NUMERO: 1249 DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arcangeli

MATERIA: Elettrotecnica + Eserc.

Prof. Corinto

Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \times E(r,t) = -\dfrac{\partial B(r,t)}{\partial t} & \text{(legge Faraday)} \\ \nabla \times H(r,t) = \dfrac{\partial D(r,t)}{\partial t} + J(r,t) & \text{(legge Maxwell-Ampère)} \end{cases}$$

$$\nabla \cdot B(r,t) = 0$$

$$\nabla \cdot D(r,t) = \rho \qquad \text{(legge Gauss)}$$

$$\begin{cases} D = \varepsilon E(r,t) \\ B = \mu H(r,t) \\ J = \sigma E(r,t) \end{cases}$$

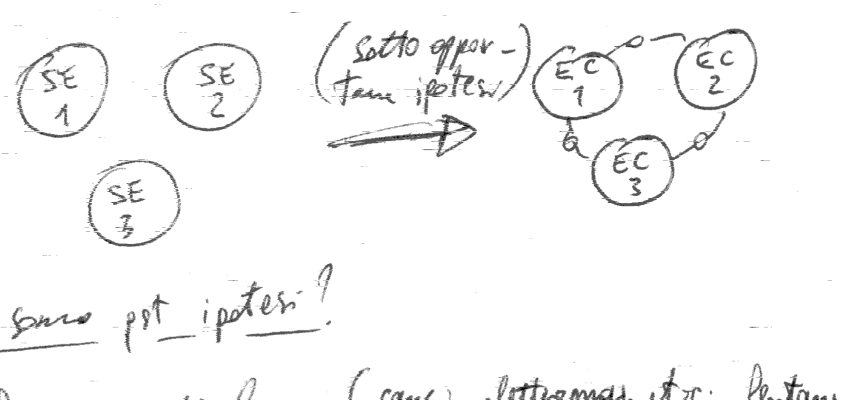
LEZIONE 1 (pag. 1-6)

$\boxed{\text{TEORIA DEI CIRCUITI}}$

Tutti i vettori delle equazioni di Maxwell sono sostituite da grandezze scalari. Le eq. di Maxwell sono sostituite dalle eq. di Kirchhoff. Il sistema elettrico viene semplificato (sotto opportune ipotesi) da un elemento circuitale.

$$\underbrace{\begin{matrix} E, D, B, H, J \\ \text{eq. Maxwell} \end{matrix}}_{\text{sistema elettrico (s.e.)}} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} v, i \\ \text{eq. Kirchhoff} \end{matrix}}_{\text{elemento circuitale (e.c.)}}$$

Tanti modellini messi assieme formano il circuito elettrico.



L'interconnessione dei E.C. forma un circuito elettrico.

Quali sono est. ipotesi?

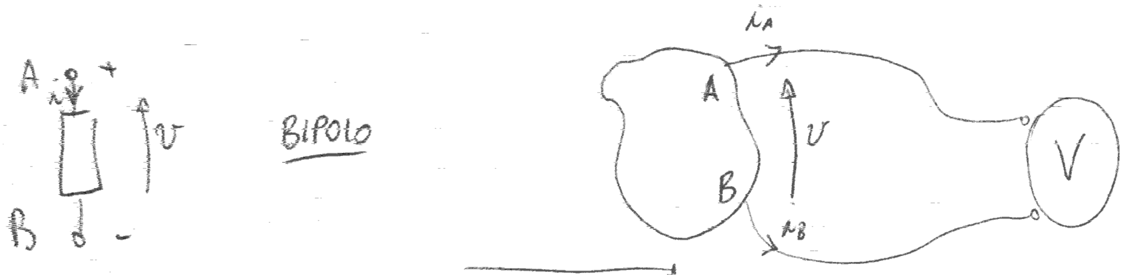
- frequenze di lavoro (campi elettromagnetici lentamente variabili)
  condizioni stazionarie o quasi-stazionarie (rete elettrica domestica 50 Hz).
- Nel sistema elettrico deve essere predominante un solo fenomeno principale. (campo magnetico o elettrico). L'EC è descritto in termini di tensione e corrente

ELEMENTI CIRCUITALI

- Il più semplice è il BIPOLO: un elemento circuitale ideale a due terminali (morsetti) per il quale valgono le due condizioni:

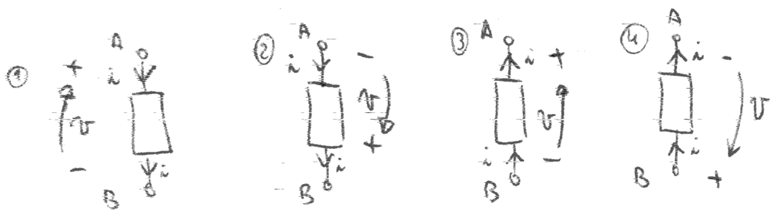
→ l'intensità di corrente di un terminale è uguale a quella dell'altro in ogni istante ($i_A = i_B$)

→ la tensione dei due terminali è indipendente dal percorso scelto in ogni istante.



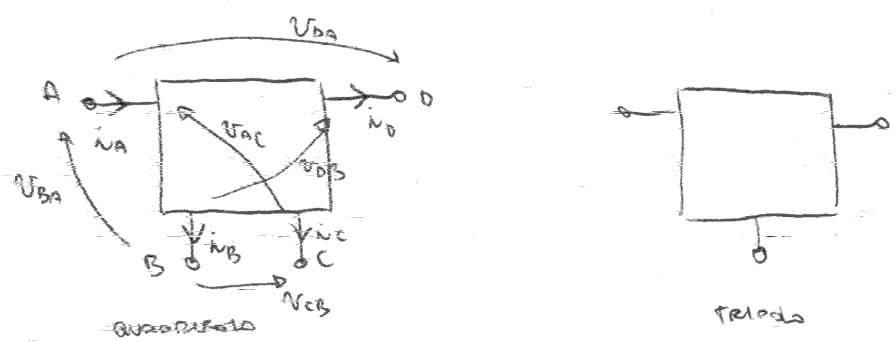
$$\boxed{i_A = i_B = i}$$

Abbiamo 4 combinazioni possibili:



La corrente esce dal terminale a potenziale più alto nel caso 2 e 3: Convenz. generatori
La corrente entra dal terminale a potenziale più alto nel caso 1 e 4; in questo caso si parla di CONVENZ. degli UTILIZZATORI

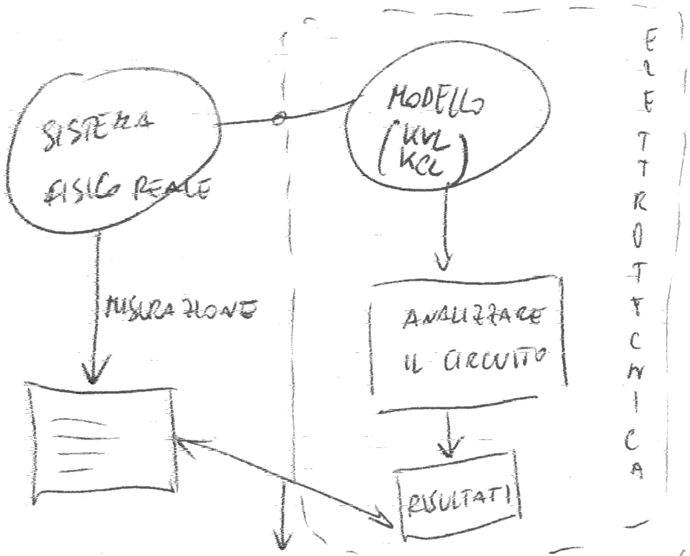
- Si definisce MULTIPOLO un elemento circuitale ideale con più di due morsetti (n terminali). Quadripolo, tripolo ecc. (n-poli)



→ Si ha una corrente ≠ in ogni terminale.

Gli n-poli sono i "mattoncini" per costruire un ~~altro~~ circuito elettrico.

Il circuito fisico ha una freq. caratteristica al di sopra della quale il modello circuitale non è più valido



Dati:

→ topologia (o interconnessioni) del circuito

→ legame tra tensioni e correnti ai terminali (i-v) (relazioni costitutive)

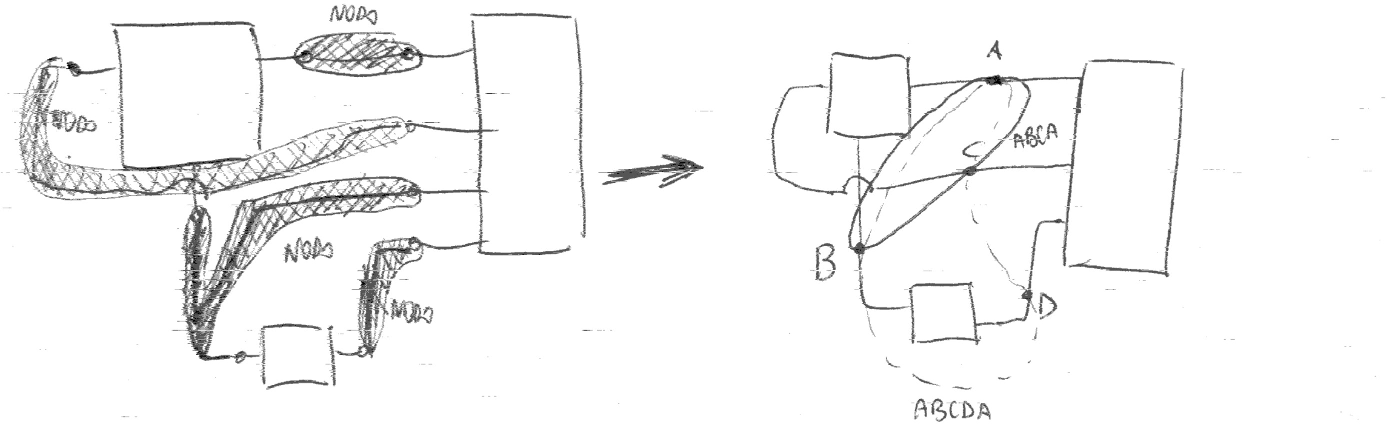
se i due risultati sono compatibili il modello del sistema reale è valido

Vincoli imposti dalla topologia

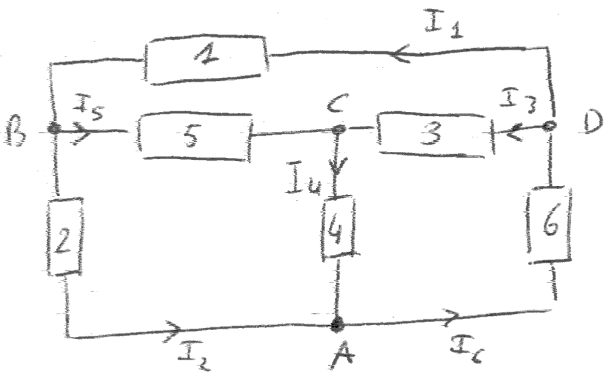
→ LEGGI DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI E TENSIONI (KCL, KVL)

Def: **NODO**: pto in cui sono connessi due o più terminali.

MAGLIA: sequenza di nodi che forma un percorso chiuso (partendo da un nodo devo ritornare al nodo stesso toccando tutti i nodi una sola volta)



Esempio: (KCL)



Dati: $I_3 = 6\ A$

$I_5 = 8\ A$

$I_6 = 7\ A$

Calcolare I_1, I_2, I_4 con i versi assegnati

Nodo D: (entranti +): $-I_1 - I_3 + I_6 = 0$

$-I_1 = I_3 - I_6$

$I_1 = I_6 - I_3 = 7\ A - 6\ A = \boxed{1\ A = I_1}$

Nodo B: (entranti +): $-I_5 - I_2 + I_1 = 0$

$-I_2 = I_5 - I_1$

$I_2 = I_1 - I_5 = 1A - 8A = \boxed{-7\ A = I_2}$

Nodo C: (uscente +): $I_4 - I_5 - I_3 = 0$

$I_4 = I_5 + I_3 = 8\ A + 6\ A = \boxed{14\ A = I_4}$

Per verifica posso calcolare il nodo A

Nodo A: (uscente +): $-I_4 - I_2 + I_6 = 0$

$I_4 = I_6 - I_2 = 7\ A + 7\ A = \boxed{14\ A = I_4}$

LEZIONE 3 (pag. 11-15 e 23-46)

Potenza elettrica $[W] = [J/s]$

Potenza istantanea: potenza assorbita da un bipolo in un certo istante di tempo.

$$p(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \Delta q}{\Delta t} = v(t) \cdot i(t)$$

potenza elettrica assorbita dal bipolo utilizzando la convenzione degli utilizzatori

$$p(t) = -v(t)\, i(t)$$

potenza assorbita dal bipolo utilizzando la convenzione dei generatori

→ Se $\boxed{p(t) > 0}$ allora l'energia è effettivamente assorbita dal bipolo

→ Se $\boxed{p(t) < 0}$ allora l'energia è effettivamente erogata dal bipolo.

Esempio precedente:

$p_5 = V_5 I_5 = 72\ W$ assorbita

$p_2 = V_2 I_2 = -14\ W$ erogata

$p_4 = -V_4 I_4 = -98\ W$ erogata

$p_1 = V_1 I_1 = 10\ W$ assorbita

$p_3 = -V_3 I_3 = 6\ W$ assorbita

$p_6 = -V_6 I_6 = -56\ W$ erogata

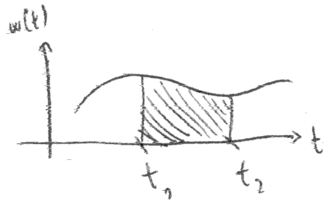
	CONVENZ. GENERATORI	CONVENZ. UTILIZZATORI
POT. ASS	−	+
POTE. EROG.	+	−

Energia elettrica e passività

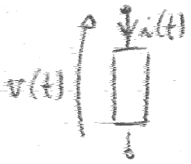
Un bipolo si dice passivo se $w(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t')\, i(t')\, dt' \geq 0 \quad \forall t$. Chi non li soddisfa vengono detti bipoli attivi.

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, i(t)\, dt$$

energia assorbita dal bipolo in un intervallo t_1, t_2.

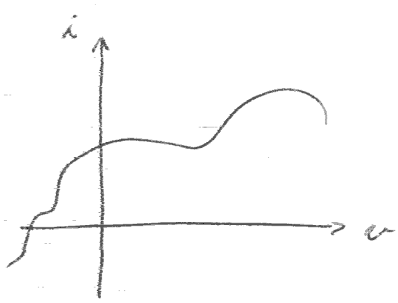


Classificazione dei bipoli



$$\underbrace{f(v(t), i(t), t) = 0}$$

relazione costitutiva
tra tensione e corrente
del bipolo.



caratteristica

Si distinguono in

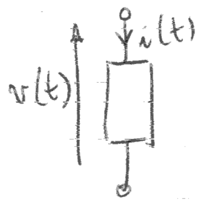
→ bipoli lineari / non lineari
→ dinamici / adinamici (o resistivi)
→ attivi / passivi
→ variabili nel tempo / invariabili nel tempo.

$f(v(t), i(t), t)$ → adinamico, variabile nel tempo.

$f(v(t), i(t))$ → non variabile nel tempo.

$f\left(\frac{dv(t)}{dt}, i(t)\right)$ → dinamico

Esempi:

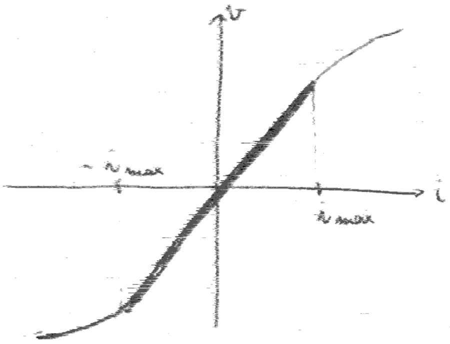


1) $a(t)v(t) + b(t)i(t) = 0$
→ lineare
→ adinamico
→ variabile nel tempo

2) $a\,v(t) + b\,i(t) = 0$
→ lineare
→ adinamico
→ ~~non~~ variabile nel tempo (i coeff. infatti non dipendono dal tempo)

3) $a\,v^3(t) + b\,i(t) = 0$
→ non lineare
→ adinamico
→ non variabile nel tempo

4) $a\,v^3(t) + b\frac{di(t)}{dt} = 0$
→ non lineare
→ dinamico
→ non variabile nel tempo.

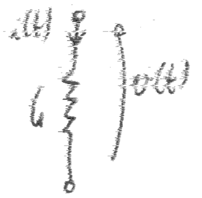


→ In un "range" di valori (cioè in opportune condizioni di funzionamento) si può vedere che il bipolo opera come un resistore ideale: tra $-i_{max}$ e i_{max}.

Un parametro stretto alla resistenza è la conduttanza, definita come:

$$G = \frac{1}{R} = [S] = [\Omega^{-1}] = \left[\frac{A}{V}\right]$$

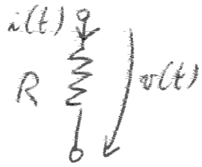
↑ Siemens.



$\boxed{i(t) = G\,v(t)}$

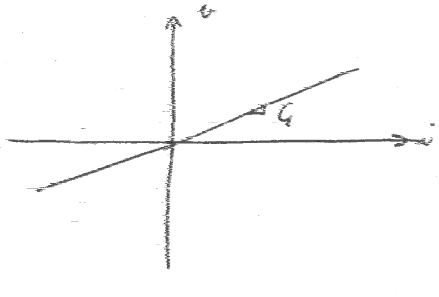
Convenzione utilizzatori

LEGGE DI OHM



$\boxed{i(t) = -G\,v(t)}$

Convenzione generatori



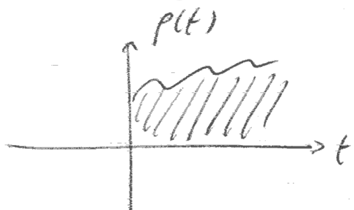
⇒ Il resistore è un bipolo passivo

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R\,i^2(t) \geq 0$$

↑

$(v(t) = R\,i(t))$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t')\,dt' \geq 0$$

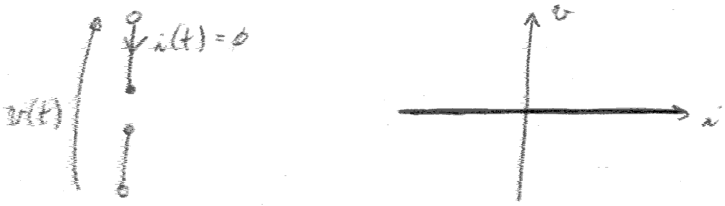


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 17 di 376

CASO PARTICOLARE

Se $i_s(t) = 0$ $\forall t$ avremo $\boxed{i(t) = 0}$ $\forall v(t)$

eq. costitutiva del circuito aperto (c.a.)



→ Impone una corrente nulla, qualunque sia la tensione.

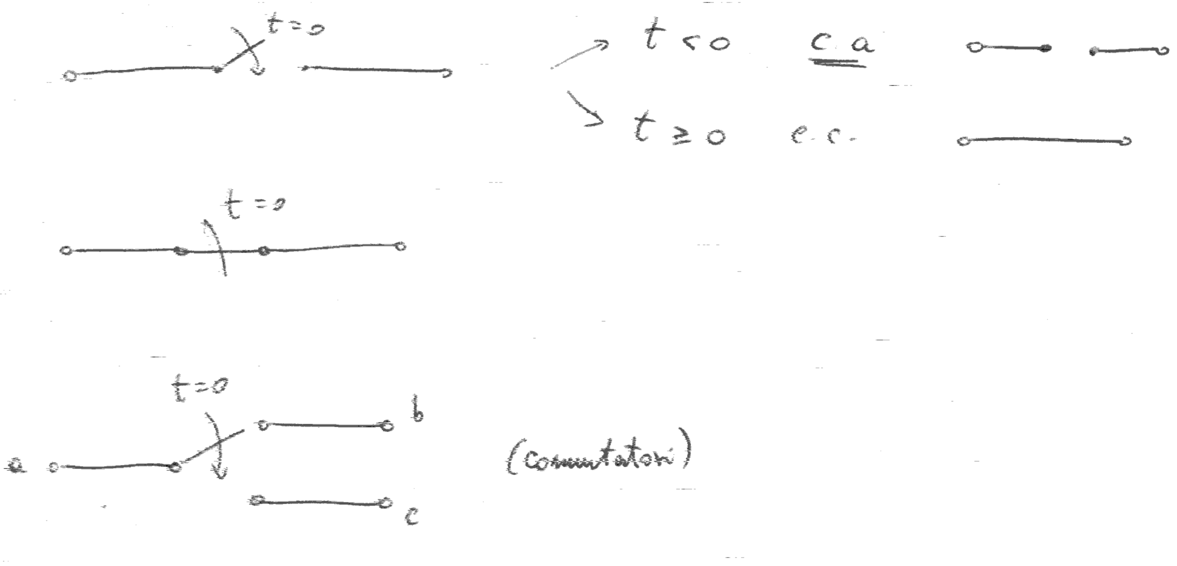
→ Se la conduttanza è nulla ($G=0$) allora avremo un circuito aperto, infatti:

$$i(t) = G\,v(t) = 0$$

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{per cui}: \quad (G=0) \Rightarrow (R \to \infty)$$

OSS

Interruttori



(commutatori)

Gli interruttori possono essere visti come bipoli con due componenti (c.a, c.c).

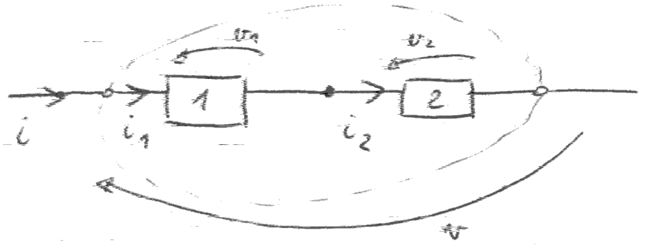
È un componente adinamico, lineare, e variabile nel tempo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 19 di 376

Connessione di bipoli

Lezione 4 (pag 28-46 e 55-56)

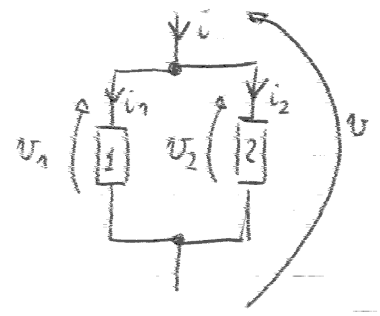
→ Due bipoli si dicono <u>connessi in serie</u> se hanno un terminale in comune (cioè se sono percorsi dalla stessa corrente)



$$\boxed{i = i_1 = i_2}$$

$$\boxed{v = v_1 + v_2}$$

→ Due bipoli sono <u>connessi in parallelo</u> se hanno due terminali in comune (cioè se <u>hanno la stessa tensione</u>)

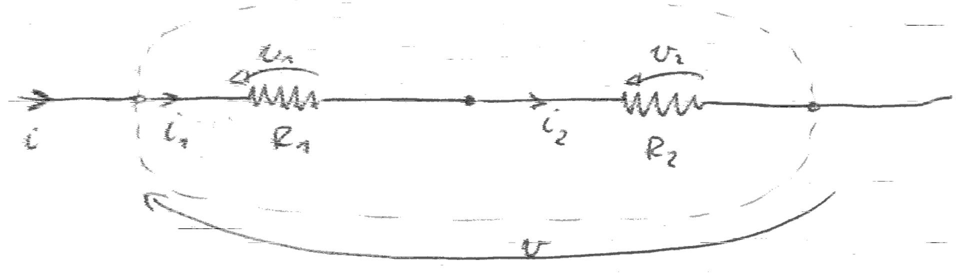


$$\boxed{v = v_1 = v_2}$$

$$\boxed{i = i_1 + i_2}$$

* Connessione di resistori

SERIE



Come detto: $i = i_1 = i_2$

KVL: $v - v_1 - v_2 = 0$

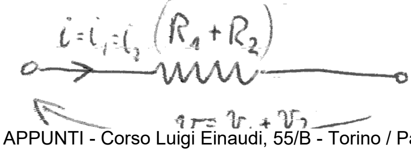
$$v = v_1 + v_2 = \underbrace{R_1 i_1}_{v_1} + \underbrace{R_2 i_2}_{v_2} = \boxed{i(R_1 + R_2) = v}$$

$(i = i_1 = i_2)$

→ La tensione e la corrente sono proporzionali. La costante di proporzionalità è $(R_1 + R_2)$.

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

→ Tutto il bipolo si può vedere come:

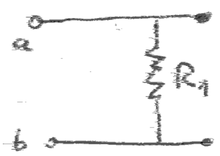


$$\frac{\dfrac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2}}{\dfrac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2}} = \frac{R_1R_2R_3}{\cancel{R_1+R_2}} \cdot \frac{\cancel{R_1+R_2}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} =$$

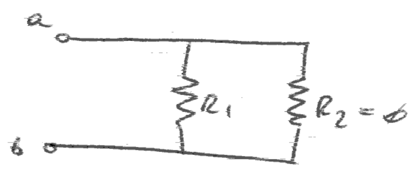
$$= \boxed{\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}} = R_1 \parallel (R_2 \parallel R_3)$$

Calcolo della resistenza equivalente

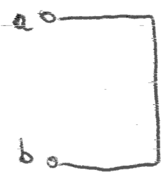
esempio:



$\Rightarrow$

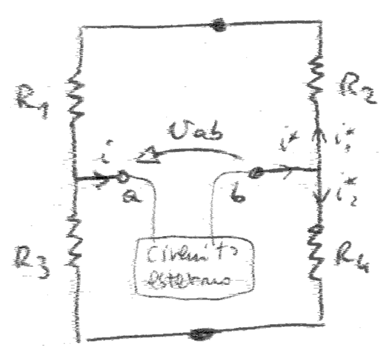


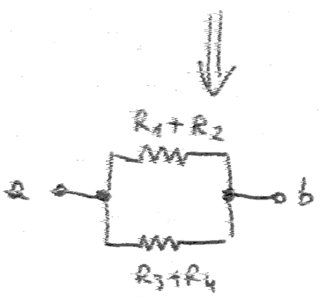
$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1 \cdot 0}{R_1+0} = \emptyset \implies$$



Corto circuito.

esempio:



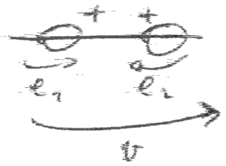


→ R_1 ed R_3 non sono né in serie né in parallelo. Se fossero in serie la corrente in a deve essere nulla perché dovrebbero avere la stessa corrente, ma nessuno ci dice che è nulla. Se fossero in $\parallel$ avrebbero in comune due terminali e invece ne hanno solo uno. Stesso discorso per R_2 ed R_4.

$$R_{ab} = (R_1+R_2) \parallel (R_3+R_4)$$

oss. Se i versi dei generatori sono al contrario il loro segno sarà il meno.

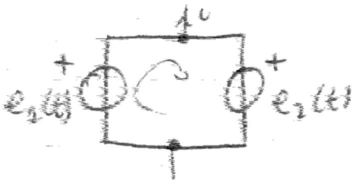
es



$v(t) = e_1 - e_2$

$v(t) = e_2 - e_1$

Supponiamo di avere:



KVL $\Rightarrow e_1 - e_2 = 0$

$e_1 = e_2$ CIRCUITO INDETERMINATO (perché non riesco a calcolare la corrente)

Se $e_1 \neq e_2$ CIRCUITO IMPOSSIBILE

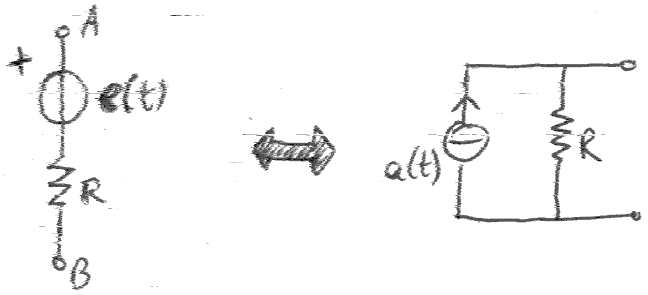
Stesso discorso per i generat. di corrente:

KCL $\Rightarrow a_1 - a_2 = 0$

$a_1 = a_2$ CIRCUITO INDETERMINATO (perché non riesco a calcolare la tensione)

Se $a_1 \neq a_2$ CIRCUITO IMPOSSIBILE

Bipoli equivalenti - GENERATORI REALI:

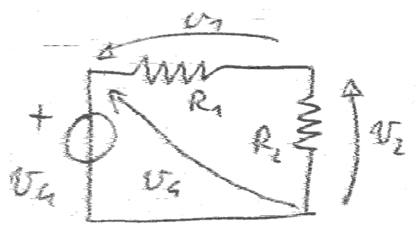


$\boxed{e(t) = R \cdot a(t)}$

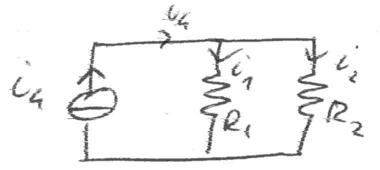
$\boxed{a(t) = \frac{e(t)}{R}}$

La R resta immutata

OSS.: Le formule di partitore ci dicono come sono ripartite le correnti e le tensioni nel circuito.

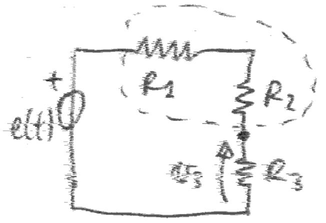


$v_G = v_1 + v_2$

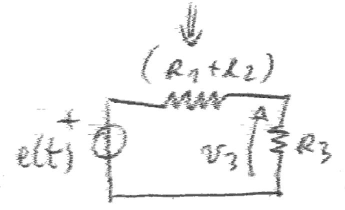


$i_G = i_1 + i_2$

Esempio:



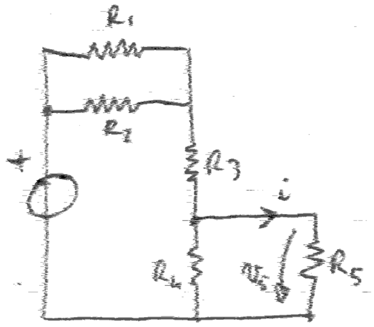
Calcolare v_3



Col partitore di tensione avremo:

$$v_3 = e(t) \frac{R_3}{(R_1+R_2)+R_3}$$

Esempio:



Calcolare i

Per calcolare la i sfruttiamo la legge di Ohm.

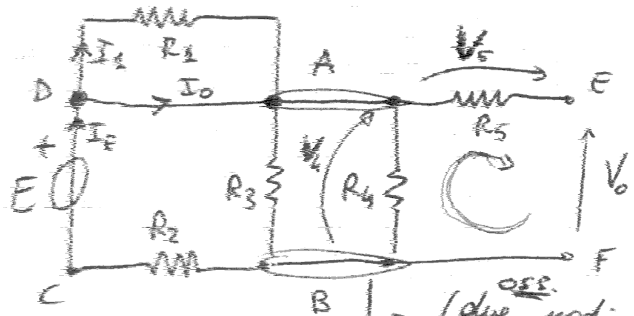
$$i = \frac{v}{R_5}$$

Quindi mi serve calcolare prima la tensione ai capi di R_5. Visto che abbiamo scelto la conv. dei generatori la formula verrà col segno meno:

$$i = -\frac{v_5}{R_5}$$

$R_4 \| R_5 \rightarrow$ la v quindi è la stessa ed è v_5.

Esempio:



Calcolare I_0 e V_0

OSS.
(due nodi connessi da un c.c. è come se fosse un unico nodo)

OSS
→ Per il calcolo della corrente su un c.c. si deve applicare la KCL ad uno dei nodi del c.c. a cui è connesso il circuito.

Nodo (D)

$$I_0 + I_1 - I_E = 0 \Rightarrow I_0 = I_E - I_1 \quad (KCL)$$

OSS
→ La tensione su R_1 è imposta dal c.c., ed è quindi nulla.

$$v = R_1 I_1 \underset{(v=0)}{\Rightarrow} 0 = R_1 I_1 \Rightarrow \underline{R_1 = \emptyset} \quad e \quad avremo \quad I_1 = \frac{v}{R_1} = 0$$

Quindi

$$I_0 = I_E - \cancel{I_1}^{\,0} \Rightarrow \boxed{I_0 = I_E}$$

OSS.
→ Per il calcolo della tensione su un c.a. si deve applicare la KVL sulla maglia dove c'è il c.a..

Maglia (FBAEF)

$$V_4 + V_5 - V_0 = 0 \Rightarrow V_0 = V_4 + V_5 \quad (KVL)$$

OSS
→ Il c.a. impone una corrente nulla quindi la tensione ai capi di R_5 è $v = R_5 \cdot \emptyset \Rightarrow R_5 = 0$.

Quindi

$$V_0 = V_4 + \cancel{V_5}^{\,0} \Rightarrow \boxed{V_0 = V_4}$$

LEZIONE 5 (pag. 17-18)

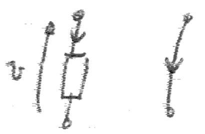
GRAFO ORIENTATO

→ Si sostituisce ogni bipolo con un arco di linea detto RAMO o LATO del GRAFO.

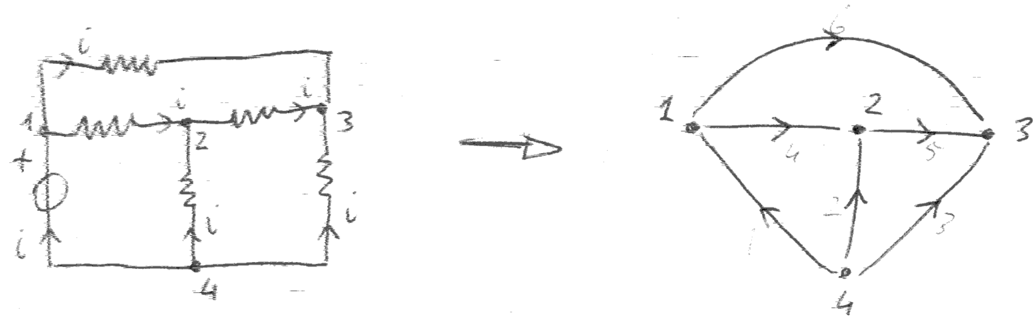
→ Ad ogni nodo viene assegnato un numero.

→ Su ogni ramo viene fissato un verso coincidente al verso della corrente che fluisce sul bipolo (detto GRAFO ORIENTATO).

→ La tensione sul ramo viene assunta utilizzando la convenzione degli utilizzatori.



es.:



(grafo orientato)

→ Attraverso il grafo orientato scriveremo le leggi di Kirchoff.

→ Un grafo è rappresentato da un numero di lati l (uguali al numero di bipoli) e da un numero di nodi n. (anche con b (rami))

→ Un grafo è connesso se un nodo è connesso ad un altro nodo qualsiasi da uno o più lati.

→ Noi considereremo sempre i grafi connessi.

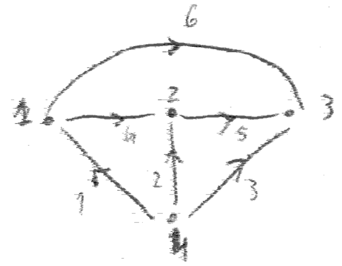
Matrice d'incidenza ridotta $\boxed{\underline{A}\,\underline{i} = 0}$

Dato il grafo posso costruire qst matrice solo guardandolo.

+1 se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente uscente.

-1 se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente entrante.

• KVL in forma matriciale



$$\begin{cases} -v_1 + v_2 - v_4 = 0 & (4124) \\ -v_2 + v_3 - v_5 = 0 & (4234) \\ v_4 + v_5 - v_6 = 0 & (2132) \\ v_1 - v_3 + v_6 = 0 & (4314) \end{cases}$$

Se in un circuito si scrivono tutte le KVL a tutti le maglie, allora le eq. ottenute risultano lin. dip. Si dimostra che se scrivo le KCL per tutte le maglie meno una $(l-1)$ allora le eq. sono lin. indip.

$$\underline{B}\,\underline{v} = 0 \qquad B \in \mathbb{R}^{l-(n-1),\, l}$$

matrice di un insieme di maglie fondamentali.

$$\underbrace{\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \end{array}}_{}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OSS. $\underline{A}^T$ è la matrice d'incidenza (calcolata prima) trasposta.

Quindi calcolata una matrice possiamo ricavarci l'altra senza dover riscrivere tutte le equazioni.

Da qst leggi di Kirchoff in forma matriciale deriviamo il:

→ TEOREMA DI TELLEGEN

→ METODO DEL TABLEAU

TEOREMA DI TELLEGEN

$$\underline{A}\,\underline{i} = \emptyset \qquad ; \qquad \underline{v} = \underline{A}^T \underline{e}$$

$\underline{A} \in R^{n-1,\ell}$

$$\underline{v}^T \underline{i} = (\underline{A}^T \underline{e})^T \underline{i} = \underline{e}^T (\underline{A}^T)^T \underline{i} = \underline{e}^T \underbrace{(\underline{A}\,\underline{i})}_{\emptyset} = \sum_{k=1}^{\ell} i_k v_k = \emptyset$$

Dove $i_k v_k$ è la potenza assorbita dal bipolo k. Facendo la Σ avremo la potenza assorbita di tutto il circuito.

Qst potenza come calcolato sopra è uguale a zero, il che significa che tutta la potenza generata viene assorbita dal circuito. In altre parole, se ci sono elementi che generano potenza allora ci sono elementi che la assorbono, quindi le interconnessioni sono ideali, cioè gli scambi energetici avvengono solo dentro i bipoli (stesso discorso fatto per spiegare qst circuiti detti a param. concentrati).

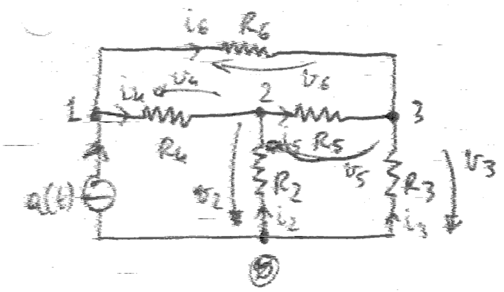
Qst principio è detto di conservazione dell'energia (Th. di Tellegen)

esempio

Circuito a-dinamico lineare.

$(l = 6,\ n = 4) \rightarrow (n-1)$ # di KCL indipendenti

$l-(n-1)$ # di KVL indipendenti



$$\begin{cases} 1)\ -i_1 + i_4 + i_6 = 0 \\ 2)\ -i_2 - i_4 + i_5 = 0 \\ 3)\ -i_3 - i_5 - i_6 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = -e_1$	$i_1 = a(t)$	lato 1
$v_2 = -e_2$	$v_2 = R_2 i_2$	lato 2
$v_3 = -e_3$	$v_3 = R_3 i_3$	lato 3
$v_4 = e_1 - e_2$	$v_4 = R_4 i_4$	lato 4
$v_5 = e_2 - e_3$	$v_5 = R_5 i_5$	lato 5
$v_6 = e_1 - e_3$	$v_6 = R_6 i_6$	lato 6

METODO TABLEAU

sistema di $15\,(2l + (n-1))$ equaz. in $15\,(2l+(n-1))$ incognite.

$\underline{A}\,\underline{i} = 0$

$\underline{v} = \underline{A}^T \underline{e}$

$$\underline{M}\,\underline{v} + \underline{N}\,\underline{i} = \underline{u}_S$$

↳ vettore dei generat. indipendenti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{A} \\ -\underline{A}^T & 1 & 0 \\ 0 & \underline{M} & \underline{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e} \\ \underline{v} \\ \underline{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{u}_S \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{T}\,\underline{w} = \underline{u}$$

risolvibile se $\det(\underline{T}) \neq 0$

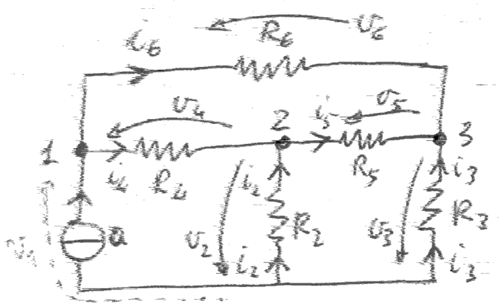
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

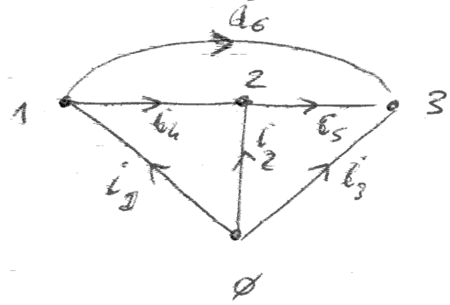
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6 \end{pmatrix}$$

$$u_S = \begin{pmatrix} a(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

METODO DEI NODI





$(l=6,\ n=4) \Rightarrow (n-1)$ # di KCL indip.

$l-(n-1)$ # di KVL indip.

$$\begin{cases} v_1 = -e_1 \\ v_2 = -e_2 \\ v_3 = -e_3 \\ v_4 = e_1 - e_2 \\ v_5 = e_2 - e_3 \\ v_6 = e_1 - e_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1 = a(t) \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ v_4 = R_4 i_4 \\ v_5 = R_5 i_5 \\ v_6 = R_6 i_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = a(t) \\ i_2 = -G_2 e_2 \\ i_3 = -G_3 e_3 \\ i_4 = G_4(e_1 - e_2) \\ i_5 = G_5(e_2 - e_3) \\ i_6 = G_6(e_1 - e_3) \end{cases}$$

(partono dal nodo di riferimento quindi hanno un termine solo).

(correnti dei lati in funzione dei potenziali ai nodi)

→ Le l correnti di lato sono espressi in termini di $(n-1)$ potenziali ai nodi.

→ Posso esprimere le $(n-1)$ KCL in termini di $(n-1)$ potenziali ai nodi ottenendo $(n-1)$ equazioni con $(n-1)$ incognite.

NODO 1

$$-i_1 + i_4 + i_6 = \underbrace{G_4(e_1-e_2)}_{i_4} + \underbrace{G_6(e_1-e_3)}_{i_6} = G_4e_1 - G_4e_2 + G_6e_1 - G_6e_3 = \boxed{e_1(G_4+G_5) - G_4e_2 - G_6e_3}$$

NODO 2

$$-i_4 + i_5 - i_2 = \underbrace{-G_4(e_1-e_2)}_{-i_4} + \underbrace{G_5(e_2-e_3)}_{i_5} + \underbrace{G_2e_2}_{-i_2} = -G_4e_1 + G_4e_2 + G_5e_2 - G_5e_3 + G_2e_2 =$$

$$= \boxed{-G_4e_1 + e_2(G_4+G_5+G_2) - G_5e_3}$$

LEZIONE 7 (pag. 47-50 e 84-85)

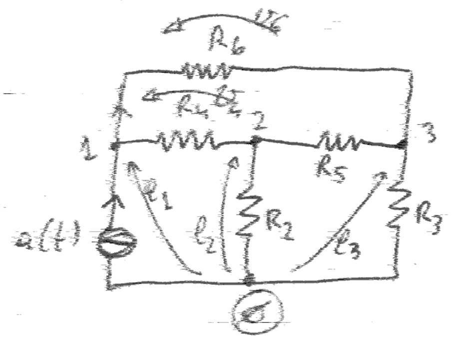
METODO DEI NODI

È l'unico sistema che vedremo che risolve un circuito con uno o più generatori, mentre i partitori e le leggi di Ohm risolvono in modo efficiente circuiti con un solo generatore.

Il metodo dei nodi segue le seguenti regole:

1. Si etichettano gli n nodi da 1 ad $n-1$ e lo $\varnothing$ rappresenta il nodo di riferimento (in maniera arbitraria)
2. Ad ogni nodo si scrive la KCL assumendo lo stesso verso di riferimento per tutti i rami incidenti al nodo (tipicamente segno positivo per il verso uscente).
3. Ciascuna corrente la esprimo in tensioni di lato.
4. Ogni tensione di lato la esprimo come potenziali ai nodi.

esempio (ripreso dall'es. precedente):



KCL

NODO 1

$$-a(t)+i_4+i_6=0$$

$$a(t)=i_4+i_6$$

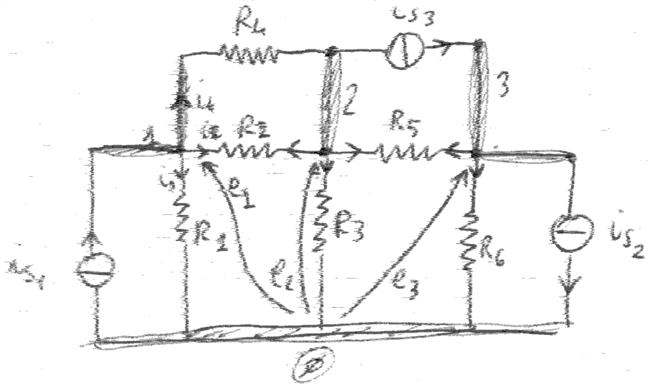
$\Downarrow$ (3° p.to)

$$a(t)=G_4 v_4+G_6 v_6$$

$\Downarrow$ (4° p.to)

$$a(t)=G_4(e_1-e_2)+G_6(e_1-e_3)$$

Esempio: Metodo dei nodi se ho generatori di corrente



NODO 1

$$i_1 + i_2 + i_4 = i_{s_1}$$

corrente in R_1

$$G_1 e_1 + G_2(e_1 - e_2) + G_4(e_1 - e_2) = i_{s_1}$$

NODO 2

$$-i_{s_3} = G_3 e_2 + G_2(e_2 - e_1) + G_5(e_2 - e_3)$$

NODO 3

$$i_{s_3} - i_{s_2} = G_5(e_3 - e_2) + G_6(e_3)$$

Avremo:

$$\begin{cases} e_1 G_1 + (e_1 - e_2)(G_2 + G_4) = i_{s_1} & \text{nodo 1} \\ (e_2 - e_1) G_2 + e_2 G_3 + (e_2 - e_3) G_5 = -i_{s_3} & \text{nodo 2} \\ (e_3 - e_2) G_5 + e_3 G_5 = i_{s_3} - i_{s_2} & \text{nodo 3} \end{cases}$$

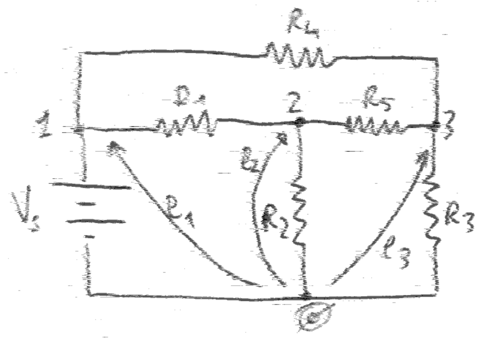
In forma matriciale avremo:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -(G_4 + G_2) & 0 \\ -(G_4 + G_2) & G_2 + G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_5 + G_6 \end{bmatrix}$$

→ Non c'è nessun resistore collegato direttamente tra il nodo 1 e il nodo 3.

→ Agli altri componenti fuori dalla diagonale cambio segno.

→ Vediamo ora cosa succede al metodo dei nodi se ho un generatore di tensione



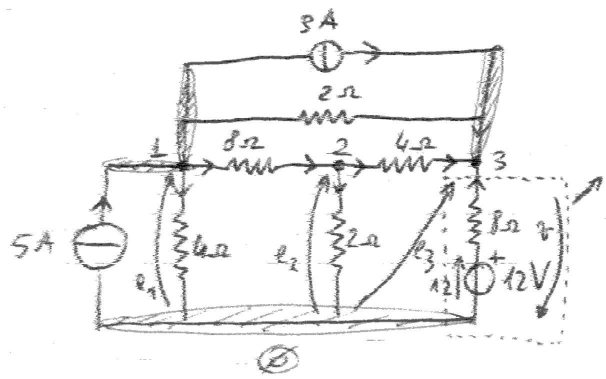
Ma e_1 è uguale a V_s perché il generatore di tensione impone la sua tensione ai capi dei nodi $e_1 = V_s$.

Ci resta solo da calcolare e_2 ed e_3.

Scriveremo quindi solo due equazioni con le incognite e_2 ed e_3.

$$\begin{cases} G_1(e_2 - \underset{V_s}{e_1}) + G_2 e_2 + G_5(e_2 - e_3) = 0 & \text{nodo } 2 \\ G_3 e_3 + G_5(e_3 - e_2) + G_4(e_3 - \underset{V_s}{e_1}) = 0 & \text{nodo } 3 \end{cases}$$

Esempio (Metodo nodi con gen. tensione in serie ad un resistore)



generat. tensione in serie ad un resistore
$v - 12 + e_3 = 0$
$v = 12 - e_3$

(KVL in senso orario)

$$\begin{cases} 5 = 3 + \dfrac{e_1 - e_3}{2} + \dfrac{e_1 - 2}{8} + \dfrac{e_1}{4} & \text{nodo } 1 \\ -\dfrac{e_2 - e_1}{8} = \dfrac{e_2}{2} + \dfrac{e_2 - e_3}{4} & \text{nodo } 2 \\ -\dfrac{e_3 - e_1}{4} - \dfrac{e_3 - e_2}{4} + 3 - \dfrac{e_3 - 12}{8} = 0 & \text{nodo } 3 \end{cases}$$

GENERATORI DIPENDENTI

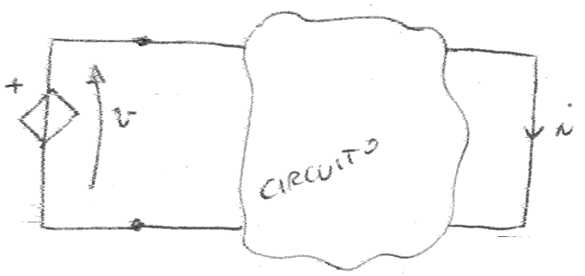
Sono generatori il cui valore dipende da un'altra grandezza elettrica.
Possiamo avere

→ generatori di tensione
- dipendente da tensione (pilotati in tensione)
- dipendente da corrente (pilotati in corrente)

→ generatori di corrente
- dipendente da tensione (pilotati in tensione)
- dipendente da corrente (pilotati in corrente)

Ci interesserà ai fini delle risoluzioni circuitali il lato del generatore dipendente e il lato in cui c'è la grandezza da cui il generatore stesso dipende.

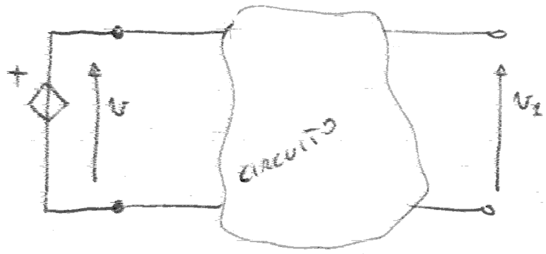
* GEN. TENSIONE DIPENDENTE DA CORRENTE



$\boxed{v = r\, i}$

(r) parametro resistivo [Ω]
(transresistenza)

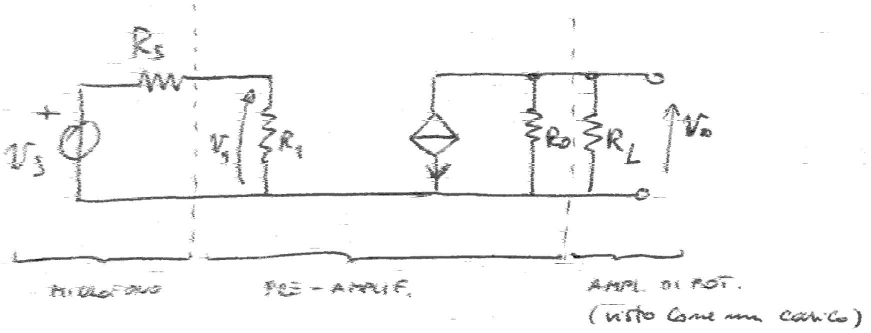
* GEN. TENSIONE DIPENDENTE DA TENSIONE



$\boxed{v = \alpha\, v_1}$

(α) parametro adimensionato

es. (Microfono)



$R_S = 500\,\Omega$

$R_1 = 2\,K\Omega$

$R_0 = 50\,\Omega$

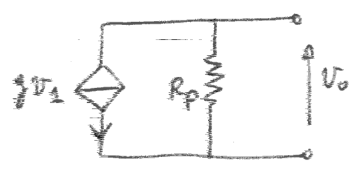
$R_L = 10\,K\Omega$

$g = 30\ mS$

$$v_1 = v_S \frac{R_1}{R_S + R_1} \qquad \text{(partitore tensione)}$$

$$R_0 \parallel R_L = \frac{R_0 R_L}{R_0 + R_L} = R_p$$

$$v_0 = -R_p\, g\, v_1 = \underbrace{-R_p\, g\, \overbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_S}}^{v_1}}_{\substack{\text{parametro adimensionato} \\ \text{(coefficiente)}}} v_S = -200\, v_S$$

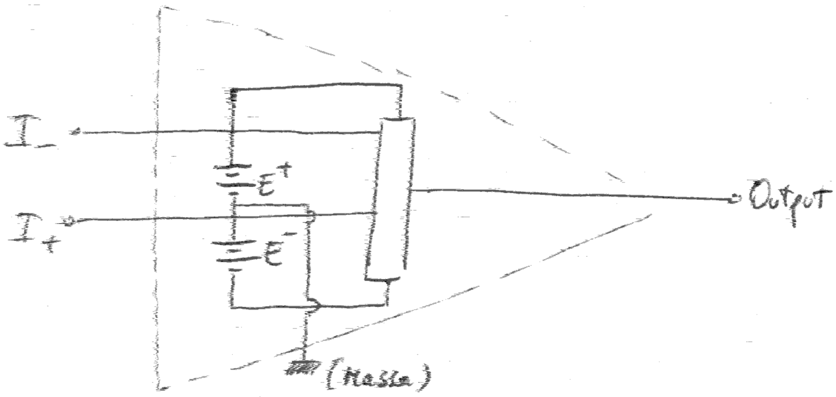


LEZIONE 8 (pag 101-108)

AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

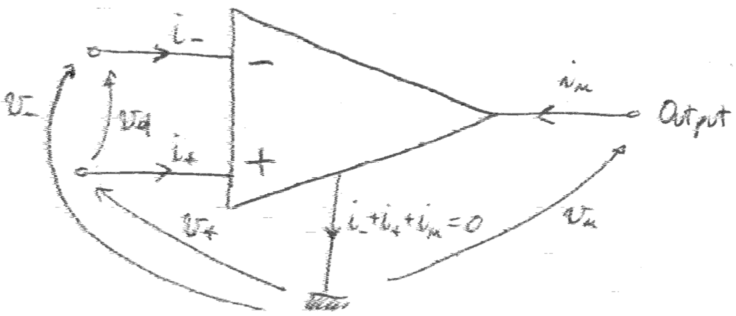
(pag 101-108 libro)

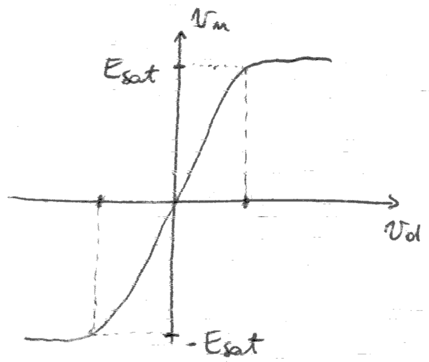
Ci riferiremo di qll ideale.
Ciò adesso caratterizziamo l'A.O. generale.



Dove I_- è l'ingresso non invertente, I_+ qll invertente

Come simbolo si usa il seguente:





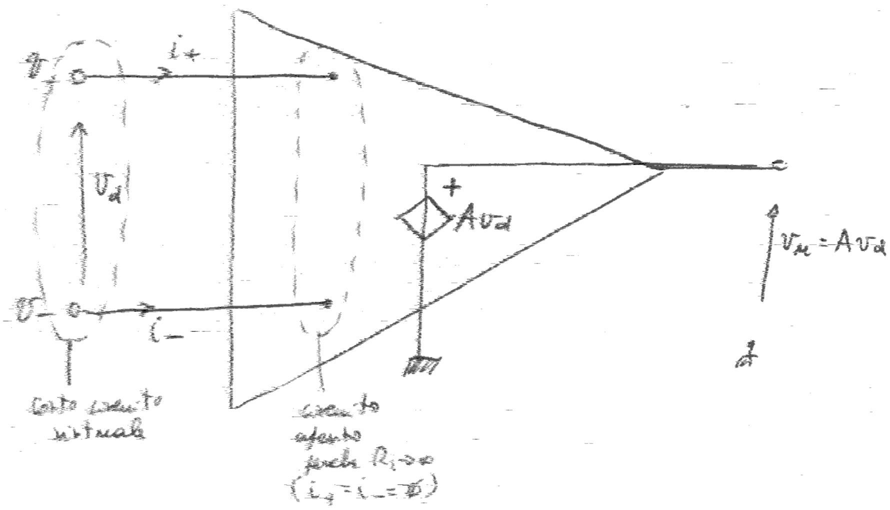
v_d è detta tensione differenziale: $\boxed{v_d = v_+ - v_-}$

La v_u, cioè la tensione d'uscita è una funzione non lineare della v_d: $\boxed{v_u = f(v_d)}$

Quindi se la v_d è troppo grande non si riesce ad avere un comportamento lineare (come si vede dal grafico).

Ora invece vediamo come modellare il modello visto in un:

→ **amplificatore operazionale ideale**



Abbiamo visto che la R_u è molto piccola, quindi possiamo annullarla ($R_u = \emptyset$). Si ottiene un c.c.
La R_i è invece molto grande possiamo farla tendere ad ∞ ($R_i \to \infty$) si ottiene un circuito aperto.
Stesso discorso per il guadagno. ($A \to \infty$).

Quindi $A \to \infty$ implica:

$$v_u = A v_d \to v_d = \frac{v_u}{A} \underset{(A \to \infty)}{\Rightarrow} v_d = 0$$

(corto circuito virtuale)

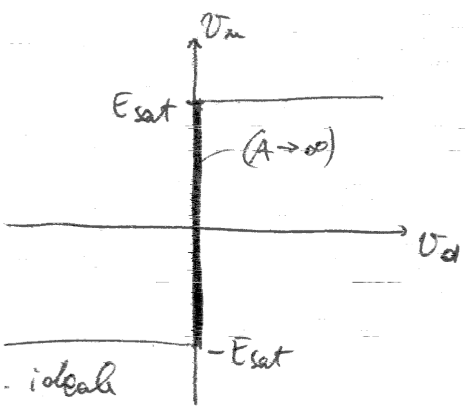
da $v_d = 0$ segue che $v_+ - v_- = 0 \Rightarrow \boxed{v_+ = v_-}$ hanno lo stesso potenziale
e $R_i \to \infty$ implica

$i_+ = i_- = \emptyset$ perché tra v_+ e v_- c'è un circuito aperto

In definitiva un A.O. ideale impone

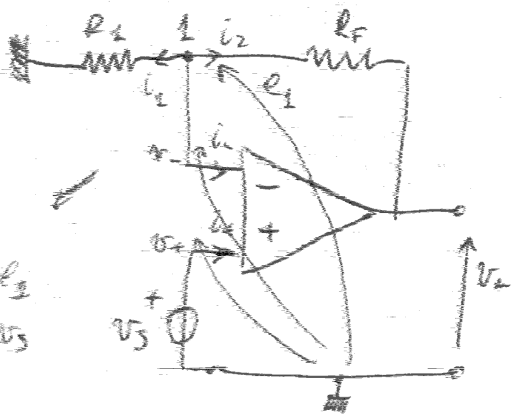
$$\boxed{\begin{array}{l} v_d = 0 \\ i_+ = i_- = 0 \end{array}}$$

A.O. ideale



Caratteristica A.O. ideale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 53 di 376



oss
$v_- = e_1$
$v_+ = v_S$

KCL
nodo ①
$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_1 - V_u}{R_F} + \underbrace{i_-}_{=\emptyset} = 0$$

$v - e_1 + v_u = 0$
$v = e_1 - v_u$

Imponendo i vincoli dell'A.O. ideale

$i_+ = i_- = \emptyset$

$V_d = 0 \Rightarrow V_+ = V_-$

$\left.\begin{array}{l} v_- = e_1 \\ v_+ = v_S \end{array}\right\} \Rightarrow e_1 = v_S$

Sostituiamo:

$$\frac{v_S}{R_1} + \frac{v_S - V_u}{R_F} = 0$$

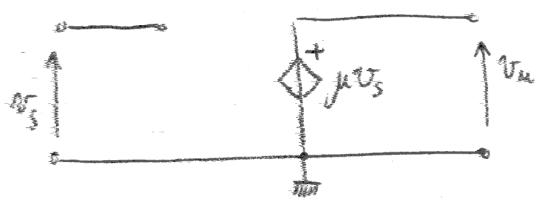
$$v_S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_F}\right) = \frac{v_u}{R_F} \Rightarrow \boxed{V_u = \left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right) v_S}$$

Il guadagno $A = 1 + \frac{R_F}{R_1}$ in qst caso è ad anello ~~non~~ aperto.

Il coefficiente è positivo, si tratta di un A.O. NON INVERTENTE.

$$|v_S| < \frac{R_1}{R_1 + R_F} E_{sat}$$

Il circuito equivalente è il seguente:



$$\mu = 1 + \frac{R_F}{R_1} = \frac{R_1 + R_F}{R_1} = \mu$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 55 di 376

otteniamo $i = \dfrac{v_S}{R_i + R_o + AR_i}$

Qst sostituita alla KVL della maglia sx

$v_o = R_o i + AR_i i$

$$v_o = R_o \frac{v_S}{R_i+R_o+AR_i} + AR_i \frac{v_S}{R_i+R_o+AR_i}$$

$$v_o = v_S\left(\frac{R_o}{R_i+R_o+AR_i} + \frac{AR_i}{R_i+R_o+AR_i}\right)$$

$$\boxed{v_o = v_S\left(\frac{R_o+AR_i}{R_i+R_o+AR_i}\right)}$$

Sostituendo i valori tipici $R_i = 10^7\,\Omega$, $R_o = 10\,\Omega$, $A = 10^5$

si ottiene $v_o = 0{,}99999\, v_S$.

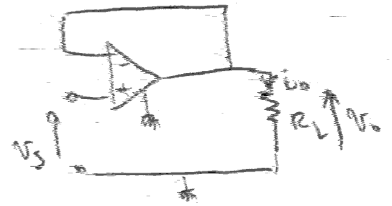
→ Poiché la tensione d'uscita è sempre leggermente inferiore alla tensione d'ingresso v_S, qst circuito viene detto INSEGUITORE DI TENSIONE

LEZIONE 9 (pag. 109-117)

Metodo dei nodi con A.O.

→ Scrivo la KCL a tutti i nodi tranne:

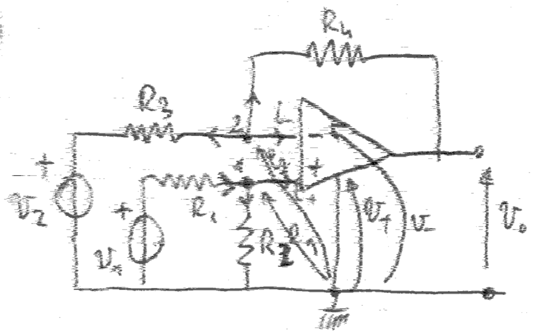
- il nodo di riferim.
- il nodo connesso al generat. di tensione
- ai nodi di uscita degli A.O..



$i_o = -\dfrac{v_o}{R_L} = -\dfrac{v_S}{R_L}$

→ cosa che non accade col un partitore di tensione.

Il valore di R_L non ha effetto sulla tensione v_S.



$i_+ = i_- = \emptyset$

$v_+ = v_- \Rightarrow v_d = \emptyset$

$\downarrow$

$e_1 = v_+$ e $e_2 = v_-$

$\Downarrow$

$e_1 = e_2$

KCL:

① $\dfrac{v_1 - e_1}{R_1} - \dfrac{e_1}{R_2} - \cancel{i_+}^{=0} = 0$ — NODO ①

② $\dfrac{e_2 - v_2}{R_3} + \dfrac{e_2 - v_0}{R_4} + \cancel{i_-}^{=0} = 0$ — NODO ②

vincolo $e_1 = e_2$

① $\dfrac{v_1}{R_1} = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) e_1 \Rightarrow e_1 = \underbrace{\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} v_1}_{\text{partitore tensione}} = e_2$

partitore tensione $\rightarrow$ essendo $i_+ = \emptyset$ la stessa corrente percorre R_1 ed R_2.

② $\dfrac{v_0}{R_4} = -\dfrac{1}{R_3} v_2 + \left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}\right) e_2$

$$\boxed{v_0 = -\underbrace{\frac{R_4}{R_3}}_{\beta} v_2 + \underbrace{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{\alpha} v_1}$$

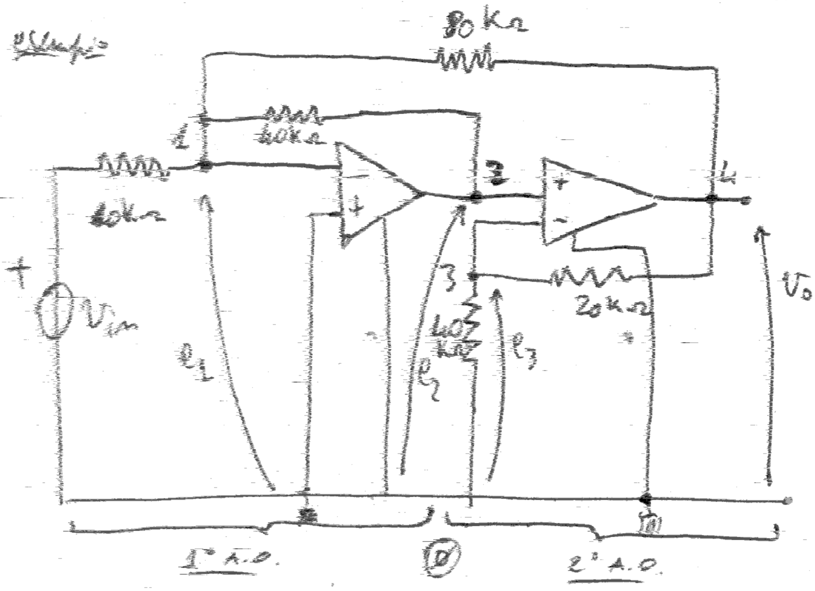
β, α → calibrati/dimensionati

$v_0 = \alpha v_1 - \beta v_2$

se $\alpha = \beta \Rightarrow v_0 = v_1 - v_2$

Qst circuito è detto amplificatore operazionale DIFFERENZIALE

esempio



2 e 4 NO

KCL

nodo ①
$$\frac{\cancel{e_1}-V_{in}}{10}+\cancel{i_-}+\frac{\cancel{e_1}-e_2}{40}+\frac{\cancel{e_1}-V_0}{80}=0$$

nodo ③
$$\frac{e_3}{40}-\frac{e_3-V_0}{20}+\cancel{i_-}=0$$

Vincoli

$e_1=V_+=V_-=\phi$	$e_2=V_+=V_-=e_3$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$e_1=\phi$	$e_2=e_3$
1° a.o.	2° a.o.

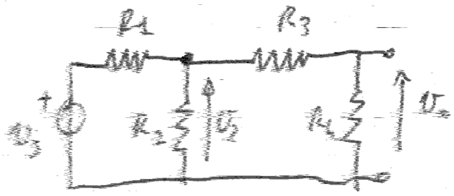
$$\begin{cases} -\dfrac{V_{in}}{10}-\dfrac{e_3}{40}-\dfrac{V_0}{80}=0 & ① \\ e_3\left(\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{20}\right)=\dfrac{V_0}{20} & ③ \end{cases}$$

mi ricavo e_3 e lo sostituisco per trovare V_0

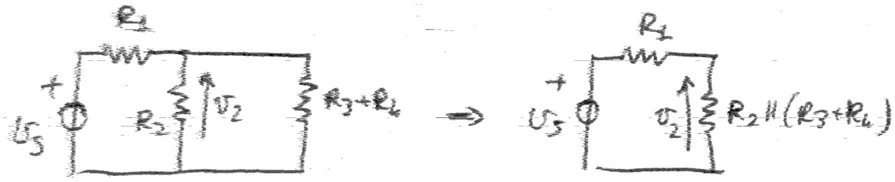
$$\left.\begin{aligned} \frac{v_2}{v_{in}} &= \frac{R_2}{R_2+R_1} \\ \frac{v_o}{v_3} &= \frac{R_4}{R_4+R_3} \end{aligned}\right\} \text{partitore tensione}$$

$$\boxed{\frac{v_o}{v_{in}} = \left(\frac{R_4}{R_4+R_3}\right)\left(\frac{R_2}{R_2+R_1}\right)}$$

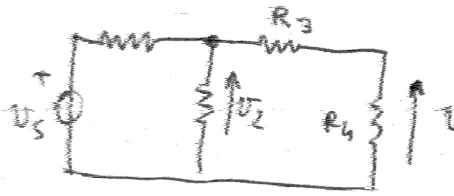
Visto che l'A.O. è di guadagno unitario possiamo provare ad eliminarlo. (Vediamo che il risultato è diverso).



$\Downarrow$



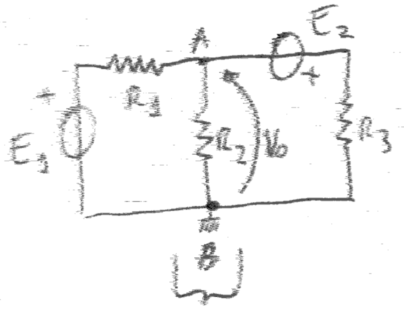
$$v_2 = v_s \frac{R_S \parallel (R_3+R_4)}{R_1 + R_S \parallel (R_3+R_4)}$$



$$v_o = v_2 \frac{R_4}{R_3+R_4} = \underbrace{v_s \frac{R_S \parallel (R_3+R_4)}{R_1 + R_S \parallel (R_3+R_4)}}_{v_2} \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4}$$

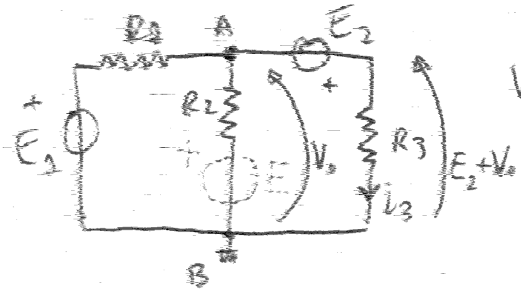
$$\boxed{\frac{v_o}{v_s} = \frac{R_4 \left[R_S \parallel (R_3+R_4)\right]}{(R_3+R_4)\left[R_1 + R_S \parallel (R_3+R_4)\right]}}$$

esempio



Calcolare V_0

Il ramo A-B può essere visto un resistore con un generatore nullo (che forma un c.c.)

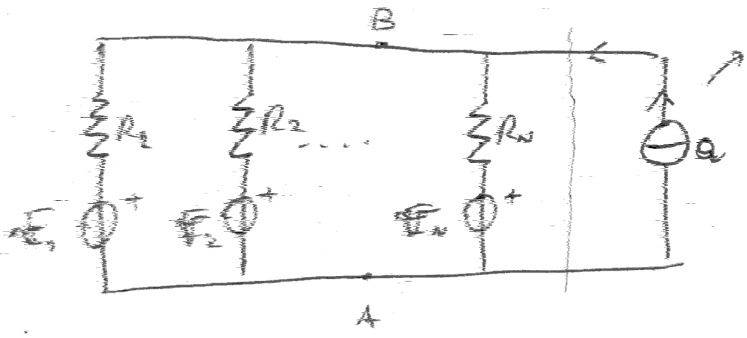


$$V_0 = \frac{E_1 G_1 + \emptyset G_2 - E_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Una volta nota V_0 posso calcolare le correnti

$$i_3 = \frac{+E_2 + V_0}{R_3} \quad \text{(legge Ohm)}$$

Cosa succede se abbiamo un generat. di corrente?



corrente entrante dove la tensione ha potenziale più alto.
(Altrimenti segno negativo)

$$i_1 + i_2 + \dots + i_N - Q = 0$$

$$G_1(V - V_1) + G_2(V - V_2) + \dots + G_N(V - V_N) = Q$$

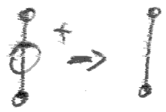
$$(G_1 + G_2 + \dots G_N)V = G_1 V_1 + G_2 V_2 + \dots + G_N V_N + Q$$

$$\boxed{V = \frac{G_1 V_1 + G_2 V_2 + \dots + G_N V_N + Q}{G_1 + G_2 + \dots + G_N}}$$

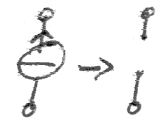
→ Il gen. corrente si sommano al numeratore.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

In un circuito a-dinamico lineare qualunque tensione o corrente è la somma degli <u>effetti</u> dovuti ai singoli <u>generatori indipendenti</u> quando agiscono <u>uno alla volta</u>. I generatori dipendenti rimangono invariati.

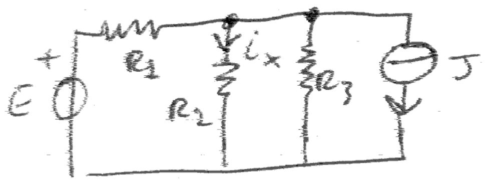


Se spengo un generatore di tensione ottengo un corto circuito.



Se spengo un generatore di corrente ottengo un circuito aperto.

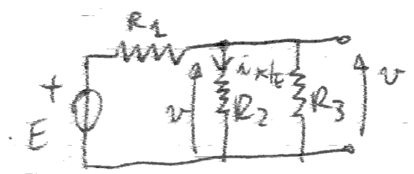
<u>Esempio</u>: Prendiamo lo stesso circuito che abbiamo risolto con Millmann:



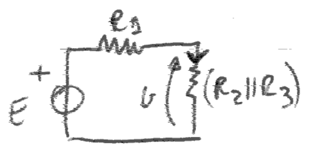
La corrente i_x sarà la somma degli effetti di tutti i generatori. Cioè:

$$i_x = \underbrace{i_x\Big|_{\substack{E\neq 0\\ J=0}}}_{\text{Effetto dovuto ad } E} + \underbrace{i_x\Big|_{\substack{E=0\\ J\neq 0}}}_{\text{Effetto dovuto a } J} = \underbrace{i_x\Big|_E}_{\text{si intende che è acceso solo E mentre J è spento.}} + i_x\Big|_J$$

Calcoliamo l'effetto di E ($i_x|_E$):



$\Rightarrow$



$$v = E\,\frac{R_2 \| R_3}{R_1 + R_2 \| R_3}$$

(partitore tensione)

$$i_x|_E = \frac{v}{R_2} = E\,\frac{1}{R_2}\,\frac{\frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}}{R_1 + R_2\|R_3} = E\,\frac{R_3}{R_2+R_3}\cdot\frac{1}{R_1+R_2\|R_3} = i_x|_E$$

(Ohm)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 67 di 376

LEZIONE 11 (pag. 133-142)

Confronto tra Millmann e il th. di sovrapposizione

→ Millmann

VANTAGGI: È utile perché in una formula determina la tensione tra due nodi e di conseguenza anche le altre grandezze.

SVANTAGGIO: È legato alla tipologia di circuito.

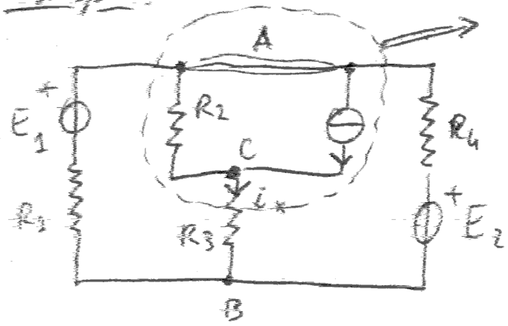
→ Sovrapp. effetti

VANTAGGI: Non è legato alla tipologia del circuito

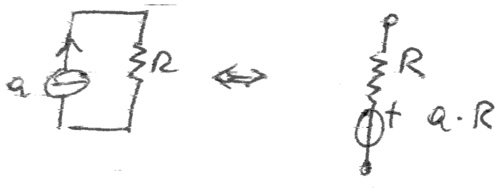
È importante per comprendere i teoremi di Thevenin e Norton, quindi dal pto di vista teorico, non pratico.

SVANTAGGI: Se il circuito presenta molti generatori indipendenti è un metodo che richiede molto tempo e molti calcoli.

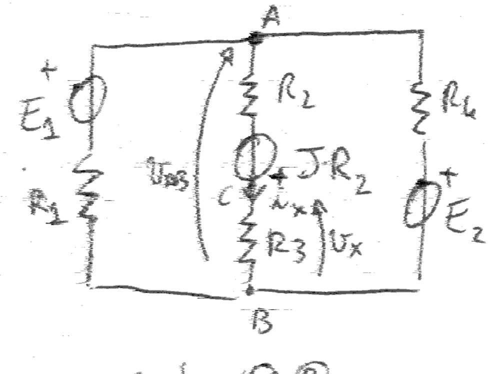
esempio:



Per Millmann la tipologia del circuito non va bene. Per cui sostituiamo ad esse il suo circuito equivalente:



⇓



→ In qst circuito posso applicare Millmann

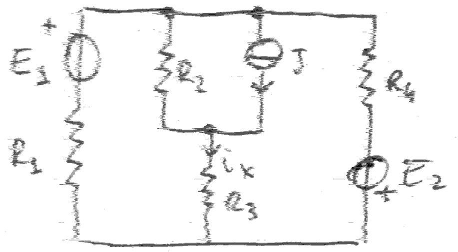
$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{JR_2}{R_2+R_3} + \frac{E_2}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

KVL tra C e B

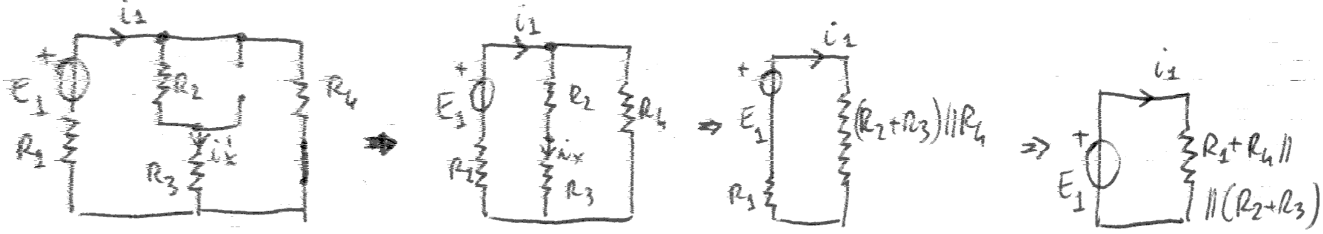
$$V_x - JR_2 - V_{AB} = 0$$

$$V_x = JR_2 + V_{AB} \qquad i_x = \frac{V_x}{R_2+R_3} = \frac{JR_2 + V_{AB}}{R_2+R_3} \quad \text{(Ohm)}$$

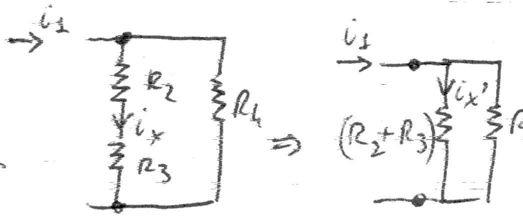
Esempio:



①



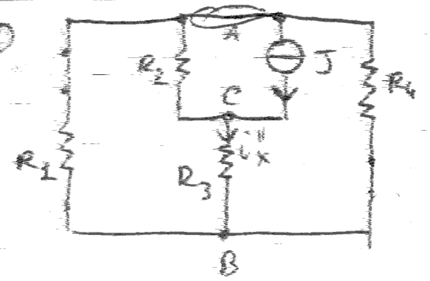
$$i_1 = E_1 \frac{1}{R_1 + R_4 \| (R_2+R_3)} \quad (\text{ohm})$$



$$\boxed{i_x' = \overbrace{\frac{E_1}{R_1 + R_4 \| (R_2+R_3)}}^{i_1} \cdot \frac{R_4}{R_2+R_3+R_4}}$$

$$i_x' = i_1 \cdot \frac{R_4}{R_2+R_3+R_4}$$

②

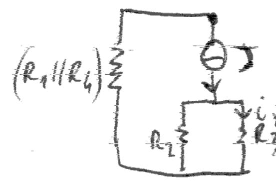


$R_1 - R_4$ A-B | A-B → ∥

$R_1 - R_2$ A-B | A-C

$R_1 - R_3$ A-B | C-B

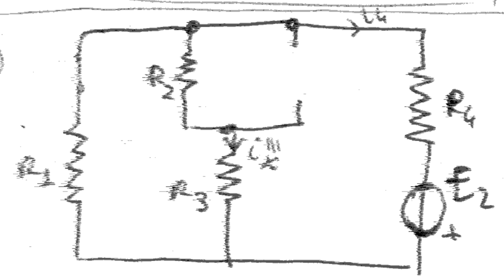
$R_2 - R_3$ A-C | C-B

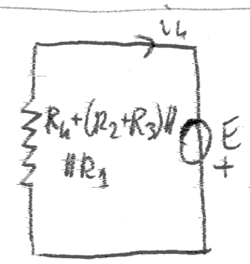


$$i_x'' = J \frac{R_2}{R_2+R_3+(R_4\|R_1)}$$

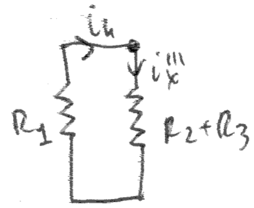
$$\boxed{i_x'' = J \frac{R_2}{R_2+R_3+(R_1\|R_4)}}$$

③





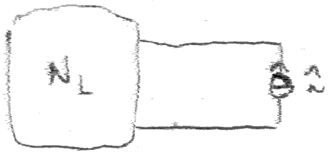
$$i_4 = -E \frac{1}{R_4 + (R_2+R_3)\|R_1}$$



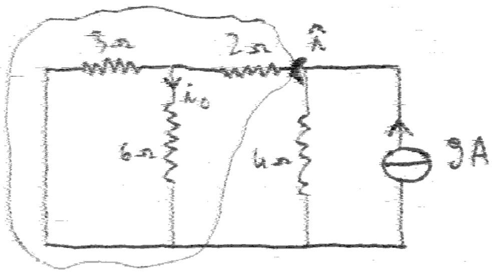
$$i_x''' = i_4 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$\boxed{i_x''' = \overbrace{\frac{-E_2}{R_4 + (R_2+R_3)\|R_1}}^{i_4} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}}$$

2. Se conosco invece $i = \hat{i}$ posso sostituire il circuito N_L con un generat. di corrente di valore $\hat{i}$.



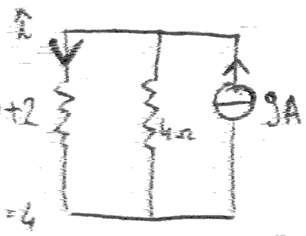
Esempio:



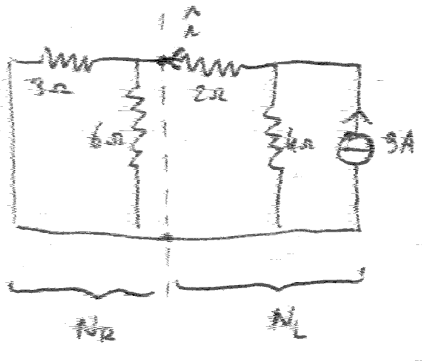
Calcolare i_0.

Abbiamo già risolto qst circuito facendo un doppio partitore di corrente.

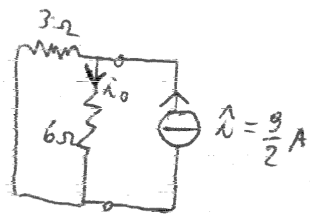
$(3 \| 6) + 2 = \frac{3 \cdot 6}{3+6} + 2 = 4$



$$\hat{i} = \frac{4}{4+4} 9 = \frac{9}{2} A$$



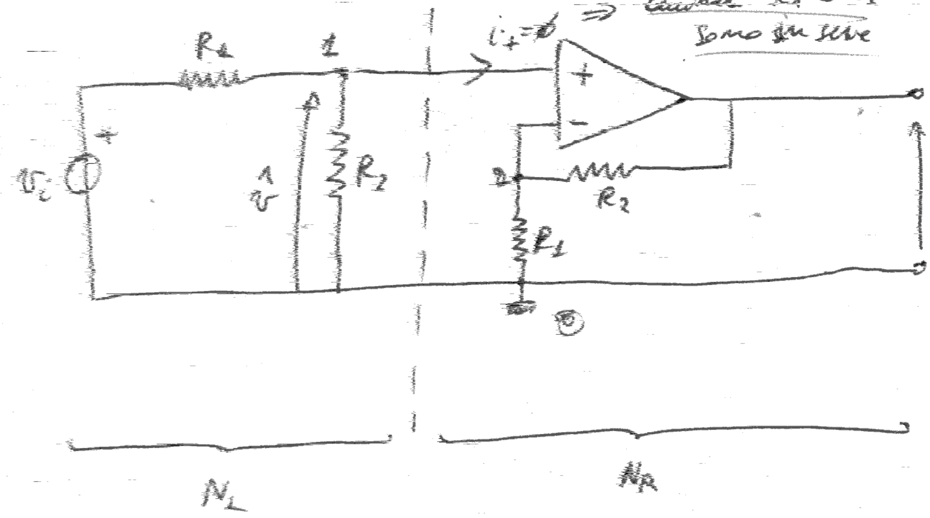
$\Longrightarrow$ Per il th. di sostituzione



$$i_0 = \frac{3}{3+6} \hat{i} = \frac{3}{\cancel{9}} \frac{\cancel{9}}{2} = \frac{3}{2} A$$

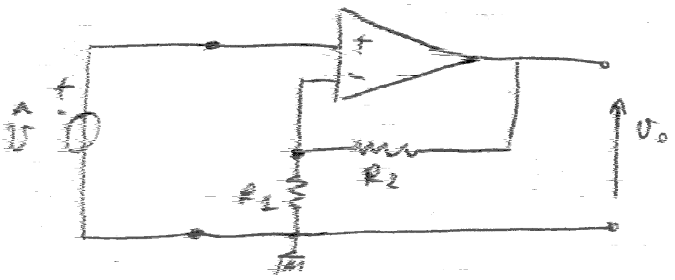
Esempio

$i_+ = 0 \Rightarrow$ Quindi R_1 ed R_2 sono in serie



$$\hat{v} = v_i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

⇓ Th. di sostituzione



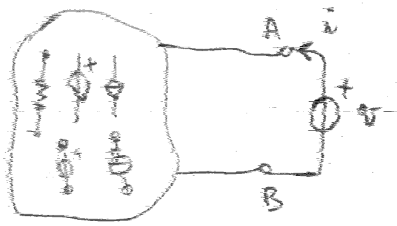
Questo è un a.o. non invertente e come abbiamo già calcolato nelle lezioni precedenti sappiamo scrivere direttamente la tensione uscente v_o :

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\hat{v} = \left(\frac{\cancel{R_1+R_2}}{R_1}\right)\left(\frac{R_2}{\cancel{R_1+R_2}}\right) v_i = \boxed{\frac{R_2}{R_1} v_i = v_o}$$

(sostituiamo $\hat{v}$)

TEOREMA DI NORTON

Supponiamo ora di sapere la tensione v



$$i = \underbrace{i\big|_v}_{\text{gen. indip. interni spenti}} + \underbrace{i\big|_{\text{gen. indip. interni}}}_{\text{gen. tens. esterno spento} \to (c.c.)}$$

⇓

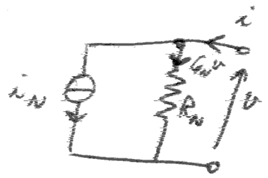
(quindi ho un circuito di resistori)

$$\boxed{i = \underbrace{G_N v}_{\text{gen. indip. spenti}} + \underbrace{i_N}_{\text{gen. esterno spento}}}$$

$G_N \rightarrow$ conduttanza di Norton

$i_N \rightarrow$ corrente di Norton (corrente di c.c.)

Il circuito equivalente sarà:



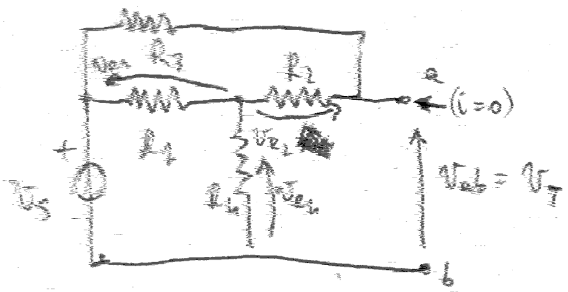
Circuito Norton

$(R_N = R_T)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 77 di 376

Thevenin

- $i = \emptyset$ (Tensione a vuoto)



KVL: $v_T - v_{R_2} - v_{R_4} = 0$

$$v_T = v_{R_2} + v_{R_4}$$

R_2 ed R_3 sono in serie perché $i = \emptyset$

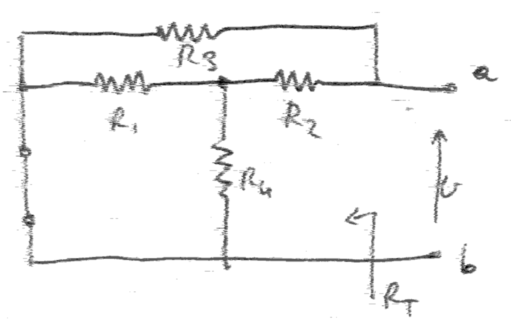
$$v_{R_4} = v_S \frac{R_4}{R_4 + (R_2 + R_3) \parallel R_1}$$

$$v_{R_1} = v_S - v_{R_4}$$

$$v_{R_2} = (v_S - v_{R_4}) \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Abbiamo calcolato $\boxed{v_T = v_{R_2} + v_{R_4}}$

- Calcoliamo R_T

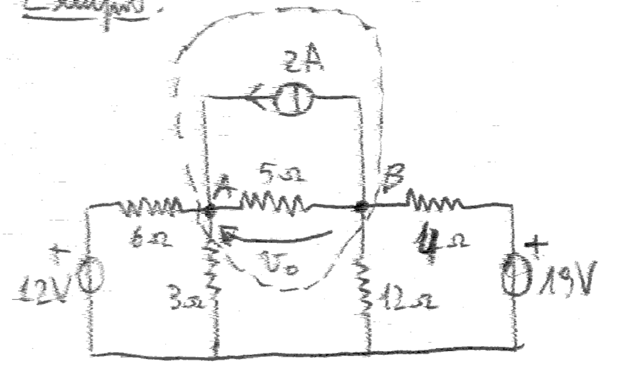


$$\boxed{R_T = R_3 \parallel [R_2 + (R_4 \parallel R_1)]}$$

Con R_T posso calcolarmi

$$i_o = \frac{v_T}{R_T + R_5}$$

Esempio:

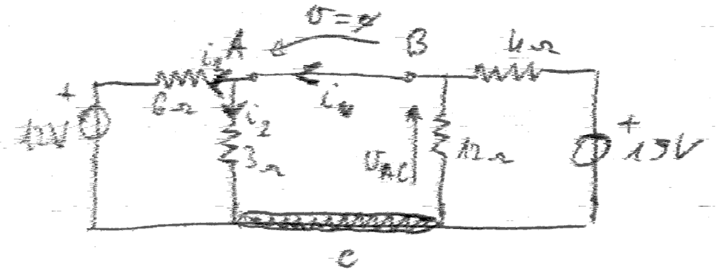


Calcolare v_0

→ Millmann non posso utilizzarlo.

→ Utilizzano Norton.

⇓



Bisogna calcolare

i_N ed R_N

• i_N ⇒ corrente di c.c. ($v=\varnothing$)

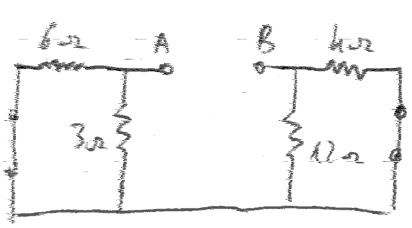
$$-i_N + i_1 + i_2 = 0$$

$$i_N = i_1 + i_2$$

$$v_{AC} = \frac{\frac{12}{6} + \frac{19}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}}$$

$$i_N = \underbrace{\frac{v_{AC} - 12}{6}}_{i_1} + \underbrace{\frac{v_{AC}}{3}}_{i_2}$$

• R_N

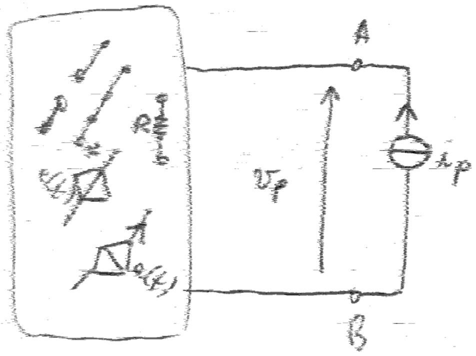


$$R_N = (3 \| 6) + (12 \| 4) = 2 + 3 = 5\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = (5 \| R_N)(2 - i_N)$$

3) Metodo del generatore arbitrario (gen. indip spenti).

• I caso

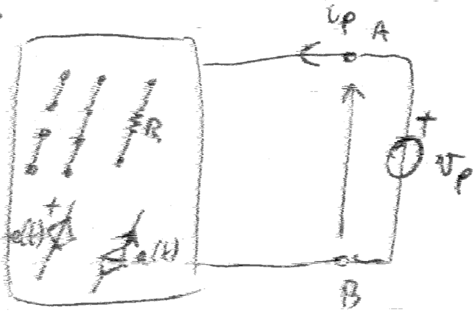


$$\boxed{\frac{v_p}{i_p} = R_T}$$

→ dove i_p è la corrente di prova

resistenza di thevenin

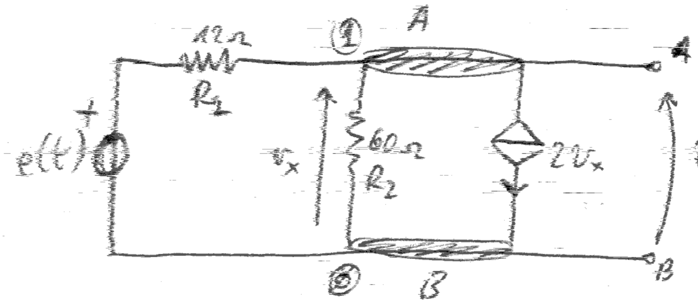
• II caso



$$\boxed{\frac{i_p}{v_p} = \frac{1}{R_T} = G_T}$$

conduttanza di Thevenin

Esempio:

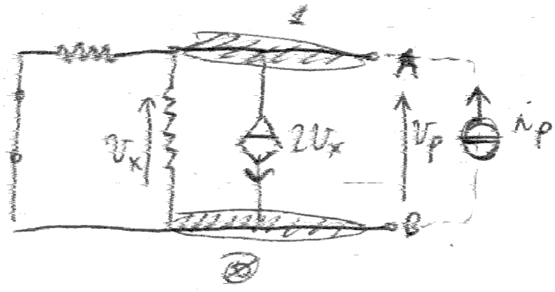


$v_T = v_{AB}|_{i=0}$

KCL ①

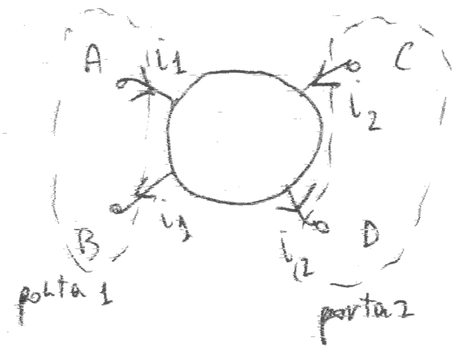
$$\frac{v_x - e(t)}{R_1} + \frac{v_x}{R_2} + 2v_x = 0 \qquad v_x = v_T = \frac{150}{126}$$

→ resistenza R_T



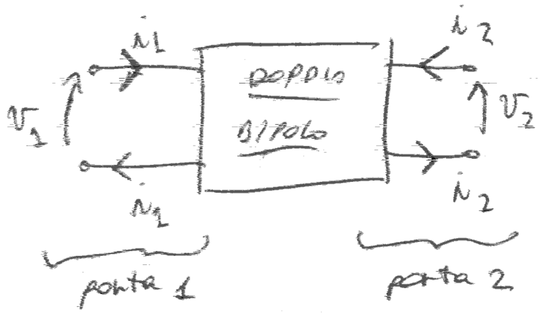
KCL ① $\quad \frac{v_x}{60} + \frac{v_x}{12} + 2v_x = i_p$

$$R_T = \frac{v_p}{i_p} = \frac{v_x}{i_p} = \frac{60}{126}$$



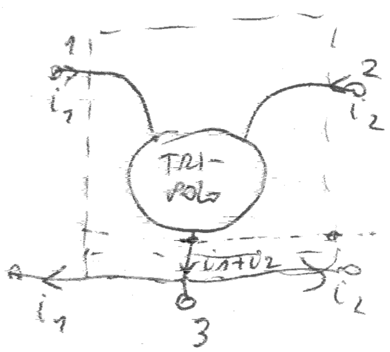
DOPPIO BIPOLO

Il modello si schematizza nel modo seguente:



Qst doppio bipolo è ottenuto da un quadripolo. Se però ho un quadripolo ma le correnti non soddisfano le condizioni dei doppi bipoli, ovviamente <u>non</u> si potrà avere un doppio bipolo.

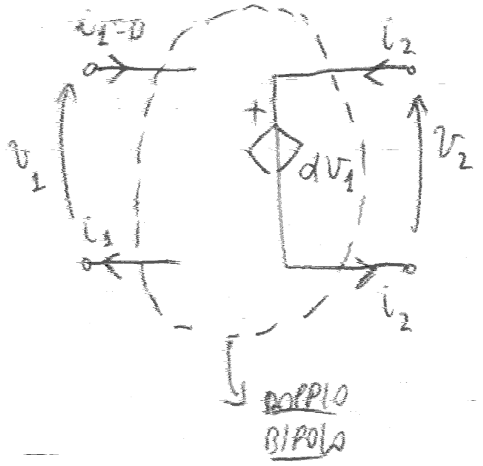
→ Se ho un tripolo posso formare un 2 porte cioè un doppio bipolo.



$$f_1(i_1, i_2; v_1, v_2) = 0 \quad ; \quad f_2(i_1, i_2; v_1, v_2) = 0$$

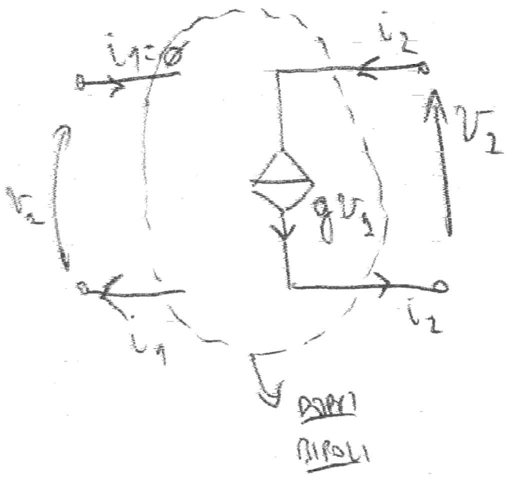
→ Un DOPPIO BIPOLO può essere formato a partire da un TRIPOLO e da un QUADRIPOLO.

Doppi bipoli a-dinamici lineari



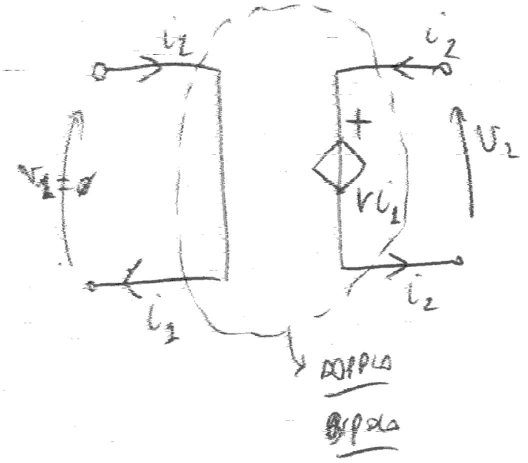
$$\boxed{\begin{array}{l} i_1 = 0 \\ v_2 = \alpha v_1 \end{array}}$$

le due relazioni costitutive



$$\boxed{\begin{array}{l} i_1 = 0 \\ i_2 = g v_1 \end{array}}$$

le due relaz costitutive

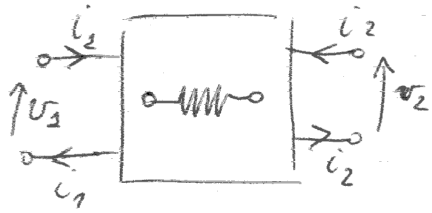


$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = 0 \\ v_2 = r v_1 \end{array}}$$

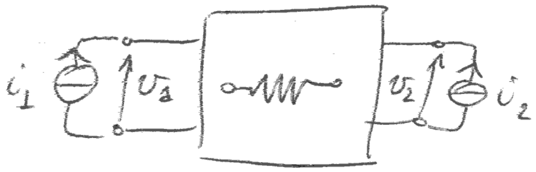
le due relaz costitutive

① Rappresentazione su base corrente

i_1, i_2 variabili indipendenti
v_1, v_2 variabili dipendenti



$$\begin{cases} v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$



oss. I pedici dei coefficienti R_{11}, R_{12}, R_{21} ed R_{22} si riferiscono rispettivamente alla tensione e alla corrente.

R_{11} — tensione v_1, corrente i_1 ; R_{12} — tensione v_1, corrente i_2 e così via.

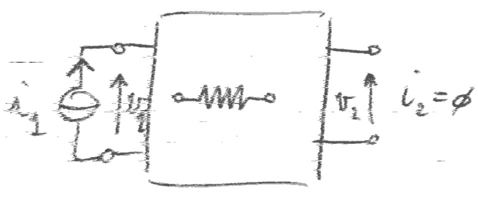
Sono definiti come:

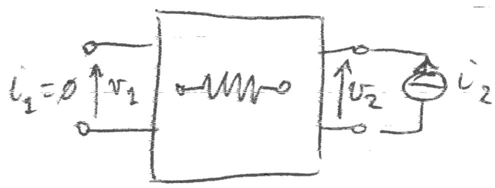
$$R_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad R_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

$$R_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad R_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

Cioè calcola il rapporto tra tensione e corrente quando $i_2=0$ cioè è un circuito aperto.

Cioè calcola il rapporto tra tensione e corrente quando $i_1=0$ cioè è un circuito aperto.

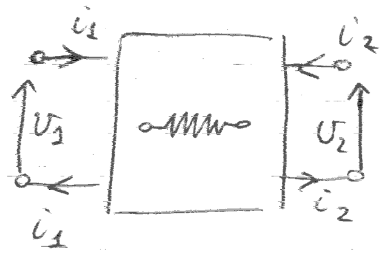




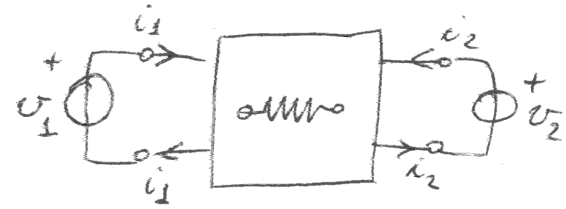
② Rappresentazione su base tensione

v_1, v_2 variabili indipendenti

i_1, i_2 variabili dipendenti



$$\begin{cases} i_1 = G_{11} v_1 + G_{12} v_2 \\ i_2 = G_{21} v_1 + G_{22} v_2 \end{cases}$$



OSS. I pedici anche in qst caso rappresentano tensioni e correnti ma in modo opposto alle resistenze viste precedentemente:

G_{11} → corrente i_1, → tensione v_1 ; G_{12} — corrente i_1, — tensione v_2 e così via.

Sono definiti come:

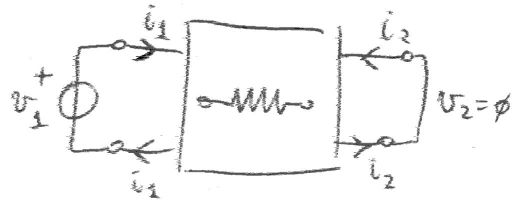
$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=\phi} = \frac{i_1'}{v_1}$$

$$G_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=\phi} = \frac{i_1''}{v_2}$$

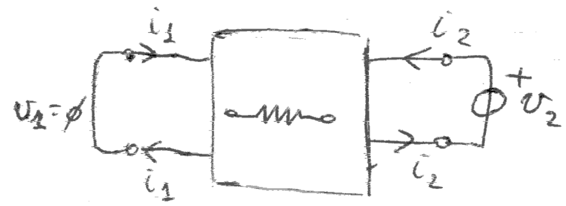
$$G_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=\phi} = \frac{i_2'}{v_1}$$

$$G_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=\phi} = \frac{i_2''}{v_2}$$

Cioè calcola il rapporto tra la corrente e la tensione quando $v_2 = \phi$, cioè un corto circuito



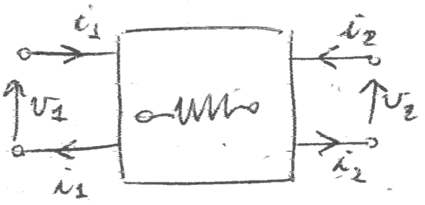
Cioè calcola il rapporto tra la corrente e la tensione quando $v_1 = \phi$, cioè un corto circuito.



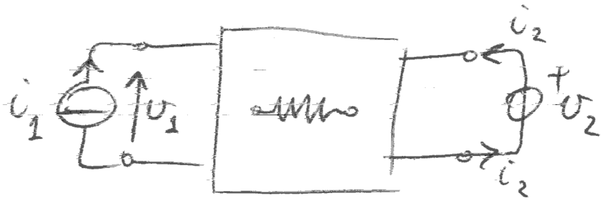
3 Rappresentazione IBRIDA: 2 modi possibili:

a)

$\boxed{\begin{array}{ll} i_1,\ v_2 & \text{variabili indipendenti} \\ v_1,\ i_2 & \text{variabili dipendenti} \end{array}}$



$$\begin{cases} v_1 = H_{11} i_1 + H_{12} v_2 \\ i_2 = H_{21} i_1 + H_{22} v_2 \end{cases}$$



oss. Si usa l'H dell'inglese: Hibrid. Vediamo i pedici:

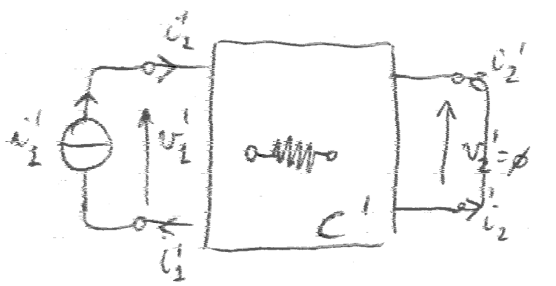
H_{11} (tensione v_1, corrente i_1); H_{12} (tensione v_1, tensione v_2); H_{21} (corrente i_2, ~~tensione~~ corrente i_1); H_{22} (corrente i_2, tensione v_2)

Sono definiti come:

$$H_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} = \frac{v_1'}{i_1'}$$ resistenza equivalente

$$H_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} = \frac{i_2'}{i_1'}$$ guadagno in corrente

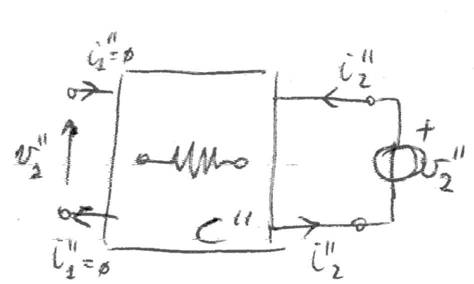
Cioè calcola i rapporti quando $v_2=0$, quindi un corto circuito.



$$H_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} = \frac{v_1''}{v_2''}$$ guadagno in tensione

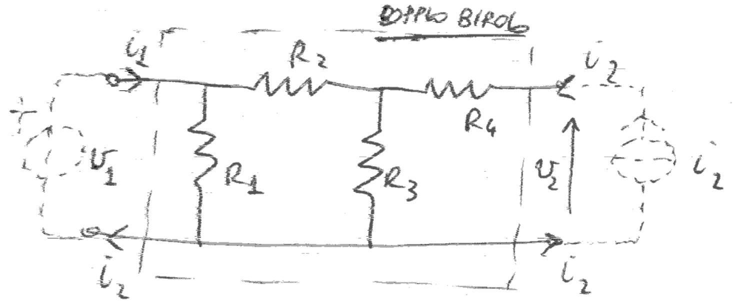
$$H_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0} = \frac{i_2''}{v_2''}$$ conduttanza equivalente

Cioè calcola i rapporti quando $i_1=0$, quindi un circuito aperto.

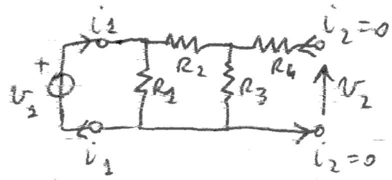


Esempio:

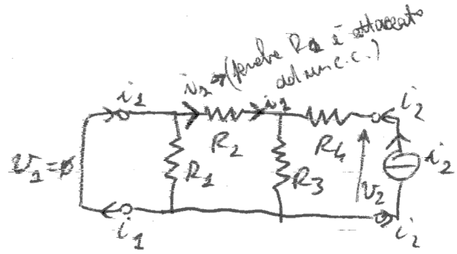
$$\begin{cases} i_1 = H'_{11} v_1 + H'_{12} i_2 \\ v_2 = H'_{21} v_1 + H'_{22} i_2 \end{cases}$$



$$H'_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=\phi} = \frac{1}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}$$



$$H'_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=\phi} = R_2 \parallel (R_3 + R_4)$$



$$H'_{12} = -H'_{21} = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow \left(i_1 = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} i_2 \right)$$

N.B.

$$\boxed{H' = \frac{1}{H}}$$

Nota: Posso calcolare direttamente la matrice se applico al doppio bipolo i generatori con le variabili indipendenti e mi calcolo le variabili dipendenti. Qst discorso non vale però per i parametri di trasmissione T.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 95 di 376

Possiamo scrivere il tutto in forma matriciale:

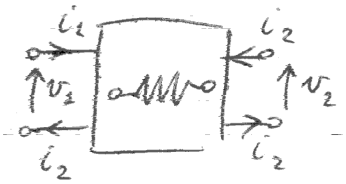
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE DI TRASMISSIONE del doppio bipolo } (T)} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

---

b) porta 2

v_1 i_1 variabili indipendenti

v_2 i_2 variabili dipendenti

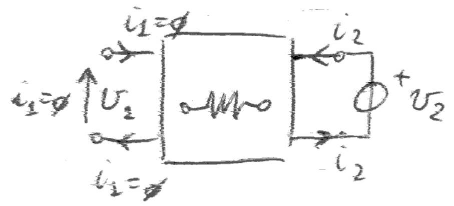


$$\begin{cases} v_2 = T'_{11} v_1 + T'_{12} i_1 \\ -i_2 = T'_{21} v_1 + T'_{22} i_1 \end{cases}$$

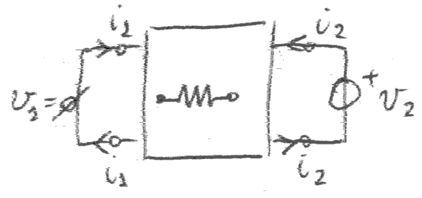
N.B. $\boxed{T' = \frac{1}{T}}$

Sono definiti come:

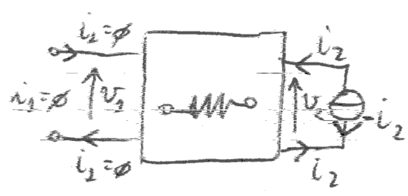
$T'_{11} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_1=\emptyset} =$



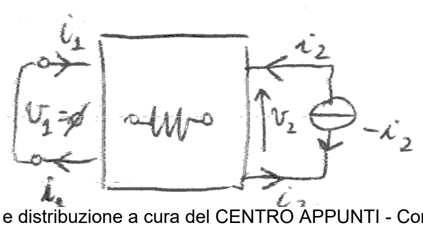
$T'_{12} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{v_1=\emptyset}$



$T'_{21} = \left.\frac{-i_2}{v_1}\right|_{i_1=\emptyset}$



$T'_{22} = \left.\frac{-i_2}{i_1}\right|_{v_1=\emptyset}$



OSS. Viene anche utilizzata la seguente notazione per indicare i parametri di trasmissione.

$T_{11} = A$; $T'_{11} = A'$

$T_{12} = B$; $T'_{12} = B'$

$T_{21} = C$; $T'_{21} = C'$

$T_{22} = D$; $T'_{22} = D'$

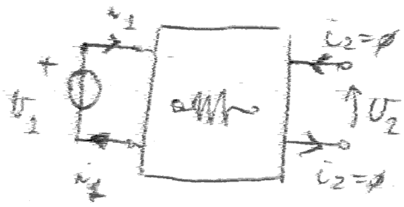
OSS.

Notiamo che nei parametri di trasmissione $\underline{\underline{T}}$ abbiamo due comandi nella stessa porta:

$T_{11} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0}$ ⇒ ho il comando di avere una tensione v_2 in un circuito aperto ($i_2 = 0$).

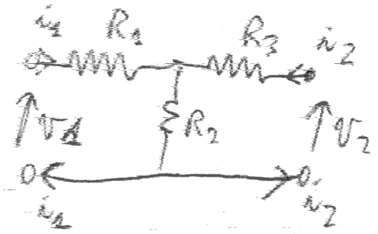
Per ovviare a qst calcolo il suo reciproco:

$\frac{1}{T_{11}} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$ ⇒ ora abbiamo i comandi in due porte diverse; cioè abbiamo la tensione v_1 nella 1° porta e un circuito aperto nella porta 2.



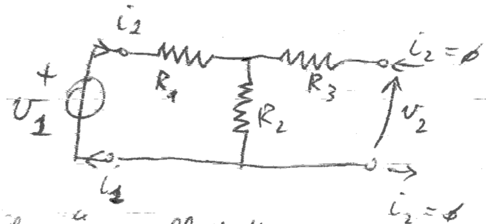
E così via per tutti gli altri parametri $\underline{\underline{T}}$.

Esempio:



$T_{11} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0}$

Calcoliamo il reciproco $\frac{1}{T_{11}} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=\emptyset}$



Essendo un c.a. la porta 2 il resistore R_3 viene "annullato" e resteranno solo R_1 ed R_2 e v_2 è proprio la tensione di R_2.
Si calcola con la ~~regola~~ del partitore:

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow \frac{1}{T_{11}} = \cancel{v_1}\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{\cancel{v_1}} = \boxed{\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{1}{T_{11}}}$$

RIEPILOGO

1) Su base corrente $\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

2) Su base tensione $\quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{G}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{G}} = \frac{1}{\underline{\underline{R}}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$

3) Ibrida $\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

4) Ibrida' $\quad \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}}' \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{H}}' = \frac{1}{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{H}}^{-1}$

5) Trasmissione $\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

6) Trasmissione' $\quad \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}' \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{T}}' = \frac{1}{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}}^{-1}$

OSS: Ci sono metodi per passare da una rappresentazione all'altra diversi da qst dei reciproci.
Tutte le rappresentazioni possono essere convertite in una qlsiasi altra rappresentazione; qst perché, come detto, un doppio bipolo può essere descritto da tutte e 6 qst rappresentazioni.

$$H_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=\emptyset} \quad ; \quad H_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=\emptyset}$$

→ Poniamo quindi $i_1 = 0$

$$\begin{cases} v_1 = R_{12}\, i_2 \\ v_2 = R_{22}\, i_2 \end{cases}$$

} → sostituendo alle H_{12} e H_{22}

$$\to \quad i_2 = \frac{v_2}{R_{22}} \quad ; \quad v_1 = R_{12}\left(\frac{v_2}{R_{22}}\right) = \frac{R_{12}}{R_{22}}\, v_2 = v_1$$

$$H_{12} = \frac{R_{12}\, i_2}{v_2} = \frac{1}{\cancel{v_2}} \cdot R_{12}\, \frac{\cancel{v_2}}{R_{22}} = \boxed{\frac{R_{12}}{R_{22}} = H_{12}}$$

$$H_{22} = \frac{i_2}{v_2} = \frac{\cancel{i_2}}{R_{22}\, \cancel{i_2}} = \boxed{\frac{1}{R_{22}} = H_{22}}$$

Sostituendo i valori alla formula della reciprocità avremo:

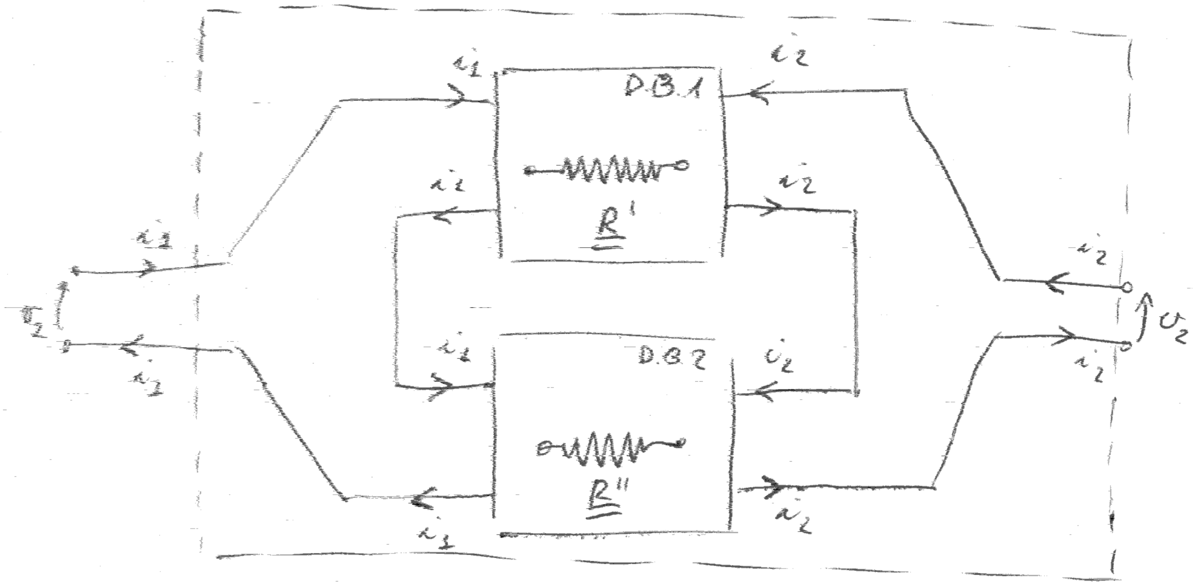
$$\underbrace{R_{11} i_1' i_1''}_{=0 \rightarrow (i_1''=0)} + R_{21} i_1' i_2'' = R_{12} i_2'' i_1' + \underbrace{R_{22} i_2'' i_2'}_{=0 \rightarrow (i_2'=0)}$$

Avremo: $R_{21} i_1' i_2'' = R_{12} i_2'' i_1' \longrightarrow \boxed{R_{21} = R_{12}}$

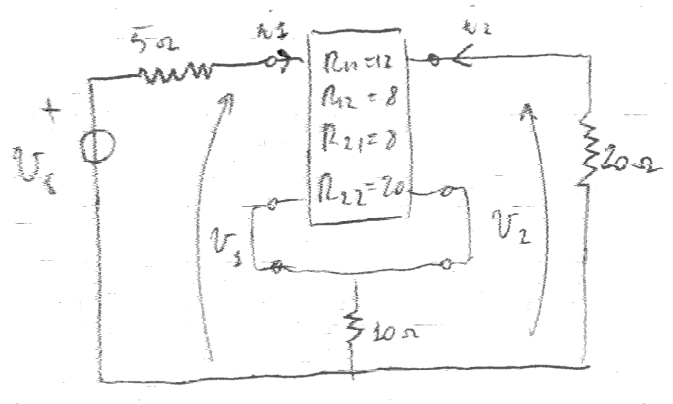
Condizione per la reciprocità.

Connessione di doppi bipoli

→ In serie



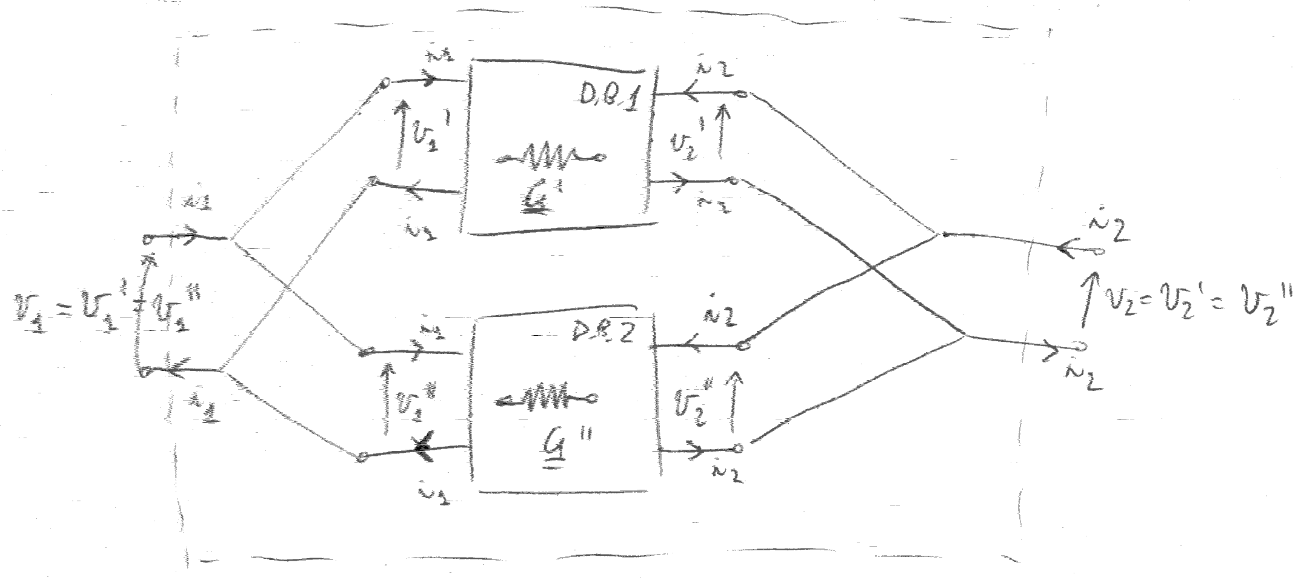
$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}' + \underline{\underline{R}}''$ — La matrice delle resistenze complessiva è la somma delle due matrici delle resistenze dei due doppi bipoli connessi in serie.



$$R' = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

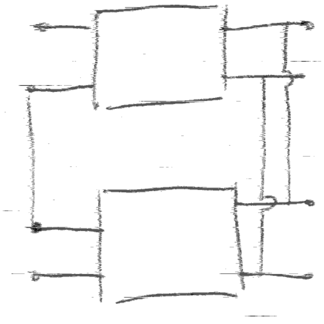
Calcolare $\hat{R}$ e $\frac{v_2}{v_s}$

→ $\boxed{\text{In parallelo}}$

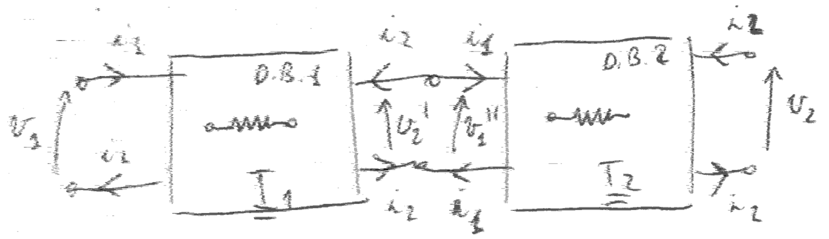


$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}' + \underline{\underline{G}}''$ Come per la matrice delle resistenze $\underline{\underline{R}}$.

Posso anche avere una connessione $\boxed{\text{IBRIDA}}$



Connessione $\boxed{\text{in cascata}}$



Si ha che

$v_2' = v_1''$ $i_1 = -i_2$

$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_1 \cdot \underline{\underline{T}}_2$

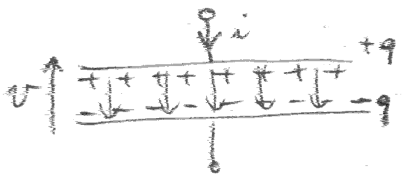
Da cui:

$$i(t) = \frac{\varphi(t)}{L} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau = \underbrace{i(t_0)}_{\text{CONDIZIONE INIZIALE}} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

$\rightarrow$ Se $i(t_0) = \emptyset \rightarrow$ induttore scarico

$\boxed{\text{CONDENSATORE LINEARE}}$

$$i \propto \frac{dv(t)}{dt}$$



Facce piane e parallele a distanza d con area A.
La corrente che misuro è proporzionale alla variazione di tensione rispetto al tempo.
Qst coefficiente di proporzionalità viene indicato con la lettera C (capacità) e si misura in Farad [F].

CONVENZIONE UTILIZZATORI

$$\underbrace{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}}_{\text{FORMA DIFFERENZIALE}} \quad , \text{ con } \quad q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \quad \text{CARICA}$$

$$\downarrow$$

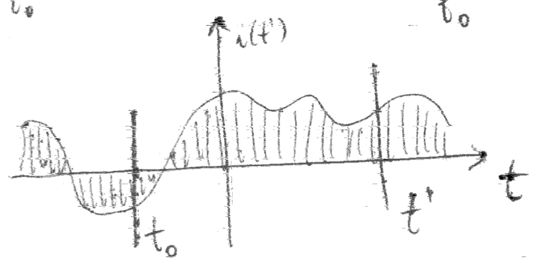
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{t'} dv(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t'} i(t)\,dt \longrightarrow$$

$$\longrightarrow v(t') = \frac{1}{C}\underbrace{\int_{-\infty}^{t'} i(t')\,dt}_{\text{CARICA}} \rightarrow \boxed{v(t') = \frac{q(t')}{C}}$$

Da cui:

(hp $q(-\infty) = \emptyset$)

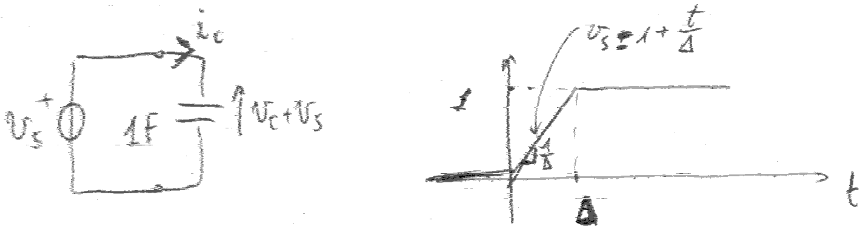
$$v(t') = \frac{1}{C}\underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\,dt}_{q(t_0)} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t'} i(t)\,dt = \frac{q(t_0)}{C} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t'} i(t)\,dt = \underbrace{v(t_0)}_{\text{CONDIZIONE INIZIALE}} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t'} i(t)\,dt$$



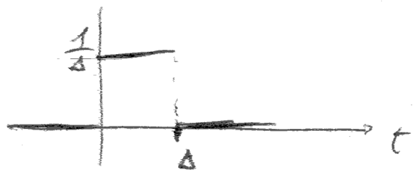
$\rightarrow$ Se $v(t_0) = \emptyset$

$\Rightarrow$ Condensatore SCARICO

2.2) GENERATORE TENSIONE



$i_C = C \frac{dv_S}{dt} \longrightarrow$



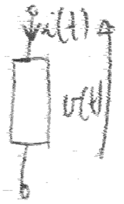
Se $\Delta \to \emptyset$ si ha una discontinuità in v_0. Contemporaneamente la corrente tende all'impulso unitario $\delta(t)$ e quindi non rimane limitata

$v(t_0^-) = v(t_0^+) \Rightarrow i(t_0) \to \infty \Rightarrow p(t_0) \to \infty$

Se ho un salto di tensione la $i(t) \to \infty$ e quindi una potenza ∞ ed è fisicamente impossibile.

La v è una variabile di stato per il condensatore cioè tramite essa ci permette di stabilire lo stato del circuito dinamico.

3) Il condensatore non dissipa energia ma è in grado di immagazzinarla.



$p(t) = v(t)\, i(t)$ potenza

$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t')\, dt'$ energia

Quindi l'energia assorbita da un condens. in un generico intervallo t_0, t_1 è:

$$w(t) = \int_{t_0}^{t_1} p(t')\, dt' = \int_{t_0}^{t_1} v(t')\, i(t')\, dt' \underset{i = C\frac{dv(t)}{dt}}{=} C \int_{t_0}^{t_1} v(t') \frac{dv(t)}{dt}\, dt' = C \frac{1}{2} v^2(t)$$

3) L'induttore non dissipa energia ma può immagazzinarla.

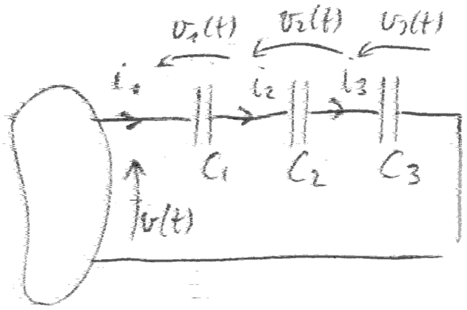
$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t')\,v(t')\,dt' = L\int_{-\infty}^{t} i(t')\,\frac{di(t')}{dt'}\,dt' = L\,\frac{1}{2}\,i^2(t) \geq 0 \rightarrow$$ (bipolo passivo come il condensatore)

$$= \boxed{\frac{1}{2L}\,\varphi^2(t)}$$ in funzione del flusso meno utile

$$w(t_0,t_1) = \frac{1}{2}L\left[i^2(t_1)-i^2(t_0)\right] = \frac{1}{2L}\left[\varphi^2(t_1)-\varphi^2(t_0)\right]$$

CONNESSIONE IN SERIE DI CONDENSATORI



$i_1 = i_2 = i_3$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$$

condiz. iniziale

$$v(t) = \underbrace{v_1(t_0) + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(x)\,dx}_{v_1(t)} + \underbrace{v_2(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(x)\,dx}_{v_2(t)} + \underbrace{v_3(t_0) + \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t} i(x)\,dx}_{v_3(t)} =$$

$$= \underbrace{v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0)}_{v(t_0)} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int_{t_0}^{t} i(x)\,dx$$

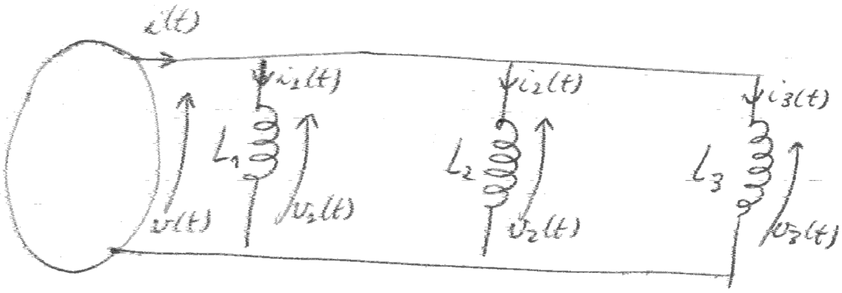
Somma delle condiz. iniziali.

$$\boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}}$$

(si comporta come le conduttanze)

CONDENSATORI IN SERIE

CONNESSIONE IN PARALLELO DI INDUTTORI



$$v(t) = v_1(t) = v_2(t) = v_3(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

condiz. iniziale

$$i(t) = \underbrace{i_1(t_0) + \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(x)\,dx}_{i_1(t)} + \underbrace{i_2(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(x)\,dx}_{i_2(t)} + \underbrace{i_3(t_0) + \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v(x)\,dx}_{i_3(t)} =$$

$$= \underbrace{i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)}_{i(t_0)} + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v(x)\,dx$$

Somma delle condizioni iniziali

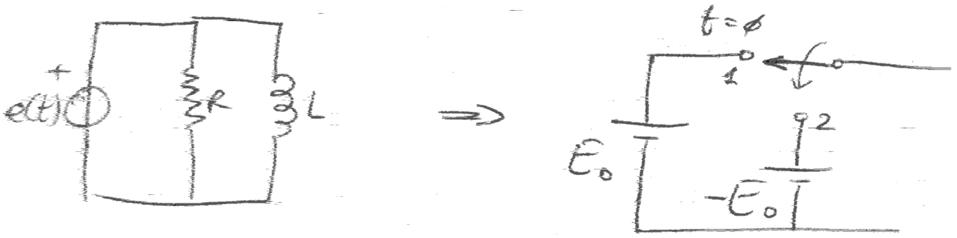
$$\boxed{\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}}$$

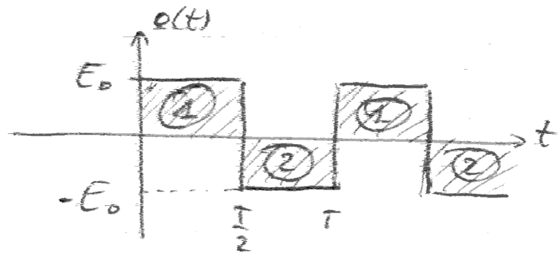
INDUTTORI IN PARALLELO

(Si comportano come le resistenze).

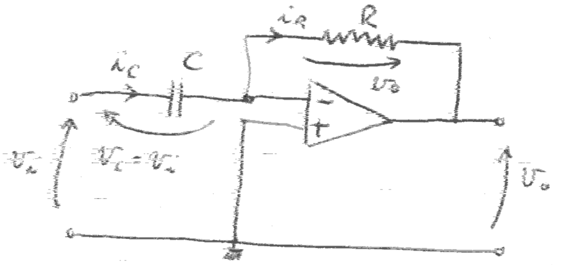
Q.st circuito si possono modellare con degli <u>interruttori</u>.

Riprendendo il circuito RL possiamo ridisegnarlo come:





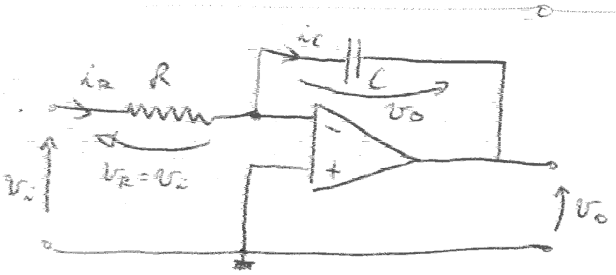
Vediamo ora dei circuiti con elementi dinamici con A.O.



DERIVATORE

$$v_o = -R i_R = -R i_C = -RC \frac{dv_C}{dt}$$

$$\boxed{v_o(t) = -RC \frac{dv_i(t)}{dt}}$$

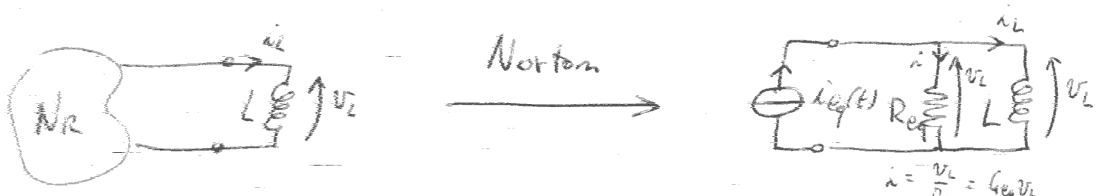


INTEGRATORE

$$v_o = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t')dt' = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_R(t')\,dt' = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \frac{v_i}{R}(t')\,dt'$$

$$\boxed{v_o = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_i(t')\,dt'}$$

CIRCUITI RL



$$i = \frac{v_L}{R_{eq}} = G_{eq} v_L$$

KCL $\boxed{i_{eq} = i + i_L = G_{eq} v_L + i_L}$

Sostituiamo $v_L = L \dfrac{di_L(t)}{dt}$ e otteniamo l'eq. diff. con l'incognita $i_L(t)$ che è la variabile di stato.

$$i_{eq} = G_{eq} L \frac{di_L(t)}{dt} + i_L$$

$$\left(\dot{i}_L = \frac{di_L(t)}{dt} \right)$$

$$\boxed{\dot{i}_L = -\frac{i_L}{G_{eq} L} + \frac{i_{eq}}{G_{eq} L}} \Longrightarrow \tau = G_{eq} L = \frac{L}{R_{eq}} \quad [sec]$$

Scriviamo in un'unica equazione l'equaz. differenziale del 1° ordine non omogenea (per la "forzante" dovuta al generatore)

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_{eq}}{\tau}}$$

EQ. DIFF. 1° ORDINE NON OMOGENEA.

dove

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{v}_C & \text{CIRCUITI RC} \\ \dot{i}_L & \text{CIRCUITI RL} \end{cases} \qquad x_{eq} = \begin{cases} v_{eq} & \text{CIRCUITI RC} \rightarrow \text{(tensione a vuoto)} \\ i_{eq} & \text{CIRCUITI RL} \rightarrow \text{(corrente di c.c.)} \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} R_{eq} C & \text{CIRCUITI RC} \rightarrow \text{(Resist. eq. di Thevenin)} \\ G_{eq} L = \dfrac{L}{R_{eq}} & \text{CIRCUITI RL} \rightarrow \text{(Resist. eq. di Norton)} \end{cases}$$

La soluzione generale sarà quindi come detto la somma dell'eq. ass. omogenea e qll particolare:

$$\boxed{x = \underbrace{ke^{-\frac{t}{\tau}}}_{x_{om}(t)} + \underbrace{x_\infty}_{x_p(t) = X_p}}$$

Ora devo determinare k $\Longrightarrow$ per farlo devo andare ad imporre la condizione iniziale.

$$x(t_0) = \begin{cases} v_C(t_0) & \text{c.i. condens.} \\ i_L(t_0) & \text{c.i. indutt.} \end{cases}$$

$$x(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + x_\infty \quad @\, t_0 \Rightarrow x(t_0) = ke^{-\frac{t_0}{\tau}} + x_\infty$$

$$\Rightarrow x(t_0) - x_\infty = \frac{k}{e^{\frac{t_0}{\tau}}} \Rightarrow (x(t_0) - x_\infty)e^{\frac{t_0}{\tau}} = k$$

Sostituisco adesso k:

$$x(t) = (x(t_0) - x_\infty)e$$

Utilizzando le proprietà degli esponenziali

$$\boxed{x(t) = (x(t_0) - x_\infty)e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_\infty}$$

Qst è la soluzione generale
Ci dice il modo in cui evolve nel tempo la variabile di stato nel circuito.

valore iniziale $v_C(t_0)$; $i_L(t_0)$

$\tau \to$ costante di tempo $R_{eq}C$; $G_{eq}L$

valore finale v_{eq} ; i_{eq}

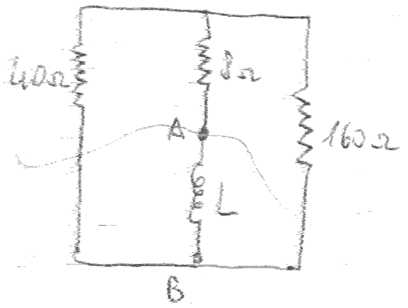
→ Se ho qst 3 elementi posso "metterli" nella soluzione generale per trovare v_C o i_L in un circuito del 1° ordine senza calcolarsi tutta l'equazione differenziale. (Dopo vedremo come calcolarli sul circuito)

Quindi siamo partiti da $\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_{eq}}{\tau}$ la cui soluzione è qll sopra.

Ricordiamo che

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{v}_C & \text{CIRCUITI RC} \\ \dot{i}_L & \text{CIRCUITI RL} \end{cases}$$

Esempio:



$$R_{eq} = [(160 \| 40) + 8] = \frac{160 \cdot 40}{200} + 8 =$$

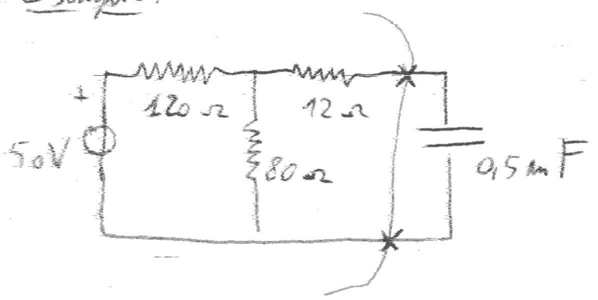
$$= \frac{6400}{200} + 8 = 32 + 8 = 40\ \Omega$$

$$\tau = G_{eq} L = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{40}\ \text{sec}$$

→ VALORE FINALE

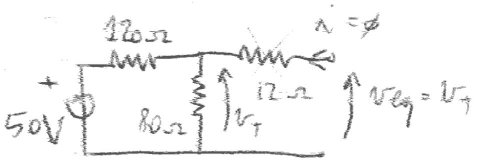
$$x_\infty = x_{eq} = \begin{cases} v_{eq} = v_T & RC \\ i_{eq} = i_N & RL \end{cases}$$

Esempio:



Calcolare x_∞

Soluzione

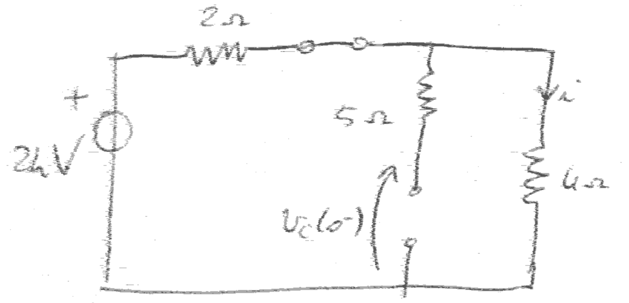


$$v_T = v_{eq} = 50 \cdot \frac{80}{120+80} = 50 \cdot \frac{80}{200} = 20\ V = x_\infty$$ valore finale (per $t \to \infty$)

x_∞ è costante ed è la nostra soluzione particolare $x_p(t) = x_\infty$

→ Infatti essendo costante la tensione, il condensatore si comporta come un circuito aperto (come abbiamo fatto)

Per dualità l'induttore con corrente costante sarà un corto circuito.

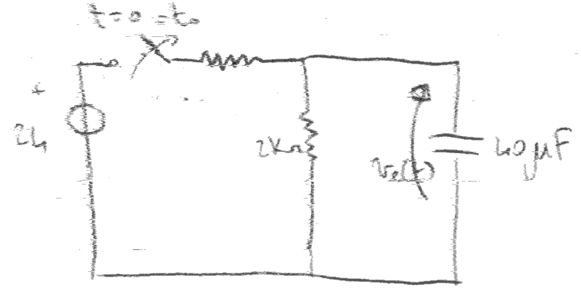


→ Il condensatore diventa un circuito aperto.

P.T. $v_c(0^-) = 24 \cdot \frac{4}{4+2} = 16\,V = v_c(0^+)$

LEZIONE 18 — Metodi sistematici per la risoluzione di circuiti RC ed RL del 1° ordine

Esempio



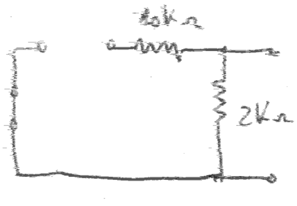
$$v_c(t) = [v_c(0^+) - v_c(\infty)]e^{-t/\tau} + v_c(\infty)$$

$$\tau = R_{eq}C$$

Devo calcolare τ, $v_c(0^+)$ e $v_c(\infty)$.

→ Calcolo di τ

$\tau = R_{eq}C \Rightarrow$ Calcolo R_{eq} (ai capi di C quando i generatori sono spenti) per $t<t_0=0$

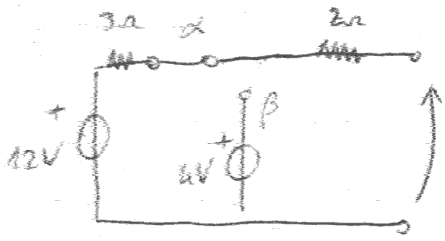


← $R_{eq} = 2\,k\Omega$

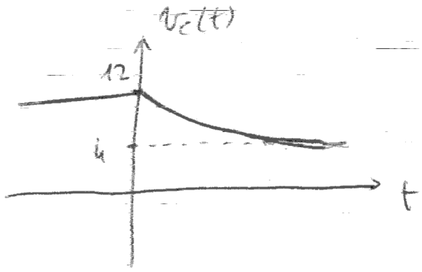
$$\tau = R_{eq}C = 2\cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-6} = 80\cdot 10^{-3}\ ms$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 125 di 376

→ Calcolo $v_C(0^+)$ @ t_0, regime



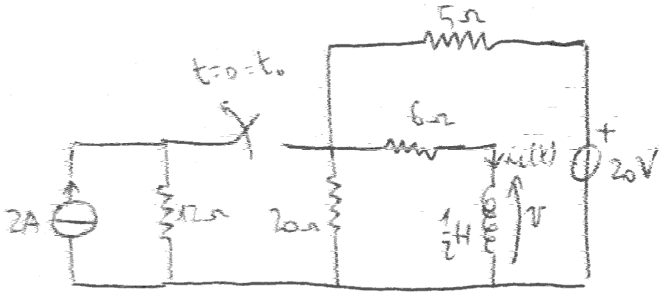
$v_C(0^-) = 12V$



Avrò

$$v_C(t) = [12-4]e^{-t/6} + 4 = 8e^{-t/6} + 4$$

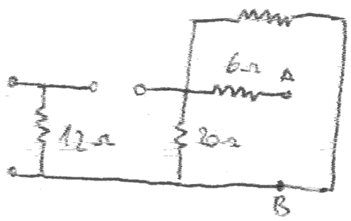
Esempio:



Calcolare $i_L(t)$.

$$i_L(t) = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

→ Calcolo $\tau = G_{eq}L = \frac{L}{R_{eq}}$



$R_{eq} = (20 \| 5) + 6 = 10\Omega$

$\tau = 0{,}05$ sec.

Riprendiamo la soluzione generale e diamo alcune definizioni.

$$x(t) = \underbrace{[x(t_0) - x_\infty] e^{-(t-t_0)/\tau}}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{x_\infty}_{\text{risposta permanente (o regime)}}$$

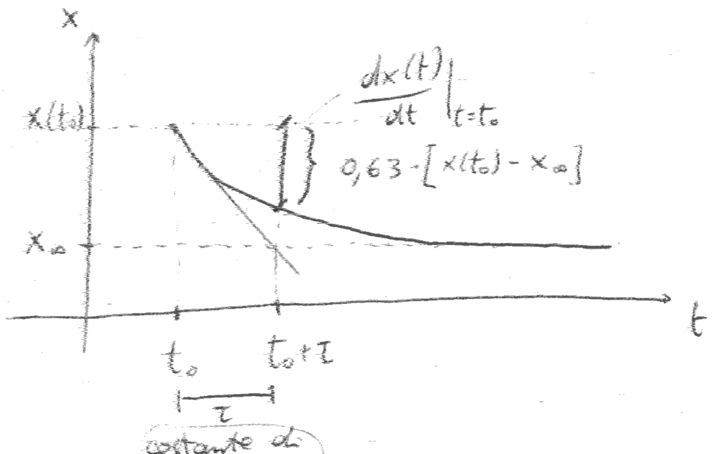
risposta transitoria: parte che tende ad estinguersi per t molto grande ($\to \infty$)

$$x(t) = x(t_0) e^{-(t-t_0)/\tau} - x_\infty \left(e^{-(t-t_0)/\tau}\right) + x_\infty =$$

$$= \underbrace{x(t_0) e^{-(t-t_0)/\tau}}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{x_\infty \left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right)}_{\text{risposta forzata}}$$

risposta libera: dipende solo dalla condizione iniziale t_0

risposta forzata: contiene un pezzo del transitorio più il permanente. Quindi non coincide esattamente con quest'ultima. Dipende dagli ingressi.



costante di tempo τ → ci dà un'idea della durata del transitorio.

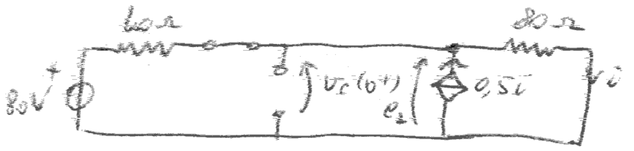
$i_p = i - 0{,}5i = \frac{1}{2}i \Rightarrow i = 2i_p$

$v_p = 80\,i = 160\,i_p$

$\frac{v_p}{i_p} = R_{eq} = 160\,\Omega$

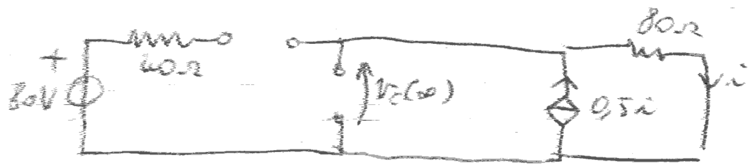
$\tau = 160 \cdot 3 = 480\ sec.$

→ Calcolo $v_c(0^-)$



$$\frac{e_1 - 80}{40} - \frac{e_1}{80} - 0{,}5\left(\frac{e_1}{80}\right) = 0 \Rightarrow e_1 = v_c(0^+)$$

→ Calcolo $v_c(\infty)$

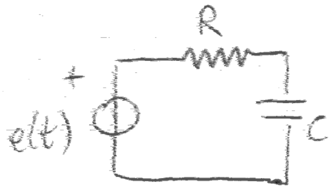


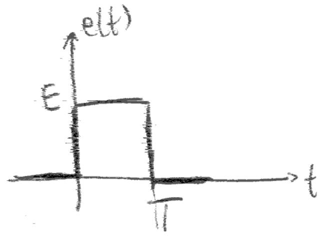
$i - 0{,}5i = 0 \Rightarrow i = \emptyset$

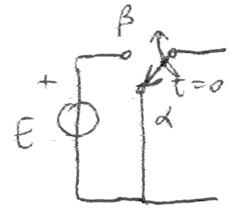
$v_c(\infty) = \emptyset$

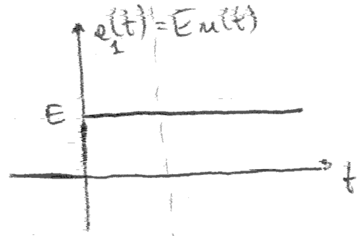
$$\boxed{i(t) = \frac{v_c(t)}{80}\ A}$$

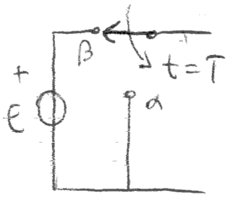
Circuiti del 1° ordine con ingressi costanti a tratti.

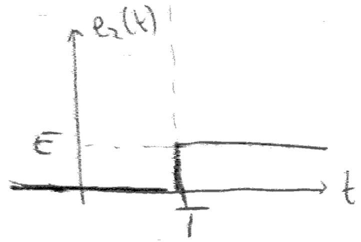












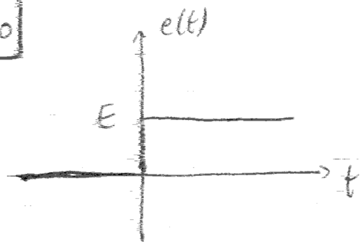
$e_2(t) = E\,u(t-T)$

dove $u(t-T) = \begin{cases} 1 & (t \geq T) \\ 0 & (t < T) \end{cases}$

→ Quindi $e(t) = e_1(t) - e_2(t)$ è l'espressione matematica che esprime l'ingresso del circuito.

$$\boxed{e(t) = e_1(t) - e_2(t) = E\left[u(t) - u(t-T)\right]}$$

$\boxed{@\ t=0}$

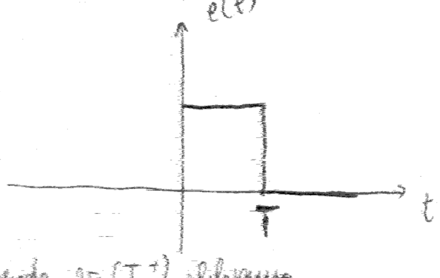


$v_c(t) = [v_c(0^+) - v_c(\infty)]e^{-t/\tau} + v_c(\infty)$; $\tau = RC$

$\forall\, t > 0 \;\vee\; t < T \Rightarrow (\forall\; 0 \leq t < T)$

$v_c(0^+) = \emptyset \Rightarrow \boxed{v_c(t) = E_0(1 - e^{-t/RC})}$ $(\forall\; 0 \leq t < T)$

$\boxed{@\ t=T}$



$v_c(t) = [v_c(T^+) - v_c(\infty)]e^{-(t-T)/\tau} + v_c(\infty)$

$v_c(T^+) = v_c(T^-) \underset{\uparrow}{=} E_0(1 - e^{-T/RC})$

sostituiamo T alla t della precedente equazione.

$(\forall\; t \geq T)$

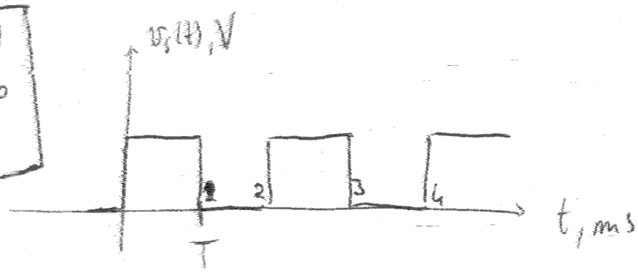
$v_c(\infty) = \emptyset$, $\tau = RC$

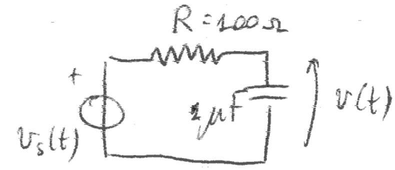
Sostituendo $v_c(T^+)$ abbiamo

$$\boxed{v_c(t) = E(1 - e^{-T/RC})\,e^{-(t-T)/RC} \quad (\forall\, t \geq T)}$$

→ Se l'interruttore varia in maniera periodica dalla posizione α alla posizione β avremo un'onda quadra. (Ingressi costanti a tratti periodici)

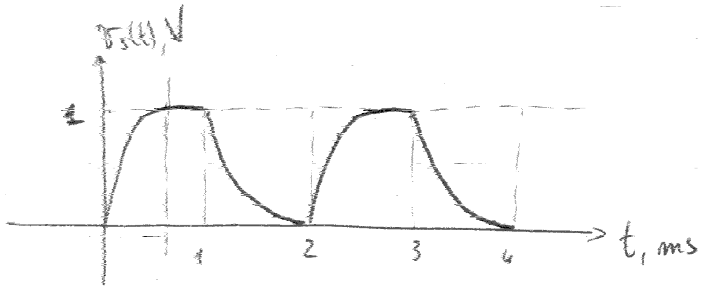
LIBRO PERFETTI
pag. 223-230
es. n° 7.12





$T = 1$ ms

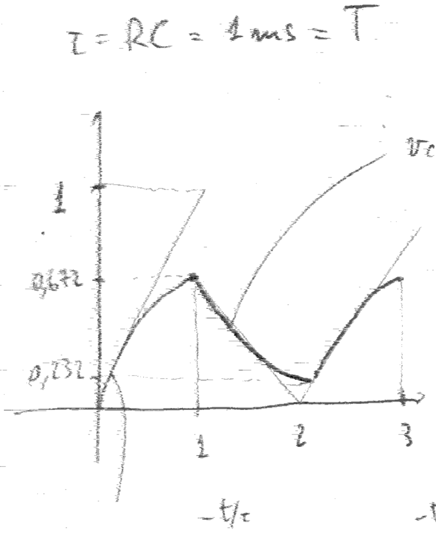
$\tau = CR = 0{,}1$ ms $= 0{,}1\,T \ll T$ τ è un decimo di T.



→ Se utilizzo invece di $R = 100\,\Omega$ una $R = 1000\,\Omega = 1\,k\Omega$ allora τ sarà uguale a T.

$T = 1$ ms

$\tau = RC = 1$ ms $= T$



$$v_c(t) = [v_c(T^+)]\,e^{-\frac{(t+T)}{\tau}} \Rightarrow \quad (\forall\ T < t < 2T)$$

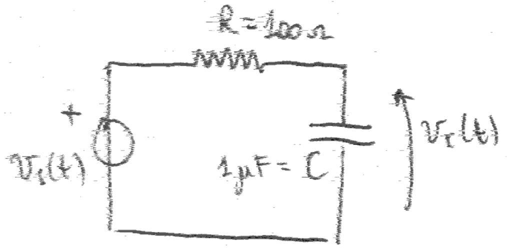
$$\Rightarrow v_c(2T) = v_c(T^+)\,e^{-1}$$

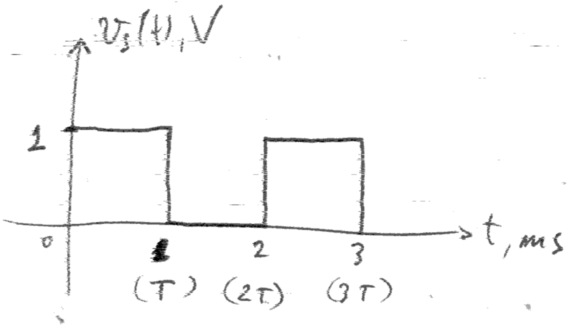
$$\left(1V - e^{-T/\tau}\right)$$

$$v_c(t) = -E e^{-t/\tau} + E = 1 - e^{-t/T} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}368 = 0{,}672$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 135 di 376

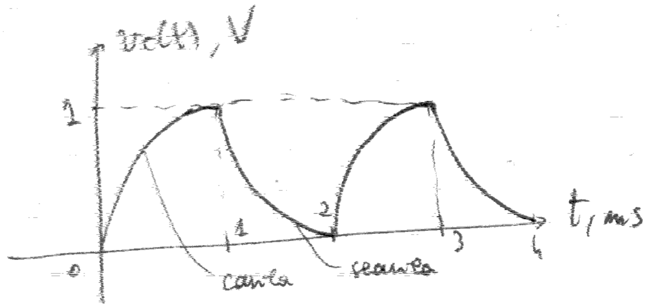
Esempio: LIBRO PERFETTI - CIRCUITI ELETTRICI pag. 229-230 N° 7.12 ;



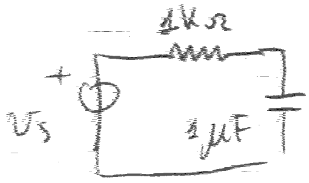


T = 1 ms

$\tau = RC = 100 \cdot 10^{-6} = 0{,}1$ ms



→



$\tau = RC = 1000 \cdot 10^{-6} = 1$ ms $= T$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = T}$ $(= t)$

- $\boxed{v(1\,ms)}$ carica

$v_c(t) = [v(0^+) - v_\infty]\, e^{-t/\tau} + v_\infty$ $\qquad v(0^+) = v(0^-) = 0$

v_∞ per $t > 0$ → max di $v_s = 1V$

$\Rightarrow v_c(T) = [0 - 1]\, e^{-T/T} + 1 = -e^{-1} + 1 = 1 - 0{,}368 = \boxed{0{,}632 = v_c(1\,ms)}$

- $\boxed{v(2\,ms)}$ scarica

$v_c(t) = [v(0^+) - v_\infty]\, e^{-t/\tau} + v_\infty$ $\qquad v(0^+)$ → condiz. iniz. precedente $= 0{,}632$

$v_c(T) = 0{,}632\, e^{-1} = 0{,}632(0{,}368) =$ $\qquad v(\infty)$ → $t > 0$ → il C si scarica per cui $v(\infty) = \emptyset$

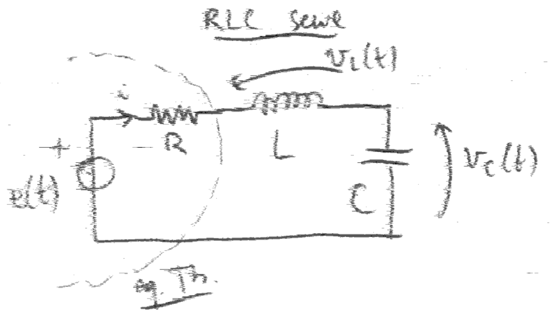
$= \boxed{0{,}232 = v_c(2\,ms)}$

LEZIONE 20 (pag. 243 - 289)

CIRCUITI DEL SECONDO ORDINE

Approfondiamo di più il concetto accennato precedentemente:

RLC serie



$$\begin{cases} v_L = e - v_C - Ri & \text{(KVL)} \\ i = C\dfrac{dv_C}{dt} \\ v_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

(incognite v_C, i)

$$\boxed{\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} = i \\ L\dfrac{di}{dt} = e - v_C - Ri \end{cases}}$$

(KVL + eq. costitutive indutt.)

Derivo ambo i membri della 1° eq. diff.:

$$C\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} = \frac{di(t)}{dt}$$

Moltiplico per L

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt} = \underbrace{L\frac{di(t)}{dt}}_{e - v_C - Ri \;\to\; i = C\frac{dv}{dt}}$$

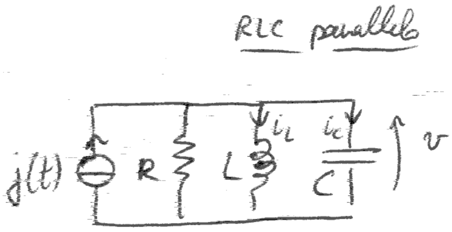
$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt} + R\underbrace{C\frac{dv_C(t)}{dt}}_{i(t)} + v_C(t) = e(t)$$

Divido per LC e ottengo:

$$\boxed{\frac{d^2v_C(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = \frac{1}{LC}e(t)}$$

$$v(0) = V_0$$
$$i(0) = I_0 = C\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad \left.\frac{dv_C(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{I_0}{C}$$

RLC parallelo



$$j(t) = \frac{v(t)}{R} + i_L(t) + i_C(t) \qquad \text{(KCL)}$$

$$\boxed{v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}} \; ; \; \boxed{i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}}$$

$$\boxed{C\frac{dv(t)}{dt} = j(t) - \frac{v(t)}{R} - i_L(t)}$$

Sostituisco i_L:

$$\boxed{j(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{\infty}^{t} v(t')\,dt' \quad \text{(integralmente)}}$$

Dalla 1° eq. diff. derivo ambo i membri:

$$\frac{dv(t)}{dt} = L\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}$$

Moltiplico per C

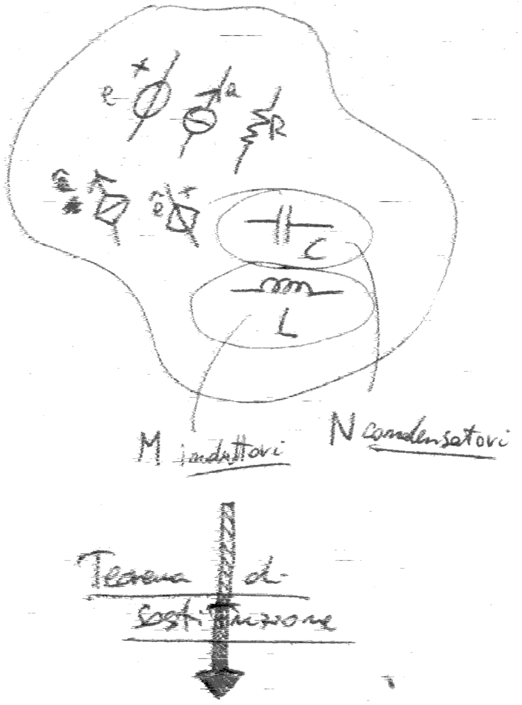
$$\underbrace{C\frac{dv(t)}{dt}}_{j(t) - \frac{v(t)}{R} - i_L(t)} = LC\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} \qquad \to \; v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$LC\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} = j(t) - i_L(t) - \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}$$

Divido per LC e ottengo:

$$\boxed{\frac{d^2i_L(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i_L(t) = \frac{1}{LC}j(t)}$$

→ EQUAZIONI DI STATO PER CIRCUITI NON PATOLOGICI

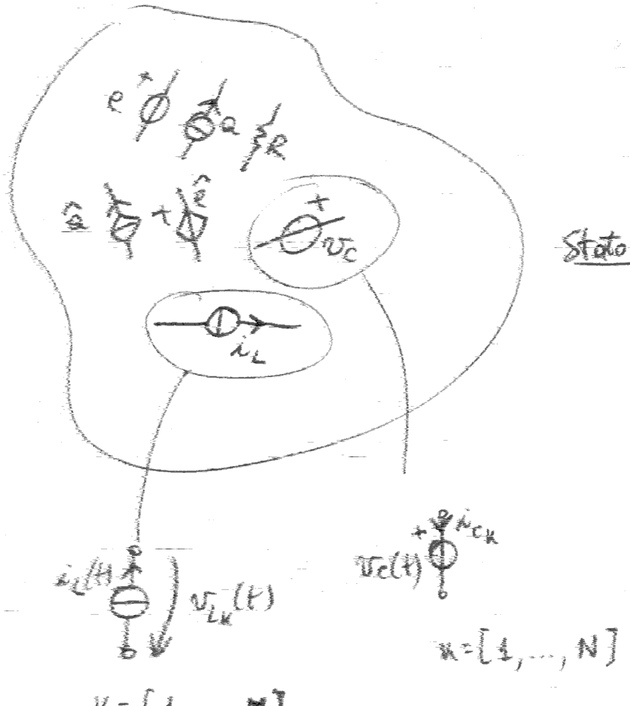


N tensioni sui condensatori

(Vettore di Stato)

$$\hookrightarrow X = \begin{pmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ \vdots \\ v_{C_N}(t) \\ i_{L_1}(t) \\ i_{L_2}(t) \\ \vdots \\ i_{L_M}(t) \end{pmatrix}$$

M correnti sugli induttori.



(Vettore di Stato coniugato)

$$\hookrightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} i_{C_1}(t) \\ i_{C_2}(t) \\ \vdots \\ i_{C_N}(t) \\ v_{L_1}(t) \\ v_{L_2}(t) \\ \vdots \\ v_{L_M}(t) \end{pmatrix}$$

→ Posso anche scrivere il vettore coniugato in forma di derivate

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} C_1 \dfrac{d v_{C_1}(t)}{dt} \\ \vdots \\ C_N \dfrac{d v_{C_N}(t)}{dt} \\ L_1 \dfrac{d i_{C_1}(t)}{dt} \\ \vdots \\ L_M \dfrac{d i_{C_M}(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

KVL 2° "quadrato" del circuito:

$$v_L - v_{C_1} + v_{C_2} = 0$$

$$\boxed{v_L = v_{C_1} - v_{C_2} = L\,\frac{di_L(t)}{dt}}$$

In forma matriciale:

$$\begin{array}{c}
\\
\begin{bmatrix} \dfrac{dv_{C_1}}{dt} \\[2ex] \dfrac{dv_{C_2}}{dt} \\[2ex] \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} (v_{C_1}) & (v_{C_2}) & (i_L) \end{array} \\
\underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 & -\dfrac{1}{C_1} \\[2ex] -\dfrac{g_m}{C_2} & -\dfrac{1}{C_2R_2} & \dfrac{1}{C_2} \\[2ex] \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix} v_{C_1} \\[2ex] v_{C_2} \\[2ex] i_L \end{bmatrix}}_{\substack{x(t) \\ \text{(incognite)}}}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\[2ex] 0 \\[2ex] 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}}
\underbrace{v_S}_{\substack{\text{sorgenti} \\ \text{(generatori)}}}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)}$$

Per determinare la matrice:

$$\rightarrow C_1\,\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_S}{R_1} - \frac{v_{C_1}}{R_1} - i_L$$

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = \underbrace{\frac{1}{R_1C_1}}_{B_1} v_S - \underbrace{\frac{1}{R_1C_1}}_{A_{11}} v_{C_1} - \underbrace{\frac{1}{C_1}}_{A_{13}} i_L$$

$$\rightarrow C_2\,\frac{dv_{C_2}}{dt} = i_L - g_m v_{C_1} - \frac{v_{C_2}}{R_2}$$

$$\frac{dv_{C_2}}{dt} = \underbrace{\frac{i_L}{C_2}}_{A_{23}} - \underbrace{\frac{g_m}{C_2}}_{A_{21}} v_{C_1} - \underbrace{\frac{1}{C_2R_2}}_{A_{22}} v_{C_2}$$

$$\rightarrow L\,\frac{di_L(t)}{dt} = v_{C_1} - v_{C_2}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \underbrace{\frac{v_{C_1}}{L}}_{A_{31}} - \underbrace{\frac{v_{C_2}}{L}}_{A_{32}}$$

EQUAZIONI DI STATO (circuiti 2° ordine)

Riprendiamo l'eq. di stato-costa prima:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)}$$

→ Sistema di eq. diff. lineari, a coeff. costanti e non autonomo.

La struttura della soluzione è la seguente:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{\underline{A}t}\,x(0^+)}_{\text{vettore condizioni iniziali}} + \underbrace{\int_{0^+}^{t} e^{\underline{A}(t-t')}\,\underline{B}\,\underline{u}(t')\,dt'}_{\text{vettore ingressi}}}$$

→ risposta libera + + risposta forzata

Ora sommo e sottraggo la stessa qntà:

$$x(t) = e^{\underline{A}t}x(0^+) - \int_{-\infty}^{0^+} e^{\underline{A}(t-t')}\underline{B}\underline{u}(t')\,dt' + \int_{-\infty}^{0^+} e^{\underline{A}(t-t')}\underline{B}\underline{u}(t')\,dt' + \int_{0^+}^{t} e^{\underline{A}(t-t')}\underline{B}\underline{u}(t')\,dt'$$

$$\int_{-\infty}^{0^+} e^{\underline{A}(t-t')}\underline{B}\underline{u}(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{0^+} e^{\underline{A}t}\cdot e^{-\underline{A}t'}\underline{B}\underline{u}(t')\,dt' =$$

$$= e^{\underline{A}t}\underbrace{\int_{-\infty}^{0^+} e^{-\underline{A}t'}\underline{B}\underline{u}(t')\,dt'}_{x_p(t=0^+)} = e^{\underline{A}(t)}\,x_p(0^+)$$

$$\underline{x}_p(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\underline{A}(t-t')}\underline{B}\underline{u}(t)\,dt' \quad \text{(vettore)}$$

Avemo quindi: $x(t) = e^{\underline{A}t}x(0^+) - e^{\underline{A}(t)}x_p(0^+) + x_p(t)$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{\underline{A}t}\left[x(0^+) - x_p(0^+)\right]}_{\text{transitorio. Si estingue per } t\to\infty.} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{parte permanente}}}$$

→ La risposta permanente è costante con ingressi costanti.

$$\left(\lim_{t\to\infty} e^{\underline{A}t} = 0 \quad \text{circuiti strett. passivi}\right)$$

→ **GENERATORI COSTANTI** (INGRESSI COSTANTI)

$u(t) = \text{cost.}$

$x_p(t) = \text{cost.} = x_\infty \Rightarrow x_p(0^+) = x_\infty$

$$\boxed{x(t) = e^{\underline{A}t}[x(0^+) - x_\infty] + x_\infty}$$

(Soluzione per circuiti 2° ordine generat. costanti)

Formula di soluzione simile a quella del 1° ordine.

NOTA: Devo sempre però calcolarmi la matrice $\underline{A}$ dell'esponenziale.

È garantito che $x(0^+) = x(0^-)$ → circuiti a regime.

→ Quindi un circuito del 2° ordine a generatori costanti si riduce al calcolo della matrice $\underline{A}$ dell'esponente (autovalori, autovettori).

→ Per generatori non costanti il calcolo analitico è molto complesso, oggi si utilizzano i calcolatori.

→ Tuttavia ci sono degli ingressi non costanti sui quali è possibile fare calcoli, questi sono chiamati ingressi sinusoidali.

→ **GENERATORI SINUSOIDALI**

- La risposta transitoria è sempre data da $e^{\underline{A}t}$ (come con i generat. ad ingressi costanti).
- La risposta permanente è di tipo SINUSOIDALE.

→ Ricordiamo che:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{\underline{A}(t)}[x(0^+) - x_p(0^+)]}_{\text{risposta transitoria}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{risposta permanente}}}$$

(Soluzione per circuiti 2° ordine generatori sinusoidali)

⇓

(X_p → FASORI)

$$= e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{V_m}{\tau} \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{t'}{\tau}} e^{j\omega t'} dt'\right] = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{V_m}{\tau} \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{t'\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)} dt'\right] =$$

$\left(e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x\right) = \mathrm{Re}[e^{jx}] + j\,\mathrm{Im}[e^{jx}]$

FORMULA EULERO

$$= e^{-t/\tau} \frac{V_m}{\tau} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{\tau}+j\omega} e^{\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t}\right] = \dots$$

$$\dots \Rightarrow v_{PC}(t) = \underbrace{\frac{V_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}}_{A\ (\text{ampiezza})} \cos(\omega t + \underbrace{\tan^{-1}(\omega\tau)}_{\theta})$$

→ Altro modo per calcolare $v_{PC}(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} v_C(t) = A\cos(\omega t+\theta) = v_{PC}(t)$$

$$\left(\frac{dx(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{A\cos(\omega t+\theta)}_{v_{PC}(t)}\Big] + \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{A} \underbrace{A\cos(\omega t+\theta)}_{v_{PC}(t)} = \underbrace{\frac{1}{\tau}}_{B} \underbrace{V_m \cos(\omega t)}_{u(t)}$$

Risolvendola viene:

$$-A\omega\cos(\theta) - \frac{A}{\tau}\sin(\theta) = \emptyset \Rightarrow \tan(\theta) = \omega\tau$$

$$-A\omega\sin(\theta) + \frac{A}{\tau}\cos(\theta) = \frac{V_m}{\tau} \Rightarrow A = \frac{V_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\Rightarrow v_{PC}(t) = \frac{V_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t + \tan^{-1}(\omega\tau))$$

Nota: Anche in qst 2° modo però i calcoli sono lunghi e complessi; studiamo allora un altro caso che ci permetta di calcolare con più semplicità la risposta permanente di un circuito del 2° ordine con generatori sinusoidali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 149 di 376

Si nota che:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \Phi \\ y = \rho \operatorname{sen} \Phi \end{cases}$$ (coordinate polari)

$$z = x + jy = \rho \cos \Phi + j \rho \operatorname{sen} \Phi =$$ (rappresentaz. polare)

$$= \rho \underbrace{(\cos \Phi + j \operatorname{sen} \Phi)}_{e^{j\Phi}} = \rho e^{j\Phi}$$ (rappresentaz. esponenziale).

Quindi riprendendo la nostra $v_{PC}(t)$ avremo:

$$v_{PC}(t) = A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[A e^{j(\omega t + \theta)}] =$$

$$= \operatorname{Re}[\underbrace{A e^{j\theta}}_{\substack{\rho = A \\ \Phi = \theta \\ \text{è costante} \\ \text{nel tempo.}}} \underbrace{e^{j\omega t}}_{\substack{\rho = 1 \\ \Phi = \omega t \\ \text{è variabile} \\ \text{nel tempo.}}}]$$

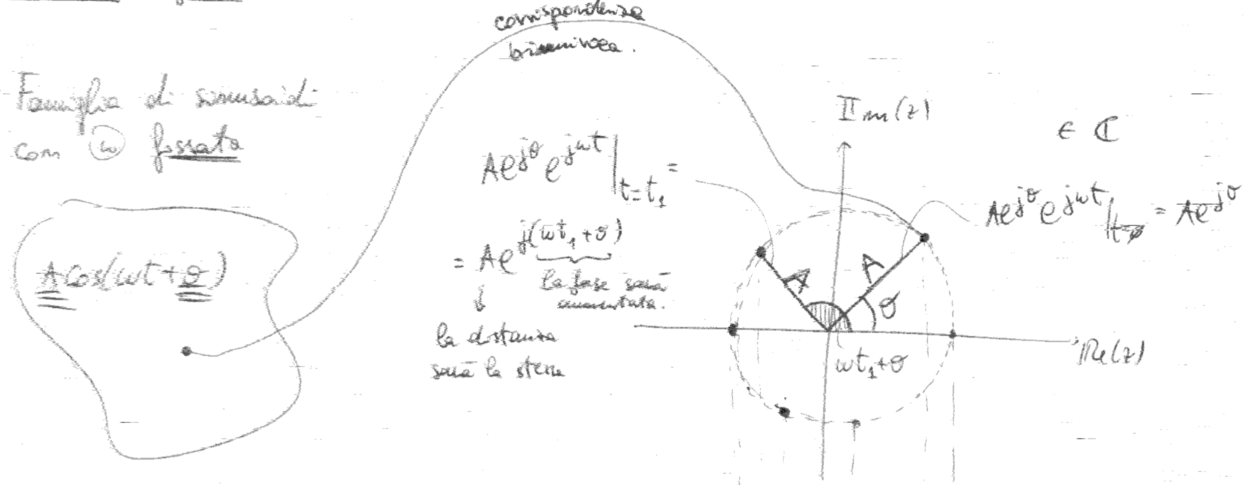
→ Si definisce $\boxed{\text{FASORE}}$ $\boxed{V = A e^{j\theta}}$ quella parte costante nel tempo

Quindi ad una grandezza nel dominio del tempo si può associare un numero complesso costante nel tempo detto FASORE.

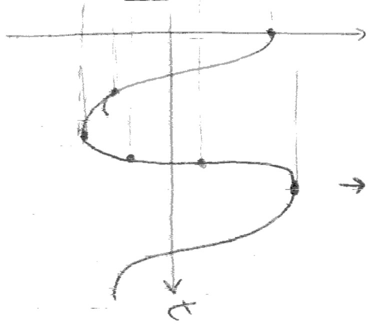
Nota: Noi abbiamo definito il fasore partendo dal coseno. Quindi se abbiamo un seno bisogna riportarlo alla funzione coseno. (Alcuni libri invece hanno definito il fasore partendo dal seno ma non c'è alcuna differenza sostanziale).

Più in dettaglio

Famiglia di sinusoidi con ω fissata



→ La sinusoide viene vista come la parte reale di $Ae^{j\theta}e^{j\omega t}$ del vettore che gira a velocità angolare ω fissata, nel piano complesso.



→ Viene fuori la sinusoide al ruotare del vettore.

Esempio

$V = -1 + j \qquad (f = 50\ Hz)$

$|V| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\angle V = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi =$

$= -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$

Ricordiamo che:

$z = x + jy$

$$\angle z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{per } (x>0) \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi & \text{per } (x<0) \end{cases}$$

$$\boxed{v(t) = \sqrt{2}\cos\left(2\pi f t + \frac{3}{4}\pi\right) \text{Volt} = \sqrt{2}\cos\left(2\pi \cdot 50\, t + \frac{3}{4}\pi\right) \text{Volt}}$$

$(2\pi f = \omega)$ $\quad (|V|) \quad (\omega = 2\pi f) \quad (\angle V)$

→ Nel dominio dei fasori ($\mathbb{C}$):

- $2\cos 3t \longrightarrow X_1 = 2e^{j0^\circ} = 2\underbrace{e^0}_{1} = 2$
- $-5\sin 3t \xrightarrow[\text{a coseno}]{\text{trasf.}} 5\cos(3t + 90^\circ) \longrightarrow X_2 = 5e^{j90^\circ \,(\frac{\pi}{2})} = 5j$

La somma sarà $(X_1 + X_2) = 2 + 5j \implies$ fasore associato alla somma

$$|X_1 + X_2| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$\angle(X_1 + X_2) = \operatorname{tg}\theta = \frac{5}{2}$$

Ritornando al tempo avremo:

$$\boxed{v(t) = \sqrt{29}\cos\left(3t + \frac{5}{2}\right)}$$

② DERIVAZIONE:

È una proprietà fondamentale per la risoluzione dei circuiti

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \mathbf{F} = Ae^{j\theta}$$

Ora ci chiediamo quale sia il fasore associato alla derivata ($f'(t)$).

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = g(t) = \frac{d\,A\cos(\omega t + \theta)}{dt} = \boxed{-A\omega\sin(\omega t + \theta)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \theta) = A\omega\cos(\omega t + \theta + 90^\circ) = g(t) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow G = A\omega e^{j(\theta + 90^\circ)} = A\omega e^{j\theta}\underbrace{e^{j90^\circ}}_{} = A\omega j \underbrace{e^{j\theta}}_{} = j\omega \mathbf{F}$$

$e^{jx} = \cos(x) + j\operatorname{sen}(x)$

$e^{j90^\circ} = \underbrace{\underbrace{\cos(90^\circ)}_{0} + j\underbrace{\operatorname{sen}(90^\circ)}_{1}}_{j}$

$Ae^{j\theta} = F$ (fasore di $f(t)$).

$$\boxed{G = j\omega F} \qquad \left(\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega\right)$$

$$\angle V_c = \tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

$V_c = x + jy$ → Razionalizziamo il numero complesso per dividere la Re dalla Im:

$$\Rightarrow V_c = \frac{V_m}{j\omega\tau + 1} \frac{(j\omega\tau - 1)}{(j\omega\tau - 1)} = \frac{(j\omega\tau)V_m - V_m}{-\omega^2\tau^2 - 1} =$$

$$= j \underbrace{\frac{\omega\tau V_m}{-\omega^2\tau^2 - 1}}_{y} - \underbrace{\frac{V_m}{-\omega^2\tau^2 - 1}}_{x} = V_c$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\omega\tau \cancel{V_m}}{\cancel{-\omega^2\tau^2 - 1}} \left(\frac{\cancel{-\omega^2\tau^2 - 1}}{-\cancel{V_m}} \right) = \omega\tau$$

$$\angle V_c = \tan\theta = \frac{y}{x} = \longrightarrow \theta = \tan^{-1}(y/x) = \theta = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

⇒ Avremo che:

$$v_c(t) = |V_c| \cos(\omega t + \angle V_c) =$$

$$= \boxed{\frac{V_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}(\omega\tau)\right) = v_c(t)}$$

Nota: Questa è la parte permanente del circuito ($x_p(t)$) quando il transitorio si è esaurito.

Sapendo $v_c(t)$ posso ora calcolare tutte le altre grandezze del circuito.

$$I\,(4-10j) = 50\,\angle 75°$$

$$I = \frac{50\,\angle 75°}{\underbrace{4-10j}} = \frac{50\,\angle 75°}{10{,}77\,\angle -68{,}2°} = \frac{50}{10{,}77}\,\frac{\angle 75°}{\angle -68{,}2°} =$$

$$\left(\begin{array}{l} 4-10j = X \\ |X| = \sqrt{4^2+(-10)^2} = \sqrt{116} = 10{,}77 \\ \angle X = \arctg\left(\frac{-10}{4}\right) = -68{,}2° \quad \Rightarrow \quad 10{,}77\,e^{-j\,68{,}2°} = 10{,}77\,\angle -68{,}2° \end{array}\right)$$

$$= 4{,}642\,\angle 75°-(-68{,}2°) = 4{,}642\,\angle 75°+68{,}2° = 4{,}642\,\angle 143{,}2° = I$$

(la moltiplicaz. delle fasi = somma delle fasi
la divisione delle fasi = differenza delle fasi)

Nel tempo quindi avrò:

$$\boxed{i(t) = 4{,}642\cos(2t + 143{,}2°)\ \text{Ampère}}$$

- [illegible]

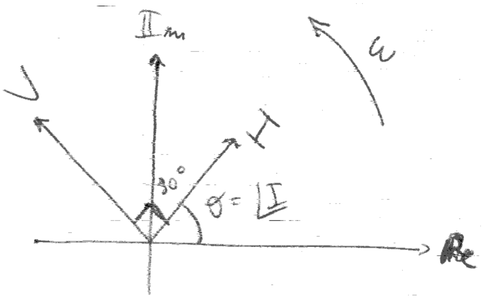
$$\boxed{v(t) = L\,\frac{i(t)}{dt}}$$

$$i \rightarrow I \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = I j\omega$$

$$V = L\, j\omega I = [j\omega L]\, \mathbf{I}$$

→ La corrente segue la tensione. Si dice anche che la tensione è in anticipo di 90°.

$$\boxed{\begin{aligned} |V| &= \omega L |I| \\ \angle V &= \angle j\omega L + \angle I = \frac{\pi}{2} + \angle I \end{aligned}}$$



Ricapitolando:

COMPONENTE	DOMINIO TEMPO	DOMINIO FASORE
Resistore	$v(t) = R\,i(t)$	$V = (R)\,\mathbf{I}$ — $\mathbb{C}$ { parte reale $= R$; parte immag. $= \emptyset$ }
Condensatore	$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$	$I = (j\omega C)\,V$ — $\mathbb{C}$ { parte reale $= \emptyset$; parte immag. $= \omega C$ }
Induttore	$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$	$V = (j\omega L)\,\mathbf{I}$ — $\mathbb{C}$ { parte reale $= \emptyset$; parte immag. $= \omega L$ }

$$\boxed{V = Z I}$$

$Z = R$ resistore

$Z = \frac{1}{j\omega C}$ condensatore

$Z = j\omega L$ induttore

- Per ω molto grandi il comportamento è opposto

$$Z = \frac{V}{I} = j\omega L \Big|_{\omega \to \infty} \Rightarrow \infty \quad \rightarrow \text{circuito aperto}$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}\Big|_{\omega \to \infty} = 0 \quad \rightarrow \text{corto circuito}$$

Le leggi di Kirchhoff per i fasori

Si dimostra che non cambiano rispetto a quelle che già abbiamo visto.

$$\boxed{\sum_k I_k = 0} \qquad \boxed{\sum_k V_k = 0} \qquad \cdot\ I_k, V_k \text{ fasori}$$

Questo vale perché le leggi di Kirchhoff sono lineari.

Dim:

→ Dominio del tempo

KCL $\quad i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_m(t) = 0 \qquad$ (tutte entranti in un nodo)

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= |I_1|\cos(\omega t + \theta_1) \\ i_2 &= |I_2|\cos(\omega t + \theta_2) \\ &\vdots \\ i_m &= |I_m|\cos(\omega t + \theta_m) \end{aligned}\right\} \text{regime sinusoidale con la stessa } \omega.$$

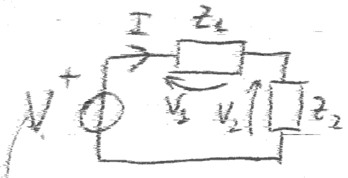
$$i_1 \longrightarrow I_1 = |I_1|e^{j\theta_1} \quad ; \quad i_1(t) = \mathrm{Re}[I_1 e^{j\omega t}]$$

$$i_2 \longrightarrow I_2 = |I_2|e^{j\theta_2} \quad ; \quad i_2(t) = \mathrm{Re}[I_2 e^{j\omega t}]$$

$$\vdots$$

$$i_m \longrightarrow I_m = |I_m|e^{j\theta_m} \quad ; \quad \underbrace{i_m(t) = \mathrm{Re}[I_m e^{j\omega t}]}_{\text{sostituiamo queste espressioni nella KCL.}}$$

Vale anche la regola del partitore di tensione



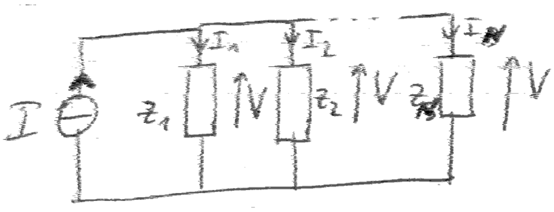
(generat. tensione sinusoidale con ω data rappresentato dal fasore V)

$$\boxed{V_1 = V \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}} \quad ; \quad \boxed{V_2 = V \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left(V_1 = V \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \right) \qquad \left(V_2 = V \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \right)$$

Connessione ammettenze in parallelo

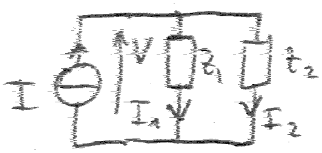


V uguale

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_m} = Y_{eq}$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m = \frac{I}{V}$$

Vale la regola del partitore di corrente



$$\boxed{I_1 = I \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}} \quad ; \quad \boxed{I_2 = I \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left(I_1 = I \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \right) \qquad \left(I_2 = I \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \right)$$

Impedenza ed Ammettenza di bipoli

$v(t) = |V|\cos(\omega t + \theta_v) \longrightarrow V = |V| e^{j\theta_v}$

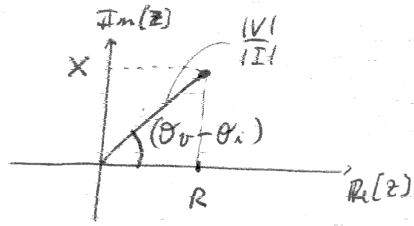
$i(t) = |I|\cos(\omega t + \theta_i) \longrightarrow I = |I| e^{j\theta_i}$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V| e^{j\theta_v}}{|I| e^{j\theta_i}} = \frac{|V|}{|I|} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{|V|}{|I|}\left[\cos(\theta_v - \theta_i) - j\,\mathrm{sen}(\theta_v - \theta_i)\right]$$

$$\boxed{Z = \frac{|V|}{|I|} e^{j(\theta_v - \theta_i)}} = R + jX$$

$R \rightarrow$ resistenza $= \mathrm{Re}[Z]$

$X \rightarrow$ reattanza $= \mathrm{Im}[Z]$

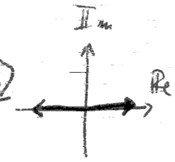


Induttore $\rightarrow$ parte reale nulla $\rightarrow R = 0$
$\rightarrow$ parte immaginaria $= \omega L$

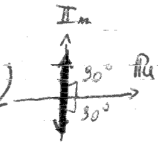
Condensatore $\rightarrow$ parte reale nulla $\rightarrow R = 0$
$\rightarrow$ parte immagin. $\rightarrow -\frac{1}{\omega C}$

Resistenza $\rightarrow$ parte reale $= R$
$\rightarrow$ parte immag. nulla $\rightarrow X = \emptyset$

- Reattanza nulla bipoli resistivi

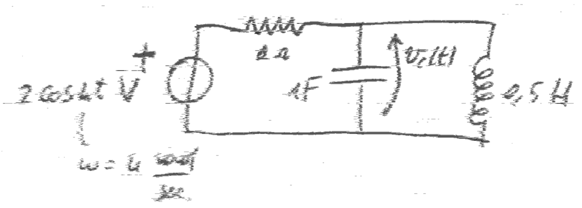


- Resistenza nulla bipoli reattivi

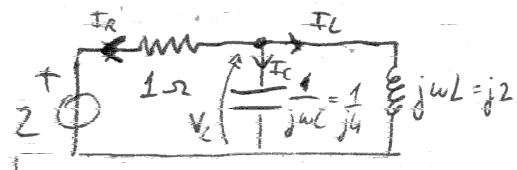


resist.	$Z = R$	$R = R$	$X = 0$
indutt.	$Z = j\omega L$	$R = 0$	$X_L = \omega L > \emptyset$
condens.	$Z = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$	$R = 0$	$X_C = -\frac{1}{\omega C} < \emptyset$

Esempio



tempo



(perché la fase è nulla).

fasori

$I_C + I_R + I_L = 0$ KCL

$$\left(\frac{1}{j4} \parallel j2\right)$$

$$V_C = V \frac{4j}{-7+j2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_C(t) \simeq 0{,}55\cos(4t-47°)\ V$$

Ripasso

Il metodo simbolico dei fasori

→ $\boxed{\text{Procedura}}$ per calcolare la parte permanente (non il transitorio) per circuiti con generatori sinusoidali (con ω fissata)

1) Sostituire ogni generatore indipendente di pulsazione ω con un generatore pari al fasore corrispondente
2) Associare ad ogni variabile (v ed i) il corrispondente fasore.
3) Sostituire ogni R, L, C con un bipolo avente l'impedenza Z corrispondente.
4) Analizzare il circuito nel dominio dei fasori con i metodi dei circuiti "resistivi".
5) Ricavare le grandezze sinusoidali associate ai fasori determinati.

$$\begin{bmatrix} 1+j1,5 & j2,5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

~~Con Kramer~~:

$$V_1 = \frac{\det\begin{vmatrix} 20 & j2,5 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} 1+j1,5 & j2,5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{20 \cdot 15}{(1+j1,5)15 - 11(j2,5)} = \frac{300}{15 + j22,5 - 27,5j} = \frac{300}{15-5j}$$

$$V_2 = \frac{\det\begin{vmatrix} 1+j1,5 & 20 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} 1+j1,5 & j2,5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{-220}{15-j5}$$

Ora calcoliamo il loro corrispettivo nel dominio del tempo.

- $$V_1 = \frac{300}{15-5j} = \frac{300}{(15-5j)}\frac{(15+5j)}{(15+5j)} = \frac{4500+1500j}{225+25} = \frac{4500}{250} + \frac{1500}{250}j =$$

$$= 18 + j6 = V_1$$

$$|V_1| = \sqrt{18^2+6^2} = 18,97$$

$$\angle V_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{18}_{\,3}}\right) = 18,43°$$

$$\rightarrow \boxed{V_1(t) = 18,97 \cos(4t + 18,43°)}$$

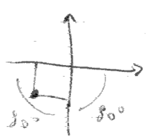
- $$V_2 = -\frac{220}{15-j5}\,\frac{15+j5}{15+j5} = \frac{-3300-1100j}{250} = -\frac{3300}{250} - \frac{1100j}{250} =$$

$$= -\frac{66}{5} - \frac{22}{5}j$$

$$|V_2| = \sqrt{\left(-\frac{66}{5}\right)^2 + \left(-\frac{22}{5}\right)^2} = 13,91$$

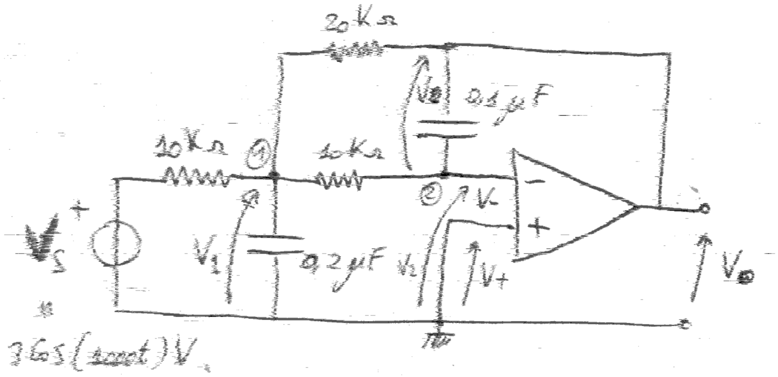
$$\angle V_2 = \operatorname{arctg}\left(\left(-\frac{22}{5}\right)\left(-\frac{5}{66}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 180° = 198,43°$$

perché sono tutti e due negativi (3° quadrante)



$$\boxed{V_2(t) = 13,91 \cos(4t + 198,43°)}$$

Esempio 3



$3\cos(1000t)\,V$

$$V_+ = V_- = 0 = V_2$$

↳ (perché V_+ collegato a massa)

$$3\cos(1000t) \longrightarrow 3$$

$$0{,}2\,\mu F \longrightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,1000\cdot 0{,}2\cdot 10^{-6}} = \frac{1}{j\,0{,}0002} = -j\,5000\,\Omega = -j5\,K\Omega$$

$$0{,}1\,\mu F \longrightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\,1000\cdot 0{,}1\cdot 10^{-6}} = \frac{1}{j\,0{,}0001} = -j\,10000\,\Omega = -j10\,K\Omega$$

① $$\frac{3-V_1}{10\,K\Omega} = \frac{V_1}{-j5\,K\Omega} + \frac{V_1 - \cancel{V_2}^{\,0}}{10\,K\Omega} + \frac{V_1 - V_0}{20\,K\Omega}$$

$$\frac{3}{10} - \frac{V_1}{10} = j\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1}{20} - \frac{V_0}{20}$$

② $$\frac{\cancel{V_2}^{\,0} - V_0}{-j10\,K\Omega} + \frac{\cancel{V_2}^{\,0} - V_1}{10\,K\Omega} = 0$$

$$\frac{V_0}{j10} = \frac{V_1}{10} \Rightarrow V_1 = -jV_0$$

sostituisco

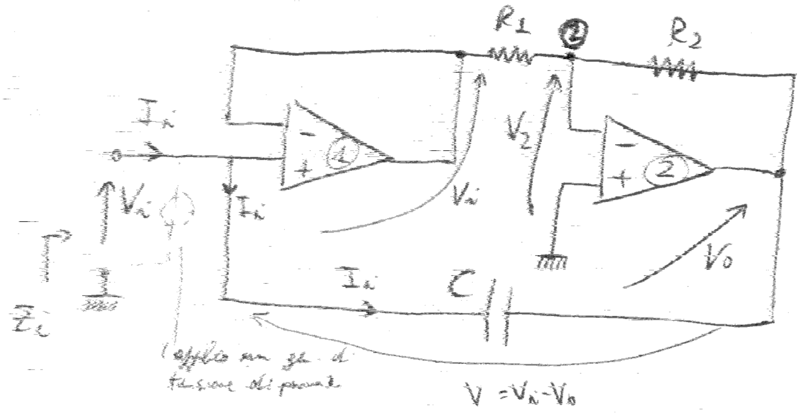
$$\frac{3}{10} = \frac{-jV_0}{10}\; j\frac{(-jV_0)}{5} + \frac{-jV_0}{10} + \frac{-jV_0}{20} - \frac{V_0}{20}$$

$$\frac{3}{10} = V_0\left(-\frac{j}{10} + \frac{1}{5} - \frac{j}{10} - \frac{j}{20} - \frac{1}{20}\right)$$

$$\frac{3}{10} = V_0\left(-\frac{1}{4}j + \frac{3}{20}\right) \Rightarrow V_0 = \frac{3/10}{\underbrace{\left(-\frac{1}{4}j + \frac{3}{20}\right)}_{\frac{-5j+3}{20}}} = \frac{3/10}{\frac{-5j+3}{20}} = \frac{3}{10}\left(\frac{20}{-5j+3}\right) =$$

$$= \frac{60}{30-50j} = \frac{6}{3-5j} = V_0$$

Esempio ⑤



A.O. 2: $V_2 = V_+ = V_- = \emptyset$

↳ (perché collegato a massa)

A.O. 1: $V_i = V_+ = V_-$

$$② \quad \frac{\cancel{V_2} - V_i}{R_1} + \frac{\cancel{V_2} - V_0}{R_2} = 0 \rightarrow -\frac{V_i}{R_1} = \frac{V_0}{R_2} \rightarrow V_0 = -\frac{R_2}{R_1} V_i$$

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} \qquad I_i = \frac{\overbrace{V_i - V_0}^{V}}{1/j\omega C} = (V_i - V_0)(j\omega C)$$

$$I_i = \left(V_i + \frac{R_2}{R_1} V_i\right) j\omega C = j\omega C V_i \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

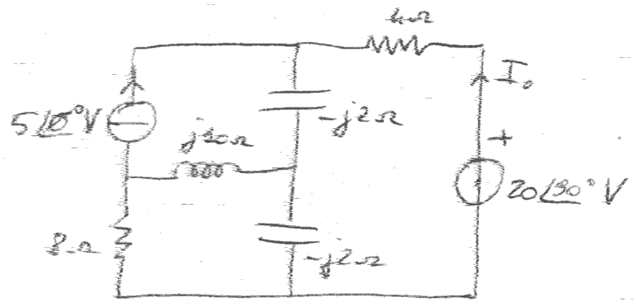
dove $C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) C$

$$\boxed{Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{\cancel{V_i}}{j\omega C_{eq} \cancel{V_i}} = \frac{1}{j\omega C_{eq}}}$$

→ Per ottenere grandi capacità da un piccolo condensatore si usa qst circuito.

Esempio ⑦

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI GENERATORI ISOFREQUENZIALI

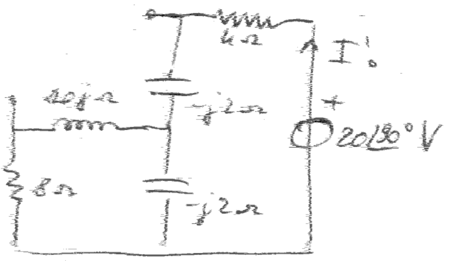


Calcolare I_0

Nota: In qst caso posso calcolarmi i nuovi fasori e sommarli perché i generatori sono isofrequenziali (cioè hanno la stessa frequenza).

$$I_0 = I_0' + I_0''$$

→ I_0'



$$I_0' = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{j20}{Z_{eq}}$$

$$Z_{eq} = \left[(8+j10) \parallel (-j2)\right] + (-j2) + 4 =$$

$$= \frac{(8+j10)(-j2)}{8+j8} + 4 - j2 = \frac{-16j+20}{8+j8} + 4 - j2 =$$

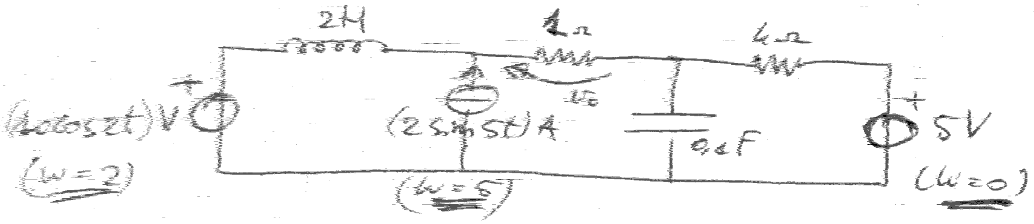
$$= \frac{-16j+20+4(8+j8)-j2(8+j8)}{8+j8} = \frac{\cancel{-16j}+20+32+32j-\cancel{16j}+16}{8+j8} =$$

$$= \frac{68}{8+j8} \cdot \frac{8-j8}{8-j8} = \frac{544-544j}{64+64} = \frac{544}{128} - \frac{544}{128}j =$$

$$= \frac{17}{4} - \frac{17}{4}j = \frac{17-17j}{4}$$

Esempio 8

Sovrapp. degli effetti — GENERATORI NON ISOFREQUENZIALI

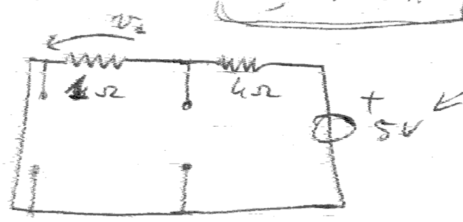


Calcolare v_0

Nota: Dato che i generatori sono non isofreq. non possiamo sommare i fasori associati alle loro grandezze. Dovremo quindi prima di fare la somma riportare le grandezze nel dominio del tempo, dove anche se non sono isofreq. si possono sommare.
Sommare i fasori è grave perché è concettualmente sbagliato, infatti un fasore corrisponde ad una certa famiglia di sinusoidi con ω (freq.) fissata.

$$v_0 = v_1 + v_2 + v_3$$

→ v_1 (induttore → c.c. ; condens. → c.a.) (ω = 0)



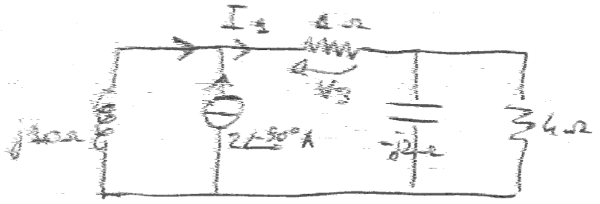
→ In qst non abbiamo dovuto passare dai fasori in qst il calcolo era semplice, con un partitore di tensione.

$$v_1 = -5\frac{1}{1+4} = -1\,V$$

(perché la v_1 è dalla parte opposta)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 179 di 376

$\rightarrow v_3$ $(\omega = 5)$



$\omega = 5 \ \frac{rad}{sec}$

$2\sin 5t\,A \rightarrow -2\cos(5t+90°) \rightarrow 2\cos(5t-90°) \rightarrow 2\angle -90°\ A$

$2H \rightarrow Lj\omega = 2j5 = 10j\ \Omega$

$0{,}1F \rightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j5\cdot 0{,}1} = -j2\ \Omega$

$V_3 = I_1 \cdot 1 = I_1$

$$I_1 = V_3 = \underbrace{2\angle -90°}_{\downarrow} \cdot \frac{j10}{j10 + 1 + (4 \| -2j)} = 2{,}328\angle -77{,}9°\ V$$

$$2[\underbrace{\cos(90°)}_{=0} - j\underbrace{\sin(90°)}_{1}] = -2j$$

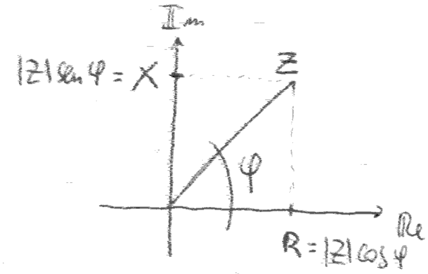
$v_3 = 2{,}328\cos(5t - 77{,}9°)\ V$

$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = -1 + 2{,}45\cos(2t - 30{,}80°) +$
$+ 2{,}328\cos(5t - 77{,}9°)\ V$

somma nel tempo perché i generatori sono non isofrequenziali.

→ Nel dominio fasoriale:

$$\left.\begin{aligned} V &= V_m e^{j\theta_v} \\ I &= I_m e^{j\theta_i} \end{aligned}\right\} \rightarrow Z = \frac{V}{I} = \frac{V_m}{I_m} e^{j\overbrace{(\theta_v - \theta_i)}^{\varphi}} = \frac{V_m}{I_m} e^{j\varphi}$$



La potenza attiva potremo anche scriverla come:

$$\boxed{P_{attiva} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \quad [W]}$$

→ ~~Possiamo scrivere~~ la P_{attiva} in un'altra formula equivalente

$$(Z = R + jX) \qquad \text{dove:} \quad X = |Z| \operatorname{sen}\varphi \qquad |Z| = \frac{V_m}{I_m}$$
$$R = |Z| \cos\varphi$$

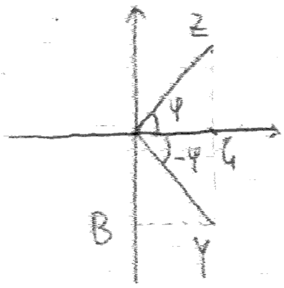
Quindi:

$$P_{attiva} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = \frac{1}{2} |Z| I_m^2 \cos\varphi = \overbrace{\boxed{\frac{1}{2} I_m^2 \underbrace{R}_{Re[Z]}}}^{P_{attiva}} =$$

$(|Z| \cos\varphi = R)$

$$\boxed{|Y| = \frac{1}{|Z|} = \frac{I_m}{V_m}}$$

$$= \frac{1}{2} V_m^2 |Y| \cos\varphi = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} V_m^2 G}}_{P_{attiva}} \qquad G = Re[Y]$$



$$(Y = G + jB) \qquad \text{dove:} \quad B = |Y| \operatorname{sen}\varphi$$
$$G = |Y| \cos\varphi$$

$$\boxed{P_{attiva} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} V_m^2 G}$$

In termini di valori efficaci:

$$\boxed{P_{att} = V_{eff} I_{eff} \cos\varphi = I_{eff}^2 R = V_{eff}^2 G} \left(= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos\varphi = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi \right)$$

Nota: Di solito si usa come modulo dell'ampiezza il V_{eff}:

$$V = V_m e^{j\theta_v} \qquad |V| = V_m$$

$$V = V_{eff} \, e^{j\theta_v} \qquad |V| = V_{eff}$$

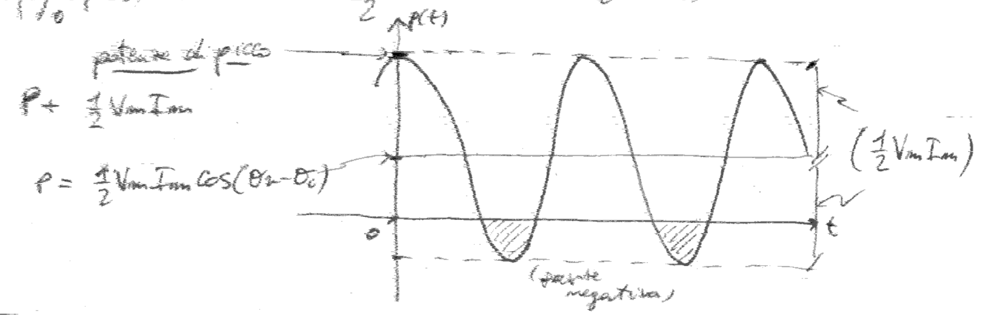
→ V_m e V_{eff} sono legati da un fattore di proporzionalità di $\sqrt{2}$.

Come varia la potenza

Abbiamo definito la potenza attiva (media) come:

$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad [W]$$

→ La potenza istantanea oscilla intorno ad un valore costante pari alla P attiva



(per $P > 0$)

$$W = \int_0^{\Delta t} p(t)\,dt = \underbrace{P\Delta t}_{} + \underbrace{\int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\,dt}_{} \cong P\Delta t$$

(energia)

(potenza attiva che, come detto è costante indipendente da t e si porta fuori dall'integrale)

$\leq \frac{1}{2\omega} V_m I_m T$ è piccolo rispetto a $P\Delta t$ e può essere trascurato. (Se Δt è $\gg$ rispetto al periodo).

$$\boxed{W \cong P\Delta t}$$

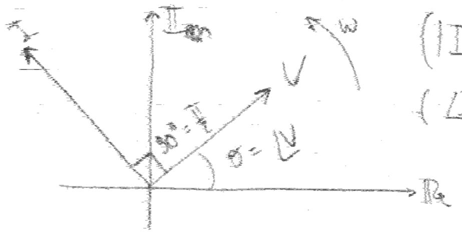
→ Dunque la potenza media (attiva) permette un'immediata valutazione dell'energia assorbita da un dispositivo. Tuttavia a volte occorre conoscere anche la potenza di picco, infatti se quest'ultima è tanto maggiore rispetto alla potenza media, in brevi intervalli di tempo, la potenza assorbita può essere eccessiva e quindi dannosa per il dispositivo, anche se la pot. media è bassa.

CONDENSATORE

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}$$

$$\theta_i = \theta_v + 90° \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = \phi$$

$$I_m = \omega C V_m$$

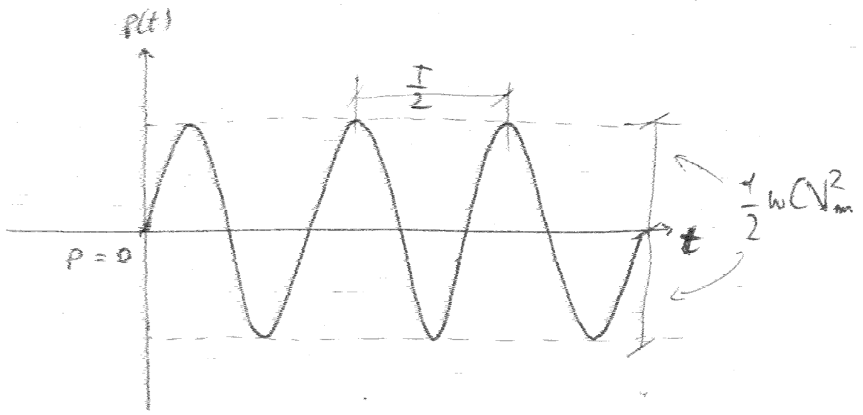


$(|I| = \omega C |V|)$

$(\angle I = \frac{\pi}{2} + \angle V)$

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \operatorname{sen}(2\omega t + 2\theta_i)}$$

Anche in qst caso, come per l'induttore, non c'è potenza attiva; quindi p(t) oscillerà lungo l'asse del tempo



Anche il condensatore non assorbe potenza attiva. ($P_C = \phi$)

$$P, Q \in \mathbb{R} \Rightarrow S \in \mathbb{C}$$

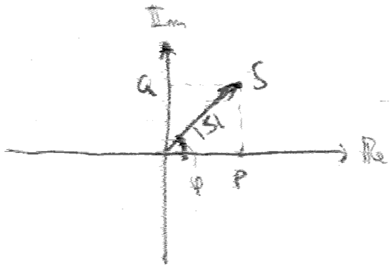
$$S = P + jQ = \frac{1}{2} V_m I_m (\cos\varphi + j\sin\varphi) = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j\theta_v} e^{-j\theta_i} = \boxed{\frac{1}{2} V I^* = S}$$

$$\begin{pmatrix} V_m e^{j\theta_v} = V \\ I_m e^{-j\theta_i} = I^* \end{pmatrix} \rightarrow \text{fasore complesso coniugato.}$$

Se utilizzo i valori efficaci: $\boxed{S = V_{eff} I_{eff}^*}$ → POTENZA COMPLESSA

→ La pot. complessa unisce in maniera compatta la pot. attiva e quella reattiva.



$|S| = \frac{1}{2} V_m I_m$ = potenza apparente $= \sqrt{P^2 + Q^2}$

$(|S| = V_{eff} I_{eff})$

$\theta_v - \theta_i = \varphi \longrightarrow \cos\varphi = \frac{P}{S} \rightarrow$ fattore di potenza

$P = |S| \cos\varphi$ potenza attiva

$Q = |S| \operatorname{sen}\varphi$ potenza reattiva

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\downarrow$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

convenz. utilizzatori

$S = \frac{1}{2} V I^*$ assorbita

$S = -\frac{1}{2} V I^*$ erogata

convenz. generatori

$S = \frac{1}{2} V I^*$ erogata

$S = -\frac{1}{2} V I^*$ assorbita

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{N} S_k^{e \to (\text{erogata})}}_{\text{potenza erogata generatori}} = \underbrace{\sum_{q=1}^{M} S_q^{a \to (\text{assorbite})}}_{\text{potenza assorbita elementi circuitali}}$$

(N = # generatori)

(M = # elementi del circuito)

$$\sum_{q=1}^{M} S_q^a - \underbrace{\sum_{k=1}^{N} S_k^e}_{\text{potenza assorbita generatori (segno meno della potenza erogata)}}$$

$$\Rightarrow \sum_r S_r = \emptyset \quad \text{(somma algebrica)}$$

$S_r = (P_r + j Q_r)$ (potenza complessa assorbita (erogata) dall'elemento (r)).

$$\sum_r (P_r + j Q_r) = \emptyset \implies \sum_r P_r + j \sum_r Q_r = 0$$

Da cui si ha il vincolo seguente:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_r P_r &= \emptyset \\ \sum_r Q_r &= \emptyset \end{aligned}}$$

→ Si conserva sia la potenza attiva sia quella reattiva (Teorema di Boucherot)

Riepilogo

	BIPOLI PASSIVI	$R \geq \emptyset$, $G \geq \emptyset$	$P \geq \emptyset$
	BIPOLI RESISTIVI	$X = B = \emptyset$	$Q = \emptyset$
	BIPOLI REATTIVI	$R = G = \emptyset$	$P = \emptyset$
	BIPOLI INDUTTIVI	$X > \emptyset$, $B < \emptyset$	$Q > \emptyset$
	BIPOLI CAPACITIVI	$X < \emptyset$ $B > \emptyset$	$Q < \emptyset$

Nota: I bipoli costituiti esclusivamente da resistori, induttori e condensatori sono passivi.

La potenza reattiva assorbita da tutto il bipolo sarà data dalla pot. reatt. del condensatore Q_C e qll dell'induttore Q_L.
Stesso discorso per la potenza attiva solo che in qst caso ci sarà solo il contributo del resistore P.

$$Q = Q_L + Q_C = 12545,28 + (-4813,33) = 7731,95 \quad [VAR]$$

→ potenza reattiva assorbita da tutto il bipolo

$$P = 16,7\ kW = 16700\ W$$

potenza attiva assorbita da tutto il bipolo (solo qll del resistore).

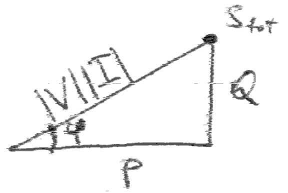
A qst pto mi posso calcolare la pot. apparente del bipolo:

$$|S|_{tot} = |V||I| = \sqrt{P^2+Q^2} = \sqrt{16700^2 + 7731,95^2} = 18403,07 \quad [VA]$$

Da cui:

$$|V| = \frac{|S|_{tot}}{|I|} = \frac{18403,07}{79,2} = 232,4$$

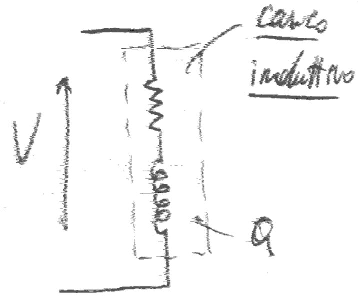
Ora possiamo calcolare il fattore di potenza ($\cos\varphi$)



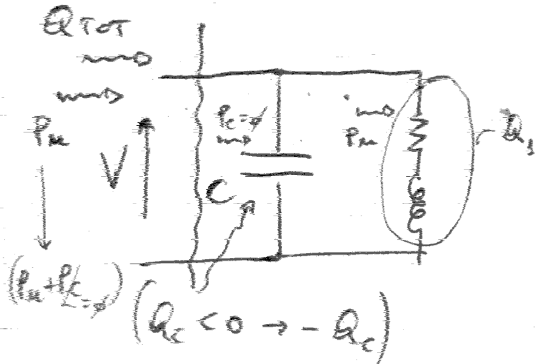
$$\left(\begin{array}{l} S_{tot} = P + jQ = VI^* \\ |S|_{tot} = |V||I| \end{array} \right)$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S_{tot}} = 0,907 = \frac{16700}{18403,07}$$

oppure: $\left(\varphi = \text{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right) \rightarrow \cos\left(\text{arctg}\left(\frac{Q}{P}\right)\right) = \cos(24,84) = 0,907 \right)$



→ Devo fare in modo di diminuire la potenza del carico induttivo così che la φ diminuisca.
Per fare così ho bisogno di un elemento che eroghi potenza reattiva ⟹ condensatore



$$Q_{TOT} = \overset{(<\phi)}{Q_C} + Q_1$$

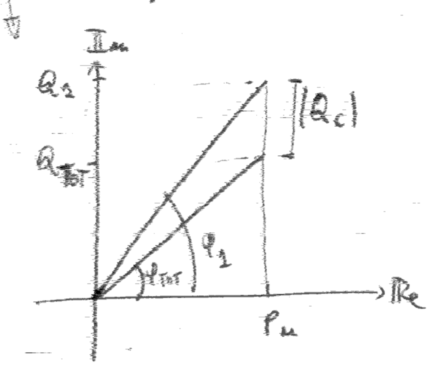
$$Q_{TOT} = -Q_C + Q_1 \rightarrow$$ (il condens. fa diminuire la pot. reattiva del bipolo.)

$$Q_C = \frac{1}{2}\omega C V_m^2 = -\omega C V_{eff}^2 < \phi. \qquad |Q_C| = Q_1 - Q_{TOT}$$

$$\begin{cases} Q_1 = P_m \tan\varphi_1 \\ Q_{TOT} = P_m \tan\varphi_{TOT} \end{cases}$$

$$|Q_C| = Q_1 - Q_{TOT} = \underbrace{P_m(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_{TOT})}_{\text{potenza reattiva data dal condensatore.}}$$

Il problema sarà: dato φ_1 e P_m e V_{eff}, trovare C tale che valga



$$|Q_C| = \omega C V_{eff}^2 = P_m(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_{TOT})$$

$$\boxed{C = \frac{|Q_C|}{\omega V_{eff}^2} = \frac{P_m(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_{tot})}{\omega V_{eff}^2}}$$

→ valore del condensatore per far sì che la potenza diminuisca fino a valori di legge.

(Vedere esempio libro R. PERFETTI)

$$\boxed{R_u = R_g} \; ; \; \boxed{X_u = -X_g}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{Z_u = Z_g^*}$$

} ADATTAMENTO ENERGETICO → POTENZA MAX DISPONIBILE

Dall' adattamento si trova facilmente che:

$$\boxed{P_{u(max)} = \frac{|E|^2 R_u}{(2R_g)^2} = \frac{|E|^2}{4R_g}}$$

potenza max disponibile assorbita dal carico Z_u

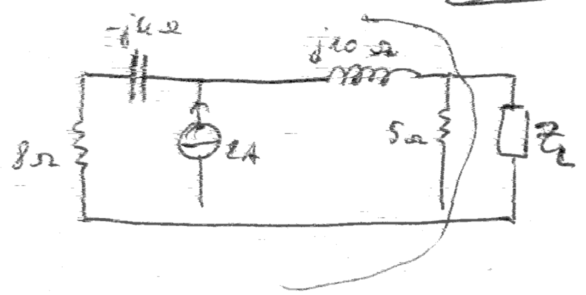
$(R_g = R_u)$

con valore efficace (NO l' $\frac{1}{2}$)

NOTA: se voglio la potenza attiva (media) max allora [senza valore efficace.

$$P_{\substack{max \\ media}} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{4R_g} = \frac{|E|^2}{8R_g}$$

Esempio



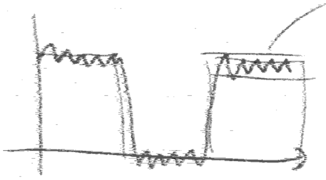
$$Z_{TH} = Z_g = 5 \parallel (j10 - j4 + 8)$$

$$\downarrow$$

(per l'adattamento $Z_g^* = Z_L$)

→ L'adattamento energetico equivale a calcolare il circuito eq. di Thevenin in regime sinusoidale.

fenomeno di Gibbs



$n \gg 0$

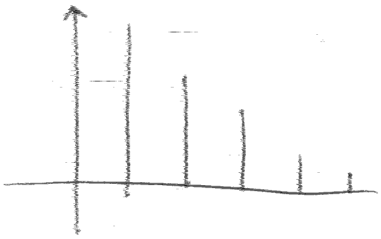
$$\frac{1}{\pi}\sin \pi t + \frac{3}{\pi}\sin \pi 3t + \frac{5}{\pi}\sin 5\pi t \dots$$

(solo dispari)

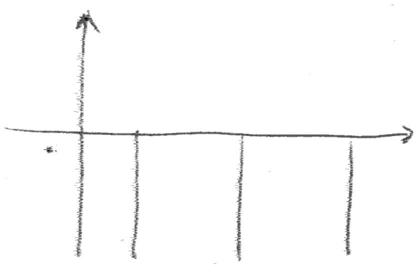
@ ω_0 @ $3\omega_0$ @ $5\omega_0$

ottengo lo spettro in frequenza del segnale.

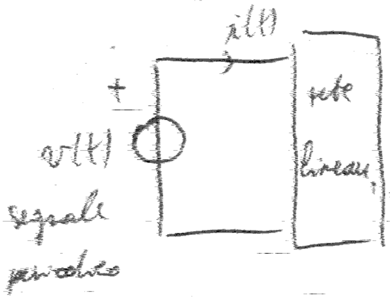
La fase alle diverse freq. è sempre uguale.

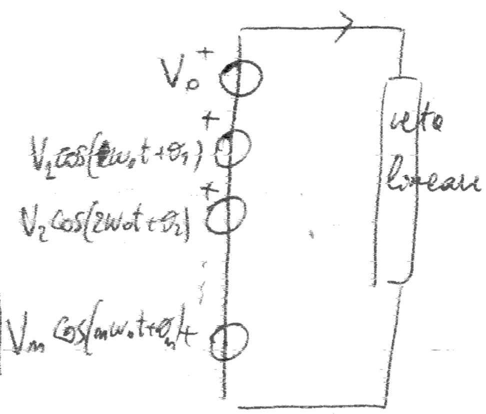


spettri



fase





→ Devo calcolare l'effetto di ciascun generatore. Sono a freq. ≠, quindi devo sommarli nel dominio del tempo.

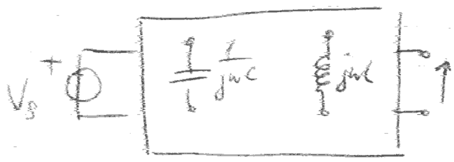
$$v(t) = V_0 + V_1\cos(\omega_0 t+\theta_1) + V_2\cos(2\omega_0 t+\theta_2) + \dots$$

LEZIONE 27 (pag. 473-487)

→ Circuiti RC in frequenza (1° ordine)
(filtri 1° ordine)

→ Circuiti RLC in frequenza (2° ordine)
(filtri 2° ordine)

CIRCUITI RC IN FREQUENZA



$Z_1 = R$

$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$

$$V_u = V_s \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = V_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}} =$$

$$= V_s \frac{1}{\cancel{j\omega C}} \frac{\cancel{j\omega C}}{1 + j\omega RC} = \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega RC}}_{H(\omega)} \cdot V_s = V_u$$

$$V_u = H(\omega) V_s \longrightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{V_u}{V_s}}$$ funzione di trasferimento (o di rete)

$$H(\omega) = \frac{\text{fasore risposta}}{\text{fasore ingresso}}$$

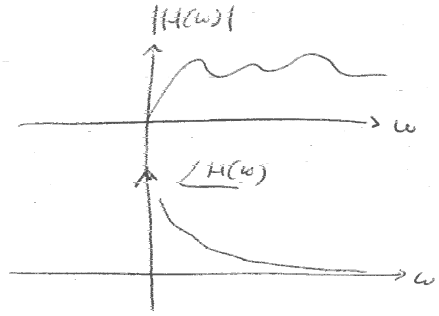
Nota: L'ipotesi fondamentale quando si calcolano le funzioni di rete è che le condizioni iniziali siano nulle. $i_L(0) = 0$, $v_C(0) = 0$

RISPOSTA IN FREQUENZA DELLA $H(\omega)$

→ curve di risposta in frequenza

modulo $|H(\omega)|$ al variare di ω

fase $\angle H(\omega)$ al variare di ω



$$V_u = |V_u| e^{j\Phi_u}$$

$$V_s = |V_s| e^{j\Phi_s}$$

$$H(j\omega) = |H| e^{j\Phi}$$

$$H = \frac{V_u}{V_s} \Rightarrow \underbrace{V_u = H \cdot V_s}$$

$$\boxed{|V_u| e^{j\Phi_u} = |H| e^{j\Phi} |V_s| e^{j\Phi_s}}$$ da cui

$$\boxed{|V_u| = |H||V_s|}$$ modulo uscita

$$\boxed{\Phi_u = \Phi + \Phi_s}$$ fase uscita

$$\boxed{v_u(t) = |V_u| \cos(\omega t + \Phi_u) = \underbrace{|H||V_s|}_{|V_u|} \cos(\omega t + \underbrace{\Phi_s + \Phi(\omega)}_{\Phi_u})}$$

nel dominio del tempo

$\Phi(\omega)$ → (risposta in fase)

FILTRO PASSA ALTO

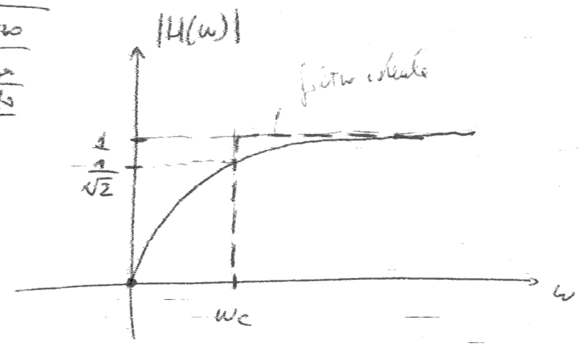
Come si nota lo ottengo invertendo gli elementi del circuito passa-basso.

$$V_u = V_s \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V_s \frac{R}{\frac{1+j\omega RC}{j\omega C}} = V_s \, R \frac{j\omega C}{1+j\omega RC} =$$

$$= V_s \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

funz trasmiss.

$$\boxed{\frac{V_u}{V_s} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = H(\omega)}$$ filtro passa alto



$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

@ $\omega = 0 \rightarrow H(\omega) = \emptyset$

@ $\omega \rightarrow \infty \rightarrow$ il $+1$ è trascurabile quindi: $\frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2}} = \frac{\omega RC}{\omega RC} = 1$

$\hookrightarrow H(\omega) \rightarrow 1$

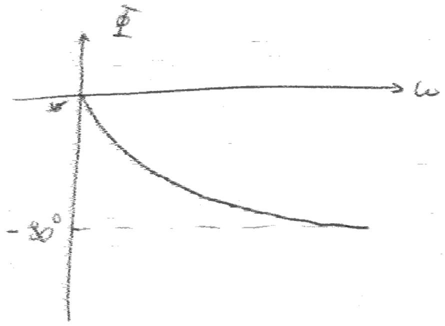
$$\angle H(\omega) = \underbrace{\angle j\omega RC}_{=\emptyset} - \angle 1+j\omega RC = -\text{arctg}(\omega RC)$$

$\omega = 0 \rightarrow \emptyset$

$\omega \rightarrow \infty \rightarrow -90°$

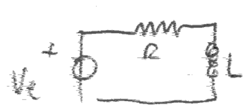
@ $\omega = 0 \Rightarrow \text{arctg}(\emptyset) = \emptyset$

@ $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \text{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2} = 90°$



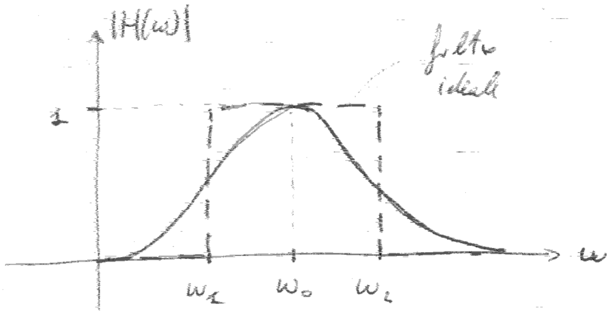
La fase è uguale ~~come~~ nel filtro passa basso.

Nota: Posso ottenere il medesimo risultato utilizzando l'induttore nel circuito RL:



Poco utilizzato, si preferisce l'RC.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 205 di 376



→ per un filtro meglio approssimato dobbiamo aumentare di grado il nostro circuito.

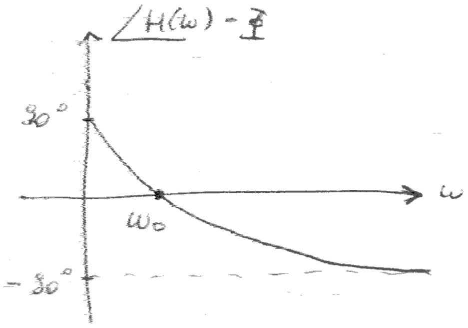
$$\angle H(\omega) = \underbrace{\angle R}_{=\phi} - \angle R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$@\ \omega = \phi \implies \operatorname{arctg}\left(\frac{0-\infty}{R}\right) = -\infty = -90°$$

col − davanti all'arctg diventa $+90°$

$$@\ \omega \to \infty \implies \operatorname{arctg}\left(\frac{\infty - 0}{R}\right) = \infty = 90°.$$

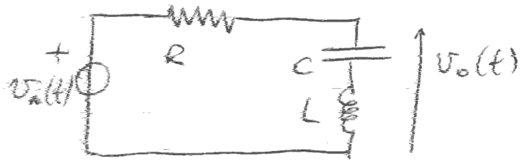
col − davanti all'arctg diventa $-90°$.



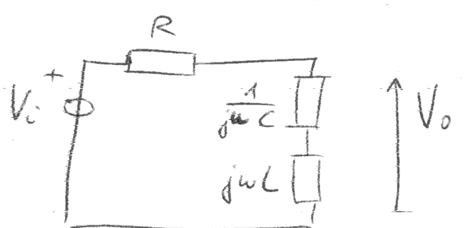
$$@\ \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C}}{R}\right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(\frac{\underbrace{LC - \sqrt{LC}\cdot\sqrt{LC}}_{\to\phi}}{C\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{R}\right) = \phi$$

→ $\boxed{\text{FILTRO ELIMINA BANDA}}$



⇒

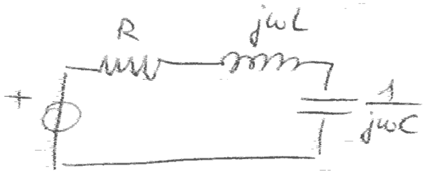


$$V_o = V_i \,\frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = V_i \,\frac{\frac{1+(j\omega C)(j\omega L)}{j\omega C}}{\frac{1+Rj\omega C+(j\omega C)(j\omega L)}{j\omega C}} =$$

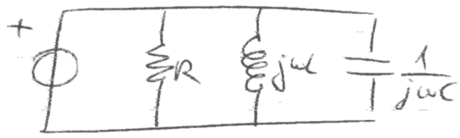
$$= V_i \,\frac{1+(j\omega C)(j\omega L)}{1+Rj\omega C+(j\omega C)(j\omega L)} = V_i \,\frac{1+(j\omega)^2 LC}{1+RCj\omega+(j\omega)^2 LC}$$

LEZIONE 28 (pag. 249 - 266)

CIRCUITI RISONANTI



serie



parallelo

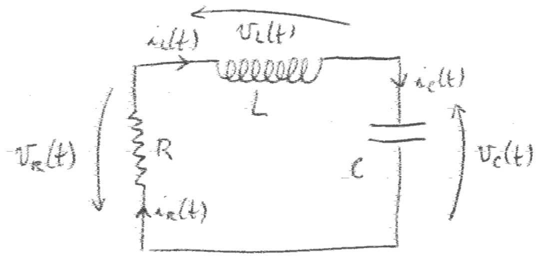
→ RLC in evoluzione libera

→ RLC con ingresso costante

→ RLC con ingresso sinusoidale

RLC IN EVOLUZIONE LIBERA

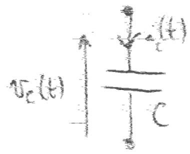
→ SERIE



$i_L(t) = i_C(t) = i_R(t) = i(t)$

• $i_L(t)$ e $v_C(t)$ variabili di stato.

Il circuito quindi è descritto da due equazioni differenziali del 2° ordine.

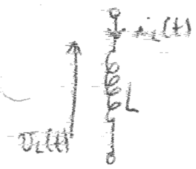


$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}\,i_C(t)}$$

1° equazione di stato

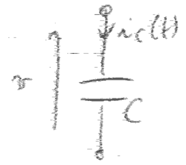
$$\left(\frac{dx_1(t)}{dt} = \underbrace{a_{11}}_{=0}\underbrace{\overset{=0}{X_1}}_{v_C(t)} + a_{12}\underbrace{X_2}_{i_C(t)}\right)$$



$$v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$$

; KVL $v_C + v_L + v_R = 0$

$$v_L = -v_C - \underbrace{v_R}_{(Ri_R = Ri)} = -v_C - Ri$$



$$i_c(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$,

KCL $\quad i_c + i_R + i_L = 0$

$i_c = -i_L - i_R$

$i_c = -i_L - \dfrac{v_R}{R}$

$$i_c = -i_L - \frac{v}{R}$$

$$C\,\frac{dv(t)}{dt} = -i_L - \frac{v}{R} \longrightarrow \boxed{\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{C}i_L - \frac{1}{RC}v}$$ 2° equazione di stato

$$\begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix}$$ le 2 eq. di stato in forma matriciale

$$\left(\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \quad \underline{x} \right)$$

→ Deriviamo la 2° eq. di stato:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} = \emptyset$$

– Adesso sostituisco la $\dfrac{di_L(t)}{dt}$ con la 1° eq. di stato $\left(\dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{1}{L}v(t) \right)$:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} = \emptyset$$

$$\boxed{\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = \emptyset}$$ qst è l'equazione differenziale del 2° ordine del nostro circuito RLC in parallelo.

La equaz. diff. generale è:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

dove:

SERIE	PARALLELO
$x = i$	$x = v$
$\alpha = \dfrac{R}{2L}$	$\alpha = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{G}{2C}$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (per entrambi)

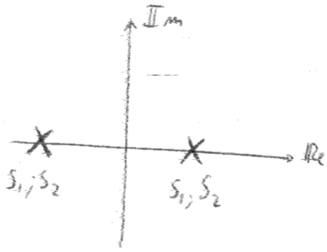
② Due radici reali coincidenti $\boxed{\alpha = \omega_0}$ CIRCUITO CON SMORZAMENTO CRITICO –

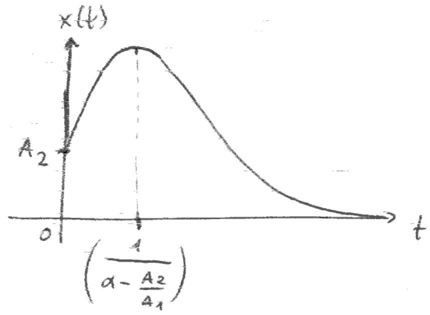
$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t}$$

$S_1 S_2 < \emptyset \rightsquigarrow (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} \to \emptyset$ circuiti STABILI

$$S_1 = S_2 = -\alpha = -\omega_0$$

$S_1 S_2 > \emptyset \rightsquigarrow (A_1 t + A_2) e^{\alpha t} \to \infty$ circuiti INSTABILI



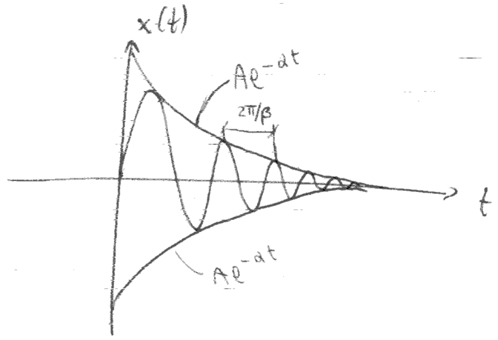


③ Radici complesse coniugate $\boxed{\alpha < \omega_0}$ CIRCUITO SOTTOSMORZATO

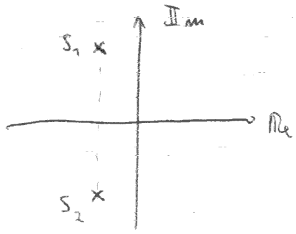
$$x(t) = (A_1 \cos \beta t + A_2 \operatorname{sen} \beta t) e^{-\alpha t}$$

$$S_1 = -\alpha + \beta j \quad ; \quad S_2 = -\alpha - \beta j$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

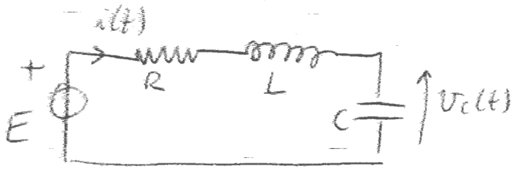


$\mathrm{Re}\{S_1\}, \mathrm{Re}\{S_2\} < \emptyset$ oscillazioni sinusoidali con ampiezza decrescente circuiti STABILI



$\mathrm{Re}\{S_1\}, \mathrm{Re}\{S_2\} > \emptyset$ circuiti INSTABILI

(Qst capita anche se solo una parte reale delle s è positiva).



$$\frac{d^2x(t)}{dt} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = y(t)$$

generatore costante.

Metodologia:

1. Se le condiz. iniziali $i_L(0)$ e $v_C(0)$ non sono note, ricavarle dal circuito a regime in $t=0^-$.

2. Sostituire il C con un c.a. ed ogni L con un c.c. e studiare il circuito resistivo ottenuto ricavando il valore $x(\infty)$ della variabile desiderata.

3. Spegnere i generatori indipendenti; scrivere un' equazione differenziale omogenea determinando α e ω_0. (All che abbiamo fatto con i circuiti in RLC in evoluzione libera)

4. La soluzione cercata è:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + x(\infty) \qquad (\text{per } \alpha > \omega_0)$$

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} + x(\infty) \qquad (\text{per } \alpha = \omega_0)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\alpha t}[A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t]}_{x_0(t)} + \underbrace{x(\infty)}_{x_p = x(\infty)} \qquad (\text{per } \alpha < \omega_0)$$

$x_p = x(\infty) \Rightarrow$ perché generat. costante $\Downarrow$ (se sinusoidal. tramite fasori)

5. Determinare A_1 ed A_2 con le condiz. iniziali trovate al p.to 1.

Nota Bene: Tramite i fasori nelle lezioni precedenti abbiamo calcolato $x_p(t)$ dei circuiti del 2° ordine (cioè la parte permanente). Ora calcoliamo invece l'altra parte, cioè il transitorio che si estingue per $t \to \infty$ (se il circuito è stabile).

RIEPILOGO RISOLUZIONE CIRCUITI DINAMICI

CIRCUITI 1° ORDINE

RC, RL (un solo elemento dinamico)

→ equaz. differenziale $\dfrac{dx(t)}{dt} = -\dfrac{x(t)}{\tau}$

- GENERATORI COSTANTI
- GENERATORI COSTANTI A TRATTI (carica/scarica)

$$\boxed{x(t) = \underbrace{[\overbrace{x(0^+)}^{\text{condiz. iniziale}} - x_\infty]e^{-t/\tau}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{x_\infty}_{\text{permanente}}}$$

Soluzione dell'equazione differenziale del 1° ordine.

Nota: CIRCUITI RC, RL IN FREQUENZA

⇓

FILTRI DEL 1° ORDINE

↙ PASSA ALTO ↘ PASSA BASSO

CIRCUITI 2° ORDINE

RLC (più elementi dinamici)

→ equaz. differenziale $\dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underbrace{\underline{u}(t)}_{\text{ingresso}}$

- GENERATORI COSTANTI

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{\underline{A}t}[x(0^+) - x_\infty]}_{\text{transitorio}} + \underbrace{x_\infty}_{\text{permanente}}}$$

Soluzione equazione differenziale del 2° ordine

transitorio (calcolato tramite il trovare i valori di A_1 e A_2)

($x_p = x_\infty$ per i gen. costanti) permanente

- GENERATORI SINUSOIDALI

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{\underline{A}t}[x(0^+) - x_p]}_{\text{transitorio}} + \underbrace{x_p}_{\text{permanente}}}$$

Soluzione equazione differenziale del 2° ordine

transitorio (come per gli ingressi costanti si trovano A_1 ed A_2 - cambia x_p che si risolve con i fasori)

permanente (risoluzione tramite i fasori) ⟶ $\cancel{x_p = \int_{-\infty}^{t} e^{\underline{A}(t-t')}\,\underline{B}\,\underline{u}(t)\,dt}$

più semplice con i fasori.

Nota: CIRCUITI RLC SERIE/PARALLELO IN FREQUENZA

⇓

FILTRI DEL 2° ORDINE

↙ PASSA BANDA ↘ ELIMINA BANDA

Frequenze naturali:

$$s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

Per $Q > \frac{1}{2}$ SONO COMPLESSE CONIUGATE

Per il calcolo delle curve di risposta pongo

$s = j\omega$

$$Z = \frac{1}{-j\frac{1}{\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R_p}} = \frac{R_p}{1 + j\left(\omega C R_p - \frac{R_p}{\omega L}\right)} =$$

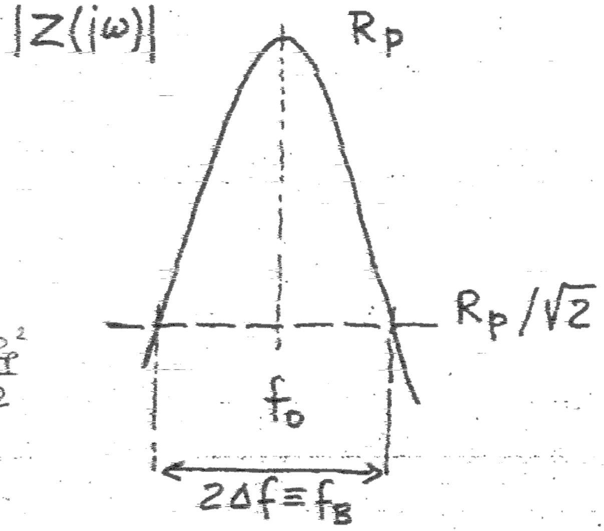
$$= \frac{R_p}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\underbrace{\omega_0 C R_p}_{Q} - \frac{\omega_0}{\omega}\underbrace{\frac{R_p}{\omega_0 L}}_{Q}\right)}$$

In conclusione

$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{R_p}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

(se $\omega = \omega_0 \rightarrow Z(j\omega) = R_p$)

Quanto vale il valore della curva quando passa dal valore massimo R_p al valore $\frac{R_p}{\sqrt{2}}$?



$$R_p = \frac{R_p}{\sqrt{2}} \rightarrow R_p^2 = \frac{R_p^2}{2}$$

$$\frac{R_p^2}{1+Q^2\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2} = \frac{R_p^2}{2} \longrightarrow Q^2\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{2\Delta f} = \frac{f_0}{f_B}}$$

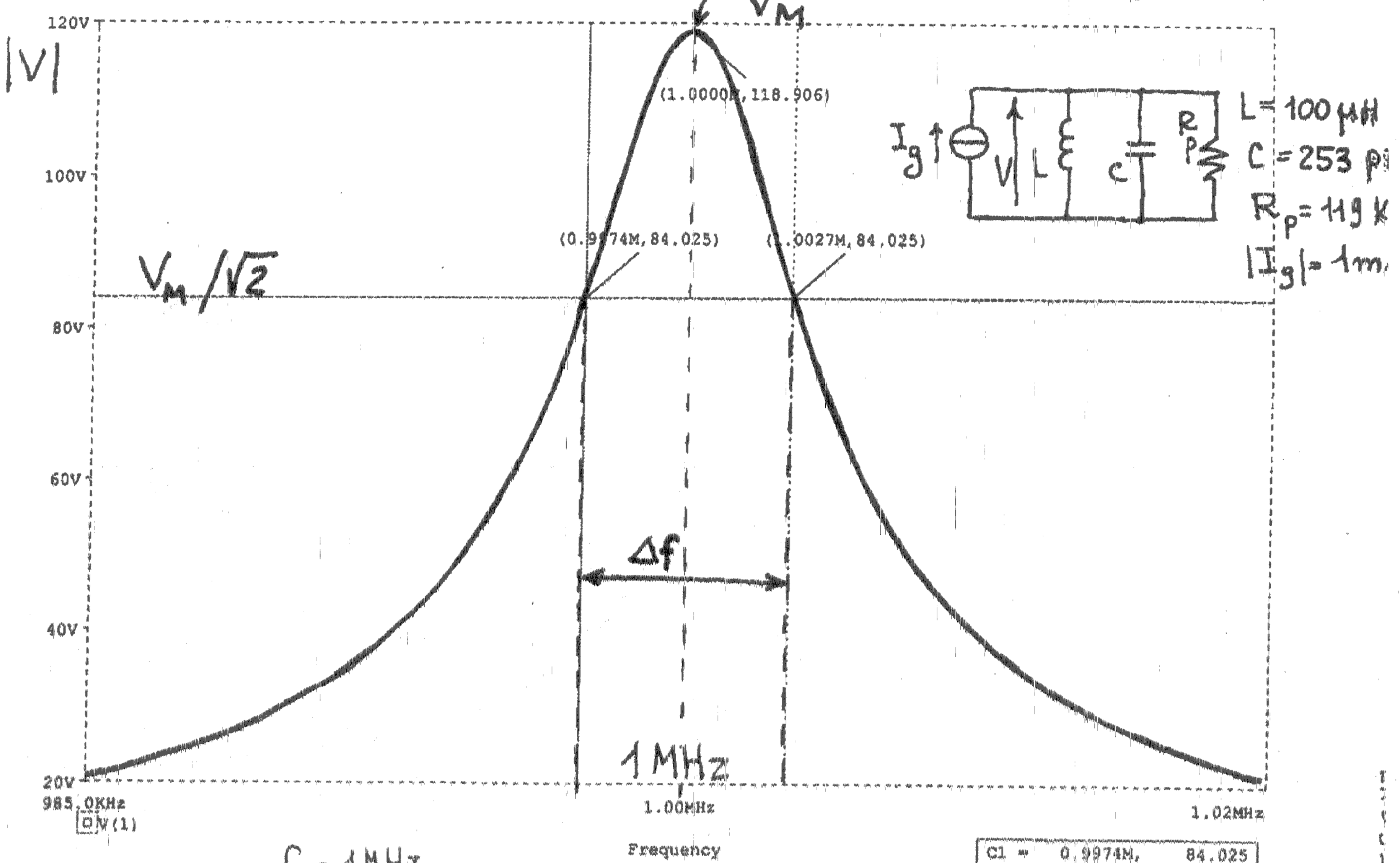
Tanto più è elevato Q tanto più la curva è stretta, e quindi una curva sempre più selettiva.

(immagine pag. successiva)

Risonatore reale parallelo;

Date/Time run: 05/28/96 15:54:08

Temperature: 27.0



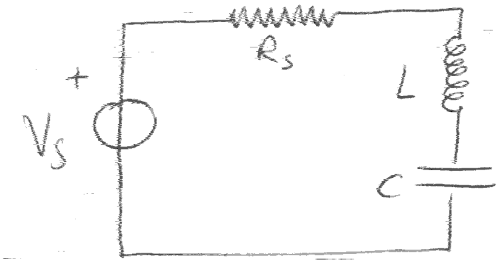
C1 =	0.9974M,	84.025
C2 =	1.0027M,	84.025
dif=	-5.2914K,	0.000

$f_o = 1\,MHz$

$Q = \dfrac{1000}{5.291} \cong 189$

TC MB 97 RIS 9

- RLC SERIE - RISONATORE SERIE (ideale se $R = \emptyset$).



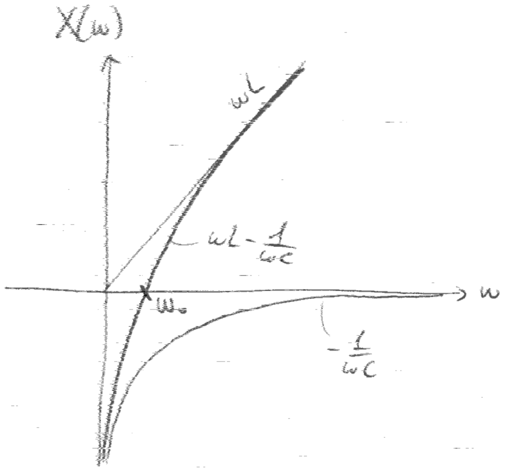
$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q \triangleq \frac{R_S}{\omega_0 L} = \omega_0 C R_S$$

se $\boxed{R_S = \emptyset}$ il risonatore serie sarà ideale

$$Z = R_S + jX = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R_S = R_S + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$X = \mathrm{Im}[Z] = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \left(\omega L = \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z = R_S + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_S(j\omega C) + (j\omega C)(j\omega L) + 1}{j\omega C}$$

$$Y = \frac{j\omega C}{R_S j\omega C + j^2\omega^2 CL + 1} \underset{(s=j\omega)}{\uparrow}= \frac{sC}{R_S C s + s^2 CL + 1} = \frac{s\cancel{C}}{L\cancel{C}\left[s\frac{R_S}{L} + s^2 + \frac{1}{LC}\right]} =$$

$$= \frac{1}{L}\,\frac{s}{s^2 + s\frac{R_S}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{L}\,\frac{s}{[s^2 + (\omega_0 Q)s + \omega_0^2]}$$

Freq. naturali:

$$s^2 + s(\omega_0 Q) + \omega_0^2 = 0 \implies s = \frac{-(\omega_0 Q) \pm \sqrt{(\omega_0 Q)^2 - 4(1)(\omega_0)^2}}{2} =$$

$$\frac{1}{R_S^2} = \frac{1}{\sqrt{2} R_S^2} \Rightarrow \frac{1}{R_S^4} = \frac{1}{2R_S^4}$$

$$\frac{\cancel{R_S^4} \frac{1}{R_S^4}}{1 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2} = \frac{1}{2\cancel{R_S^4}} \cancel{R_S^4} \longrightarrow \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{Q^2}\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2}_{=1}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{Q^2}\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2 = 1 \longrightarrow \frac{1}{Q} = \frac{f_0}{2\Delta f} \Rightarrow Q = \frac{2\Delta f}{f_0}$$

~~Alla risonanza $\omega = \omega_0$~~

$$Y(j\omega_0) = \frac{1}{R_S} \; ; \; Z(j\omega_0) = R_S$$

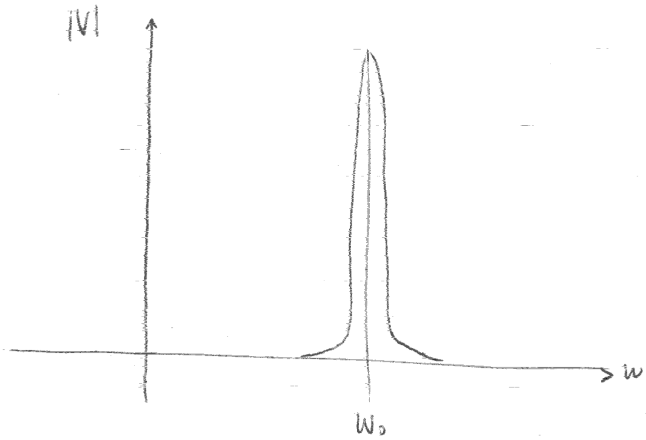
$$I = \frac{V_S}{R_S}$$

$$V_C = -j \frac{1}{\omega_0 C} I = -j \underbrace{\frac{1}{\omega_0 C R_S}}_{Q} V_S = -j \frac{V_S}{Q}$$

$$V_L = j\omega_0 L I = j \underbrace{\frac{\omega_0 L}{R_S}}_{\frac{1}{Q}} V_S = j \frac{V_S}{Q}$$

$$\boxed{|V_C| = |V_L| = \frac{|V_S|}{Q}}$$

$\rightsquigarrow$ Quindi nel caso ideale se $R = \emptyset \Rightarrow Q = \emptyset$
$\Rightarrow \underline{V \to \infty}$.



→ Si riesce a selezionare una determinata stazione perché è eccitato dalla risonanza. Più la curva sarà stretta (e quindi selettiva) e più le altre stazioni con altre w non interferiscono.

es: Quando spostiamo la levetta della radio cambiamo freq. (w) mettendo la freq. di risonanza e quindi aumentando V.

Uso delle trasformate.

→ L'uso della trasformata integrale semplifica i problemi che coinvolgono la funzione $F(t)$: si procede nel seguente modo:

→ trasformazione (dal $t \to s$).

→ risoluzione del problema trasformato

→ anti-trasformazione. (da $s \to t$).

→ La funzione $K(s,t)$ è il Kernel della trasformazione.

$$K(s,t) = \begin{cases} \phi & \text{per } t<\phi \\ e^{-st} & \text{per } t \geq \phi \end{cases} \qquad K(s,t) = e^{-j2\pi st}$$

TdL [unilatera] $\qquad$ TdF $\quad t \in (-\infty, \infty)$

$(s = \sigma + j\omega)$.

Queste due sono le trasformate di maggior interesse.

→ Si definisce TdL di $f(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt} \qquad (\text{dove } s = \sigma + j\omega)$$

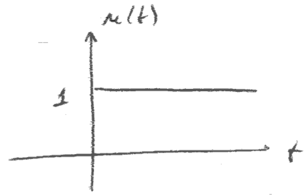
$[s] = sec^{-1}$ freq. complessa.

interessa solo la parte maggiore di zero $\quad f(t),\ \forall t>0$

→ Gradino unitario

$u(t) = 1 \quad$ per $t > \phi$

$u(t) = \phi \quad$ per $t < \phi$



$$\mathcal{L}[u(t)] = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{s}(1-e^{-sT}) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{s}\right)(1-e^{-\sigma T} e^{-j\omega T})$$

PROPRIETÀ TdL

→ Moltiplicazione per una costante

$$\mathcal{L}[k f(t)] = \int_0^\infty k f(t) e^{-st} dt = k \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = K \cdot F(s)$$

→ Addizione (linearità)

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

infatti l'integrale è un operatore lineare.

esempio

TdL di $\cos(\omega t)$

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, $a \in \mathbb{C}$, $a = j\omega$ $\qquad$ $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, $a \in \mathbb{C}$, $a = -j\omega$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

→ Derivazione rispetto al tempo (proprietà fondamentale per la soluzione dei circuiti in freq. del 2° ordine)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s \cdot F(s) - \underbrace{f(0)}_{\text{condizione iniziale}}$$

↓

per calcolare il transitorio. (Per la parte permanente abbiamo utile usato i fasori)

→ Derivazione rispetto ad s

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

LEZIONE 31 (pag. 525-535)

Teorema del valore iniziale

$$f(0^+) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$$

Se mi interessa il valore iniziale della funzione posso utilizzare qst formula.

Teorema del valore finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)$$

esempio:

$$\mathcal{L}[e^{-\frac{t}{2}} \cosh t] = \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{\frac{t}{2}}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-\frac{3}{2}t}] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2s-1} + \frac{1}{2s+3} = \frac{2s-1+2s+3}{(2s-1)(2s+3)} = \frac{4s-2}{4s^2+6s-2s-3} =$$

$$= \frac{4s-2}{4s^2+4s-3}.$$

LEZIONE 32 (pag. 535 - 543)

Antitrasformata di Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad \text{se} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Un qualunque circuito ha la sua F(s) razionale fratta. Per antitrasformarla devo sapere come scomporla in fratti semplici.

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0}$$

Per i circuiti a parametri concentrati i coeff. b_m ed a_n sono reali. Da cui segue che se $(s = \sigma + j\omega)$ $\omega = \phi \Rightarrow F(s)$ è reale.

Se F(s) è reale lo sarà anche s e viceversa.

→ Nota Se io considero il complesso coniugato:

$$s = \sigma + j\omega \quad , \quad s^* = \sigma - j\omega$$

$$\Downarrow \qquad \text{ottengo} \qquad \Downarrow$$

$$F(s) \qquad\qquad [F(s)]^*$$

$$\underline{F(s^*) = [F(s)]^*}$$

→ Nota se $n > m$ F(s) PROPRIA

se $n \leq m$ F(s) IMPROPRIA

→ In generale il coeff. della variabile s a potenza più elevata può essere anche ≠ da 1. Quando qst avviene si può sempre tornare alla forma di F(s) con coeff. = 1, scalando.

Se $a_n = 1$ → il polinomio del denominatore è detto MONICO.

Qst conviene farlo.

$$F(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{3s+7}{\cancel{(s+1)}(s-3)}\cancel{(s+1)} = \frac{3(-1)+7}{s+1} = \frac{+4}{-4} = \underline{\underline{-1}} = A$$

$$F(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{3s+7}{(s+1)\cancel{(s-3)}}\cancel{(s-3)} = \frac{3(3)+7}{3+1} = \frac{16}{4} = \underline{\underline{4}} = B$$

→ A e B vengono detti residui nei poli 1 e −3 rispettivamente

F(s) sarà uguale a: $\boxed{F(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}}$;

da cui: $\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = -e^{-t} + 4e^{+3t}}$

→ POLI MULTIPLI (capitano di rado).

$$F(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{(s-p_2)^2} + \dots \frac{A_m}{(s-p_m)^m}$$

Esempio:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$ → radice doppia in $s=-1$

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2}$$

$$F(s)(s+1)^2\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{\cancel{(s+1)^2}}\cancel{(s+1)^2} = -1+3 = 2 = A_2$$

$$\frac{d}{ds}\left[F(s)(s+1)^2\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{\cancel{(s+1)^2}}\cancel{(s+1)^2}\right] = +1 = A_1$$

(la derivata è prima perché la radice è doppia $m=2$).
(grado derivata = $m-1$.

ESEMPI $\boxed{\text{SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI}}$

→ RADICI REALI ($\mathbb{R}$)

$$F(s) = \frac{2s^2+10s+6}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \lim_{s\to 0} sF(s) = \cancel{s}\frac{2s^2+10s+6}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$B = \lim_{s\to -1} (s+1)F(s) = \cancel{(s+1)}\frac{2s^2+10s+6}{s\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{2-10+6}{-1(1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$C = \lim_{s\to -2} (s+2)F(s) = \cancel{(s+2)}\frac{2s^2+10s+6}{s(s+1)\cancel{(s+2)}} = \frac{8+6-20}{-2(-1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\boxed{F(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{f(t) = 3 + 2e^{-t} - 3e^{-2t}}$$

→ RADICI COMPLESSE ($\mathbb{C}$)

$$F(s) = \frac{s^2+s-2}{s(s^2+6s+13)} = \frac{s^2+s-2}{s(s+3-j2)(s+3+j2)}$$

$$s^2+6s+13=0 \begin{cases} (s+3-j2) \\ (s+3+j2) \end{cases}$$

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4(1)(13)}}{2} = \frac{-6}{2} \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = -3 \pm j\frac{4}{2} = -3 \pm j2 \begin{cases} -3+j2 \\ -3-j2 \end{cases}$$

→ RADICI MULTIPLE

$$F(s) = \frac{4s+2}{s^2(s+4)^2} = \frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_{1,2}}{s^2} + \frac{B_{1,1}}{s+4} + \frac{B_{1,2}}{(s+4)^2}$$

$$A_{1,1} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left[s^2 F(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[\cancel{s^2}\frac{4s+2}{\cancel{s^2}(s+4)^2}\right] = \frac{d}{ds}\left[\frac{4s+2}{(s+4)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{4(s+4)^2-(4s+2)\cdot 2(s+4)}{(s+4)^4} = \lim_{s\to 0} \frac{4(s^2+8s+16)-(8s+4)(s+4)}{(s+4)^4} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{4s^2+\cancel{32s}+64-8s^2-\cancel{32s}-4s-16}{(s+4)^2} = \lim_{s\to 0} \frac{-4s^2-4s+48}{(s+4)^4} \cong \frac{48}{256} = 0,1875$$

$$A_{1,2} = \lim_{s\to 0} s^2 F(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2}\frac{4s+2}{\cancel{s^2}(s+4)^2} \cong \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{16}\,8} = 0,125$$

$$B_{1,1} = \lim_{s\to -4} \frac{d}{ds}\left[(s+4)^2 F(s)\right] = \lim_{s\to -4} \frac{d}{ds}\left[\cancel{(s+4)^2}\frac{4s+2}{s^2\cancel{(s+4)^2}}\right] = \lim_{s\to -4} \frac{d}{ds}\left[\frac{4s+2}{s^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to -4}\left[\frac{4s^2-(4s+2)2s}{s^4}\right] = \lim_{s\to -4}\left[\frac{4s^2-8s^2-4s}{s^4}\right] = \lim_{s\to -4} \frac{-4s^2-4s}{s^4} =$$

$$= \frac{-4(16)-4(-4)}{256} = \frac{-48}{256} = -0,1875$$

$$B_{1,2} = \lim_{s\to -4} (s+4)^2 F(s) = \lim_{s\to -4} \cancel{(s+4)^2}\frac{4s+2}{s^2\cancel{(s+4)^2}} = \frac{-16+2}{16} = \frac{-14}{16} = -0,875$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{0,1875}{s} + \frac{0,125}{s^2} + \frac{-0,1875}{s+4} + \frac{-0,875}{(s+4)^2}$$

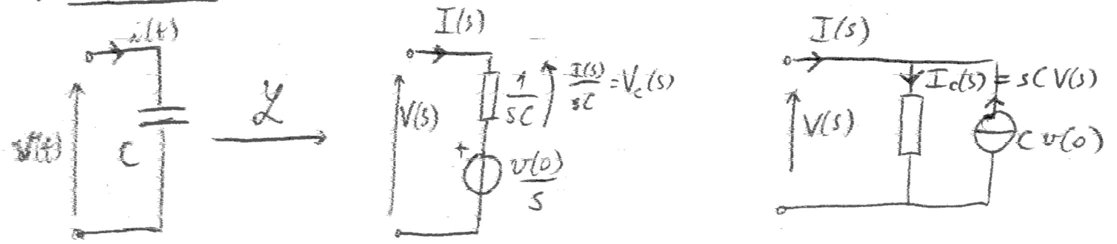
$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{f(t) = 0,1875 + 0,125t - 0,1875e^{-4t} - 0,875te^{-4t}}$$

Proprietà della ATdL

Linearità	$\mathcal{L}^{-1}\left[aX_1(s)+bX_2(s)\right](t) = ax_1(t)+bx_2(t)$
Riscalamento	$\mathcal{L}^{-1}\left[X(as)\right](t) = \frac{1}{a}x(t/a)$
Traslazione	$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}X(s)\right](t) = x(t-a)U(t-a)$
Modulazione	$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s-a)\right](t) = e^{at}x(t)$
Antitrasformata della derivata	$\mathcal{L}^{-1}\left[X'(s)\right](t) = -tx(t)$
Antitrasformata dell'integrale	$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty X(S)\,dS\right](t) = \frac{x(t)}{t}$
Moltiplicazione per s	$\mathcal{L}^{-1}\left[sX(s)-x(0^+)\right](t) = x'(t)$
Divisione per s	$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{s}\right](t) = \int_0^t x(r)\,dr$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 243 di 376

→ CONDENSATORE



N.B. verso generat. corrente coincide con quello della tensione

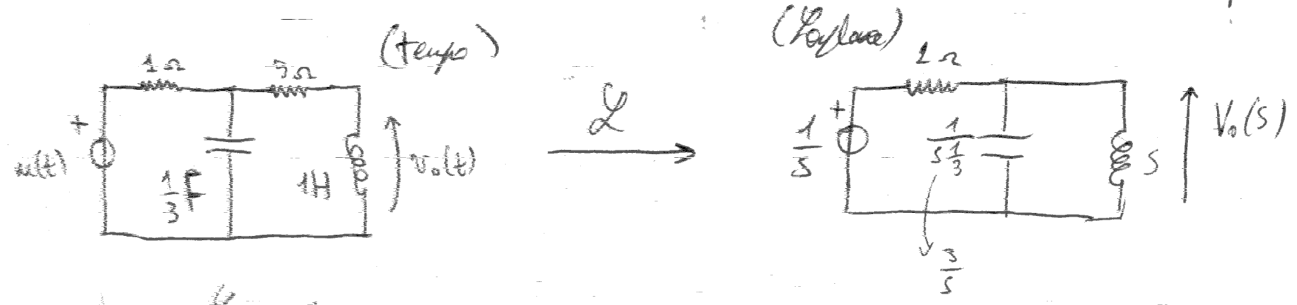
$$\mathcal{L}[i(t)] = \mathcal{L}\left[C\frac{dv(t)}{dt}\right] = C\,\mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = \boxed{C\left[sV(s) - v(0)\right] = I(s)}$$

se $v(0) = 0$ $\quad \boxed{\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}} \longrightarrow \boxed{\frac{I(s)}{V(s)} = sC}$

impedenza condens. — ammettenza condens.

$$\boxed{\begin{aligned} I(s) &= \overset{I_c(s)}{\overbrace{sCV(s)}} - Cv(0) \rightarrow \text{PARALLELO} \\ V(s) &= \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0)}{s} \rightarrow \text{SERIE} \end{aligned}}$$

Esempio (condizioni iniziali nulle) ⇒ (quindi non ci sono i generatori associati ai circuiti equiv. visti prima).



$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$
$$\frac{1}{3}F \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s\frac{1}{3}} = \frac{3}{s}$$
$$1H \xrightarrow{\mathcal{L}} = sL = s$$

Valgono tutti i concetti di serie e parallelo visti all'inizio.

Con doppio P.T. determino $V_0(s)$

$$V_0(s) = \left[\frac{3}{s} \parallel (5+s)\right] / \left[\frac{3}{s}\parallel(5+s) + 1\right] \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3+5} = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} =$$

$$= \frac{3}{s^2 + 8s + (4)^2 + 2} = \frac{3}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2} \Rightarrow \boxed{v_0(t) = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-4t}\sin\sqrt{2}t, \ V \quad (t \geq 0)} \quad \boxed{\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)}$$

Frequenze naturali

I poli che non dipendono dalle condiz. iniziali prendono il nome di freq. naturali (possono essere esponenziali oppure esponenziali moltiplicati per una sinusoide).

$$(s_k = \sigma_k + j\omega_k \in \mathbb{C})$$

$$\underbrace{X(s) = \sum_k \frac{A_k}{s-s_k}}_{\text{risposta libera}} \xrightarrow{(\mathcal{L}^{-1})} \underbrace{A_k e^{s_k t}, \quad A_k e^{\sigma_k t}\cos(\omega_k t + \theta_k)}_{\text{modi naturali}}$$

Per ottenere un solo modo naturale al denominatore posso modificare il numeratore per semplificare il denominatore.

→ Esempio perfetti 15.2

come calcolare le frequenze naturali:
1) spegnere generat. indip.
2) Trasformare il circuito nel dominio di Laplace in s (condiz. iniz. nulle).
3) Analisi modale
4) ricavare gli zeri del determinante $\Delta(s)$ del sistema di equaz. trovato con l'analisi modale al pto 3).

Condizioni di stabilità

- Un circuito è stabile se tutte le sue freq. naturali hanno parte reale negativa. (e molteplicità pari a 1)
- Dal pto di vista fisico un circuito è stabile se le tensioni e le correnti non "esplodono" per $t \to \infty$.
- Quindi la risposta libera tende a zero per $t \to \infty$ con qualunque condizioni iniziali

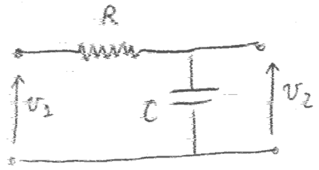
→ In un sistema stabile qualunque risposta libera tende a zero per $t \to \infty$, considererò quindi solo la parte forzata.

$$V_{in}(t) = V\cos(\omega t + \theta)$$

$$X(s) = F(s)V_{in}(s) = F(s)\frac{1}{2}V\left(\frac{e^{j\theta}}{s-j\omega} + \frac{e^{-j\theta}}{s+j\omega}\right) = \sum_k \frac{A_k}{s-p_k} + \frac{B}{s-j\omega} + \frac{B^*}{s+j\omega}$$

$$x(t) = \underbrace{\sum_k A_k e^{p_k t}}_{\substack{\text{risposta libera} \\ \text{che tende ad} \\ \text{estinguersi} \\ \text{(se il circuito è stabile)}}} + \underbrace{2|B|\cos(\omega t + \arg B)}_{\substack{\text{risposta forzata} \\ \text{sinusoidale} \\ \parallel \\ x_p(t)}}$$

Esempio:

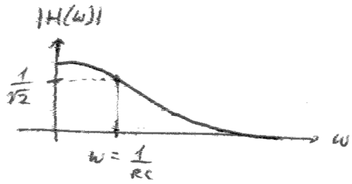


$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{1}{1 + sRC}$$

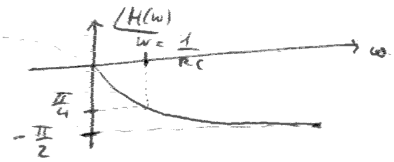
Per vedere come varia la funz. di rete se avessimo un generatore sinusoidale (dominio fasori) basta sostituire $s = j\omega$

$$H(j\omega) = H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$



$$\angle H(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega RC}{1}\right)$$



Al variare di ω cambia il modulo del rapporto tra tensione ingresso e tensione uscita. Stessa cosa per la fase.

Il grafico ci mostra qst cambiamenti.

Conviene riportare qst 2 grafici in scale logaritmiche $\rightarrow$ diagrammi di Bode.

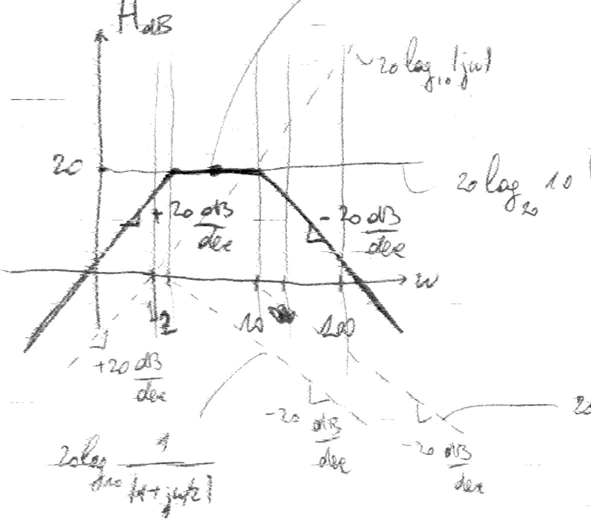
Esempio:

$$H(s)=\frac{200\,s}{(s+2)(s+10)} = \frac{\cancel{200}^{10}\,s}{\cancel{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)\cancel{10}\left(\frac{s}{10}+1\right)} = 10\,\frac{s}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)} = H(s)$$

$20\log_{10}(10) = 20$ dB

$$\log\frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$(\log x)\log(y) = \log x + \log y$$



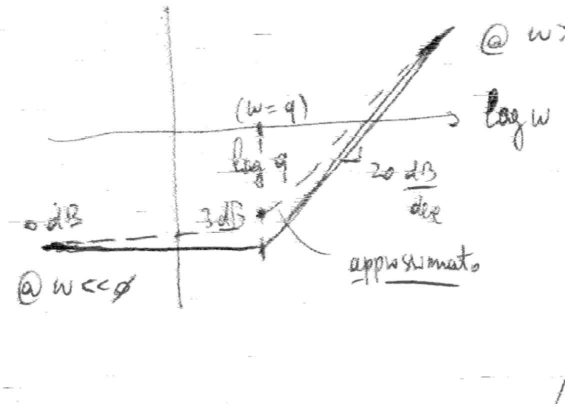
$\omega = 5$

$$H(\omega) = \frac{1000j}{(2+5j)(5j+10)} = \frac{1000}{\sqrt{29}\,\sqrt{125}}$$

$|H(\omega)|$

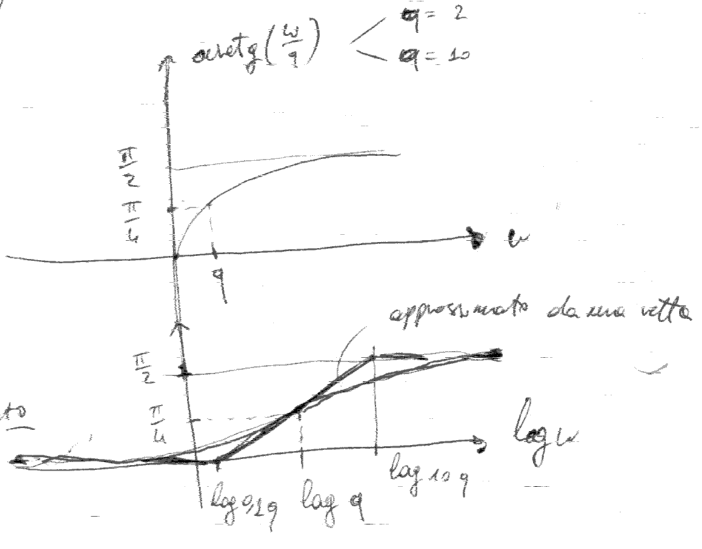
$$H(\omega)_{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)|$$

Grafico di $\pm 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{q}\right|$ costante



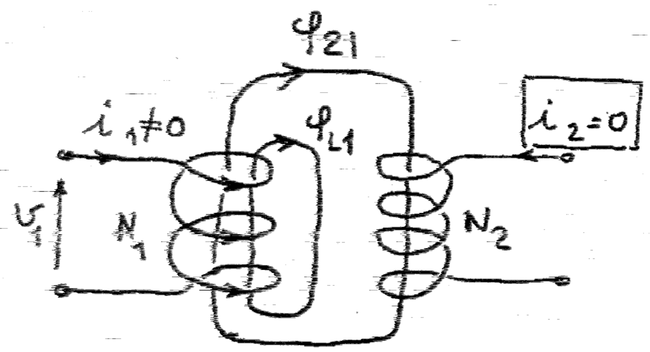
Fase

$$\angle H(s) = 90° - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \tan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$



INDUTTORI ACCOPPIATI

TC 94/04



$\varphi_{11} = \varphi_{21} + \varphi_{L1}$: flusso totale (per spira) creato dal primario

Risulta:

$$\varphi_{11} = k_{11} N_1 i_1$$

$$N_1 \varphi_{11} = k_{11} N_1^2 i_1 = L_1 i_1$$

INDUTTANZA PRIMARIA

Il flusso creato dal primario e concatenato con il secondario vale

$$\varphi_{21} = k_{21} N_1 i_1$$

$$N_2 \varphi_{21} = k_{21} N_1 N_2 i_1 = M_{21} i_1$$

M_{21} ha le dimensioni di induttanza e viene chiamata INDUTTANZA MUTUA ovvero COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE

k_{12} e k_{21} dipendono dal mezzo e dalla geometria del campo. Nel caso di mezzi lineari, omogenei ed isotropi, è allora

$$k_{12} = k_{21}$$

e di conseguenza:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

In definitiva, le equazioni del dispositivo sono:

$$\begin{cases} \varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \varphi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

ovvero, ricordando che $v = d\varphi/dt$:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

Matrice delle induttanze

$\underline{L}$

Se $\underline{L}$ è INVERTIBILE, allora si può anche scrivere:

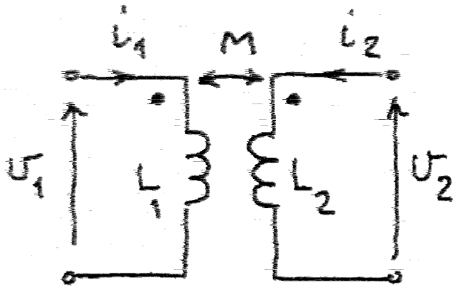
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_M \\ \Gamma_M & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Matrice delle induttanze reciproche

con:

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{\det \underline{L}} \; ; \quad \Gamma_2 = \frac{L_1}{\det \underline{L}} \; , \quad \Gamma_M = \frac{-M}{\det \underline{L}}$$

Il simbolo usato è il seguente:

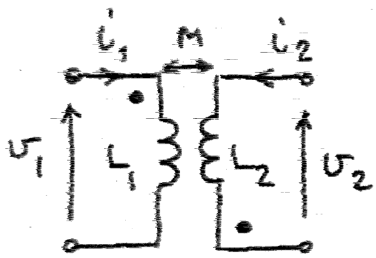


Il dispositivo viene anche chiamato

TRASFORMATORE PURAMENTE INDUTTIVO

Nel caso indicato M è positivo.

Nel caso seguente:



M è negativo.

TC 94-10