x \in I$

$y'' + y = 2\cos x$; $y'' = 2\cos x - y = f(x, y, y')$

Mostriamo che $y(x) = x\sin x$ è soluzione su $\mathbb{R}$.

$y = x\sin x$

$y' = \sin x + x \cdot \cos x$ $\Rightarrow$ $2\cos x - \cancel{x\sin x} + \cancel{x\sin x} = 2\cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

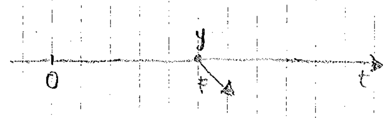
$y'' = 2\cos x - x\sin x$ ($y'' + y = 2\cos x$)

NB: Metodo per verificare che una y è soluzione!
(Ricavo quello che mi serve (y'', y' ...), butto dentro e vedo se mi viene un' identità)
(Non bisogna risolvere l'eq per verificare una soluzione!)

NB: le eq. differenziali sono molto usate nella "PRATICA" alcuni esempi:

- $F = m \cdot a$

  $F(y)$ dove y rappresenta un punto

  UN PUNTO y CHE SI MUOVE NEL TEMPO t AL QUALE VIENE APPLICATA UNA FORZA F.

  $y(t)$ dove t " il tempo

  se $y(t)$ è un punto in movimento, $y'(t)$ rappresenta la velocità e $y''(t)$ l'accellerazione a.

  $$\Rightarrow \quad a = y''(t) = \frac{1}{m} \cdot F(y(t))$$

- DINAMICA DELLE POPOLAZIONI ($Y(t)$ = popolazione al tempo t)

  $y(t+h) = y(t) + \underbrace{N}_{\text{Nati}} - \underbrace{M}_{\text{Morti}}$ ($N-M = a$ = tasso di accrescimento)

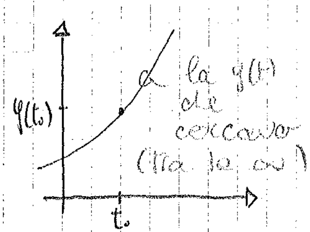
  Suppongo: $a = K \cdot y(t) \cdot h$ (costante · individui al tempo t · tempo trascorso)

  $$\Rightarrow y(t+h) = y(t) + Ky(t)h$$

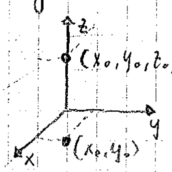
  $$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = Ky(t) \quad \text{con } h \to 0 \quad \Rightarrow y'(t) = Ky(t)$$

  $$\frac{y'}{y} = K \qquad \int \frac{y'}{y} = \int K \qquad \ln y = Kt + C \,; \quad y = e^{Kt} + C \;\Big\|\; \begin{array}{l} \text{se } a>0 \Rightarrow K>0 \Rightarrow y \to \infty \\ \text{se } a<0 \Rightarrow K<0 \Rightarrow y \to 0 \end{array}$$

  MA mi manca $y(t_0)$ (individui al tempo 0)
  $\Rightarrow$ (con un censimento) ricavato tale valore ricavo la funzione $y(t)$ che mi dice la popolazione al tempo t.

- Come so se $\exists$ soluzione a Cauchy? E quante sono? DIPENDE da regolarità di f rispetto a (x,y) (+ f è "LISCIA" meglio è) (vedi dopo)

- 

  F a 2 variabili: dati (x_0,y_0) ottengo $z_0 = f(x_0,y_0)$

- SI DICE CHE $f(x,y)$ È CONTINUA IN x ($\forall y$) SE FISSANDO $Y \Rightarrow f(x,y_0)$ è CONTINUA
  È CONTINUA IN y ($\forall x$) SE FISSANDO $x \Rightarrow f(x_0,y)$ è CONTINUA

- SI DICE CHE $f(x,y)$ È DERIVABILE IN x ($\forall y$) SE FISSANDO $Y \Rightarrow f(x,y_0)$ è DERIVABILE
  " " IN y ($\forall x$) SE FISSANDO $x \Rightarrow f(x_0,y)$ è ~~CONTI~~ derivabile

  es. $f(x,y) = e^y \sin x$; CONT e DERIVABILE IN x ($\forall y$): $f(x,y_0) = e^{y_0} \cdot \sin x$
  " " " in y ($\forall x$): $f(x_0,y) = e^y \cdot \sin x_0$

- DERIVATE PARZIALI: $f(x,y) = x^4 \ln(y)$

  $$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \cdot \ln y$$

  $$\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 / y$$

- Equazioni differenziali LINEARI (1° ordine)

$\underbrace{Y' = a(x)y + b(x)}_{f(x,y)}$ ex: $Y' = e^x y + x^2$ } Particolari perchè se fisso la x ottengo una retta.

IPOTESI: $a(x)$ e $b(x)$ continue su I } CIÒ GARANTISCE CHE VALE IL TEOREMA DI CAUCHY (UNA UNICA SOLUZIONE)

ALLORA: 1) $Y' - a(x)y = b(x)$

2) prendo una funzione $A(x)$ primitiva di $a(x)$ $(A'(x) = a(x))$

3) Moltiplico per $(e^{-A(x)})$

$$\Rightarrow \quad Y'e^{-A(x)} - a(x)e^{-Ax} \cdot y = e^{-A(x)} \cdot b(x)$$

$$\left(\text{NB: } (e^{-A(x)} \cdot y)' = Y' \cdot e^{-A(x)} - a(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot y \right)$$

$$\Rightarrow \quad (e^{-A(x)} \cdot y)' = e^{-A(x)} \cdot b(x)$$

$$\int (e^{-A(x)} \cdot y)' dx = \int e^{-A(x)} \cdot b(x) \cdot dx$$

$$e^{-A(x)} \cdot y = \int e^{-A(x)} b(x) dx \quad \Big| \cdot e^{+A(x)}$$

$$y = e^{+A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

$$y = e^{\int a(x)} \cdot \left(\int \left(e^{-\int a(x)} \cdot b(x) \right) dx + C \right)$$

---

ex: $y' = \frac{1}{x} \cdot y + x^2 \quad (x>0)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

$$\Rightarrow \text{Int. Generale: } \quad y = e^{\ln x} \cdot \left(\int e^{-\ln x} \cdot x^2 dx + C \right)$$

$$y = x \cdot \left(\int x \, dx + C \right)$$

$$y = x \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x^3}{2} + Cx$$

- Se si considera un' EQUAZIONE LINEARE la y è definita dove sono definite a e b ($Dom(y) = Dom(a) \cap Dom(b)$)
Senò è definita solo in un $I(x_0)$.

Es con eq. a variabili separabili di 1° ordine:

- $y' = y(1-y)$ $\quad \left\| \begin{array}{l} g(x) = 1 \ \forall x \\ h(y(x)) = y(1-y) \end{array} \right. = 0 \begin{array}{l} \nearrow y=0 \\ \searrow y=1 \end{array} \Big\}$ Soluzioni Costanti! *

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx = x + C \quad \left(\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \int \frac{A - Ay + By}{y(1-y)} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = A \end{cases} \quad \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\, dy \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial y}{y(1-y)} = \ln(y) - \ln(1-y) = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + c \ ; \quad \left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+c} = e^x \cdot e^c \quad (e^c = K > 0);$$

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = Ke^x \ ; \quad \frac{y}{1-y} = \pm Ke^x \ (\forall K > 0) \ ; \quad \frac{y}{1-y} = Ke^x \ (\forall K \neq 0) ; \quad y = Ke^x - yKe^x ;$$

$$y + yKe^x = Ke^x \qquad y(1 + Ke^x) = Ke^x \qquad Y = \frac{Ke^x}{1 + Ke^x} \ (\forall K \neq 0) \left| \begin{array}{l} K \to 0 \Rightarrow y \to 0 \\ K \to +\infty \Rightarrow y \to 1 \end{array} \right. *$$

- EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE: $y'' = f(x, y, y')$
  - Integrale Generale è una famiglia di funzioni che dipende da 2 costanti $y(x, c_1, c_2)$. $\Rightarrow$ Cauchy: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$

IMPONGO AD $y(x)$ DI PASSARE PER UN PUNTO (x_0, y_0) E DI AVERE UNA DETERMINATA TANGENTE IN x_0.

NB: Qua le soluzioni si INTERSECANO! (da ogni punto passano infinite soluzioni, una per ogni tangente possibile)

▶ Eq. lineari del 2° ordine, a coefficienti costanti

$y'' + ay' + by = f(x) \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad (^{ex}\ y'' - 2y' + 6y = \sin x)$

- Se $f(x) = 0 \Rightarrow$ Eq. differenziale OMOGENEA
- Se $f(x) \neq 0 \Rightarrow$ Eq. differenziale NON OMOGENEA

Osservazioni: 1) Se $y(x)$ è soluzione dell'equazione e $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ anche $\alpha y(x)$ è soluzione $(\alpha(y'' + ay' + by) = 0)$

2) Se y_1 e y_2 sono soluzioni $\Rightarrow$ anche $y_1 + y_2$ (somma di due cose nulle)

$\Rightarrow$ Se y_1 e y_2 sono soluzione e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$c_1 y_1 + c_2 y_2$ è soluzione $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

teorema: "L'Integrale generale dell'equazione omogenea ($f(x) = 0$) ha la forma $Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ dove y_1 e y_2 sono due soluzioni non proporzionali della equazione"

ma è un multiplo dell'altra

NB: L'Int. Generale della non omogenea ha forma $y = y_0 + y_p$ (y_0 = Int. Generale dell'omogenea, y_p = 1 soluzione della non omogenea)

$y = y_0 + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$

② Se $f(x) = e^{rx}$ $\quad$ ($f(x) = q_n(x)e^{rx} \Rightarrow y_P = Q_n(x)e^{rx} \,/\, xQ_n(x)e^{rx} \,/\, x^2 Q_n(x)e^{rx}$)

- Se r non è soluzione dell'eq. caratteristica $\quad y_P = Ae^{rx}$
- Se r è soluzione dell'eq. caratteristica di molteplicità 1 $\Rightarrow y_P = Axe^{rx}$
- Se r è soluzione dell'eq. caratt. di molteplicità $\Rightarrow y_P = Ax^2e^{rx}$

③ Se $f(x) = e^{rx}\cos(sx)$, oppure $e^{rx}\sin(sx)$

($f(x) = \cos(sx) + \sin(sx)$
$y_P = A\cos(sx) + B\sin(sx)$
$y_P = x(A\cos(sx) + B\sin(sx))$ se $\lambda = \beta$)

- Se $r+is$ non è soluzione dell'eq. caratteristica
$y_P = e^{rx}(A\cos(sx) + B\sin(sx))$
- Se $r+is$ è soluzione dell'eq. caratteristica $(\lambda = \alpha \pm i\beta = r \pm is)$
$y_P = xe^{rx}(A\cos(sx) + B\sin(sx))$

esempi

- $y'' + y' - 6y = e^x \quad \lambda = -3, +2 \quad (e^x = e^{1x}$ 1 è soluzione? No! $\not\Rightarrow$ $y_P = Ae^{rx} = Ae^x$

sostituisco: $A\cancel{e^x} + A\cancel{e^x} - 6A\cancel{e^x} = \cancel{e^x}$; $-4A = 1 \quad A = 1/4$

$\Rightarrow \quad IG = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}e^x$

- $y'' + y' - 6y = 5e^{2x} \quad \lambda = -3, +2 \qquad f(x) = 5e^{2x}$ 2 è soluzione! $\Rightarrow y_P = Axe^{2x}$

$\Rightarrow 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + Ae^{2x} + 2Axe^{2x} - 6Axe^{2x} = 5e^{2x}$; $5Ae^{2x} = 5e^{2x}$; $\boxed{A = 1}$

$y_P' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$
$y_P'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

- $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}\cos(4x) \quad \lambda = -3, +2$

$\Rightarrow y_P = e^{2x}(A\cos(4x) + B\sin(4x))$

• Calcolo media integrale $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ $[Ln3 \text{ e } Ln2]$

$$\bar{f}=\frac{\int_{Ln2}^{Ln3}\frac{e^x+1}{e^x-1}dx}{Ln3-Ln2} \quad \int_{Ln2}^{Ln3}\frac{e^x+1}{e^x-1}dx \begin{pmatrix} e^x=t & dt=e^x dx \\ x=Lnt & dt/t=dx \end{pmatrix} = \int_2^3 \frac{t+1}{t-1}\frac{dt}{t} = \int_2^3\frac{t+1}{t^2-t}dt$$

$$=\int_2^3 \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(t-1)}dt+\int_2^3\frac{1\,dt}{(t-1)t} = \int_2^3\frac{dt}{t(t-1)}+Ln|t-1|\Big|_2^3 \quad *$$

$$\left(\frac{dt}{t(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}=\frac{At-A+Bt}{t(t-1)} \quad \begin{cases}A+B=0\\-A=1\end{cases} \begin{cases}B=1\\A=-1\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)$$

$$* \; Ln|t-1|\Big|_2^3-\int_2^3\frac{dt}{t}+\int_2^3\frac{dt}{t-1} = 2Ln|t-1|-Ln|t|\Big|_2^3=(Ln2^2-Ln3)-(2\cancel{Ln1}-Ln2)$$

$$=Ln4-Ln3+Ln2=Ln\frac{8}{3}$$

• Area di $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underset{\text{estremi di integraz}}{1\leq x\leq 6} \quad 0\leq y\leq \underset{\text{parte positiva di}}{\frac{1}{x(9-Ln^2x)}}\right\}$

$$=\int_1^6\frac{dx}{x(9-Ln^2x)} \begin{pmatrix} Lnx=t \\ dt=dx/x \end{pmatrix} = \int_{Ln1}^{Ln6}\frac{dt}{9-t^2} = \int_0^{Ln6}\frac{dt}{9-t^2}=\int_0^{Ln6}\frac{dt}{(3+t)(3-t)}$$

$$\left(\frac{1}{(3+t)(3-t)}=\frac{A}{3+t}+\frac{B}{3-t}=\frac{3A-At+3B+Bt}{9-t^2} \quad \begin{cases}B-A=0\\3A+3B=1\end{cases}\begin{cases}A=B\\6A=1\end{cases}\begin{cases}A=1/6\\B=1/6\end{cases}\right)$$

$$=\int_0^{Ln6}\frac{dt}{6(3+t)}+\int_0^{Ln6}\frac{dt}{6(3-t)}=\frac{1}{6}\left(Ln|3+t|+Ln|3-t|\Big|_0^{Ln6}\right)=\frac{1}{6}Ln|9-t^2|\Big|_0^{Ln6}$$

= Avevo anche studiare $f(x)\geq 0$ e integrare solo in quell' intervallo

• $\int\frac{2}{1+tgx}dx$?

• $$\int\frac{1+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx \begin{pmatrix} \sqrt[6]{x}=u & du=\frac{dx}{6\sqrt[6]{x^5}} \\ u^6=x & \\ u^3=\sqrt{x} & u^2=\sqrt[3]{x} \\ dx=6u^5du \end{pmatrix} = \int\frac{1+u^3}{u^6(1+u^2)}\cdot 6u^5du = 6\int\frac{1+u^3}{u(1+u^2)}du$$

$$=6\int\frac{1+u^3}{u+u^3}du=6\int\frac{u^3+1+u-u}{u+u^3}du=6\int\frac{u+u^3}{u+u^3}du+6\int\frac{1-u}{u+u^3}du=6\int du+6\int\frac{1-u}{u+u^3}du=$$

$$=6u+C+6\int\frac{\cancel{u}(1/u-1)}{\cancel{u}(u^2+1)}du=6u+C+6\left(\int\frac{du}{u(u^2+1)}-\int\frac{1}{u^2+1}du\right)$$

$$=6u-6arctg(u)+C+6\int\frac{du}{u^3+u} \quad \left(\frac{1}{u(u^2+1)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{u^2+1}=\frac{Au^2+A+Bu^2+Cu}{u(u^2+1)}\right.$$

$$\left.\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}\begin{cases}B=-1\\C=0\\A=1\end{cases}\right) = 6u-6arctg(u)+C+6\left(\int\frac{1}{u}du-\int\frac{u}{u^2+1}\right)$$

$$=6\sqrt[6]{x}-6arctg(\sqrt[6]{x})+6Ln(\sqrt[6]{x})-3Ln|\sqrt[6]{x^2}+1|+C$$

$$=6\sqrt[6]{x}-6arctg(\sqrt[6]{x})+Lnx-Ln|(\sqrt[3]{x}+1)^3|+C \quad \checkmark$$

• Parte Principale $l\varphi(x)$ $\left(\varphi(x)=1/x^{\alpha}\right)$ per $x\to+\infty$

▶ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+3}}-1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x+3}}-1}{1/x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\left(\sqrt{\frac{x}{x+3}}-1\right)=F.I.\ (\infty\cdot 0)$

$\left(\begin{matrix}t=1/x \\ x=1/t\end{matrix}\ t\to 0\right)$: $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{\alpha}}\left(\sqrt{\frac{1}{t(3+1/t)}}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{3t+1}}-1}{t^{\alpha}}$ $\}\to 0$ $\left[\left((3t+1)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$ $\to 0$

Hopital: $\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(3t+1)^{-3/2}\cdot 3}{1}=\lim_{t\to 0}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3t+1}\right)^{3/2}=-\frac{3}{2}$ $\quad l\varphi(x)=-\frac{3}{2x}$

▶ $f(x)=\sin(\sqrt{x^2+1}-x)$ OSSERVAZIONI: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$

$l\varphi(x)$: $\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\sin(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot\frac{\sin(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\cdot\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+\underset{\to 0}{1/x^2}}+1}$

$=\frac{1}{2}$ se $\alpha=1$ $\left(\alpha-1=0,\ x^0=1\ \overset{\text{ma}}{\infty^0}?\right)$ $\Rightarrow l\varphi(x)=\frac{1}{2x}$

• $f(x):\sqrt{x+3}-\sqrt{3}$ e $g(x):\sqrt{x+5}-\sqrt{5}$ Sono infinitesimi dello stesso ordine?
$l\in\mathbb{R}\ |\ f(x)=l\,g(x).\ (x\to 0)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\cancel{3}-\cancel{3})(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}{(x+\cancel{5}-\cancel{5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{5}{3}}\,g(x)$

Non posso usare Mclaurin con $\sqrt{1+(x+4)}$ / $\sqrt{1+(x+2)}$ perché arg non $\to 0$

• $f(x)=\ln(9+\sin\frac{2}{x})-2\ln 3$: $l\varphi(x)$ con $x\to+\infty$ per $\varphi(x)=1/x^{\alpha}$

$\lim_{x\to+\infty}\ln(9+\sin 2/x)-\ln 9$; $\lim_{t\to 0}\ln(9+\sin 2t)-\ln 9$; $\lim_{t\to 0}\ln\left(9\left(1+\frac{2}{9}t\right)\right)-\ln 9$

$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\left(\cancel{\ln 9}-\cancel{\ln 9}+\ln\left(1+\frac{2}{9x}\right)\right)$; $\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{9}t\right)}{t^{\alpha}}$

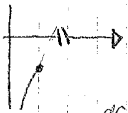
$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2}{9}t}{t^{\alpha}}=\frac{2}{9}$ se $\alpha=1$ $\Rightarrow l\varphi(x)=\frac{2}{9x}$

• Determinare n° degli ZERI e PUNTI CRITICI di $f(x)=\frac{x\ln x-1}{x^2}$ $\quad$ ($Dom(f) = x>0$)

$f'(x)=\frac{(\ln x+1)x^2-2x(x\ln x-1)}{x^4}=\frac{x\ln x+x-2x\ln x+2}{x^3}=\frac{x+2-x\ln x}{x^3}$ $\quad$ ($Dom(f') = x>0$)

f è strett. crescente (somma/prod f strett crescenti)($f'>0$ $\forall x>0$)

f è CONTINUA (" " , " continue) $\Rightarrow$ lo ZERO, se $\exists$, è UNICO

OSSERVARE: $f(1)=-1<0$, $f(+\infty)=+\infty>0$  $\Rightarrow$ Per il teorema $\exists$ degli zeri l'UNICO ZERO ESISTE

Punti critici: $f'(x)=0$ se: $\underbrace{\frac{x+2}{x}}_{g(x)}=\underbrace{\ln x}_{h(x)}$ $\quad$ OSSERVARE: $g(1)=3>h(1)=0$; $g(e^2)=1+\frac{2}{e^2}<h(e^2)=2$

Quindi dato che g, h sono continue c'è uno zero (UNICO perché h e g strett mon)

• Determinare il più grande Int contenente $x=\frac12$ dove f è invertibile $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$, scrivere $f^{-1}(y)$ e calcolare $(f^{-1}(0))'$

$Dom(f) = x>0 \cup x\neq 1$ $\quad$ Allora l'int. è AL PIÙ $(0,1)$ (contiene $+\frac12$)

▸ STUDIO MONOTONIA $f(x)$ IN $(0,1)$: $f'(x)=\frac1x-\left(-\frac1x\cdot\frac{1}{\ln^2x}\right)=\frac1x+\frac{1}{x\ln^2x}=\frac{\ln^2x+1}{x\ln^2x}>0$ $(0,1)$

$\Rightarrow$ f è strett crescente su $(0,1)$

$\Rightarrow$ INTERVALLO CERCATO è PROPRIO $(0,1)$

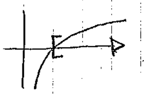
▸ $f^{-1}(x)$: $t=\ln x \Rightarrow f(t)=t-\frac1t$ (esplicito la t): $ty=t^2-1$; $t^2-ty-1=0$; $t=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$

$\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}=\ln x$; $e^{\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}}=x=f^{-1}(y)$

▸ $(f^{-1}(0))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$ $\quad$ $f(x_0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=x_0$ (NB su $(0,1)$ sennò non più invertibile) $\quad$ $x_0=e^{-1}\in(0,1)$

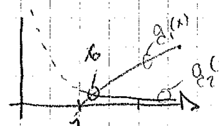
$=\frac{1}{f'(1/e)}=\frac{1}{2e}=(f^{-1}(0))'$

• STUDIO (Dom, Monotonia) di $f(x)=x^4-2\sqrt{\ln x}$. $(e^4-2,e)\in G(f^{-1}(x))$? $(f^{-1}(e^4-2))'$?

$Dom(f)$: $\begin{cases}\ln x\geq 0\\ x>0\end{cases}$  $\Rightarrow Dom(f)=[1,+\infty)$

$f'(x)=4x^3-2\cdot\frac1x\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{4x^3(\sqrt{\ln x}\cdot x)-1}{x\sqrt{\ln x}}=\boxed{\frac{4x^4\sqrt{\ln x}-1}{x\sqrt{\ln x}}}$ $\quad$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^4\sqrt{\ln x}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\ln x}=\frac{1}{4x^4} \Leftrightarrow \underbrace{\ln x}_{g_1(x)}=\underbrace{\frac{1}{16x^8}}_{g_2(x)}$



$g_1(1)=0<g_2(1)=\frac{1}{16}$ & $g_1(2)=\ln 2>g_2(2)=\frac{1}{16\,2^8}=\frac{1}{2^{12}} \Rightarrow x_0\in[1,2]$ $\quad$ (se $x>x_0$ $\ln x>\frac{1}{16x^8} \Rightarrow f'(x)>0$)

$f(x)$ crescente in $x>x_0$ $[1,x_0]$ e decrescente in $(x_0,+\infty)$

strettamente perché somma f strett monotone.

$f(e)=e^4-2\sqrt{\ln e}=e^4-2$ $\underset{1}{}$ $((e^4-2,e)\in G(f^{-1}(x))) \Leftrightarrow f^{-1}(e^4-2)=e$ ✓

$(f^{-1}(e^4-2))'=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{\frac{4e^4-1}{e}}=\frac{e}{4e^4-1}$

• La SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ Converge o Diverge

(CRITERIO del RAPPORTO: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \Rightarrow$ L=1 : NIENTE; L>1 : an diverge; L<1 : " converge)

$$\left|\frac{(-1)^n\cdot(-1)^1(n+1)}{\cancel{4^n}\cdot 4^1}\cdot\frac{\cancel{4^n}}{\cancel{(-1)^n}\cdot n}\right| = \left|\frac{-(n+1)}{4n}\right| = \frac{n+1}{4n} = \frac{n}{4n}+\frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4n} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow a_n \text{ converge}$$

• Inf(an) e Sup(an) $\qquad a_n = \frac{(-1)^n}{2n}+\frac{1}{n} \qquad$ Inf(an) = 0 $\qquad$ Sup(an) = $\frac{3}{4}$

• Polinomio di McLaurin con Resto di LAGRANGE di $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{F^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-\underline{x_0})^{n+1}$$

$F(0) = 0$

$F'(0) = e^{-x^2} = 1$

$F''(0) = -2xe^{-x^2} = 0$

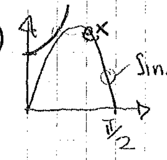
$F'''(\cancel{0}) = -2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2} = \cancel{x} = -2e^{-c^2}+4c^2e^{-c^2}$
$\mapsto c$

$$\Rightarrow \underset{(x\to 0)}{T_n(x)} = \overbrace{x}^{Tn\,x} + \overbrace{\frac{(-2e^{-c^2}+4c^2e^{-c^2})}{3!}x^3}^{R.\ di\ Lagr.}$$

• $f(x) = e^x - \frac{3}{2}\sin x$ STUDIARE CONVESSITÀ DELLA FUNZ e DIM CHE C'È UN MIN. $I=[0,\pi/2]$

$f'(x) = e^x - \frac{3}{2}\cos x$

$f''(x) = e^x + \frac{3}{2}\sin x$

1) 

$f''(x) \geq 0$ in $[0,\pi/2] \Rightarrow f$ CONVESSA

2) $f'(0) = 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \qquad f'$ def, cont in $[0,\pi/2]$ ~~è der in $(0,\pi/2)$~~

$f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\pi/2} > 0 \qquad \Rightarrow$ SI ANNULLA in $[0,\pi/2]$

e dato che f è convessa nell'intervallo, il PUNTO CRITICO è un MIN.

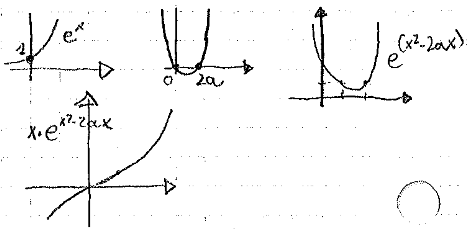
• $$\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{1\,dx}{(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{3}\right)}$$

Senza questo pass non viene
$$\left(\begin{array}{ll} t = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} & dx = \frac{\sqrt{3}\,dt}{2} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx & \end{array}\right) = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dt\cdot\sqrt{3}}{2\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

• Data $f(x) = xe^{(x^2-2ax)}$ determinare a tale che $f(x)$ risulti strettamente crescente in tutto il suo Dominio:



$$f'(x) = e^{(x^2-2ax)} \cdot x(2x-2a) + e^{(x^2-2ax)}$$
$$= \underbrace{e^{(x^2-2ax)}}_{\text{è} >0} \cdot \underbrace{(1+x(2x-2a))}_{\text{da rendere} >0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f')} \Rightarrow$$

$1+2x^2-2ax>0$; $2x^2-2ax+1>0$ $\left(\begin{matrix}\forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } \Delta<0\end{matrix}\right)$

$\frac{\Delta}{4} = \sqrt{a^2-2}$; $a^2-2<0$

$\underline{-\sqrt{2} \leq a \leq +\sqrt{2}}$?

• $(x^{x^4})' = (e^{x^4 \ln x})'$
$$= (4x^3 \ln x + x^3) e^{x^4 \ln x} = x^{x^4}(4x^3 \ln x + x^3)$$

• $(x^{x^x})' = (e^{x^x \ln x})' = e^{x^x \ln x}(\ln x (x^x)' + x^{x-1}) = x^{x^x}(\ln x (e^{x \ln x})' + x^{(x-1)})$
$$= x^{x^x}(\ln x(1+\ln x)e^{x \ln x} + x^{(x-1)}) = x^{x^x}(x^x \ln x(1+\ln x) + x^{(x-1)})$$

• $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+2) - \ln(x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{(x+2)}{(x+1)}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{1} + \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{0}\right)^x = \ln e = 1$

• Data: $z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 32z + 32$ verificare che $z=4$ è una radice e trovare un'altra radice $\in \mathbb{R}$. Fattorizzare il polinomio in $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 32z + 32 & z-4 \\ \hline z^4 - 4z^3 & z^3+z^2+6z-8 \\ // \ +z^3 + 2z^2 & \\ +z^3 - 4z^2 & \\ // \ +6z^2 - 32z & \\ +6z^2 - 24z & \\ // \ -8z + 32 & \\ -8z + 32 & \\ // \ \ // & \end{array}$$

$\Rightarrow P(z) = (z-4)(z^3+z^2+6z-8)$ ‖ coefficienti $\in \mathbb{R}$ grado dispari $\Rightarrow$ almeno 1 radice $\in \mathbb{R}$

osservo che

$z^3+z^2+6z-8=0$ SE $z=1$ | z di solito multipli di questo ($\pm1, \pm2, \pm4$)

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} z^3+z^2+6z-8 & z-1 \\ \hline z^3 - z^2 & z^2+2z+8 \\ // \ 2z^2 + 6z & \\ 2z^2 - 2z & \\ // \ +8z - 8 & \\ +8z - 8 & \\ // \ \ // & \end{array}$$

$\Rightarrow P(z) = (z-4)(z-1)\underbrace{(z^2+2z+8)}$

$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{1} \to \Delta<0$

$P(z) = (z-4)(z-1)(z^2+2z+8)$

è la massima fattorizzazione in $\mathbb{R}$ (perché il 3° fattore ha il $\Delta<0$)

• FATTORIZZARE $p(x) = z^3 - z^2 + 2$ in $\mathbb{C}$: $P(-1)=0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} z^3 - z^2 + 0z + 2 & (z+1) \\ \hline z^3 + z^2 & z^2-2z+2 \\ // \ -2z^2 + 0z & \\ -2z^2 - 2z & \\ // \ +2z + 2 & \\ +2z + 2 & \\ // \ \ // & \end{array}$$

$P(z) = (z+1)(z^2-2z+2)$ — 3° fattore ha $\Delta<0$ ma in $\mathbb{C}$ è risolvibile

$z^2 - 2z + 2$: $z = +1 \pm \sqrt{1-2} = \boxed{+1 \pm i}$

$\Rightarrow P(z) = (z+1)(z-1-i)(z-1+i)$

• $(x^{\arccos x})' = (e^{\arccos x \ln x})' = x^{\arccos x}\left(\frac{\arccos x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
$$= \arccos x \cdot x^{\arccos x - 1} - \frac{\ln x \cdot x^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

| anche x derivare passare a Formula $e^{g(x) \ln f(x)}$!