NUMERO: 1248

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arcangeli

MATERIA: Geometria + Eserc.

Prof. Ferrarotti_Cordovez

Corso di

GEOMETRIA

Prof. Massimo Ferrarotti
Anno Accademico 2013-2014

Studente: Marco Arcangeli

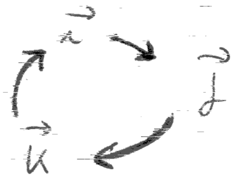
$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

per ricordare

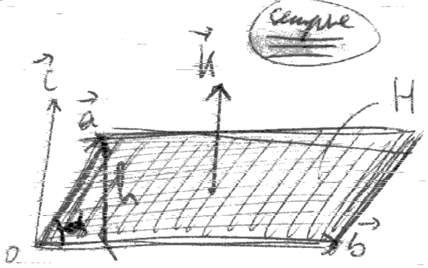


versori

Il risultato del prodotto vettoriale (come già detto) è un vettore ed è sempre $\perp$ ai due vettori del prodotto stesso:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{k} \rightsquigarrow \vec{k} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

sempre



$$h = |\vec{a}| \operatorname{sen}\alpha$$

$$\text{Area}(H) = |\vec{b}| \underbrace{|\vec{a}| \operatorname{sen}\alpha}_{h} = |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

Il modulo (o la norma) del prodotto vettoriale (o esterno) è l'area

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \text{Area}$$

Nota: Il prodotto misto è il volume

$$\text{Volume} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

prodotto scalare — prodotto vettoriale (o esterno)

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = [(a_y b_z) - (a_z b_y)]\vec{i} - [(a_x b_z) - (a_z b_x)]\vec{j} + [(a_x b_y)(a_y b_x)]\vec{k}$$

$$\text{Area} = |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

(è l'altezza del parallelepipedo venutosi a creare per il vettore $\vec{c}$)

$$\text{Volume} = \text{Area} \cdot h = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = |\vec{a} \wedge b| |\vec{c}| \operatorname{sen}\alpha$$

$(h = |\vec{c}| \operatorname{sen}\alpha)$

Se il prodotto misto $= 0$ i vettori sono complanari

FORMA PAR. → FORMA CART.

$r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$

$P = (x_0, y_0)$ p.to $\in$ retta(r)

(α, β) = vettore direzione della retta r $(\vec{d_r})$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ $\boxed{\begin{matrix} \alpha = b \\ \beta = -a \end{matrix}}$

$\boxed{ax + by + c = 0}$ equazione cartesiana retta r

dove $c = -ax_0 - by_0$

→ esempio:

$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -2t + 1 \end{cases}$

$\alpha = 1 \rightarrow \alpha = b = 1$

$\beta = -2 \rightarrow \beta = -a = -2 \Rightarrow a = 2$

$P(x_0, y_0) = (3, 1)$

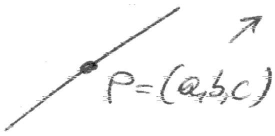
$\Rightarrow ax + by + c = 0 \Rightarrow 2x + y + c = 0$

dove $c = -ax_0 - by_0 = (-2) \cdot 3 - (1)(1) = -7$

$\Rightarrow$ $\boxed{2x + y - 7 = 0}$ equazione cartesiana retta r

RETTE NEL PIANO (x y)

→ Per identificare una retta mi basta un p.to della retta stessa e la sua direzione (visibile dal parametro t)

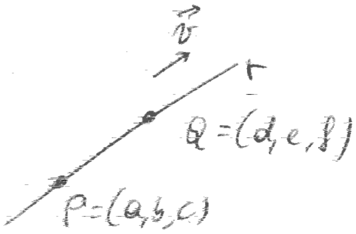


$$\vec{v} = m\vec{i} + l\vec{j} + n\vec{k} \qquad \vec{v} = (m, l, n)$$

$$\begin{cases} x = a + mt \\ y = b + lt \\ z = c + nt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Se le due rette hanno la stessa direzione $\vec{v}$ allora sono $\parallel$.
Se i p.ti sono multipli di loro stessi le rette sono coincidenti.

→ Per trovare la direzione della retta per 2 p.ti sottraggo i p.ti stessi. (L'ordine della sottrazione è indifferente)



$$\vec{v} = Q - P = \big((d-a); (e-b); (f-c)\big)$$

$$r: \begin{cases} x = a + (d-a)t \\ y = b + (e-b)t \\ z = c + (f-c)t \end{cases}$$

equazioni parametriche che descrivono la retta r.

↓ i p.ti del p.to P.

Nota: Se avessi fatto P − Q avrei messo i p.ti del p.to Q prima.

→ Verificare se tre p.ti sono allineati

$$\boxed{(P_2 - P_0) \parallel (P_1 - P_0)}$$

$(P_2 - P_0)$ e $(P_1 - P_0)$ ci danno le direzioni delle due rette (vedi sopra). Se le direzioni sono uguali o multiple l'una dell'altra i tre p.ti sono allineati. Cioè devono essere C.L. Se sono L.I. i tre p.ti non sono allineati.

parametrizzo r:

$$r: \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \xrightarrow{z=t} \begin{cases} 2x=-y-t+1 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2t+1+\frac{1}{2}y+\frac{t}{2}-\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2}y-\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ z=t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}t$$

$$y = 1+5t$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}(1+5t)-\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ y=1+5t \\ z=t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = \cancel{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}t - \frac{t}{2} \cancel{+\frac{1}{2}} \\ \checkmark \\ \checkmark \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=1+5t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{d_r} = (-3,5,1)$$

parametrizzo t_h

$$\begin{cases} x=1-3t \\ y=1+2t-h+3ht \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-3t \\ y=1-h+t(2+3h) \\ z=t \end{cases} \qquad \vec{d}_{t_h} = (-3,\, 2+3h,\, 1)$$

$\Rightarrow$ se $h=1$

$$\vec{d_r} = (-3,5,1) \; ; \quad \vec{d}_{t_h}(-3,5,1) \Rightarrow \underline{\vec{d_r} \parallel \vec{d}_{t_h}}$$

$\Rightarrow$ se $h \neq 1$, $h=2$

$$\vec{d_r} = (-3,5,1) \; ; \quad \vec{d}_{t_h}(-3,8,1)$$

$\forall h \neq 1 \Rightarrow \vec{d_r}$ e $\vec{d}_{t_h}$ <u>sghembe</u>.

Abbiamo 3 casi:

- S_K **SFERA** centro $(-1,2,3)$ e $R=\sqrt{14-K}$ $\iff$ $K<14$ $\leadsto$ **$R>0$**
- S_K **PTO** $(-1,2,3)$ $\iff$ $K=14$ $\leadsto$ $R=0$
- S_K **VUOTO** $\iff$ $K>14$ $\leadsto$ **R immaginario**

→ **INTERSEZIONE TRA SFERE E PIANI** $(S \cap \pi)$

$S \cap \pi$:
- $\emptyset$ (π esterno ad S)
- 1 PTO (π tg ad S)
- CIRCONFERENZA (π taglia S)

$S: S(P_0,R)$; π piano generico $\pi: ax+by+cz+d=0$; $d=d(P_0,\pi)$ distanza dal centro della sfera al piano.

1) $d>R \Rightarrow \pi$ esterno ad $S \Rightarrow \emptyset$ VUOTO

2) $d=R \Rightarrow \pi \cap S$ 1 PTO $\Rightarrow$ π tg ad S

3) $d<R \Rightarrow S \cap \pi$ CIRCONFERENZA di raggio $\sqrt{R^2-d^2}$ in π e il centro è la proiezione di P_0 in π. Cioè equivale a trovare una retta $\perp \pi$ passante per P_0.

ESEMPIO:

$$S: x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+3=0$$

$$x^2-2x+y^2+4y+z^2-6z+3=0$$

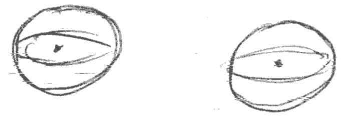
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2+3-1-4-9=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12 \qquad \text{centro } S\,(1,-2,3)$$

$P(2,-1,0) \in S \Rightarrow 4+1-4-4+3=0 \rightarrow$ OK

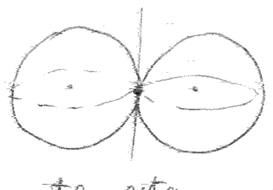
Siano $S_1 = S(P_1 R_1)$; $S_2 = S(P_2 R_2)$ $d = d(P_1, P_2)$ con $R_1 \geq R_2$

1) $d > R_1 + R_2$ o $d < R_1 - R_2$ S_1, S_2 DISGIUNTE



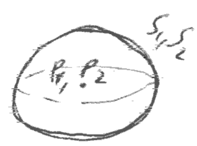
$S_1 \cap S_2$ <u>VUOTO</u> ϕ

2) $d = R_1 + R_2$ o $d = R_1 - R_2$ S_1, S_2 tg esternamente od internamente.



tg esternamente

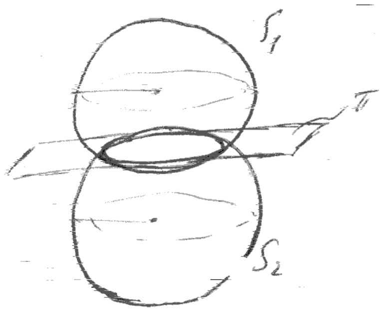
$S_1 \cap S_2 \to$ <u>1 PTO</u>



tg internamente

$S_1 \subseteq S_2$

3) $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2$ è una <u>CIRCONFERENZA</u>



<u>ESEMPIO</u>:

$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = \phi$

$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = \phi$

$S_1 :$ $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z - 2 = \phi$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 2 - 1 - 4 - 9 = \phi$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ $C_1(1, -2, 3)$

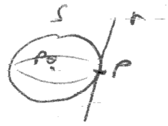
$R_1 = \sqrt{16} = 4$

→ **INTERSEZIONE TRA SFERE E RETTE** ($S \cap r$)

$S = S(P_0, R)$ $\quad$ r retta generica $\quad$ $d(P_0, r)$ distanza dal centro della sfera alla retta.

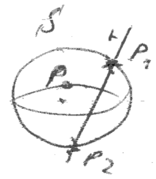
1) $d(P_0,r) > R$ $\quad S \cap r$ <u>vuoto</u> $\emptyset$

2) $d(P_0,r) = R$ $\quad S \cap r \Rightarrow$ <u>1 P.TO</u> $\quad r$ tg ad S in P.



3) $d(P_0,r) < R$ $\quad S \cap r \rightarrow$ <u>2 P.TI</u>

r secante la sfera S.



<u>OSS</u> Per determinare i pti nel caso (2) - P e nel caso (3) - P_1, P_2 conviene parametrizzare la retta e poi sostituire x, y, z alla equazione della sfera S.

<u>ESEMPIO</u>: S: $x^2+y^2+z^2+2x-2z-1=0$

r: $t(1,1,1)+(-1,0,1)$

$$r: \begin{cases} x = t-1 \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases}$$

S: $x^2+2x+y^2+z^2-2z-1=0$

$(x+1)^2+y^2+(z-1)^2-1-1-1=0$

centro $C(-1,0,1)$

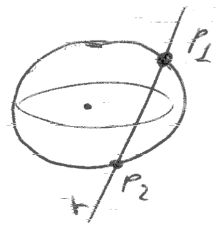
$R=\sqrt{3}$

$S \cap r$: $(t-1)^2+2(t-1)+t^2+(t+1)^2-2(t+1)-1=0$

$t^2 \cancel{-2t} \cancel{+1} \cancel{+2t} \cancel{-2} + t^2 + t^2 \cancel{+2t} \cancel{+1} \cancel{-2t} -2 -1 = 0$

$3t^2-3=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow \underline{\underline{t=\pm 1}}$

$$t=1 \quad r: \begin{cases} x = 1-1 \\ y = 1 \\ z = 1+1 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad P_1(0,1,2)$$



$$t=-1 \quad r: \begin{cases} x = -1-1 \\ y = -1 \\ z = -1+1 \end{cases} = \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad P_2(-2,-1,0)$$

ESEMPIO:

$S: x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$ $\qquad S(P_0, R)$

$\pi: 2x-2y+z+1=0$

$x^2+2x+y^2-2y+z^2-2=0$

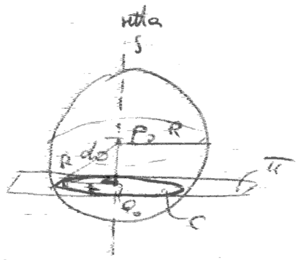
$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2-2-1-1=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2-4=0 \Rightarrow C_{\text{centro } S}=P_0(-1,1,0)$; $R=\sqrt{4}=2$

$d_0 = d(P_0,\pi) = \dfrac{-2-2+0+1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{3}{3} = 1 < R = 2$ (sost. il centro nel piano)

$\underline{d_0 < R}$ distanza del centro alla sfera è < del raggio della sfera

OSS: $P_0 \notin \pi$: $-2-2+0+1=0 \Rightarrow$ IMPOSS. La circonf. non è un CERCHIO MAX.



$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0 \\ 2x-2y+z+1=0 \end{cases}$

possiamo calcolare r secondo il th. di Pitagora (come si vede dal disegno):

$r = \sqrt{R^2-d_0^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ raggio circonf. ed è ovviamente $r < R$

$\underline{\sqrt{3} < 2}$

→ calcoliamo la retta $s \perp \pi$ e passante per il ~~centro~~ centro di S, P_0 :

essendo $s \perp \pi \Rightarrow d_\pi \parallel d_r$

$d_\pi = (2,-2,1)$

passa per $P_0 : (-1,1,0)$ quindi $\rightarrow$ $s: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-2t \\ z=0+t \end{cases}$

$\downarrow (P_0) \quad \downarrow (d_\pi)$

Quindi il centro della C circonf. è $Q_0 = \pi \cap s$

ESEMPIO:

$P_0 = (1,1,-2)$; $P_1 = (1,-1,0)$; $P_2 = (-1,3,-2)$

1)
$$\begin{array}{c} (P-P_0) \\ (P_0-P_1) \\ (P_0-P_2) \end{array} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-4)-(y-1)(4)+(z+2)(-4) = 0$$

$$-4x+\cancel{4}-4y+\cancel{4}-4z-\cancel{8} = 0 \Rightarrow -x-y-z=0$$
$$x+y+z=0$$

$\boxed{\pi : x+y+z=0}$ qst piano deve contenere i tre p.ti.

controlliamo se è giusto: P_0: $1+1-2=0 \rightarrow$ ok

P_1: $1-1+0=0 \rightarrow$ ok

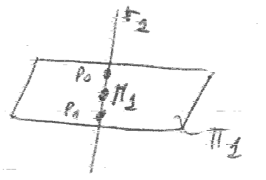
P_2: $-1+3-2=0 \rightarrow$ ok

$\underline{P_0, P_1, P_2 \subseteq \pi}$

2) $M_1 = \frac{1}{2}(P_0+P_1) = \frac{1}{2}(2,0,-2) = (1,0,-1) = M_1$

$M_2 = \frac{1}{2}(P_0+P_2) = \frac{1}{2}(0,4,-4) = (0,2,-2) = M_2$

3) Troviamo da il piano π_1 con direzione ortogonale ad una retta che passa per M_1.



Per trovare la direzione della retta troviamo la sua equaz parametrica facendo (P_1-P_0).

$d_{r_1} \parallel d_{\pi_1}$

$(P_1-P_0) = (0,-2,2) \leadsto r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1-2t \\ z = -2+2t \end{cases}$ $\quad d_{r_1} = (0,-2,2) \parallel d_{\pi_1}$

$\pi_1: -2y+2z+d=0 \Rightarrow y-z=\frac{d}{2} : \pi_1 \leadsto M_1(1,0,-1)$

$0+1 = d/2 \Rightarrow \boxed{d=2} \Rightarrow \boxed{\pi_1: y-z-1=0}$

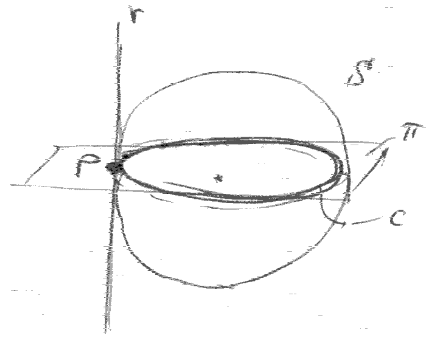
OSS $d_{\pi_1}(0,1,-1)$ c.l. di d_{r_1}

~~come ci aspettavamo. Perché per essere $r_1 \perp \pi_1$ $d_{r_1} \parallel d$~~

→ $\boxed{\text{RETTA TANGENTE AD UNA CIRCONFERENZA}}$

Se $S \cap \pi = C$ circonferenza e $P \in C \Rightarrow$ la retta r tg a C in P

$r(tg_P(C))$ è l'intersezione del piano tangente alla sfera S in P.



ESEMPIO:

$$C \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z-2=\emptyset & : S \\ x+y+z=0 & : \pi \end{cases} \quad e \quad P=(1,-1,0)$$

Verifichiamo prima di tutto se $P \in C$: $1+1-2=\emptyset \to$ OK, $1-1+0=\emptyset \to$ OK $\Big\} \to \underline{P \in C}$

S: $x^2+y^2+z^2-2z-2=\emptyset$

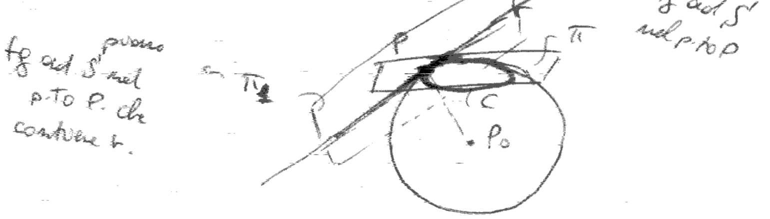
$x^2+y^2+(z-1)^2-2-1=\emptyset$

$x^2+y^2+(z-1)^2=3 \quad \rightsquigarrow \quad P_0(0,0,1)$ centro sfera

⇓

oss $P_0 \notin \pi$

per cui $0+0+1=0 \to$ IMPOSS.



La retta tangente viene dunque vista come l'intersezione di due piani. $(\pi \cap \pi_1)$. π è il piano che interseca S per formare la Circonf. e π_1 è il piano tg alla S e passante per P.

RETTE NELLO SPAZIO $(x\,y\,z)$

Prendiamo due rette:

$$r: \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -t \\ z = 2t+4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = u+1 \\ y = -u \\ z = u-2 \end{cases}$$

$$S: (r \cap s) = \begin{cases} 3t-1 = u+1 \\ -t = -u \\ 2t+4 = u-2 \end{cases}$$

le due rette hanno direzione:

$$d_r = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad d_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$d_r \not\parallel d_s$

quindi potrebbero incrociarsi

$\Downarrow$

qst dipende dal sistema

$$S: (r \cap s)$$

$2t = 2 \Rightarrow t = 1$

$t = u$

$t = -6$ ASSURDO

$\Rightarrow$ S IMPOSSIBILE

$(r \cap s) = \emptyset$ NON SI INCROCIANO

SONO SGHEMBE

In generale:

$r: \; tA + P$

$s: \; uA' + P'$

- $A \parallel A' \rightarrow r \cap s$
  - $\emptyset$: $r \parallel s$ (c'è un piano che le contiene) PARALLELE
  - $\neq \emptyset$: $r = s$ (c'è un piano che le contiene) COINCIDENTI
- $A \not\parallel A' \rightarrow r \cap s$
  - $\emptyset$: r, s (non c'è un piano che le contiene) SGHEMBE
  - $\neq \emptyset$: r, s (c'è un piano che le contiene) INCIDENTI

dove nel nostro esempio:

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} ; \quad P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e \quad A = d_r = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad A' = d_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[P(t) - Q_0] \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(t+1-3,\ -t+1+1,\ 2t-1-0) = (t-2,\ -t+2,\ 2t-1) = (P(t) - Q_0)$$

devo imporre che $(P(t)-Q_0) \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, cioè

$$(P(t)-Q_0) \cdot (1, -1, 2) = \phi$$

cioè:

$$(t-2,\ -t+2,\ 2t-1) \cdot (1, -1, 2) =$$

$$= (t-2)1 + (-t+2)(-1) + (2t-1)(2) = t-2+t-2+4t-2 = 6t-6 = 0$$

$$6t-6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t=1}}$$

$$P_0(t=1) = (t+1, -t+1, 2t-1) = (2, 0, 1) = P_0$$

$P_0 = (2, 0, 1)$ è il p.to della retta r per il quale passa un'altra retta r' per Q_0 tale che $r \perp r'$ (disegno pagina precedente). <u>P_0 si definisce come proiezione di $P(t)$ su r</u>

<u>Per calcolare la distanza di P_0 da Q_0: retta</u>

$$\mu(P_0 - Q_0) + Q_0 = \mu(-1, 1, 1) + (3, -1, 0)$$

$$d(P_0, r) = \|P_0 - Q_0\| = \underbrace{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}_{\sqrt{(2-3)^2+(0+1)^2+(1-0)^2}} = \sqrt{3}$$ distanza del p.to P_0 alla retta r'

Devo imporre l'$\perp$ $\Rightarrow$ il loro prod. scalare $= \phi$

$$\begin{cases} \left(P(t) - Q(u)\right) \cdot (1, -1, 2) = \phi & \rightsquigarrow \text{per la retta } r \\ \left(P(t) - Q(u)\right) \cdot (-1, 2, 1) = \phi & \rightsquigarrow \text{per la retta } s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + u + 1 + t + \cancel{2u} + 4t - \cancel{2u} + 4 = \phi \\ -t - u - 1 - 2t - 4u + 2t - u + 2 = \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6t + u + 5 = \phi \\ -t - 6u + 1 = \phi \end{cases} \rightarrow u = -5 - 6t \Rightarrow u = -5 - 6\left(-\frac{31}{35}\right) = -5 + \frac{186}{35} = u$$

$$\left.\begin{array}{l} -t - 6(-5 - 6t) + 1 = 0 \\ -t + 30 + 36t + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$35t = -31 \Rightarrow t = -\frac{31}{35}$$

Mi sono trovato i pti delle due rette:

$$Q(u) = (-u, 2u+2, u-3) = \left(+5 - \frac{186}{35}, 2\left(-5 + \frac{186}{35}\right) + 1, -5 + \frac{186}{35} - 3\right)$$
$$(x_0', \quad y_0', \quad z_0')$$

$$P(t) = (t+2, -t+1, 2t-1) = \left(-\frac{31}{35} + 1, +\frac{31}{35} + 1, -2\,\frac{31}{35} - 1\right)$$
$$(x_0, \quad y_0, \quad z_0)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_0' - x_0)^2 + (y_0' - y_0)^2 + (z_0' + z_0)^2}$$

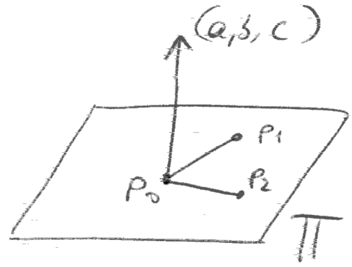
TRE PTI NON ALLINEATI

Se ho P_0, P_1, P_2 non allineati $\Rightarrow$ c'è un solo piano Π che li contiene. (semplice).

Condizioni per non essere allineati:

$(P_1 - P_0)$ e $(P_2 - P_0)$ L.I. $\Rightarrow$ NON paralleli tra loro.

→ Devo conoscere un pto di passaggio P ed (a,b,c) del piano –
((a,b,c) ha direzione $\perp$ al piano Π).



$$(a,b,c) = (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) \qquad P = (x,y,z)$$

$$\underbrace{(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)}_{(a,b,c)} \cdot (P - P_0)$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)$$

$$\det \begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{bmatrix} = \phi$$

→ i 3 pti giacciono sullo stesso piano se il loro prodotto misto è $= \phi$

esempio:

$P_0(1,0,-1)$; $P_1(1,1,1)$; $P_2(2,1,-1)$

(con $x_0\ y_0\ z_0$, $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$ sopra le coordinate)

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x + 2y - z - 5$$

Esempio:

$$\begin{cases} \pi_1: -x+y+z=1 \\ \pi_2: 2x+y+z=\emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (a_1, b_1, c_1) = (-1, 1, 1) \\ (a_2, b_2, c_2) = (2, 1, 1) \end{array} \Big\} \xrightarrow{} \underline{\underline{L.I}}$$

Quindi abbiamo che π_1 ed π_2 sono INCIDENTI e formano una retta;

Nota: Ora abbiamo una notazione in più per descrivere una retta nello spazio: tramite due piani incidenti.

- Forma parametrica (i p.ti si trovano subito)
- Forma cartesiana (tramite PIANI INCIDENTI)

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+a_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

con ∞^1 soluzioni

DIREZIONE DI r $\Longrightarrow$ $d_r: (a_1b_1c_1) \wedge (a_2b_2c_2) \parallel$

$\parallel$ (d_r in forma parametrica (t))

RETTA CONTENUTA IN UN PIANO

$r \subseteq \pi$? Come faccio a saperlo?

→ RETTA IN FORMA PARAMETRICA

$(r \cap \pi)$:
- $r \cap \pi = \emptyset \Rightarrow r \parallel \pi$
- tutta $(r \subseteq \pi)$
- 1 p.to

$\Downarrow$

Non possono essere SGHEMBI

$r: tA + P_0$

$\pi: ax+by+cz+d=\emptyset$

per $\boxed{r \parallel \pi \text{ o } r \subseteq \pi \Rightarrow A \perp (a,b,c)}$

(perché la direzione del piano è indicata $\perp$ allo stesso)

Sostituisco la forma parametrica della retta nelle eq. del piano:

$$r: \begin{cases} x=a+bt \\ y=c+dt \\ z=e+ft \end{cases} \quad \pi: \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=\emptyset \Rightarrow \alpha(a+bt)+\beta(c+dt)+\gamma(e+ft)+\delta=0$$

- es. $0=1$ IMPOSS. $r \parallel \pi$
- $0=0$ $r \subseteq \pi$
- Equazione: r incidente

→ **RETTA CARTESIANA**

Nota: Ovviamente si può passare alla forma parametrica e usare il procedimento visto precedentemente.

> **Nota**: la direzione della retta in forma cartesiana $\vec{d}_r$ si trova facendo il prodotto vettoriale delle equaz. dei due piani.
> $$r: \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x-3y-z-2=0 \end{cases}$$
> $$\Downarrow$$
> $$\vec{d}_r=(1,-1,-1)\times(2,-3,-1)$$

r: retta

$$\Pi_F = \{\Pi \text{ PIANI} \mid \Pi \subseteq r\} = \underline{\text{FASCIO DI PIANI}}$$

$$r: \begin{cases} -x+y+z=1 & : \Pi_1 \\ 2x-y+z=\emptyset & : \Pi_2 \end{cases} \qquad \Pi: ax+by+cz=-d$$

$$\underline{r \subseteq \Pi} \iff \begin{cases} -x+y+z=1 \\ 2x-y+z=\emptyset \\ ax+by+cz=-d \end{cases}$$

(qst so già che sono L.I. perché formano una retta)

$\underline{\text{ha } \infty^1 \text{ soluzioni}}$

$\Downarrow$ implica che $r=2$ perché

$\infty^{\#\text{incogn}-r} = 1$

$\infty^{3-r} = 1$

$\Downarrow$

$r=2$

$$r\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ a & b & c & -d \end{bmatrix} = 2$$

L.I.

Quindi l'ultima riga $(a\ b\ c\ d) = \emptyset$ e quindi sarà C.L. delle altre 2

Cioè:

$$(a,b,c,d) = \lambda_1(-1,1,1,1) + \lambda_2(2,-1,1,0)$$

$$\boxed{\Pi = \lambda_1(-x+y+z-1) + \lambda_2(2x-y+z) = \emptyset}$$

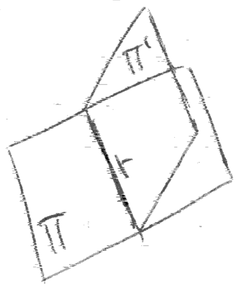
$$\boxed{\Pi = (-\lambda_1+2\lambda_2)x + (\lambda_1-\lambda_2)y + (\lambda_1+\lambda_2)z - \lambda_1 = \emptyset}$$

EQUAZIONI DEL FASCIO DI PIANI Π_F

Posso usare indifferentemente entrambe. Si consiglia di trovarsi la 1° e poi calcolarsi se è necessario la 2° perché la 1° si vede ad occhio. $\left(\text{Se } \lambda_1=\emptyset \xrightarrow{(\text{hai})} \Pi_2 \ ;\ \text{Se } \lambda_2=\emptyset \xrightarrow{(\text{hai})} \Pi_1\right)$

ORTOGONALITÀ (NELLO SPAZIO)

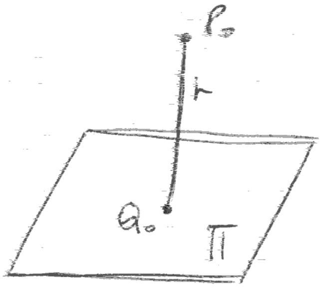
→ PIANI



$\pi \perp \pi' \subseteq r$

$\pi \subseteq r$

→ RETTE E PIANI



$\pi: x+2y-z-1=0$

$r \perp \pi$ per $P_0=(1,1,1)$

$r:$ $\underbrace{\text{retta} \parallel \overbrace{(1,2,-1)}^{d_\pi}}$ $(\Rightarrow r \perp \pi)$ passante per $P_0=(P_{0x}, P_{0y}, P_{0z})$

Condizione per la ⊥ perché ricordiamo che la d_π è ⊥ al piano stesso.

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = P_{0x} + d_{\pi x} \\ y = P_{0y} + d_{\pi y} \\ z = P_{0z} + d_{\pi z} \end{cases}$$

$Q_0 = r \cap \pi \Rightarrow \pi: x+2y-z-1=0$

$1+t+2(1+2t)-(1-t)-1=0$

$6t+1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{6}$

$$Q_0=(1+t,\ 1+2t,\ 1-t) = \left(1-\frac{1}{6},\ 1-\frac{2}{6},\ 1+\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$$

$$d(P_0\pi) = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{3}{18}}$$

$P_0=(1,0,0)$; $P=(x,y,z)$

$P(1,0,0)$

$x-1,\ y-0,\ z-0$

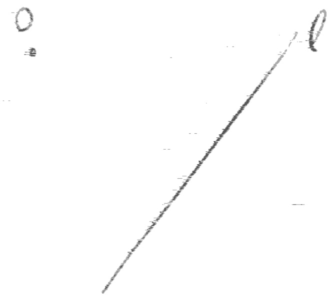
$$P\in\Pi \iff (P-P_0)\in\Pi_0 \iff (x-1,\ y,\ z)=t(1,-1,0)+u(1,1,-2)$$

$$\begin{cases} x-1=t+u \\ y=-t+u \\ z=-2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+u+1 \\ y=-t+u \\ z=-2u \end{cases}$$

$$\boxed{P(xyz)=tX_1+uX_2+P_0}$$

$\vec{N} = (-3, 2, 1)$ $\qquad \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \dfrac{1}{\sqrt{9+4+1}}(-3,2,1) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)$

(iii)



Possiamo trovare 2 pti $\in l$ e calcolare il prod. misto come prima.
Utilizziamo invece il fascio F di piani che contiene l.

$\lambda(x-y+3) + \mu(x-2z) = 0$ $\qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ $\quad (\lambda, \mu \neq 0$ non entrambi$)$

Impongo il passaggio per l'origine.

$$(\lambda+\mu)x + (-\lambda)y + (3\lambda) - 2\mu z = 0$$

$(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$ $\quad \mu$ è libero

Ponendo $\mu = 1$

$$(0+1)x + (0)y + 3(0) - 2(1)z = 0$$

$\boxed{x - 2z = 0}$ $\quad \pi'$

$\rightarrow l \in \pi'$? (retta $\in$ al piano) $\quad l \subseteq \pi$

$$l: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = t \\ x = 2t \\ y = x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ sostituisco all'equaz del piano π',

$2t - 2(t) = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0}$ identità $\Rightarrow$ cioè l giace interamente nel piano π'!

Se fosse venuta un'equazione la retta sarebbe passante nel piano.

$$\ell' \begin{cases} z = t' \\ y = 2-3t' \\ x = 1-2+3t' \end{cases} \Rightarrow \ell' \begin{cases} x = -1+3t' \\ y = 2-3t' \\ z = t' \end{cases} \qquad (t' \in \mathbb{R}) \quad (t' \neq t)$$

$\vec{d}_\ell = (-4,-3,1)$; $\vec{d}_{\ell'} = (3,-3,1)$ $\qquad$ $\vec{d}_\ell$ <u>non</u> è c.l. di $\vec{d}_{\ell'}$

$$\underline{\underline{\vec{d}_\ell \nparallel \vec{d}_{\ell'}}} \Rightarrow \underline{\underline{\ell \nparallel \ell'}}$$

② Proviamo che non hanno p.ti in comune, cioè $\ell \cap \ell' = \emptyset$ (vuoto)

$$\begin{cases} -4t = -1+3t' \\ -3t = 2-3t' \\ t = t' \end{cases} \Rightarrow -4t = 1+3t \Rightarrow -7t = 1 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{7}}$$

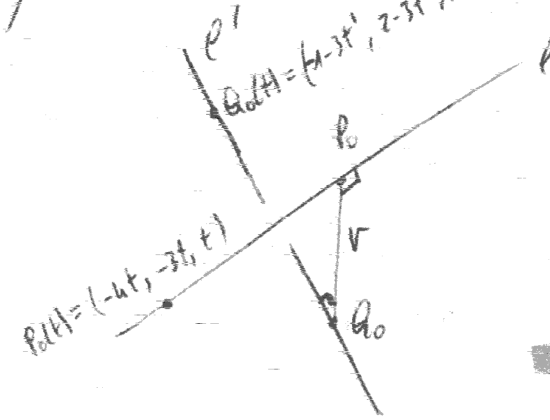
$$-3\left(-\frac{1}{7}\right) = 2 - 3\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$\Downarrow$

$\neq$ $\Rightarrow$ una supposta intersezione <u>non</u> è vera. $\ell \cap \ell' = \phi$ (<u>vuoto</u>)

$\Rightarrow$ Conseguenza di ① e ② $\Rightarrow$ ℓ ed ℓ' sono SGHEMBE. Non c'è nessun piano che li contiene.

• $d(\ell,\ell')$



$\exists$ sempre una retta <u>unica</u> che unisce due rette sghembe t.c. $r \perp \ell'$, $r \perp \ell$. La dist. è quel minimo.

$d(P_0, Q_0) = d(\ell', \ell)$

ES ③:

$$\begin{cases} hx + y + z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ hx + 2y + (h+1)z = k \end{cases} \qquad (h, k \in \mathbb{R})$$

(1) Se $h = -2$ e $k = 1$, rappresentano tre piani che non hanno p.ti in comune

(2) Se $h = 0$ e $k = -3$, rappresentano tre piani con un solo p.to in comune.

(3) Se $h = -2$ e $k = -1$, rappresentano tre piani che passano per una stessa retta.

Soluzione

1 tre piani ∥

2 due si incontrano in una retta e l'altro li incontra in un'altra retta.

3 tutti e 3 nello stesso fascio → soluz. mu. dim. → retta.

2 piani si incontrano e l'altro li incontra trasversalmente → 1 p.to.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ h & 2 & (h+1) & k \end{array}\right)$$

② $\begin{pmatrix} h=0 \\ k=-3 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$\underbrace{\qquad}_{r=2}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{r=3}$ → NON C'È SOLUZIONE (R.-C.)

$$s: \begin{cases} x = \frac{2}{3}t - 2 \\ y = -1/3\,t \\ z = t \end{cases}$$

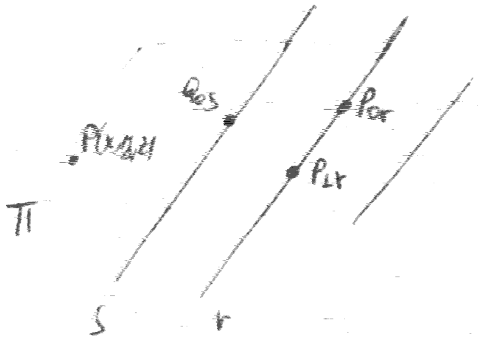
$$\left.\begin{aligned} \vec{d}_s &= \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 1\right) \\ \vec{d}_r &= (2, -1, 3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ si vede subito che sono c.l. infatti:

$$\exists\ \lambda\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 1\right) \overset{?}{=} (2, -1, 3)$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{2}{3}\lambda = 2 \Rightarrow 2 = 2 \ \underline{ok}$$
$$-\tfrac{1}{3}\lambda = -1 \Rightarrow -1 = -1 \ \underline{ok}$$
$$\lambda = 3$$

quindi $\vec{d}_s \parallel \vec{d}_r \Rightarrow r \parallel s$.

• Troviamo il piano per il quale le due rette (r ed s) giacciono:



→ Idea: Trovo 2 p.ti sulla retta r e uno sulla retta s. Poi prendo un $P(x,y,z)$ generico p.to del piano π e impongo che il loro prodotto misto sia $\emptyset$.

⇓

in qst modo i tre p.ti giacciono sul piano e visto che appartengono alle due rette allora anche loro giaceranno sul piano.

$$P_r(t) = (1+2t,\ 1-t,\ 3t)$$
$$Q_s(t) = \left(\tfrac{2}{3}t - 2,\ -\tfrac{1}{3}t,\ t\right)$$

$$P_{0r}(t=\emptyset) = (1, 1, 0)\ ; \quad P_{1r}(t=1) = (3, 0, 3)$$
$$Q_{0s}(t=\emptyset) = (-2, 0, 0)$$

$$\begin{array}{c} (P - P_{0r}) \\ (P_{1r} - P_{0r}) \\ (Q_{0s} - P_{0r}) \end{array} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(3) - (y-1)(9) + z(-2-3) = \boxed{3x - 9y - 5z + 6 = \emptyset} : \pi$$

equaz. del piano π che contiene r ed s.

$$\left(\begin{aligned} \pi \subseteq r \\ \pi \subseteq s \end{aligned}\right)$$

Verifica
$$\begin{cases} P_{0r} = (1,1,0) \Rightarrow 3(1) - 9(1) - 5(0) + 6 \overset{?}{=} \emptyset \Rightarrow 3 - 9 + 6 = 0 \ \text{ok} \\ Q_{0s} = (-2,0,0) \Rightarrow -6 + 6 = \emptyset \Rightarrow \text{ok} \\ P_{1r} = (3,0,3) \Rightarrow 9 - 15 + 6 = \emptyset \Rightarrow \text{ok} \end{cases}$$

Sostituiamo t e t' nei punti delle rispettive rette:

$$P_0(t) = (1+2t,\ 1-t,\ 3t) \underset{t=0}{=} (1,1,0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$Q_0(t') = \left(\frac{2}{3}t'-2,\ -\frac{1}{3}t',\ t'\right) \underset{t'=-\frac{5}{14}}{=} \left(\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{14}\right)-2,\ -\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{14}\right),\ -\frac{5}{14}\right) =$$

$$= \left(-\frac{10}{42}-2,\ \frac{5}{42},\ -\frac{5}{14}\right) = \left(-\frac{47}{21},\ \frac{5}{42},\ -\frac{5}{14}\right) = Q_0(t')$$

$$= (x_0', y_0', z_0')$$

$$d(P_0,Q_0) = \sqrt{(x_0'-x_0)^2+(y_0'-y_0)^2+(z_0'-z_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{47}{21}-1\right)^2+\left(\frac{5}{42}-1\right)^2+\left(-\frac{5}{14}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{-68}{21}\right)^2+\left(\frac{-37}{42}\right)^2+\left(-\frac{5}{14}\right)^2} = d(P_0,Q_0)}$$

(iv) $P_0 \in \Pi$? $\Rightarrow$ $P_0(1,-2,0) \in (x-y-z-1=0)$

$1+2-0-1 \neq 0 \Rightarrow P_0 \overset{?}{\underset{no}{\in}} \Pi$

(iii) Piano passante per P_0 e normale ($\perp$) alla retta ℓ

$ax+by+cz+d=0$

$d_\ell = (2,3,1)$ $\Downarrow$ parametri t della retta ℓ.

$2x+3y+z+d=0 \Rightarrow$ tutti i piani che hanno come normale la retta ℓ.

Impongo ora il passaggio per P_0, ossia: $P_0(1,-2,0)$

$2(1)+3(-2)+0+d=0 \Rightarrow \underline{d=4}$

$\alpha: 2x+3y+z+4=0$ piano che ha come retta normale ℓ e passante per il p.to P_0.

$\ell \cap \alpha$

$2(2+2t)+3(3t)+t+4=0$

$4+4t+9t+t+4=0$

$14t+8=0 \Rightarrow t=-\frac{8}{14}=-\frac{4}{7}$

$$Q_0 = (2t+2,\ 3t,\ t) = \left(2\left(-\frac{4}{7}\right)+2,\ 3\left(-\frac{4}{7}\right),\ -\frac{4}{7}\right) = \begin{pmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ \frac{6}{7}, & -\frac{12}{7}, & -\frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ 1, & -2, & 0\end{pmatrix}$$

$$d(P_0,\ell) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{6}{7}\right)^2+\left(-2+\frac{12}{7}\right)^2+\left(-\frac{4}{7}\right)^2}$$

$P_0=(1,-2,0)$ $\pi: x-y-z-1=0$

$1+2-1$

$$\frac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

x y z coefficienti

Es. 3: Nello spazio sono date le rette r ed s rispettivamente di equazioni

$$r: \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 3x+y+4z=2 \\ x+3z=1 \end{cases}$$

Verificare che r ed s non abbiano p.ti in comune

Stabilire se le rette r ed s sono parallele o sono sghembe

(ii) Determinare l'equazione di uno stesso piano π contenente sia r che s

(iii) Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$, la posizione relativa delle rette r e

$$t_h: \begin{cases} hx+y-2z=1 \\ x+3z=1 \end{cases}$$

Soluzione:

(i) Si possono trasformare le eq. delle due rette in forma parametrica e poi dimostrare che non hanno p.ti in comune.

Oppure usiamo R-C:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{-2(1)+(2) \\ -3(1)+(3) \\ -1(1)+(4)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{-2(2)+(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$r = 2$ (matrice dei coefficienti), $r = 3$ (matrice completa)

o sono parallele o sono sghembe $\Leftarrow$ incompatibili per R-C.

(ii) $\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{d}_r = (3,-5,-1)$

$\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{d}_s = (3,-5,-1)$

$\rightarrow \underline{r \parallel s}$

Note

MATRICI

PRODOTTO TRA MATRICI

→ Non si può sempre fare.

$A_{m\times n}$ e $B_{l\times p}$ se $n\neq l$ non si può moltiplicarle.

$$\boxed{A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}}$$

= MOLTIPLICABILI

MATRICE RISULTANTE

→ $I_n = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ $\quad I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ......

matrice identica (o identità)

$$\boxed{A_{n\times n}\, I_n = A_n}$$

$$I_n^2 = I_n\cdot I_n = I_n$$

→ Il prodotto di matrici (in generale) non è commutativo:

$$\boxed{AB\neq BA}$$

$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2 \quad \text{(in generale)}$$

$$A^2-B^2\neq (A+B)(A-B) \quad \text{(in generale)}$$

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \quad ,\ A \text{ e } B\in\mathbb{R}^{n\times n}\ \text{(quadrate)}}$$

INVERTIBILITÀ

→ ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ → $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

→ $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ → $(A^{-1})^{-1} = A$

Def: $A \in M_n$ (quadrata)

A invertibile se $\exists\, B \in M_n$ t.c. $\boxed{AB = BA = I_n}$

se $\exists\, B$ qst è UNICA.

Se una matrice ha una riga o colonna nulla ⇒ A NON INVERTIBILE ma non è detto cmq anche se non ha colonne o righe nulle che lo sia. $\boxed{A \cdot A^{-1} = I_n}$

DETERMINANTE

$\exists$ solo per matrici quadrate

$\boxed{\det I_n = 1 \quad \forall n}$

$\boxed{\det \emptyset_n = \emptyset \quad \forall n}$

→ La somma dei det. ≠ dei det. della somma

→ $\boxed{\det(A+B) \neq \det A + \det B}$

→ $\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$

→ $\boxed{\det({}^tA) = \det(A)}$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I_n = 1$

$\det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\det(A) \neq 0}$

→ Quindi se una matrice è invertibile il suo determinante non è nullo

A INVERTIBILE ⇒ $\det(A) \neq 0$

Proprietà MATRICI QUADRATE (per le MATRICI A SCALA)

Se $A_{n \times n}$ matrice quadrata SRR con $r(A) = n$ $\Rightarrow$ $A = I_n$

→ L'unica matrice quadrata $(n \times n)$ SRR con rango $= n$ è qll' identica

DETERMINANTE

$$\begin{cases} I_n \xrightarrow{OE} E \\ A_{n \times n} \xrightarrow{OE} A' \Rightarrow \boxed{A' = E A_{n \times n}} \Rightarrow \boxed{\det A' = \det E \det A} \end{cases}$$

(I_n = matrice identica

E = matrice elementare ottenuta con OE)

Distinguiamo 3 casi a seconda dell' OE usata:

→ OE I TIPO $\Rightarrow \boxed{\det E = 1} \Rightarrow \boxed{\det A' = \det A}$

→ OE II TIPO $\Rightarrow \boxed{\det E = -1} \Rightarrow \boxed{\det A' = -\det A}$

→ OE III TIPO $\Rightarrow \boxed{\det E = \alpha} \Rightarrow \boxed{\det A' = \alpha \det A}$ → N.B. qst vale solo per 1 riga

$\left(I_n \xrightarrow{\alpha(i),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} E \right)$

Infatti

$$\underbrace{A_{n \times n}}_{\det A = 4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{}$$

(2x2)

$\neq \det A = 2 \rightarrow$ NO perché qst è applicato a tutte le righe.

In qst caso la formula è

$$\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)}$$

Note **SISTEMI LINEARI**

$S \Rightarrow \boxed{AX = B}$

(sistema)

(matrice coefficienti) (matrice incognite) (matrice termini noti)

$$[\,A\,]\,[X] = [\,B\,]$$

$$M_S = \left[\,A \;\middle|\; B\,\right]$$ MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA S

Posso applicare delle OE alla M_S ed ottenere $M'_{S'}$

$$\Rightarrow \boxed{Sol(S) = Sol(S')}$$

- Teorema fondamentale dei sistemi lineari (ROUCHÉ - CAPELLI)

S:

- RISOLUBILE $(r(A) = r(M_S))$
  - $r(A) = n$ — S DETERMINATO (una soluzione unica)
  - $r(A) < n$ — S INDETERMINATO $\infty^{n - r(A)}$
- NON RISOLUBILE (INCOMPATIBILE) $(r(A) + 1 = r(M_S))$ $(r(A) \neq r(M_S))$

(dove n = # incognite)

⊛ Nota: Il Th. di R-C. non dice niente riguardo al m (# di equazioni di S), ma succede, come detto, $r(A) \leq \min(m, n)$

$\Rightarrow$ Se $m < n$ S: IMPOSSIBILE o INDETERMINATO

⊛ Nota all'inizio della pag. a dx.

CASO DEI SISTEMI QUADRATI

Co sarà il determinante.

$S: AX = B$

$(A = m \times m) \rightarrow$ cioè tante equazioni quante incognite.

Se A è INVERTIBILE $\mapsto (\det \neq 0)$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_m} X = BA^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

Teorema Cramer:

Sia A quadrata $m \times m$ ed INVERTIBILE

$\Rightarrow$ $S: AX = B$ è DETERMINATO $\forall B$ ed ha un'unica soluzione: $X = A^{-1}B$

$\Rightarrow$ Quindi se A è INVERTIBILE $\rightarrow$ S DETERMINATO con unica soluzione $X = A^{-1}B$ con B qualsiasi.

Nota: Un metodo per risolvere la S una volta ridotta la sua M_S (matrice associata) è di tenere fissi i suoi pivot e portare le altre dall'altra parte.

$\rightarrow$ Quindi per studiare il sistema:

1) SE NON È QUADRATO $\rightarrow$ Th. Rouché-Capelli (R.C.)

2) SE È QUADRATO $\rightarrow$ "scorciatoia" dell'invertibilità di Cramer (se si scopre che A non invertibile dobbiamo però utilizzare R-C.)

INTERFERENZE (UNIONE / INTERSEZIONE) DI S.V.

U_1, U_2 ssv di V

(1) $U_1 \cap U_2$ è ssv di V sempre

(2) $U_1 \cup U_2$ in generale non è ssv di V

- Se $U_1 \cap U_2 = \{\phi_V\} \Rightarrow U_1 \oplus U_2$ somma diretta
- $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

$\Rightarrow U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2$ ssv di V

(somma di sottospazi)

$\boxed{\text{Def. di SSV}}$

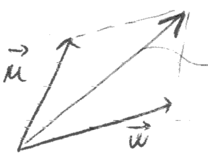
U ssv di V se:
($U \subseteq V$) V sv su $\mathbb{K}$

(1) $\phi_V \in U$

(2) $v, v' \in U \Rightarrow v + v' \in U$

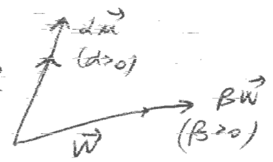
(3) $\alpha \in \mathbb{K}, v \in U \Rightarrow \alpha v \in U$

Es. $U \cup W$ non è SSV
(per la somma dei vettori applicati)



Mentre $\{\alpha \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = U$
e $\{\beta \vec{w} \mid \beta \in \mathbb{R}\} = W$
sono SSV

(stanno nell'insieme)



$\Leftarrow$

COMBINAZIONI LINEARI

In generale: V sv su $\mathbb{K}$ $\quad U = \{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{vettori assegnati}}\} \subseteq V$ (così U ssv di V)

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ t.c.

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$ $\quad$ COMBINAZIONE LINEARE (C.L.) di $v_1, \dots, v_k$ con coefficienti $c_1, \dots, c_k$.

INSIEME LIBERO

V sv su $\mathbb{K}$, $U = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ è INSIEME LIBERO se i generatori $v_1, \dots, v_k$ non sono c.l. gli uni degli altri $\rightarrow$ L.I.
O anche detti linearmente indipendenti (L.I.) $\Rightarrow$ la proprietà appartiene all'insieme non ai vettori

Nota: Il vettore nullo $\emptyset$ non appartiene ad un insieme libero $\Rightarrow$ $\emptyset$ è sempre c.l. degli altri vettori.

Da qst segue che:

Prop.: $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme libero se e solo se l'unica c.l. di $v_1, \dots, v_k$ nulla è qll con i coefficienti nulli $c_1 = \dots = c_k = \emptyset$

OSS Ogni sottoinsieme di un insieme libero è un insieme libero.
Nota: Per verificare se è LIBERO si considera il sistema omogeneo

BASE

Sia V sv su $\mathbb{K}$, $V \neq \{\emptyset_V\}$, V finit. generato
Un insieme libero e ordinato di generatori di V si dice BASE di V.

$\Downarrow$

per definire le basi bisogna esplicitare l'ordine: BASE 1 $= \{v_1, v_2, v_3\}$, BASE 2 $= \{v_2, v_1, v_3\}$ $\Rightarrow$ BASE 1 $\neq$ BASE 2

Prop. (1) Ogni insieme libero di V è contenuto in una base di V
(ESTENSIONE DELLA BASE)

(2) Ogni insieme di generatori di V contiene una base
(ESTRAZIONE DELLA BASE)

INVERTIBILITÀ E RANGO PER DEFINIZIONE DI BASI ED INSIEMI LIBERI

Notazione: $[X_1, \dots, X_k] \Rightarrow$ matrice $m \times k$ con colonne $X_1, \dots, X_k$

$X_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ ecc. (se $m=4$)

Prop: $V = \{X_1, \dots, X_k\} \subseteq \mathbb{K}^m$

(1) $X \in \mathbb{R}^m$, $X \in L(V)$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ X è c.l. di $X_1, \dots, X_k$ $\underset{(sse)}{\Leftrightarrow}$ $r([X_1, \dots, X_k]) = r([X_1 \dots X_k\, X])$

(2) V è LIBERO $\underset{(sse)}{\Leftrightarrow}$ $r([X_1, \dots, X_k]) = k$ (cioè se il rango della matrice è = al # delle sue colonne).

(3) V è una BASE di $\mathbb{K}^m$ $\underset{(sse)}{\Leftrightarrow}$ $\underset{(\#\text{ colonne})}{k} = m$ e $[X_1, \dots, X_k] \in GL_m$

(cioè se il # di colonne è = alla dim. dello sv considerato e la matrice è invertibile).

VICEVERSA: Se $A \in M_m \Rightarrow$

$A \in GL_m$ $\underset{(sse)}{\Leftrightarrow}$ le colonne e/o le righe di A sono una base di $\mathbb{K}^m$

che non sono visibili immediatamente dalla matrice originale.

La nostra base estratta (nel nostro esempio) cioè:

$$\underbrace{\{{}^t X_1, {}^t X_2, {}^t X_4\}}_{\text{vettori della matrice originale}} \Rightarrow \underline{\text{BASE}} \text{ (estratta) da } U.$$

■

SPAZIO DELLE COLONNE E DELLE RIGHE

→ $\boxed{\text{COLONNE}}$ $A \in M_{m,n}$

$[A]^1, \dots, [A]^n \in \mathbb{K}^m$

$L([A]^1, \dots, [A]^n) = C(A)$ → spazio delle colonne di A

$\boxed{\dim C(A) = r(A)}$. Se $\underline{A \sim A'}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C(A) \neq C(A')}$

(perché facciamo OE di riga)

→ $\boxed{\text{RIGHE}}$ $A \in M_{m,n}$

$[A]_1, \dots, [A]_m \in \mathbb{K}^n$

$L([A]_1, \dots, [A]_m) = \mathcal{R}(A)$ → spazio delle righe di A

$\boxed{\dim \mathcal{R}(A) = r(A)}$. Se $\underline{A \sim A'}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A')}$

Nota: Se $A \sim A'$ a scala, una BASE di $\mathcal{R}(A)$ è data dalle righe non nulle di A'.
Qst base non è estratta, comq, da V.

→ esempio:

Fissati $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ed $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ estendiamo una base per $\mathbb{R}^3$.

1° passo: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$. (ORDINATO)

$$\underbrace{X_1 \quad X_2}_{\text{fissati}} \quad X_3 = e_1 \quad X_4 = e_2 \quad X_5 = e_3$$

2° passo: Estraggo da V una base di $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \text{ matrice a scala}$$

(vettori fissati)

$$\underbrace{X_1' \quad X_2'}_{\text{vettori fissati (ci devono essere per forza nella base)}} \quad X_3'$$

⇒ Torno indietro alla matrice originale per prendere i vettori colonna originali: X_1, X_2 ed X_3 (perché sono le posizioni delle colonne dei pivots come spiegato prima per l'estrazione di base).

Ottengo quindi (tramite estrazione) un'estensione dell'insieme libero $\{X_1, X_2\}$, e avrò: $\{X_1, X_2, X_3\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ BASE di $\mathbb{R}^3$

FORMA IMPLICITA ED ESPLICITA

→ Le soluzioni di qualunque sistema omogeneo è un SSV

→ I SSV di $\mathbb{K}^n$ possono essere considerati sempre come soluzione di un sistema omogeneo

→ Qualsiasi matrice invertibile ($\in GL_n$) ha un sistema che ha soluzioni $= \phi$.

→ U SSV U FORMA IMPLICITA → Ho il sistema S omogeneo (e quindi la matrice) e vale $\boxed{\dim U = \dim(Sol(S)) = n - r(A)}$ (# variabili)

U FORMA ESPLICITA → Ho i generatori $U = L(X_1, \dots, X_k)$ e vale
$\boxed{\dim U = r([X_1 \dots X_k])}$ → in colonne

DA IMPLICITA AD ESPLICITA

Sia $U = Sol(S)$ $\quad$ S sistema omogeneo:

$$S: \begin{cases} x + y + z + t - u = 0 \\ 2x - y + 2z + t - 2u = 0 \\ 3x + 3z + 2t - 3u = 0 \end{cases} \qquad S: AX = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{OE}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A}$$

$$\begin{cases} x + z + \frac{2}{3}t - u = 0 \\ -y - \frac{1}{3}t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z - \frac{2}{3}t + u \\ y = -\frac{1}{3}t \end{cases}$$

$$\left\{ \left(-z - \frac{2}{3}t + u\right), \left(-\frac{1}{3}t\right), z, t, u \mid z, t, u \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ z(-1, 0, 1, 0, 0) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1, 0\right) + u(1, 0, 0, 0, 1) \right\}$$

$$(x, y, z, t, u) \in Sol(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}}_{X} = z \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_2} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3}$$

$U = L(X_1, X_2, X_3)$ $\quad$ X_1, X_2, X_3 L.I.? $\quad$ se sì $\dim U = 3$ e X_1, X_2, X_3 base di U

Sono lin. indip. se $r[X_1 X_2 X_3] = 3$

$$r\begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow X_1, X_2, X_3 \text{ L.I. e BASE}$$

\# variabili

$$\boxed{\dim U = n - r(A)}$$

infatti $5 - 2 = 3$ ok

$$\begin{cases} c_1 - 2c_2 = x \\ 2c_1 + c_2 = y \end{cases}$$

c_1, c_2 INCOGNITE

x, y PARAMETRI

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ La matrice dal testo so che è una base.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Se è una base $\Rightarrow$ è INVERTIBILE

Calcoliamo l'inversa:

Ricordiamo che:

$$A \in M_{n\times n} \Rightarrow [A \mid I_n] \overset{OE}{\sim} [I_n \mid A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{2(2)+(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{5}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{-2(1)+(2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 1/5 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(the right block is labelled A^{-1})

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{M_B = A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_B}_{\text{coordinate}}$$

$$M_B \cdot X = [X]_B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}(x+2y) \\ \frac{1}{5}(-2x+y) \end{bmatrix}_B$$

APPLICAZIONI LINEARI

Un'applicazione è lineare se:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2) \\ 2. & f(\lambda v)=\lambda f(v) \qquad (\lambda\in\mathbb{R}) \end{array}}$$

→ La MATRICE ASSOCIATA all' APPLICAZ. LINEARE è data dal # di righe = alla dimensione dello spazio di arrivo e dal # di colonne = alla dimensione dello spazio di partenza. $M(f)$.

→ Per calcolare il NUCLEO di un APPL. LINE $Ker(f)$ devo prendere i vettori di partenza ed attraverso le $f(x,y\ldots)$ devo farli arrivare al vettore nullo, cioè devo imporli a zero. Equivale quindi a risolvere un sistema omogeneo.

$$\boxed{\text{Se } Ker(f)=\{\emptyset\} \Rightarrow f \text{ è INIETTIVA} \Leftrightarrow \dim Ker(f)=\emptyset}$$

$$\boxed{\text{Per essere SURIETTIVA} \Rightarrow \Rightarrow \dim Im(f)=1}$$

Soluzione del sistema omogeneo.

⇒ (Quindi per R-C se il sist. è determinato l'unica soluzione è zero ⇒ se il sistema è determinato ⇒ f INIETTIVA)

Teorema delle dimensioni

$$\boxed{\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{\text{dimensione dello spazio di partenza}} = n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)}$$

$$\boxed{\dim(Ker(f)) = n - r(A)} \qquad \boxed{\dim(Im(f)) = r(A)}$$

↳ # variabili (o # di dimensioni dello spazio di partenza)

Se la dim dell'immagine è minore della dimensione di ~~[illegible]~~ partenza vuol dire che qlc vettore della dimensione di partenza è RIDONDANTE ⟹ $Im(f)$ SSV PROPRIO

N.B. [I vettori di partenza dell'immagine sono i vettori colonna della matrice associata all'appl. lineare

→ **ENDOMORFISMO**: Quando l'applicazione va da una dim. di partenza ad una d'arrivo con la stessa dimensione.
($\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e così via ... $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

Nota: Se siamo in un endomorfismo se f è INIETTIVA ⇒ di conseguenza è anche SURIETTIVA e viceversa.

Nota: Se la dimensione degli autospazi riferiti ad ogni autovalore è uguale alla dimensione dell'endomorfismo, qst è semplice

→ Se $\boxed{\text{dim partenza} > \text{dim arrivo}}$ ⇒ f NON è INIETTIVA

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

spazio di partenza — spazio di arrivo

- $n = m$ → INIETTIVA → SURIETTIVA
- $n > m$ → NO SURIETTIVA
- $n < m$ → NO INIETTIVA

→ $f: V \to W$, f SURIETTIVA se $Im(f) = W$

- Se f SURIETTIVA ed INIETTIVA ⇒ f BIUNIVOCA
- Se f BIUNIVOCA ⟺ f INVERTIBILE
- Se f è LINEARE e BIUNIVOCA ⇒ ISOMORFISMO

(Un endomorfismo è isomorfismo se è un applicaz. BIUNIVOCA)

DIAGONALIZZAZIONE

Def: $A \in M_{n \times n}$ è DIAGONALIZZABILE se $\boxed{\exists\, N \in GL_n \text{ t.c. } N^{-1} A N = D}$ è diagonale.

$(A = N D N^{-1})$

Def: $A \in M_{n \times n}$, un vettore $X \in \mathbb{K}^n$ si dice AUTOVETTORE di A se:

(1) $X \neq \emptyset$;

(2) $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ di A t.c. $AX = \lambda X$ (λ AUTOVALORE)

Si dice che X è autovettore di A con autovalore λ

→ esempio ②:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \det\begin{vmatrix}(1-\lambda)&1\\1&(1-\lambda)\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2-1 = \lambda^2-2\lambda=\emptyset$$

$$\lambda(\lambda-2)=\emptyset \quad \begin{cases}\lambda=\emptyset\\ \lambda=2\end{cases}$$

· Per $\lambda=\emptyset$

$$A\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$x+y=0 \to x=-y$

$\{-y,y \mid y\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1)\}$

$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ primo autovettore dell'autovalore $\lambda=\emptyset$

· Per $\lambda=2$

$$A\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$-x+y=0 \to x=y$

$\{y,y \mid y\in\mathbb{R}\}=\{y(1,1)\}$

$X_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ secondo autovettore dell'autovalore $\lambda=2$

X_1 e X_2 sono L.I. e quindi formano una base $\mathcal{B}=\{X_1,X_2\}$ di autovettori di A $\Rightarrow$ A è DIAGONALIZZABILE

Nel caso di una matrice $A \in M_{n\times n}$:

$m_A(\lambda)$ è detta <u>MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ</u>

→ esempio:

$p_A(t) = -t^3 + 5t^2 - 7t + 3 = 0$

$p_A(t) = (t-1)^2(-t+3)$

$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 3$

$m_A(\lambda_1) = m_A(1) = 2$

$m_A(\lambda_2) = m_A(3) = 1$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($A \in M_{n\times n}$)	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($A \in M_{n\times n}$)
$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ AUTOVALORI DI A	$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ AUTOVALORI DI A
$m_A(\lambda_1) + \dots + m_A(\lambda_k) \leq n$	$m_A(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_k) = n$

→ In alcuni casi particolari il $p_A(t)$ e gli λ si vedono immediatamente: è il caso delle MATRICI 2x2 e delle MATRICI TRIANGOLARI

- MATRICI 2x2

$A \in M_2 \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Applichiamo la definizione

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{bmatrix} = t^2 - \underbrace{(a+d)}_{tr(A)}t + \underbrace{ad-bc}_{\det(A)}$$

TRACCIA DI A

(cioè i componenti della diagonale di A).

$$\Rightarrow \boxed{p_{A_{2\times 2}}(t) = t^2 - tr(A) + \det(A)}$$

polinomio caratteristico per la matrice 2x2

Prop: Sia $A \in M_{n\times n}$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di A.

Allora $\boxed{1 \leq d_A(\lambda) \leq m_A(\lambda)}$ sempre

OSS: Se $m_A(\lambda) = 1 \Rightarrow d_A(\lambda) = m_A(\lambda) = 1$
Quindi le 2 molteplicità possono differire solo nel caso di autovalori multipli (Non è detto che lo facciano sempre però).

Nota: La moltepl. geom $d_A(\lambda_i)$ di un autovalore λ_i è la dimensione del suo autospazio associato $V_A(\lambda_i)$

TEOREMA DI INDIPENDENZA DEGLI AUTOVETTORI

Sia $A \in M_{n\times n}$

(1) Se $X_1, \dots, X_k$ autovettori di A con relativi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinti (cioè senza molteplicità) allora l'insieme $V = \{X_1, \dots, X_k\}$ è LIBERO

(2) Se $p_A(t)$ ha radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in $\mathbb{K}$ (cioè senza molteplicità), allora scelta per ogni autospazio $V_A(\lambda_i)$ una base B_i l'insieme di vettori $V = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ è LIBERO.

QUINDI BASE

Prop: Se $A \in M_{n\times n}$ ha n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti (quindi hanno molteplicità $m_A(\lambda_i) = 1 \rightarrow$ semplici e la loro somma $m_A(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_n) = n$) $\Rightarrow$ A è DIAGONALIZZABILE

N.B. NON È VERO IL VICEVERSA

Da qst prop discende il:

II CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ $A \in M_{n\times n}$.

Se $p_A(t)$ ha k radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ in $\mathbb{K}$, allora A è DIAGONALIZZABILE se e solo se:

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_A(\lambda_i) = n$

(2) $d_A(\lambda_i) = m_A(\lambda_i) = 1$ $(\forall i = 1, \dots, k)$

In generale in presenza di radici non distinte deve valere:

$m_A(\lambda_i) = d_A(\lambda_i) \quad \forall i \Rightarrow A$ DIAGONALIZZABILE

Th: Se A **non** invertibile $\Rightarrow \exists$ sempre ~~almeno~~ un autovalore di A $\lambda = \phi$

$A \notin GL_n \Rightarrow \exists$ almeno un $\lambda = \phi \Rightarrow$ valido sempre

$(A \in M_{n \times n})$.

Nota: Errore frequente: Per calcolare il polinomio caratteristico non bisogna fare operazioni elementari (OE) di riga. Si prende la matrice e la si lavora così com'è.

DIAGONALIZZAZIONE PER LE MATRICI SIMMETRICHE

A SIMMETRICA sse ${}^tA = A$ $\quad (A \in M_{n \times n} \in \mathbb{R})$

Teorema: Se $A \in M_{n \times n} \in \mathbb{R}$ è simmetrica $({}^tA = A) \Rightarrow$ A è DIAGONALIZZABILE

Nota: A è DIAGONALIZZABILE tramite non solo una matrice invertibile ma t.c. la sua trasposta è uguale all'inversa.

(Cioè A DIAGONALIZZ. $\Rightarrow \exists Q$ t.c.

$${}^tQ \cdot A \cdot Q = D \quad \text{dove } {}^tQ = Q^{-1}$$

quindi $Q^{-1} A Q = D$).

↳ diagonale.

Q si dice in qst caso **ORTOGONALE**

Il vettore che ottengo sarà $\perp$ a quello scelto:

$$(1,-2,0)\cdot(x,-2x+2z,z)=0$$

$$x+4x-4z=0 \Rightarrow 5x-4z=0 \Rightarrow \boxed{5x=4z}$$

ora posso scegliere tutti i possibili risultati di x e z che soddisfano tale relazione, ad esempio $x=4$, $z=5$ o $x=\frac{4}{5}$ e $z=1$.

Sostituisco tali valori nella soluzione di $V_A(-3)$:

$$\underbrace{(x,-2x+2z,z)}_{(x=4,\ z=5)}=(4,-2(4)+2(5),5)=(4,2,5)$$

$$\Downarrow$$

$$(1,-2,0)\perp(4,2,5)$$

Il prodotto scalare deve essere nullo. Infatti:

$$(1,-2,0)\cdot(4,2,5)=4-4=\emptyset$$

Stessa cosa per l'altra soluzione:

$$\underbrace{(x,-2x+2z,z)}_{(x=\frac{4}{5},\ z=1)}=\left(\frac{4}{5},\underbrace{-2\left(\tfrac{4}{5}\right)+2}_{-\frac{8}{5}+2=\frac{-8+10}{5}=\frac{2}{5}},1\right)=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(1,-2,0)\perp\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},1\right)$$

$$\Downarrow$$

infatti:

$$(1,-2,0)\cdot\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},1\right)=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}=\emptyset$$

Quindi:

$\mathcal{L}((1,-2,0),(4,2,5))$ forma una Base ortogonale (relativa all'autospazio $V_A(-3)$.

Qst vettore trovato sarà $\perp$ anche ovviamente con gli autovettori di altri autospazi.

Prop $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Se A e B <u>simili</u> $\Rightarrow p_A(t) = p_B(t)$

A simile a $B \overset{(sse)}{\Longleftrightarrow} \exists P$ invert. t.c. $P^{-1}AP = B$

Chiamiamo $O(n)$ le <u>matrici ortogonali</u> $n \times n$. Come già detto:

$$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad A \in O(n) \Rightarrow {}^tAA = I_n$$

$$\Rightarrow A \in GL_n \text{ e } A^{-1} = {}^tA.$$

Proprietà $O(n)$

(1) $A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n)$

Il prodotto di due matrici ortogonali è anche una matrice ortogonale.

(2) $A \in O(n) \Rightarrow \det A = \pm 1$

Cioè il determinante di una matrice ortogonale può essere <u>solo</u> 1 o −1 : se <u>$\det(A) = 1$</u> (con $A \in O(n)$) $\Rightarrow$ <u>ROTAZIONE SENSO ANTIORARIO</u>

se <u>$\det(A) = -1$</u> (con $A \in O(n)$) $\Rightarrow$ <u>ROTAZIONE SENSO ORARIO</u>

(3) $\forall\ X, Y \in \mathbb{R}^n$ (due generici vettori) se $A \in O(n)$

$$\Rightarrow \underbrace{AX \cdot AY = X \cdot Y}_{\text{prodotto scalare}}$$

Cioè il prodotto scalare rimane invariato.

Quindi qst ci dice che si sta mantenendo invariato anche la distanza tra due punti, perché per come abbiamo definito la norma (cioè la distanza):

$$\|P-Q\| = \sqrt{(P-Q)\underset{\text{prodotto scalare}}{\cdot}(P-Q)} \Rightarrow \boxed{\|AX-AY\| = \|X-Y\|}$$

Se moltiplico R_θ per un p.to (x,y) ottengo:

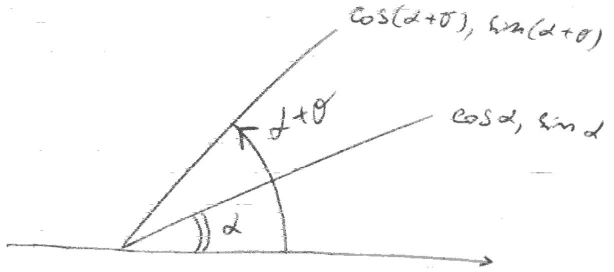
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

$o \to (x,y)$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha \qquad \alpha \in (0,2\pi)$

Graficamente:



Nota: la rotazione è in senso antiorario perché abbiamo usato la R_θ e il $\det(R_\theta) = +1$.

Prop: $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad {}^tA = A$ (simmetrica). Allora:

(1) A ha tutti gli autovalori reali

(2) Gli autovettori di A relativi agli autovalori distinti sono ortogonali tra loro.

Nota:
- Per A SIMMETRICA $\Rightarrow$ A non necessariamente INVERTIBILE
- Per A ORTOGONALE $\Rightarrow$ A deve essere INVERTIBILE.

- Per matrice A qualsiasi $\Rightarrow$ se λ_i DISTINTI $\Rightarrow \lambda_i$ $\Rightarrow$ le soluzioni associati ai loro autospazi $V_A(\lambda_i)$ formano una BASE.
  $\Downarrow$
  $\sum_{i=1}^{n} m_a(\lambda_i) = n \Rightarrow$ A DIAGONALIZZABILE

- Per matrice A SIMMETRICA $\Rightarrow$ se λ_i DISTINTI $\Rightarrow \lambda_i$ $\Rightarrow$ le soluz. di $V_A(\lambda_i)$ formano una base e in più gli autovettori di A relativi a qst autovalori distinti sono $\perp$ tra loro.
  $\Downarrow$
  (so già che è DIAGONALIZZABILE)

Se li normalizzo ottengo la base ORTONORMALE $\Leftarrow$

FORME QUADRATICHE

Sono polinomi omogenei di grado 2 in n variabili.

Noi studiamo il caso di $\boxed{n=2}$

$$\boxed{q(x,y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy}$$

Per scriverle usiamo la forma matriciale

$$q(x,y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE SIMMETRICA}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ posso sfruttare quindi le sue proprietà.

- Ad una $q_A(x)$ associo una $A = {}^tA$ (simmetrica) e viceversa

$$q_A(x) = {}^tXAX \qquad X \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_{n \times n} \text{ simmetrica}$$

Definizioni: per $q_A(\emptyset) = \emptyset$

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ $q_A(x) > \emptyset$ per $x \neq \emptyset$

q_A è ~~DEFINITA POSITIVA~~ $q_A < 0$

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ $q(x) < \emptyset$ per $x \neq \emptyset$

q_A è DEFINITA NEGATIVA $q_A < \emptyset$

$\boxed{3° \text{ CASO}}$ x_1, x_2 t.c. $q_A(x_1) > \emptyset$ e $q_A(x_2) < \emptyset$

q è INDEFINITA

CASI DEGENERI