NUMERO: 1247

DATA: 27/10/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Matina

MATERIA: Fisica I

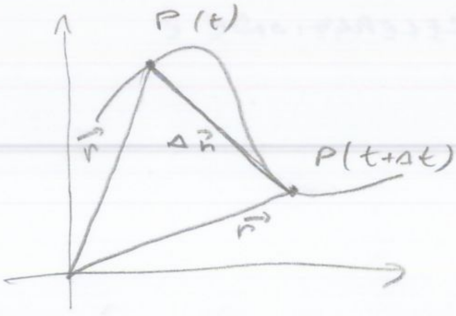
Prof. Scalerandi

# APPUNTI DI FISICA

docente: MARCO SCALERANDI
Studente: MICHELANGELO MATINA

anno: 2013\2014

VETTORE SPOSTAMENTO = distanza tra la posizione finale e quella iniziale quindi ≠ da SPAZIO PERCORSO




$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - r(t)$$

$$\Delta \vec{r} \neq \Delta S$$

VETTORE SCALARE

Se però consideriamo $\Delta t \to 0$

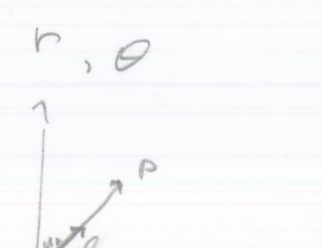
$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S \quad \text{quindi } dr = ds$$

OSSIA IL MODULO DEL VETTORE SPOSTAMENTO = ALLO SPAZIO PERCORSO (ARCO DI CIRCONFERENZA)

direzione $\Delta \vec{r} \to \lim_{\Delta t \to 0} \Delta r \to$ è tangente alla traiettoria

- COORDINATE POLARI

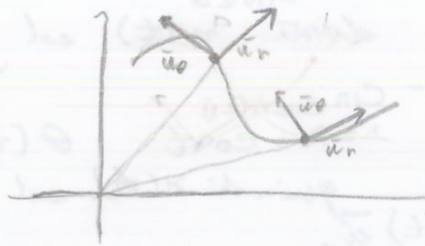
- $r, \theta$




$\vec{r} = r \vec{u}_r$

si descrive $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_r$

NEL TEMPO VARIANO $\vec{u}_\theta$ ed $\vec{u}_r$

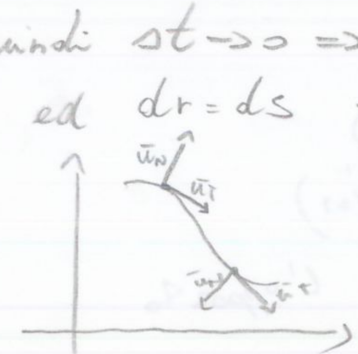



- COORDINATE INTRINSECHE

1. DIREZIONE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

quindi $\Delta t \to 0 \Rightarrow dt$

ed $dr = ds \implies d\vec{r} = dr\,\vec{u}_T = ds\,\vec{u}_T$




$\vec{u}_N \perp \vec{u}_T$ $u_N$ rivolto sempre verso l'esterno della TRAIETTORIA

NEL TEMPO VARIANO $\vec{u}_N$ e $\vec{u}_T$

(1) VELOCITÀ = GRANDEZZA VETTORIALE CHE DESCRIVE 

LA DERIVATA DEL VETTORE POSIZIONE RISPETTO AL TEMPO (si definisce come varia $\vec{r}$ rispetto al tempo)

$$\vec{v} \overset{def}{=} \frac{dr}{dt}$$

- COORDINATE CARTESIANE

$$\vec{r} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$ NON VARIABILI NEL TEMPO SISTEMA FISSO

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$$ quindi:

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

- COORDINATE INTRINSECHE

Sappiamo che $\Delta t \to 0 \Rightarrow dt$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

poichè per $\Delta t \to 0 \Rightarrow dr = ds$ e direzione tangente alla traiettoria

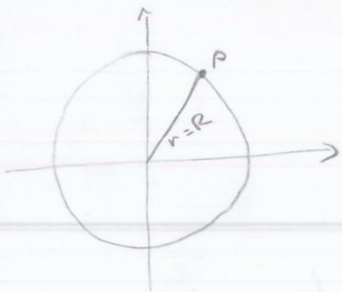
si ottiene: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \vec{u}_T$

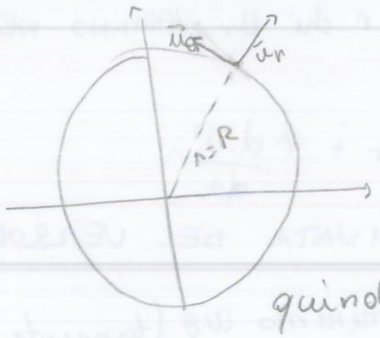
quindi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = \vec{v}\, u_T$

$\frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt}$ NON È FORMALMENTE CORRETTO È UN'APPROSSIMAZIONE

$$\frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

## - MOTO CIRCOLARE




COORDINATE POLARI

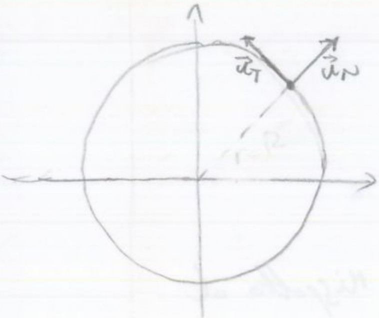
$r = R$ cost

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

POICHÉ NON C'È VARIAZIONE

quindi: $\vec v = \cancel{\frac{dr}{dt}\vec u_r} + \frac{r\,d\theta}{dt}\vec u_\theta$

COORDINATE INTRINSECHE $\vec v = \frac{r\,d\theta}{dt}\vec u_\theta$




$r = R$ cost

$\vec u_N = \vec u_r \rightarrow \vec u_T = \vec u_\theta$

$\vec v = \frac{dr}{dt}\vec u_T = \frac{dr}{dt}\vec u_\theta$

ANCHE IN QUESTO CASO COORDINATE POLARI ED INTRINSECHE COINCIDONO quindi:

$$\frac{dr}{dt}\cancel{\vec u_\theta} = \frac{r\,d\theta}{dt}\cancel{\vec u_\theta} \Rightarrow \vec v = \frac{r\,d\theta}{dt}$$

$\vec v = \omega \cdot R$

IN CONCLUSIONE

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{u}_T-\frac{v^2}{R}\vec{u}_N=a_T\vec{u}_T+a_c\vec{u}_N$$

$\hookrightarrow$ DIRETTA VERSO IL CENTRO DI CURVATURA

$a_T$ = ACCELERAZIONE TANGENZIALE → come varia modulo di $\vec{v}$

$a_c$ = ACCELERAZIONE CENTRIPETA → come varia accelerazione di $\vec{v}$

se ACCELERO $\vec{v}$ cambia < MODULO / DIREZIONE > O ENTRAMBI

IN GENERALE se $a_T\vec{u}_T$ stesso verso di $\vec{v}$ allora $\vec{v}$ ↑

CASI PARTICOLARI:

- MOTO RETTILINEO

RAGGIO DI CURVATURA $=\infty$

$$a_c=-\frac{v^2}{R}=0$$

- CIRCOLARE UNIFORME

TRAIETTORIA CIRCONFERENZA e $\vec{v}$ cost. in modulo

quindi $a_T=\frac{dv}{dt}=0$

- PER OGNI TRAIETTORIA NON RETTILINEA

$a_c\neq 0 \Rightarrow \vec{a}\neq 0$

- COORDINATE POLARI

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$ → FACCIO DERIVATA DEL PRODOTTO

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+\frac{r\,d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)=$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r+\frac{dr}{dt}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{r\,d\theta}{dt}\underbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}}_{-\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r}+\frac{r\,d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta=$$

$$=\vec{u}_r\left[\frac{d^2r}{dt}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]+\vec{u}_\theta\left[2\frac{dr\,d\theta}{dt^2}+\frac{r\,d^2\theta}{dt^2}\right]$$

# DINAMICA

## • Leggi di Newton

1. LEGGE D'INERZIA

Un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto se non intervengono cause a modificarlo

NO CAUSA $\longrightarrow$ $\vec{v} = cost$ IN MODULO E DIREZIONE (non invertibile)

no interazioni con altri corpi $\longrightarrow$ MOTO RETTILINEO UNIFORME

MOTO RETTILINEO UNIFORME $\longrightarrow$ $\sum$ CAUSE $= 0$

2. SECONDO PRINCIPIO

$\vec{F}$ è la causa della variazione di $\vec{v}$, è una grandezza VETTORIALE proporzionale ad $\vec{a}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{F = m\vec{a}}$

$m$ $\longleftarrow$ costante di proporzionalità

- Se $\vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{a} = 0 \longrightarrow \vec{v} = cost$ (CONTIENE I PRINCIPIO)

$\vec{F}$ direzione parallela e verso concorde ad $\vec{a}$

$|\vec{F}| = m|\vec{a}|$

- Se $\vec{F} = cost \longrightarrow \vec{a} = cost \longrightarrow$ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

CONDIZIONI DI VALIDITÀ:
- MASSA COSTANTE
- SISTEMI DI RIFERIMENTO FISSI < INERZIALE / CARTESIANO

PROPORZIONALITÀ DIRETTA: $\longrightarrow$ se $|\vec{F}| \uparrow \Rightarrow |\vec{a}| \uparrow$

$m$ = MASSA INERZIALE = misura la resistenza che il corpo offre a cambiare il suo moto

Se $\vec{a}$ NOTA quando $m \uparrow \Rightarrow |\vec{F}| \uparrow$

se $\vec{F}$ NOTA quando $m \uparrow \Rightarrow |\vec{a}| \downarrow$

• ANALISI DIMENSIONALE:

$|\vec{F}| = m|\vec{a}|$

$\boxed{[F] = [M][L][T^{-2}]}$

$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$ NEWTON

- QUANTITÀ DI MOTO : IMPULSO

$\vec{q} = m\vec{v}$ $\quad F = \frac{d\vec{q}}{dt}$ → sistemi a masse costante (studio dei punti materiali)

GENERALIZZAZIONE 2ª LEGGE

$$F dt = d\vec{q}$$

EFFETTO DI UNA FORZA

↳ dinamico a $\Delta t$ FINITO (forza dura nel tempo)

EFFETTO di una forza nel tempo → IMPULSO : $\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt \Longrightarrow d\vec{J} = \vec{F} dt \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{J}}{dt}$

Se la forza è costante nel tempo

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = F \int_{t_0}^{t} dt = (t - t_0) \cdot F \quad \text{quindi } \vec{J} = F(t - t_0)$$

TEOREMA della QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = \int_{t_0}^{t} m\vec{a} dt = \int_{v_0}^{v} m dv = m \int_{v_0}^{v} dv = m(v - v_0)$$

Se costante

quindi $\vec{J} = \Delta\vec{q} = mv - mv_0$

La forza che agisce nel tempo produce una VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

- Se $\vec{F}$ = costante ⟶ VALE L'EQUAZIONE : $F(t - t_0) = m(v - v_0)$

$$d\vec{J} = d\vec{q} \longrightarrow \vec{F} dt = d\vec{q} \Longrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$ GENERALIZZAZIONE SECONDA LEGGE

- Se $m$ = cost

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{m d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- Se $m \neq$ cost

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

# • FORZE FISICHE

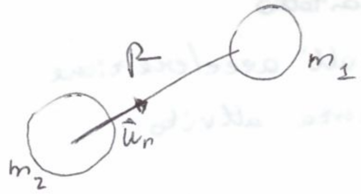
## 1. ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE $\Longrightarrow$ 2 masse si attraggono

a) MODULO: proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza

$$|F_G| = -\frac{m_1 \cdot m_2}{R} \cdot G$$ ← costante di GRAVITAZIONE UNIVERSALE (costante di proporzionalità) $= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$

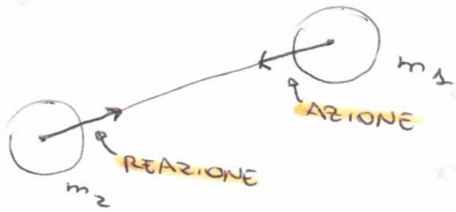
SIGNIFICATO $F_G$

- Se $\sum \vec{F} = 0$ $\quad F_G$ è sempre importante
- Se $\exists \vec{F} \neq 0$ ed $\sum \vec{F} \neq 0$ $\quad F_G$ importa solo se una delle due masse è molto grande




b) DIREZIONE: parallela ad $R$: $\vec{u}_r$

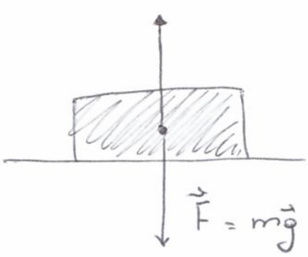
c) VERSO: sempre ATTRATTIVO (segno negativo simbolo)




ovviamente vale il III PRINCIPIO

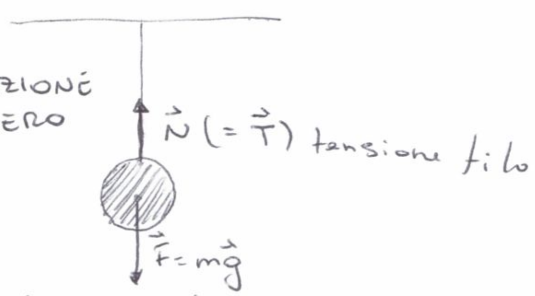
## 2. REAZIONE VINCOLARE

Se un corpo, soggetto a una forza o più tali che $\vec{R} \neq 0$, rimane immobile allora esiste una forza vincolare $\vec{N}$ tale che $\vec{R} + \vec{N} = 0$




$\vec{N} + m\vec{g} = 0$

QUINDI L'ACCELERAZIONE LUNGO ASSE Y È ZERO



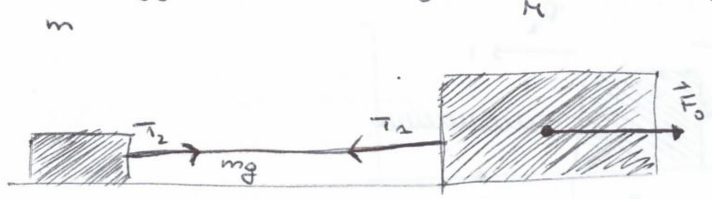

La reazione vincolare non può essere calcolata a priori: manifesta la capacità dell'ambiente di opporsi all'azione di $\vec{R}$.

$\vec{N} \longrightarrow$ FORZA:
- ortogonale al piano del vincolo
- modulo uguale ad $\vec{R}$
- verso dal vincolo verso la massa

4. TENSIONI FUNI



Forze che compaiono se due oggetti sono collegati da sbarre//fune




$$\begin{cases} F_0 - T_1 = M a_M \\ T_1 - T_2 = m_F a_F \\ T_2 = m a_m \end{cases}$$

Fune / sbarra ideale ⟶ MASSA TRASCURABILE
INESTENSIBILE

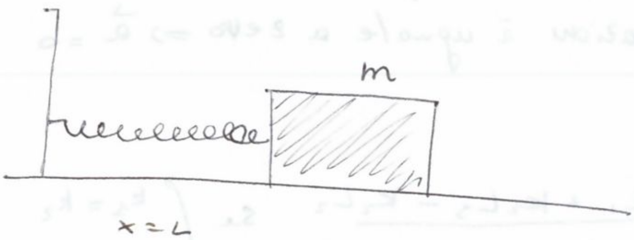
la seconda eq. del sistema diventa: $T_1 - T_2 = 0$

Osservazioni:

a) T solo se fune tesa

b) $T^{MAX}$ = CARICO DI ROTTURA ⟶ se $T > T^{MAX}$ Fune si spezza

5. FORZA ELASTICA

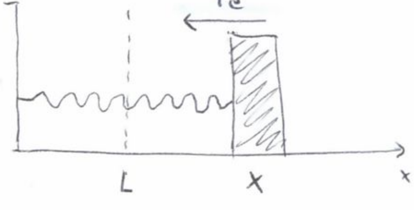


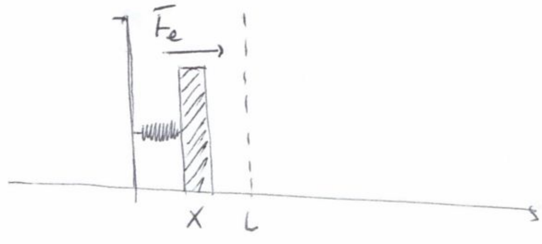

L = lunghezza molla a RIPOSO
k = costante elastica

$\vec{F}(x) = -k(x-L)\vec{u}_x$

$F(x) = -k(x-L)$ [QUANTITÀ SCALARI]

la Forza elastica è una forza di RICHIAMO alla posizione di equilibrio. Può avere segno positivo o negativo a seconda se la molla è stata compressa o dilatata.

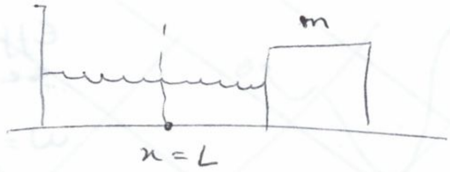



$X > L \Rightarrow F(x) < 0$ $X < L \Rightarrow F_x > 0$

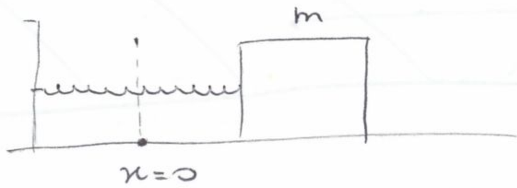
Se $F = ma$

$$-k(x-L) = m\, x'' \longrightarrow \vec{a}$$




1) $$\underbrace{x'' + \frac{k}{m}x = \frac{Lk}{m}}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE COMPLETA




2) $$\underbrace{x'' + \frac{k}{m}x = 0}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA

$x'' = -\frac{kx}{m} \longrightarrow x''$ = accelerazione centripeta quindi: $-\omega^2 \cancel{x} = -\frac{k\cancel{x}}{m}$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Il moto è armonico semplice con pulsazione $\omega$ e periodo $T$ determinati dal rapporto tra la costante elastica e la massa del punto materiale a cui è applicata $F_e$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Riprendendo il punto 1)

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{Lk}{m} \Rightarrow X_{gen}(t) = \underset{\text{int. gen}}{X(t)} + \underset{\text{soluz. part.}}{X_{S.P}}$$

Una possibile sol particolare: $L$ ($L'' = 0$)

Se $L \neq 0$ $\boxed{x_{gen}(t) = L + A\sin(\omega t + \phi)}$ eq. moto armonico semplice

## TEOREMA DELL' ENERGIA CINETICA

definizione di lavoro $W = \int F_T \, ds$

se $ds = 0$

Sappiamo che $dW = F_T ds = F \cos\theta \cdot ds = F \cdot d\vec{r}$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m\vec{a} \, d\vec{r} = \int m \frac{dv}{dt} d\vec{r} = \int m v \, dv$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z$$

$$W = \int_{v_A}^{v_B} m (v_x dx + v_y dv_y + v_z dv_z) = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \Big|_{v_A}^{v_B}$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = \Delta K$$

$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2$ ENERGIA CINETICA $\longrightarrow$ $W = \Delta K$

$dW = dK$

Se siamo in un moto 1-D e la forza è costante

$\vec{F} = \text{cost} \longrightarrow W = \int_{x_0}^{x} F \cdot dx = F(x - x_0) = F \cdot \Delta x$

## POTENZA

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \, d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$dW = -dE_p$

a) DEFINISCE UNA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE

$\Longrightarrow E_p$ É DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA ARBITRARIA

Esempio : $E_A, E_B$ SCELTA I

$E'_A = E_A + K, \quad E'_B = E_B + K$

$W = -\Delta E_p = -\Delta E'_p = -(E_B - E_A)$

b) FISSO SISTEMA DI RIFERIMENTO DELL' ENERGIA POTENZIALE

$\Rightarrow$ SCELGO POSIZIONE

$| \; E_p(x_0, y_0, z_0) = 0$

$\Rightarrow$ FISSATO K

c) ESEMPI:

i) FORZA ELASTICA

$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + k$

Forza elastica costante nell'integrale che definisce il lavoro viene portata fuori

$W = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_0^2) \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2 \longrightarrow dE_p = -dW = +kx\,dx$

$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -kx\vec{u}_x \qquad d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$

$dE_p = -dW \qquad W = \int F dx = \int kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$

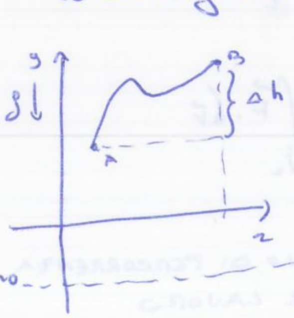
$x = x_0 = 0 \Longrightarrow E_p = 0$

$\Rightarrow \Delta l = 0 \Rightarrow$ MOLLA NON DEFORMATA

$E_p(x-0) = 0 + K = 0 \Rightarrow K = 0$

ii) FORZA PESO

$W = -mg\Delta h$



$\Delta h = y_f - y_i$

$\Delta h = \underbrace{(y_f - h_0)}_{} - \underbrace{(y_i - h_0)}_{}$

ALTEZZA DEL PUNTO FINALE E INIZIALE RISPETTO AD $h_0$

$W = -[mg(y_f - h_0) - mg(y_i - h_0)]$

$\Delta$ ENERGIA POTENZIALE RISPETTO AD UN PUNTO

$W = -[mg(y_f - h_0) - mg(y_i - h_0)]$

$E_p = mg(y_f - h_0) = mgh \longrightarrow h$ rispetto ad $h_0$

(SI PUÓ ELIMINARE COST. ADDITIVA)

Se $y = h_0 \Rightarrow E_p = 0$

$\Rightarrow h_0$ = QUOTA A CUI ASSEGNO ENERGIA NULLA

$\Rightarrow h$ = QUOTA RISPETTO AD $h_0$

5) CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA 

$H_p \Rightarrow W = +\Delta K \quad \forall$ FORZA (ANCHE NON CONSERVATIVE)

Se $\sum \vec{F}_{Nc} = 0 \Rightarrow W = -\Delta E_p = E_{p\,in} - E_{p\,fin} = K_{fin} - K_{in}$

$K_f + E_{pf} = K_{in} + E_{p\,in}$

$E_{MECCANICA} = K + E_p$

↳ SOMMA DI ENERGIA CINETICA ed ENERGIA POTENZIALE

IN ASSENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE ⇒ ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA (costante)

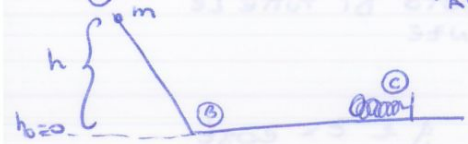
quindi "$E_{M\,in} = E_{M\,fin}$" ⇒ "$\Delta E_M = 0$"

$K + E_p = cost \qquad dE_M = 0 \qquad \cancel{\Delta E_M = cost}$ (SBAGLIATO)

Se $K \uparrow \quad E_p \downarrow$

Se $\Delta K > 0 \quad \Delta E_p < 0 \Rightarrow W =$ positivo $(W > 0)$

ESEMPIO:




(A) ⇒ $K_A = 0 \quad E^G_{p_A} = mgh$

$E^E_{p_A} = 0$ poiché molla a riposo.

(B) ⇒ $K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad E^G_{pB} = 0$

(C) $K_c = 0 \quad E^G_{pc} = 0 \quad E^E_{pc} = \frac{1}{2} k x_c^2 \qquad E^E_{pB} = 0$

poiché $E_M = cost \Rightarrow E^{TOT}_A = E^{TOT}_B \Rightarrow E^{TOT}_B = E^{TOT}_c$

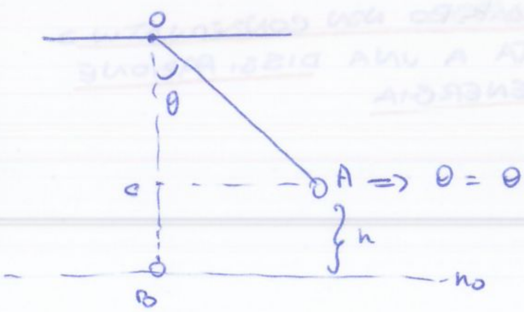
$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \qquad \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} k x_c^2$

FORZA PESO ED ELASTICA SONO FORZE CONSERVATIVE

quindi

$E^{TOT}_A = E^{TOT}_c$ proprietà di simmetria

$mgh = \frac{1}{2} k x_c^2$




$h = \overline{BC} = \overline{BO} - \overline{CO}$

(A) $K_A = 0 \qquad E_{PA} = mgh = mgl(1-\cos\theta)$

(B) $K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \qquad E_{P_B} = 0 \qquad E_A = E_B$

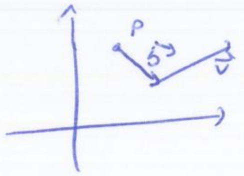
$\Downarrow$

$mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m v_B^2$

ii) $\Rightarrow L$ momento angolare

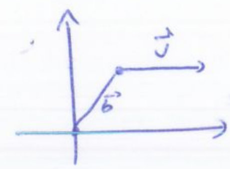
$\Rightarrow$ POLO P

BRACCIO $\vec{b}$




SISTEMA DI RIFERIMENTO $\Rightarrow$ Se POLO = ORIGINE

$\vec{b} = \vec{r}$




quindi $\vec{L} = \vec{b} \wedge \vec{q}$ (prodotto vettoriale)

$\vec{L} = \vec{b} \wedge m\vec{v}$

OSSERVAZIONI:

i) NOTO $\vec{q} \Rightarrow \vec{L}$ significa $\vec{q}$ e $\vec{L}$ NON INDIPENDENTI (corpo puntiforme)

ii) $\vec{v} = \vec{v}_r \vec{u}_r + \vec{v}_\theta \vec{u}_\theta$

Se $\vec{b} = \vec{r} \quad \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \wedge m v_r \vec{u}_r + \vec{r} \wedge m v_\theta \vec{u}_\theta$

$\boxed{\vec{r} \parallel \vec{u}_r = 0}$

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m v_\theta \vec{u}_\theta$

$\vec{r} \perp \vec{u}_\theta$

VELOCITÀ ANGOLARE $\rightarrow v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$

$|L| = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$

iii) $\frac{d\vec{L}}{dt} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{b} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\vec{b}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{b} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

MA $\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}$

TEOREMA MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{dt} \wedge m\vec{v} + \underbrace{\vec{b} \wedge \vec{F}}_{\text{MOMENTO DELLA FORZA}}$$

Se $\vec{b} \equiv \vec{r} \quad P \equiv O \qquad \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} \wedge m\vec{v} = 0 \quad \vec{v} \parallel m\vec{v}$

quindi $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$\frac{1}{2} r dr \approx \frac{1}{2} r \underbrace{ds}_{\text{ARCO}} = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$

$A_{CERCHIO} = \pi r^2 = \frac{1}{2} \underbrace{2\pi}_{\theta} r^2 \qquad dA = \frac{1}{2} d\theta r^2$

AREA SPAZZATA da $\vec{r}$ in $dt$

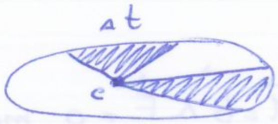
$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow r^2 d\theta = 2dA$$

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = 2m \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad \text{VELOCITÀ AREOLARE}$$

$$\frac{dA}{dt} = cost.$$

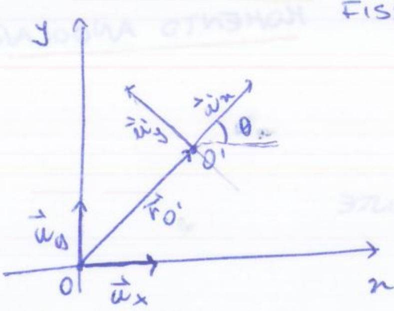
II KEPLERO $\Rightarrow$ PIANETI PERCORSI AREE UGUALI IN TEMPI UGUGUALI




- SISTEMI DI RIFERIMENTO NON FISSI

$\Rightarrow$ MOTI RELATIVI

$\Rightarrow$ DESCRIVI LO STESSO PROBLEMA IN 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO DIVERSI FISSO



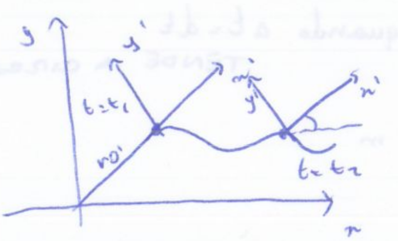

DEF. II SISTEMA DI RIFERIMENTO RISPETTO AL FISSO

- $O' =$ PUNTO $= \vec{r}_{O'}$
- ASSI $\Rightarrow \vec{u}_x' =$ VERSORE $=$ ANGOLO quindi $\theta$ RISPETTO AD $x$

NON FISSO $\Rightarrow$ VARIA NEL TEMPO

- $r_{O'}(t)$, $\theta = cost$

$O' \Rightarrow$ TRAIETTORIA DIREZIONE $x'$ e $y'$ = costante




MOTO TRASLATORIO

$$\vec{r}_{O'}(t) = x_{O'}(t)\vec{u}_x + y_{O'}(t)\vec{u}_y$$

## MOTI RELATIVI



A) Si hanno in sistemi di riferimento uno fisso (SR) e un secondo che è in moto (S'R')

$S'R' \Rightarrow O \Rightarrow \vec{r}_{O'}(t)$ → rappresenta la posizione di O' in S.R

i versori di $\vec{r}$ saranno $\vec{u}_x(t)$ ed $\vec{u}'_y(t) \Rightarrow \theta = \theta(t)$

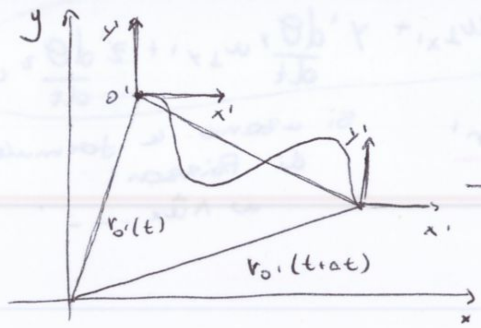
B) $\vec{r}_{O'}(t)$ con $\theta$ costante

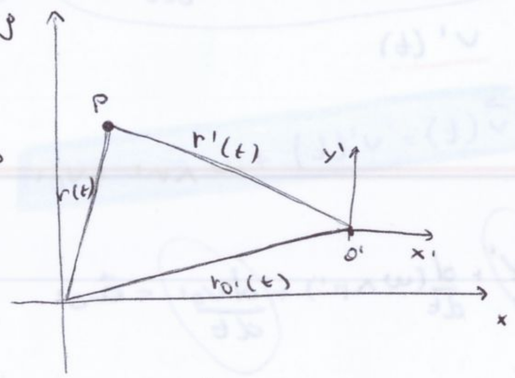
c) $\vec{r}_{O'}(t)$ con $\theta(t)$

D) APPLICAZIONE

E) DINAMICA

B) S.R' viene traslato → significa direzioni $\vec{u}'_x$ e $\vec{u}'_y$ costanti rispetto ad SR




$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t)$

$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{O'}(t)$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \; v_{O'}$

→ NON DERIVO I VERSORI POICHÉ COSTANTI

$r(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$

P HA POSIZIONE IN S.R

$r'(t) = x'(t)\vec{u}_{x'} + y'(t)\vec{u}_{y'} + z'(t)\vec{u}_{z'}$

P HA POSIZIONE IN S.R'

$r_{O'}(t)$ → POSIZIONE DI O' in SR

$\vec{v}(t) = v'(t) + v_{O'}(t)$ → TEOREMA DELLA VELOCITÀ RELATIVA

$v'(t)$: di P in S.R'

$v_{O'}(t)$: di O' in S.R — VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

$V(t) = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$

$V'(t) = v'_x\vec{u}'_x + v'_y\vec{u}'_y + v'_z\vec{u}'_z$

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} \; a_{O'}$

$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_{O'}$ → TEOREMA DELL'ACCELERAZIONE RELATIVA

$\vec{a}'(t)$: di P in S.R'

$\vec{a}_{O'}$: di O' in S.R — ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO

## CASI PARTICOLARI

i) TRASLAZIONE DI $S'R' \rightarrow \dot{\theta} = cost$

$\vec{\omega} = 0 \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \Rightarrow \omega \wedge (\omega \wedge r') = 0, \quad 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} \wedge r' = 0$

ii) ROTAZIONE DI $S'R'$

$O'$ FISSO $\quad \vec{r}_{O'} = cost \rightarrow v_{O'} = 0, a_{O'} = 0$

$\vec{a}(t) = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$

$\vec{v}(t) = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

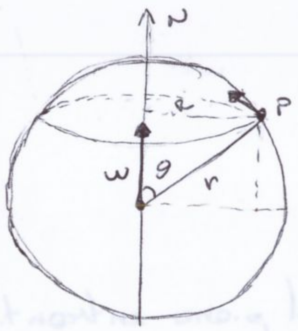
iii) ROTAZIONE CIRCOLARE UNIFORME DI $S'R'$

$\vec{\omega} = cost. \qquad \theta = \vec{\omega} t$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \implies$ oltre alle precedenti assunzioni $\longrightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

D) APPLICAZIONE $\rightarrow$ CADUTA DI UN GRAVE RISPETTO ALLA TERRA

- OSSERVAZIONI GENERALI




in P consideriamo $S'R'$

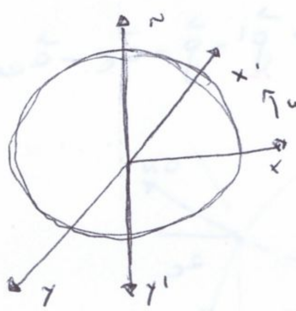
$\vec{v}_T = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$\omega \perp$ al piano ed entrante $\hat{\jmath}\omega$

$\vec{v}_T = \omega R = \frac{2\pi}{T} r \sin\theta$

Per $\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow v_T = 1651$ km/h

$a_c = \omega^2 R = 3,38 \cdot 10^{-2}$ m/s²




$\hat{\jmath}\omega \qquad \theta \Rightarrow \omega = cost \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\underline{\underline{24\,ore}}} T$

E) FORZE APPARENTI



S.R fisso → INERZIALE

MISURO $\vec{a}$

FORZE FISICHE $\vec{F}_{fisiche}$ $\quad \vec{F}_{fisich} = m\vec{a}$

CAMBIANDO SISTEMA DI RIFERIMENTO

$\vec{a}' \neq \vec{a}$ → ciò significa che $\vec{F} = m\vec{a}$ non è più vera. $F = ma'$ potrebbe andare bene ma non ---- a questo punto la seconda legge della dinamica non è valida in S'R' allora si introduce un nuovo concetto di forza, le forze apparenti che non sono fisiche, si chiamano apparenti perché legate al sistema di riferimento.

Se in S.R $\vec{F}_{fis} = m\vec{a}$ $\quad$ in S'R' $\vec{F}_{fis} + \vec{F}_{app} = m\vec{a}'$

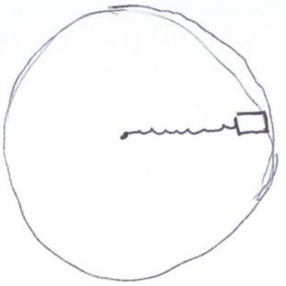
$$\begin{cases} \vec{F}_{fis} = m\vec{a} \\ \vec{F}_{fis} + \vec{F}_{app} = m\vec{a}' \end{cases} \quad \text{PROCEDO SOTTRAENDO} \quad \vec{F}_{app} = m\boxed{(\vec{a} - \vec{a}')} = a_{coriolis} + a_{trasc.}$$

$$\vec{F}_{app} = m(\vec{a} - \vec{a}') = m\vec{a}_{O'} - \underbrace{m(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}')}_{\text{FORZA CENTRIPETA}} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v})}_{\text{FORZA DI CORIOLIS}} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge r'$$

Se prendo un sistema di riferimento dove valgono le seguenti condizioni → MOTO TRASLATORIO RETTILINEO UNIFORME

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_{O'} = 0 \\ \vec{\omega} = 0 \\ \theta = cost \end{array}\right\}$$ si dimostra che $\vec{a}' = \vec{a}$ e le forze apparenti sono nulle

ESEMPIO: GIOSTRA CHE RUOTA CON $\vec{\omega} = cost$



SR ed S'R' vedono il $\Delta l$ della molla $> 0$

$F_{fisica} = -k\Delta l$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ MOLTO GRANDE

$\Rightarrow$ CONFRONTO

dove $\lambda, \lambda'$ sono le SORGENTI

$\vec{F} = k \frac{\lambda\lambda'}{r^2} \vec{u}_r$  $\lambda <^{m}_{q}$  $k <^{-\gamma}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$

- $k_c$ GRANDE $\rightarrow$ FORZA SEMPRE SIGNIFICATIVA

$k_g$ PICCOLA $\rightarrow$ FORZA SIGNIFICATIVA SOLO SE MASSE GRANDI quindi m picc $\Rightarrow$ TRASCURABILE

- $\gamma$ NON DIPENDE DAL MEZZO FRA LE MASSE

$\varepsilon$ DIPENDE DAL MEZZO TRA LE CARICHE

$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_r$ COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA
variazione rispetto alla condizione di vuoto

ARIA $\varepsilon_r \sim 1$

- $a_m$ ? $\Rightarrow$ $F = -\gamma \frac{\cancel{m} m'}{r^2} \vec{u}_r = \cancel{m} \vec{a}$ accelerazione indipendente dalle masse stesse dipende da m' che ha generato la forza

$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{qq'}{mr^2} \vec{u}_r = \vec{a}_m$ quindi l'accelerazione dipende dalla massa

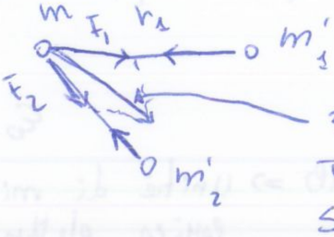
$\Rightarrow$ COSA ACCADE SE HO + SORGENTI ?

m, m'  m' $\Rightarrow$ applica una forza su m ($\vec{F}_G$)
quindi m' sorgente di una forza che agisce su m chiamata SONDA (sente presenza della forza)

PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE VALE IL CONTRARIO

m $\Rightarrow$ INTERAGISCE CON MOLTE SORGENTI $m'_i$

$\vec{F}_i = -\gamma \frac{m m'_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$

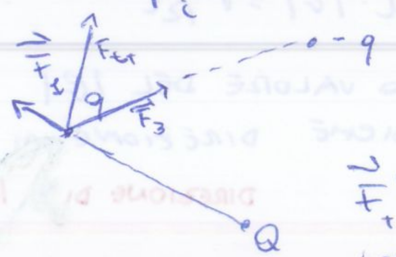


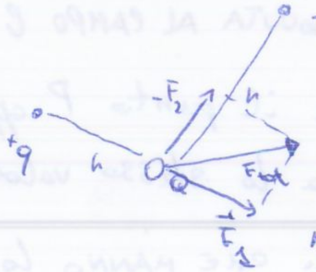

FORZA GRAVITAZIONALE TOTALE DATA DALLA SOMMA DELLE FORZE i-esime.

$$\vec{F}_G = \sum \vec{F}_i = -\gamma\, m \left( \frac{m'_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \right)$$

Esempio

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, q \sum \frac{q'_i}{r_i^2} \vec{u}_r$$





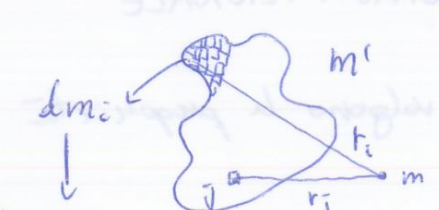
$r_{q,Q} = r_{-q,Q}$

$Q > 0 \Rightarrow Q \gg +q$

N.B $\Rightarrow$ Q si muove
$\Rightarrow$ distanze cambiano $r_1(t),\ r_2(t)$
$\Rightarrow \vec{F}^T_{c..} = \vec{F}^T_c(t)$

$\vec{F}^q_r \neq \vec{F}^Q_r$
non hanno più direzione costante

$\Longrightarrow$ SORGENTE ESTESA



$$F_G = -\gamma\, m \int_V \frac{dm_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad \text{(integrale di volume)}$$

$dm = \rho\, dV$ dove $\rho$ = DENSITÀ

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, q \int_V \frac{dq_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

ii) ENERGIA POTENZIALE $\quad W \overset{def}{=} -\Delta E_p \Longrightarrow dW = -dE_p$

$\vec{\nabla} E_p = -\vec{F}$
$\hookrightarrow \dfrac{\partial}{\partial r}$

$$E_G = -\gamma \frac{m m'}{r} \qquad E_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q q'}{r}$$

IMPORTANTE — NON IMPORTANTE

derivate rispetto al raggio e in direzione ortogonale ma le forze non dipende dalla dir. ort. quindi derivate = 0

iii) Concetto di CAMPO

$\Rightarrow$ GRAVITAZIONALE $\Rightarrow$ MASSA m e PUNTO P : domanda in P esiste FORZA?

m

Se m' IN P $\Rightarrow \vec{F}$ esiste

P

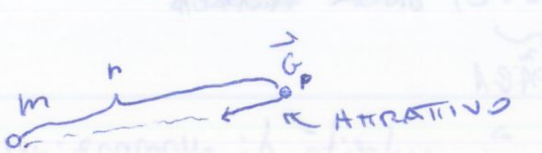
m' NON IN P $\Rightarrow$ NON VEDO $\vec{F}$

$m' = 0$

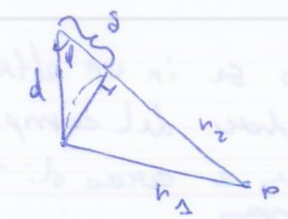
INTRODUCO CAMPO $= \dfrac{\vec{F}}{\text{SONDA}}$

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

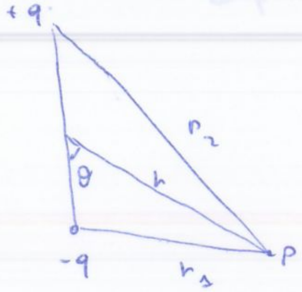
CAMPO GRAVITAZIONALE GENERATO DALLA MASSA m nel PUNTO P che si TROVA A DISTANZA r



② se $h = r\sin\theta >> d$




$r_1 - r_2 \Rightarrow \quad \delta = r_1 - r_2 \sim d\cos\varphi$




$\theta \sim \varphi \qquad r \sim \frac{r_1 + r_2}{2}$

quindi $\quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_2 \cdot r_1}\right)$

poiché $\Rightarrow r_1 - r_2 = d\cos\theta$ ed $r \sim r_1 \sim r_2$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$d \to \vec{d} \qquad \vec{d}\cdot\vec{u}_r = d\cos\theta \qquad V = q\,\frac{\vec{d}\cdot\vec{u}_r}{r^2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon}$

PER UNA SINGOLA SORGENTE INVECE: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$

Ⓑ FLUSSO

$\Rightarrow$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE DI UN CAMPO


$d\phi \overset{def}{=} \vec{G}\cdot\vec{n}\,d\Sigma \qquad \vec{G}$ = campo $\quad \vec{n}$ = VERSORE normale a $d\Sigma$

$\phi = \int_\Sigma \vec{G}\cdot\vec{n}\,d\Sigma$ INTEGRALE DI SUPERFICIE

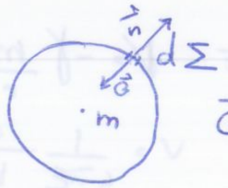
TEOREMA DI GAUSS

$\Rightarrow$ CALCOLO $\phi$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA (quando racchiu un volume V)

- DIMOSTRAZIONE SEMPLIFICATA:

$\Rightarrow$ Superficie Sferica

$\Rightarrow$ m nel centro




$\vec{G} \parallel \vec{n}$

$\vec{G} = -\gamma\frac{m}{R^2}\vec{u}_r$ il campo è uguale in qualsiasi punto

$$\phi = \int -\gamma\frac{m}{R^2}\cdot\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{n}}_{1\ \cos(0)=1}\,d\Sigma = -\gamma\frac{m}{R^2}\int d\Sigma$$

$$\phi = -\gamma\frac{m}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = -\gamma 4\pi m$$

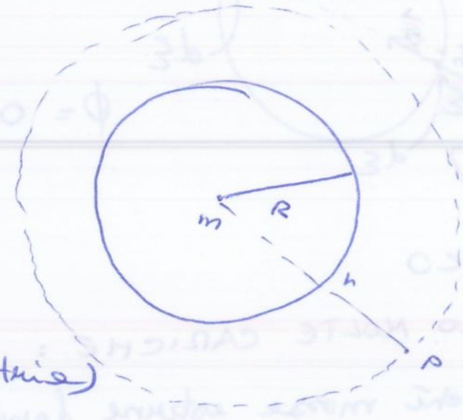
APPLICAZIONI 

$\Rightarrow$ UTILIZZO GAUSS PER CALCOLARE I CAMPI

(1) Esempio Campo Gravitazionale

m di RAGGIO R SFERICA

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \rho = \frac{m}{V}$




$\Sigma$ = sfera di raggio r

$|\vec{G}|$ cost. in tutti i punti (per simmetria)

$\Phi = \vec{G} \cdot \Sigma = G \cdot 4\pi r^2$

Secondo GAUSS

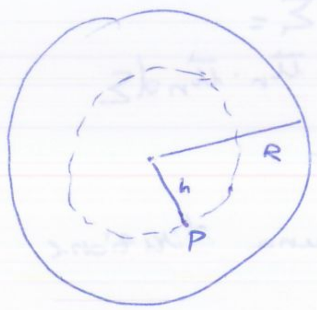
$\Phi = 4\pi \gamma \, m_{int}$ ($= m$)

EGUAGLIO EQUAZIONI

$G = 4\pi r^2 = 4\pi \gamma m$

$G = \gamma \frac{m}{r^2} \sim$ PUNTO

— P interno $\Rightarrow r < R$




Secondo def $\Rightarrow \Phi = G \cdot \Sigma = G \, 4\pi r^2$

Secondo GAUSS $\Rightarrow \Phi = 4\pi \gamma \, m_{int} \sim \rho V$

$= 4\pi \gamma \cdot \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

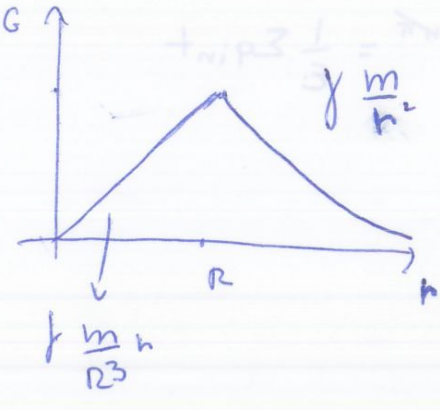
$\Sigma$ SFERA RAGGIO r

EGUAGLIO LE EQUAZIONI

$G = \gamma \rho \frac{4}{3}\pi r = \gamma \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r =$

$= \gamma \frac{m}{R^3} r$

GRAFICO



4) ESERCIZI 15/03/2012

⇒ VELOCITÀ DI FUGA

v iniziale da dare ad m per sfuggire all'attrazione terrestre


$r=\infty \quad F_G = 0 \quad E_G = 0$

INIZIALE $r = r_T \quad k_{in} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad E_G = \gamma \frac{mM}{R_T}$

FINALE $r \to \infty \quad k = 0 \quad E_G = 0$

quindi $\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{M_m}{R_T} = 0$

5) TRAIETTORIA $\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \end{cases}$

⇒ ENERGIA MECCANICA ⇒ $E_m = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \gamma \frac{mM}{r}\right)} \\ &L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \end{aligned}\right\}$$

CONDIZIONI INIZIALI Energia, Momento angolare, raggio ed angolo a $t=0$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \Big/ \frac{d\theta}{dt}$$ quindi derivata di funzione composta

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{mr^2}{L} \cdot \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{mr^2} + \gamma \frac{mM}{r}\right)}$$

GEOMETRIA CONICA

$\cos\theta = \frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad d$ = distanza FUOCO-DIRETT.

$\varepsilon$ = eccentricità

$$\frac{1}{r} = \left(\cos\theta + \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{d}$$

DERIVO RISPETTO A $\theta$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{d} + \underbrace{\frac{1}{d\varepsilon}}_{\text{COSTANTE}}\right) \Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{d}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2\left(\frac{\sin\theta}{d}\right)$$

$1 - \cos^2\theta \leftarrow 1 - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^2}{d^2}\sin^2\theta = \frac{r^2}{d^2} - \left(\frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

PROGRAMMA

1) 2 settimane => CORPO RIGIDO

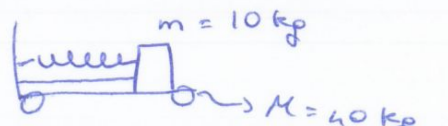
2) 3 settimane => TERMODINAMICA

3) MOTO ARMONICO => FLUIDO

Studiare bene dinamica dei sistemi e dei punti

ESERCIZI URTI $\xrightarrow{x}$

(4)




$k = 10^3$ N/m

$\delta l = 0{,}2$ m

TAGLIO FILO $\delta t \to 0$

$\vec{F}_{el} = \vec{F}_{int}$ sia su m ed M

$\xleftarrow{F_{el}}$ $\xrightarrow{F_{el}}$ questo meccanismo si può considerare URTO ELASTICO → si conserva energia meccanica

tutte le volte che $\delta t$ → URTO ELASTICO dove si conserva energia meccanica

$V_x = 0$ NO VINCOLI

$q_{in} = q_{fin} \Rightarrow 0 = mV_m + MV_M$ contengono info su segno e modulo $V_m > 0$ e $V_M < 0$

ELASTICO: $E_{in} = E_{fin}$

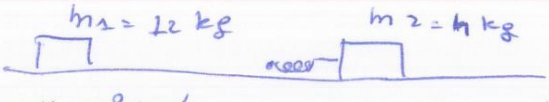
quindi $\frac{1}{2}k\delta l^2 = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{1}{2}MV_M^2$

$J_{medio} = \Delta q_m = mV_m - 0$ su m

$J_{medio}$ su M $= \Delta q_M \Rightarrow -J_{medio}$ su m

OVVIAMENTE NON C'È DISSIPAZIONE DI ENERGIA POICHÉ URTO ELASTICO

(5)




$\mu d = 0$

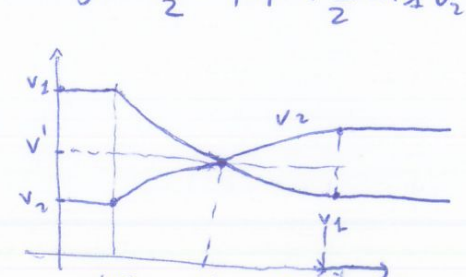
TROVARE $\delta l_{max}$ sapendo che $k = 10^3$ N/m

$\delta t \to 0$ $\vec{F}_{el} = \vec{F}_{int}$ $E_{in} = E_{fin}$ URTO ELASTICO

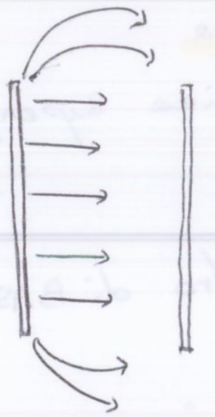
$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V' + m_2V'$

$V_{rel} = 0 \Rightarrow V_1' = V_2' = V' \to$ velocità dopo l'urto

$E_{in} = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}k\delta l^2 + \frac{1}{2}m_1v'^2 + \frac{1}{2}m_2v'^2$



→ CORPO REALE: LAMINE non ∞



Il campo è costante all'interno delle lamine ma ai bordi ci sono deviazioni trascurabili

● ENERGIA (GRAVITAZIONALE)

$E_m = k + E_p$

$k = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \qquad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$\vec{L} = m\vec{v} \wedge \vec{r} \longrightarrow$ se $P = 0$

quindi

$L = \vec{r} \wedge m\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta \qquad r \perp u_\theta$

in modulo $\longrightarrow L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$

$L = \text{cost.} \longrightarrow$ FORZE CENTRALI

$K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\cancel{r^2}\frac{L^2}{m^2r^{4}}\cdot \cancel{m} \longrightarrow k = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{k_0} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{k_1}$

Energia meccanica nel campo gravitaz.

$E_m = k_0 + \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}$

dipendono solo da $\vec{r}$

$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$

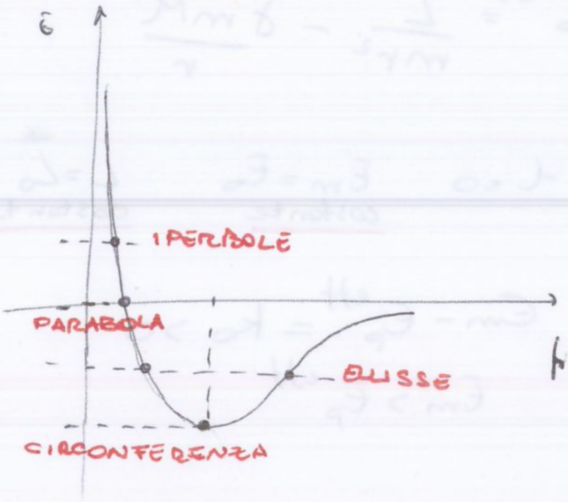
$m\vec{G} = -\vec{\nabla}E_p$

$-\vec{\nabla}E_p = -\gamma\frac{mM}{r}$

Energia potenziale efficace:

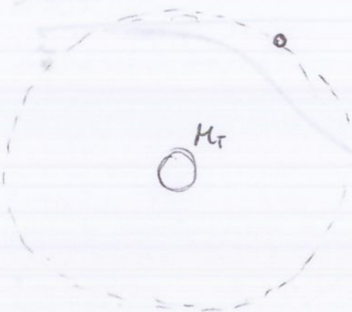
$E_p^{eff} = \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{>0} - \underbrace{\gamma\frac{mM}{r}}_{<0}$

TRAIETTORIE




4) ESEMPI

Un satellite messo in orbita ⟶ traiettoria circolare a $\omega = cost.$




$$-\gamma \frac{\cancel{m} M}{R_T^2} = \cancel{m} a_c \longrightarrow -\gamma \frac{M}{R_T^2} = \omega^2 r_T$$

Poiché $\omega = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow -\gamma \frac{M}{RT^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r_T$

RAGGIO E PERIODO NON SONO TRA LORO INDIPENDENTI

Satellite geostazionario: - $T = 24h$
- unico $r$

• VELOCITÀ DI FUGA

V iniziale da dare ad m per sfuggire all'attrazione terrestre


$r = \infty$ $F_G = 0$ $E_G = 0$

INIZIALE
$r = R_T$
$K = \frac{1}{2} m v_0^2$
$E_G = \gamma \frac{mM}{R_T}$

FINALE
$R \to \infty$
$K = 0$
$E_G = 0$

Quindi: $\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{M m}{R_T} = 0$

Quindi:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{m^2 r^4}{L^2}\left(\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2 R^2} + 2\gamma \frac{M}{r}\right) \longrightarrow \text{DERIVA DALL' ENERGIA}$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{d^2}\left\{\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{r\varepsilon}\right\} \longrightarrow \text{DERIVA DALL' EQ. DI UNA CONICA}$$

NOTO $\Rightarrow \frac{2mE}{L^2} = \frac{1}{d^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \longrightarrow$ se soddisfatte condizioni: coefficienti uguali

$\frac{1}{r^2} \Rightarrow -1 = -1$ ok

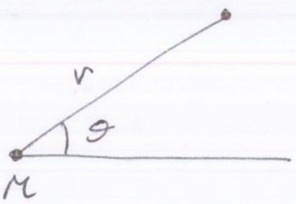
$\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{2\gamma m^2 M}{L^2} = \frac{2}{d\varepsilon}$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{d^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \frac{2mE}{L^2} \\ \frac{1}{d\varepsilon} = \gamma \frac{Mm^2}{L} \end{cases}}$$

COINCIDONO $\Rightarrow$ ALLORA TRAIETTORIA CONICA con scelta opportuna di direttrice e fuoco

$r(t)$

$\theta(t)$




$m, t = 0 \Longrightarrow E, L$

TRAIETTORIA CONICA $\longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{d} - \frac{1}{\varepsilon}$

CONCLUSIONE $\longrightarrow$ coniche si classificano in 4 gruppi

1) $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ IPERBOLE $\quad \frac{L^2}{2md^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) > 0 \Rightarrow E > 0$

2) $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ PARABOLA $\quad \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) = 0 \Rightarrow E = 0$

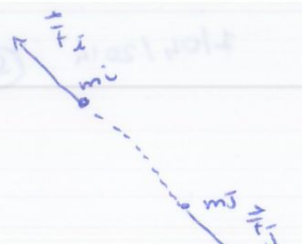
3) $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ ELLISSE $\quad \frac{L^2}{2md^2} < E < 0$

4) $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ CIRCONFERENZA $\quad E = \frac{L^2}{2md^2}$

TRATTAZIONE APPROSSIMATA

1) Una sola sorgente $\longrightarrow$ tante: / TRAIETTORIE vengono deformate

2) $r = 0$ MAI PUNTO RAGGIUNGIBILE $\Rightarrow$ ABBIAMO TRASCURATO ATTRITO quindi $E \neq$ cost $L \neq$ cost




FORZE ESTERNE $\vec{F}_i$

FORZE INTERNE $\vec{F}_{ij}$

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i^{EXT} + \vec{F}_i^{INT}$$

quindi

$$\vec{F}_2^{INT} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N}$$

$$\vec{F}_i^{INT} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \Longrightarrow \vec{R}_i = \vec{F}_i^{EXT} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad \text{RISULTANTE}$$

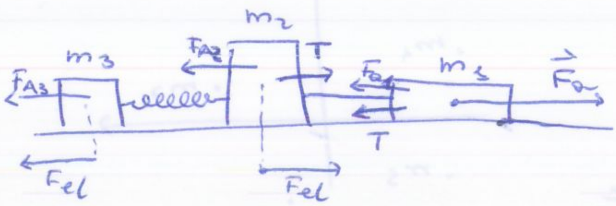
$$F_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{ext} + \sum_{i=1}^{N} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right) \quad \text{FORZA TOTALE SUL SISTEMA}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} F_{ij} = \cancel{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{13} \dots + \vec{F}_{1N} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{23} + \dots \vec{F}_{2N} + $$
$$+ \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots F_{NN-i} = 0$$

(PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE)

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 0 \Longrightarrow \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{EXT}$$

<u>Esempio:</u> $N = 3$




- $\vec{R}_1 = \vec{F}_a + \vec{F}_{A1} + \vec{T}$, con $\vec{F}_a + \vec{F}_{A1}$ EXT e $\vec{T}$ INT DOVUTA A $m_2$

$$\vec{F}_{12} = \vec{T} \qquad \vec{F}_{13} = 0$$

DOVE $F_{A1}, F_{A2}, F_{A3}$ <u>sono forze d'attrito</u>

- $\vec{R}_2 = -\vec{T} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{A2}$, con $-\vec{T} \to \vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{el} \to \vec{F}_{23}$, $\vec{F}_{A2} \to$ EXT (DOVUTA AL PIANO)

- $\vec{R}_3 = -\vec{F}_{el} + \vec{F}_{A3}$, con $-\vec{F}_{el} \to \vec{F}_{32}$, $\vec{F}_{A3} \to$ EXT

$$\vec{F} = \sum F_i^{ext} = \vec{F}_a + \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + \vec{F}_{A3}$$

Esempio: $N=2$ $\quad m_1 = 2m_2$

$m_1 \Rightarrow \vec{r}_1 = 3\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \rightarrow$ FERMA

$\vec{r}_2 = 3t\,\vec{u}_x + \frac{1}{2}t^2\vec{u}_y \rightarrow$ TRAIETTORIA PARABOLICA

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{3m_2}\left[(6+3t)\vec{u}_x + \left(4+\frac{1}{2}t^2\right)\vec{u}_y\right]$$

$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_1 m_i \vec{v}_i}{M}$ definizione: è la media pesata delle velocità

$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$ definizione: è la media pesata delle accelerazioni

$\vec{q}_{CM} = M \cdot \vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i$

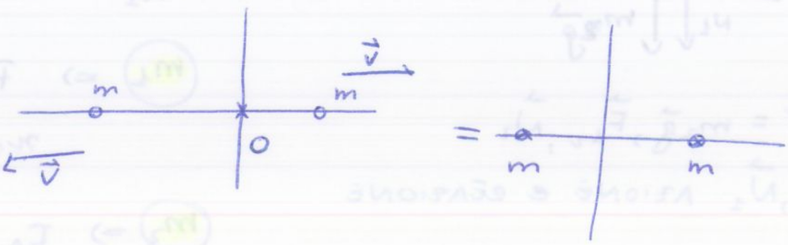
$\vec{q}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{q}_i = \vec{q}_{TOT}$ quindi IL CENTRO DI MASSA RAPPRESENTA IL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA

DESCRIZIONE GLOBALE

$\Rightarrow$ PERDO INFORMAZIONI

$\vec{q}_{CM} = m\vec{v} - m\vec{v} = 0$

$\vec{v}_{CM} = 0$




$\vec{F} = M\vec{a}_{CM} = ?$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = M\underbrace{\left(\frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}\right)}_{\vec{a}_{CM}} = M\vec{a}_{CM}$$

I EQUAZIONE CARDINALE

$\vec{F} = \vec{F}^{EXT} = M\vec{a}_{CM}$

NOTA BENE $\Rightarrow$ SE SISTEMA RIGIDO

$d$ FISSA $\Rightarrow \vec{a}_i = \vec{a}$

$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}}{\sum m_i} = \vec{a}$ informazioni sulla singola particella

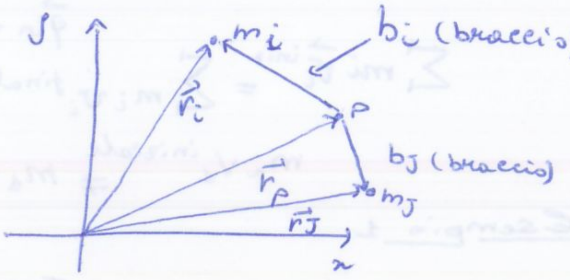
OSSERVAZIONE VETTORIALE

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{q}}{dt} \qquad F_x^{ext} = \frac{d q_x}{dt} \quad \text{se } F_x^{ext} = 0 \Rightarrow q_x = \text{costante}$$

c) MOMENTO ANGOLARE

i) $m_i \Rightarrow$ OGNI MASSA

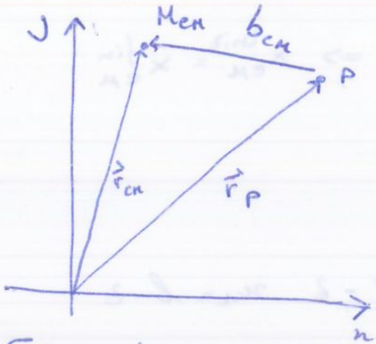
a) POLO
b) BRACCIO




$$\vec{L}_i = \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_J = \vec{b}_J \wedge m_J \vec{v}_J$$

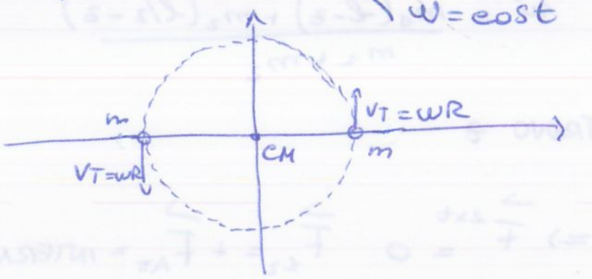
PROPRIETÀ GLOBALE $\Rightarrow \vec{L}_{TOT} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$




$$\vec{L}_{CM} = \vec{b}_{CM} \wedge \vec{q}_{CM} = \vec{b}_{CM} \wedge M \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L}_{TOT} \neq \vec{L}_{CM}$$

Esempio:




$\vec{v}_{CM} = 0 \qquad P \equiv 0$

$\vec{q}_1 = m\vec{v}_T \qquad \vec{L}_1 = \vec{R} \wedge m\vec{v}_T$

$\vec{q}_2 = -m\vec{v}_T \qquad \vec{L}_2 = (-\vec{R}) \wedge (-m\vec{v}_T)$

$$q_{tot} = 0 = M \cdot 0 = q_{CM}$$

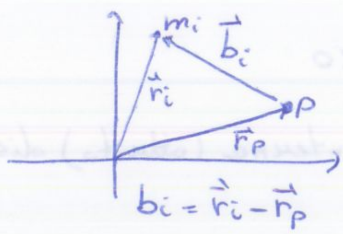
$\vec{L}_{CM} = \vec{0} \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$

$\vec{L}_{TOT} = 2\vec{R} \wedge m\vec{v}_T \neq 0 \qquad$ quindi $\vec{L}_{TOT} \neq \vec{L}_{CM}$

ii) $\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

$$\vec{L}_i = \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{b}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i + b_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

- $\frac{d b_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i$




$b_i = \vec{r}_i - \vec{r}_P$

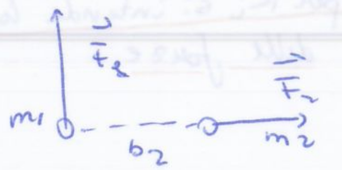
$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{v}_i - \vec{V}_P$$

OSSERVAZIONI

i) POLO $P \Rightarrow M^{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{L}_P = cost.$ DIPENDE COME SCEGLIERE IL POLO

POLO $P' \Rightarrow M^{EXT}_{P'} \neq 0 \Rightarrow \vec{L}_{P'} \neq cost.$

ESEMPIO




Polo $P \equiv m_1$

$F_1$, BRACCIO $= 0$ $\vec{M}_1 = 0$

$\vec{b}_2 \parallel \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{M}_2 = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0$

Se POLO $P' \equiv m_2$

$\vec{F}_2 \Rightarrow$ BRACCIO NULLO $\vec{M}_2 = 0$

$\vec{F}_1 \Rightarrow$ BRACCIO $\vec{b}_1 \perp \vec{F}_1$

$\vec{M}_1 = b_1 \wedge F_1 \neq 0$

$\vec{M} = \vec{M}_1$

ii) Se $F_{ext}$ ASSENTI $\Rightarrow \vec{R} = \sum F_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{q} = cost$

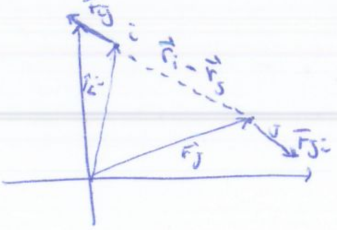
$\Rightarrow \forall$ POLO $= \vec{M}^{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost.$

$\boxed{\text{IN GENERE } \vec{R}_{EXT} = 0 \not\Leftrightarrow \vec{M}_{EXT} = 0}$

$dW_{tot} = \sum dW_i$

$dW = \sum \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}_i$

$\vec{F}_{ij}$ forza interna



$dW_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j$

Ma sappiamo $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

$dW_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$

$= \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ DISTANZA DELLE DUE PARTICELLE

$dW_{ij} \neq 0$.

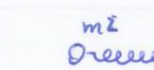
$dW^{INT} \neq 0$ $\quad \vec{r}_i - \vec{r}_j$ DISTANZA RELATIVA $\Longleftarrow$ quindi $F_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \neq 0$

$dW_{ij} \neq 0$ se $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ VARIA

$\Rightarrow$ W FORZE CONSERVATIVE

$W_i^{con} = -\Delta E_p^i$ quindi $W_{tot} = \sum W_i^{con}$ quindi $E_p = \sum E_p^i$

Esempio:



$$\left.\begin{aligned} E_{p1} &= \frac{1}{2}kx^2 \\ E_{p2} &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}\right\} E_p = kx^2$$

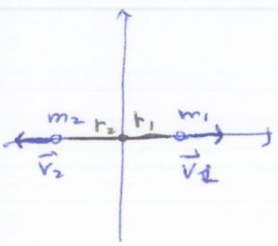
TEOREMA CONSERVAZIONE ENERGIA

$$k_{in}^i + E_{pin}^i + W_{Nc}^i = k_f^i + E_{pf}^i$$

$$\sum( \qquad ) = \sum( \qquad )$$

$$k_{tot_{in}} + E_{ptot_{in}} + W_{tot}^{Nc} = k_{ftot} + E_{ptot_f}$$

ESEMPI $\Rightarrow$ $N = 2$ $\quad m_1 = m_2 = m$



velocità costante $\Rightarrow$ $\sum F = 0$ quindi $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = 0$

$\vec{q}_1 = m\vec{v}_1 \vec{u}_x \qquad \vec{q}_2 = -m\vec{v}_2 \vec{u}_x$

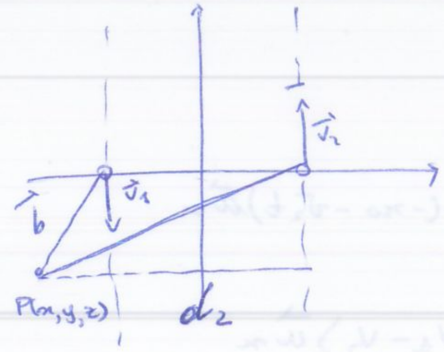
$\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x \qquad \vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$

$\vec{r}_1 = (x_0 + v_1 t)\vec{u}_x \quad \vec{r}_2 = (-x_0 - v_2 t)\vec{u}_x$

se scelgo $P \equiv C$ il braccio coincide con il raggio vettore

$\vec{b}_1 = \vec{r}_1 \qquad \vec{b}_2 = \vec{r}_2$

$\vec{L}_1 = \vec{b}_1 \wedge m\vec{v}_1 = 0 \qquad \vec{L}_2 = \vec{b}_2 \wedge m\vec{v}_2 = 0$




$$\vec{L}_1 = \vec{b}_1 \wedge m\vec{v}_1$$ — P ≠ 0

⊥ ALLA LAVAGNA ED ENTRANTE

$$|\vec{L}_1| = m v_1 d = m v_1 (x_P - x_0)$$

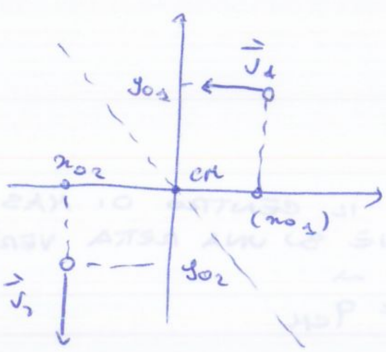
$$\vec{L}_1 = -m v_1 (x_P - x_0)\vec{u}_z$$

$$\vec{L}_2 = + m v_2 (x_0 + x_P)\vec{u}_z$$

$$\vec{L}_{CM} = \pm M v_{CM} \cdot x_P \vec{u}_z \neq \vec{L}_{tot} = L_1 + L_2$$

— P ≡ O Esercizio 3

$$d = x_{01} = y_{01} = x_{02} = y_{02}$$




$$\vec{r}_1 = (d + v_1 t)\vec{u}_x + d\,\vec{u}_y$$

$$\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x \qquad \vec{v}_2 = -v_2\vec{u}_x$$

$$\vec{r}_2 = -d\vec{u}_x + (-d - v_2 t)\vec{u}_y$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{v_1}{2}t\vec{u}_x - \frac{v_2}{2}t\vec{u}_y$$

$$y_{CM} = -\frac{v_2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x_{cm}}{v_1}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{v_1}{2}\vec{u}_x + \frac{v_2}{2}\vec{u}_y$$

$$\vec{L}_1 = r_1 \wedge m v_1$$

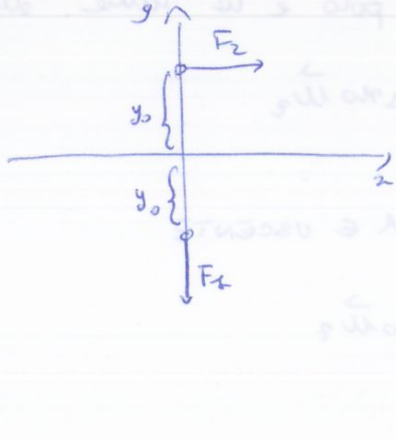
ENTRANTE E ORTOGONALE ALLA LAVAGNA

$$= -d m v_1 \vec{u}_z$$

$\vec{L}_2 = d m v_2 u_z$ USCENTE E ORTOGONALE ALLA LAVAGNA

$L_{CM} = 0$ poiché $\vec{r}_{CM} \parallel \vec{v}_{CM}$

Esercizio 4




$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \qquad \vec{a}_1 = -\frac{F_1}{m}\vec{u}_y$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{F_1}{m}t\,\vec{u}_y$$

$$\vec{r}_1 = \left(-y_0 - \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2\right)\vec{u}_y$$

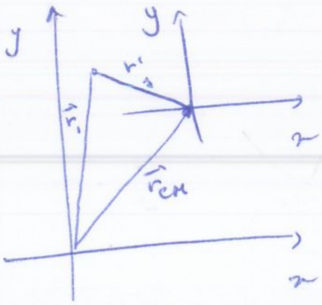
$$\vec{a}_2 = \frac{F_2}{m}\vec{u}_x$$

$$\vec{v}_2 = \frac{F_2}{m}t\,\vec{u}_x$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\frac{F_2}{m}t^2\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y$$

MOMENTI

$P \equiv CM$




$\vec{b}_i = \vec{r}_i$ sia in SR che S'R'

$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$ in SR

$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}_i' \wedge m \vec{v}_i'$ in S'R'

$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{CM}) = \underbrace{\sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i}_{\text{calcolato in SR}} - \sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{V}_{CM}$

$= \vec{L} - \underbrace{\left[\sum m_i \vec{r}_i'\right]}_{O' = O} \wedge \vec{V}_{CM}$ → rimando alla posizione c.M coincide con il S'R'

$\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM}$ se S''R'' $\vec{L}''_{CM} = \vec{L}'_{CM}$ quindi:

$\Longrightarrow \vec{L}_{CM}$ NON DIPENDE DA SR

$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$

$\vec{M}' = \sum_i \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i' = \sum \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_{CM}) \Rightarrow \vec{M}' = \vec{M} - \underbrace{\cancel{\left(\sum m_i \vec{r}_i\right)}}_{=0} \wedge \vec{a}_{CM}$

$\vec{M}'_{CM} = \vec{M}_{CM}$ NON DIPENDE DA SR

Se $P \neq CM \Longrightarrow \vec{L}_P \neq \vec{L}_P'$ se cambi SR e $P \neq CM$

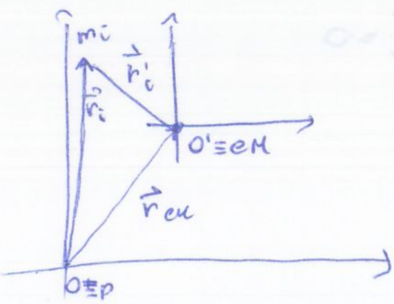
$\vec{L}_P \neq \vec{L}_{P'}$ se cambi polo nello stesso SR

SCELTA $P \equiv CM$

VANTAGGI: • $\vec{V}_P \wedge m \vec{V}_{CM} = 0$

• INDIPENDENTE DAL SR

B) $\Rightarrow P \equiv O$ (TEOREMA DI KONIG)




$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$

$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i'$

$\vec{b}_i = \vec{r}_i'$ in SR e S'R'

$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$ MOM. ANGOLARE TOTALE IN SR

$\vec{L}' = \sum \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i'$ in S'R'

$\vec{L} \neq \vec{L}'$

RIEPILOGO 08/04/2014



- INSIEME DI PUNTI INDIPENDENTI N EQUAZIONI
- PROPRIETÀ GLOBALE $\vec{q} = \sum_i \vec{q}_i$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{R}^{EXT} \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}_{CM} \Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{EXT}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$\begin{cases} \text{DIPENDE DA SCELTA DEL POLO} \\ \text{DIPENDE DA SR} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Come scegliere il polo?
a) $P \equiv CM$ $\vec{L}$ INDIPENDENTE DA SR
b) $P \equiv O$ $\vec{b}_i \equiv \vec{r}_i$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{EXT} \Rightarrow \vec{L} \neq \vec{L}_{CM}$$

$$\vec{L}_P = \vec{L}_{P,CM} + \vec{L}_{CM}$$

$\vec{q}$ ed $\vec{L}$ sono variabili indipendenti

- GRADI DI LIBERTÀ

$\Rightarrow$ PER OGNI PARTICELLA $\vec{r}_i(t) \Rightarrow$ 3 FUNZIONI $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$
$\Rightarrow$ 3 EQ. DIFFERENZIALI

$\Rightarrow$ N PARTICELLE $\Rightarrow$ 3N EQ. DIFFERENZIALI

DESCRIZIONE GLOBALI $\Longrightarrow$ 2 EQ. DIFFERENZIALI VETTORIALI quindi 6 SCALARI: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{EXT}$ $\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{R}^{EXT}$

N=2 OK

N>2 NON BASTA $\Rightarrow$ PERDO INFORMAZIONI

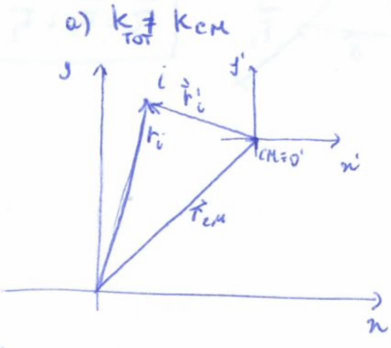
3 CORPI $\Rightarrow$ NO SOLUZIONE GENERALE

TRACCIA

i) II KONIG
ii) LEGAME $\vec{R}$ e $\vec{M}$
iii) URTI

i) II KONIG

a) $k_{TOT} \neq k_{CM}$




$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{M} = 0$$

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

$$\vec{v}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}'_i}{M} = 0$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} \Rightarrow \vec{u}'_n = \text{costante}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_i$$

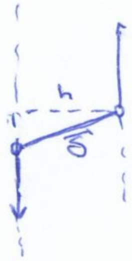
$$k = \sum_i k_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (v'_i + v_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{2}{2} m_i v_{CM} v'_i = \sum_i k'_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{CM}^2 +$$

$$+ \cancel{\left(\sum_i m_i \vec{v}'_i\right)} \vec{v}_{CM} \Rightarrow k = k' + k_{CM}$$

k in SR = ENERG. CINETICA IN S'R' + ENG. CINETICA DEL CM IN SR $\searrow$ dovute al moto di CM

COPPIA $\vec{R}=0 \quad M=\vec{S}\wedge\vec{F}$

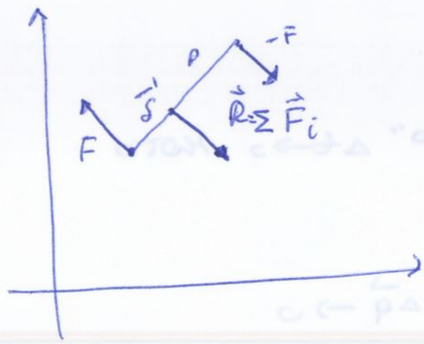



$|M| = h \cdot F$

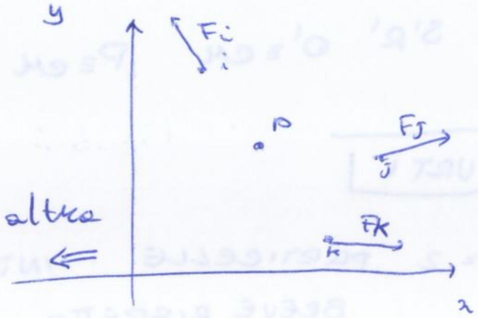
TEOREMA: N FORZE SISTEMA, SCELTO POLO P

$\Rightarrow \exists$ SEMPRE SISTEMA EQUIVALENTE

- $\vec{R}$ NEL POLO
- COPPIA TALE CHE $\vec{M}=\vec{M}_p$




si può riscrivere in altra maniera $\Leftarrow$ $\Leftarrow$




$$S\wedge\vec{F}=M$$
$$\tilde{\vec{M}}_p = \vec{S}\wedge\vec{F}+0 = \vec{M}$$
$$\tilde{\vec{R}} = \vec{R}+\vec{F}-\vec{F}=\vec{R}$$

d) QUANDO $\vec{R}$ e $\vec{M}$ non sono indipendenti?

$\Rightarrow$ FORZE PARALLELE


$$\vec{F}_i = F_i\vec{u}$$
$$\vec{M}_p = \sum \vec{b}_i\wedge\vec{F}_i = \sum_i F_i(\vec{b}_i\wedge\vec{u}) = \underbrace{\left[\sum_i F_i\vec{b}_i\right]}_{\text{DIREZ. DIPENDE DAL POLO}}\wedge\vec{u}$$

$\forall$ POLO $\vec{M}\perp\vec{u}$

$\vec{R}=\sum F_i\cdot\vec{u} = R\cdot\vec{u}$ quindi $\vec{R}\parallel\vec{u}$

$\Rightarrow \forall$ POLO $M\perp\vec{R}$

$\vec{M}=\vec{r}_c\wedge\vec{R}$ dove $\vec{r}_c$ è incognita

$\Rightarrow \vec{M}$ ed $\vec{R}$ NON SONO INDIPENDENTI

$$\vec{r}_c\wedge\vec{R} = \sum_i F_i\vec{b}_i\wedge\vec{u} \Longrightarrow R\,\vec{r}_c\wedge\vec{u} = (\sum F_i\vec{b}_i)\wedge\vec{u}$$

$\vec{r}_c = \dfrac{\sum F_i\vec{b}_i}{\underbrace{\sum F_i}_{R}} \rightarrow$ POSIZIONE RISPETTO AL POLO

$\vec{R}$ NOTA $\Rightarrow$ SCELTO UN POLO TROVO $\vec{r}_c \Rightarrow \vec{M} = \vec{r}_c\wedge\vec{R}$

$\hookrightarrow$ TROVO $\vec{q}$

FORZE PARALLELE RIDUCO I GRADI DI LIBERTÀ IN QUANTO ANGOLO COSTANTE

$\{2N\}\Rightarrow N\{r_i,\theta_i\}$ 2D $\Rightarrow N\{r_i\}+\theta \quad 2N\rightarrow N+\cancel{1}$

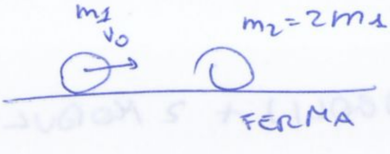
$$\frac{d\vec{q}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \Rightarrow \text{di 2 su 1}$$

se $\Delta t \to 0$ $\quad F_{12} \sim \vec{F}^{INT}_{media}$

$$\Delta \vec{q}_1 = \vec{F}^{int}_{media} \cdot \Delta t$$

$$\Delta \vec{q}_2 = -\vec{F}^{int}_{media} \cdot \Delta t \qquad \text{quindi } \Delta\vec{q}_1 + \Delta\vec{q}_2 = \Delta\vec{q} = 0$$

Esempio:




DOPO URTO $m_1 \Rightarrow v_1$

$V_x = 0 \qquad q_{in} = q_{fin}$

$$m_1 v_0 + m_2 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

IMPULSO MEDIO = $|F_{media}| \cdot \Delta t$

$$|F_{media}| = \frac{|\Delta q_1|}{\Delta t} = \frac{|\Delta q_2|}{\Delta t} = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_0}{\Delta t}$$

$\vec{q} = cost \Rightarrow \vec{q}_{CM} = cost$

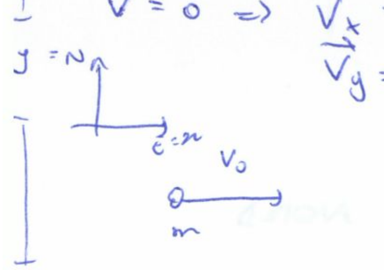
$\Rightarrow$ DURANTE L'URTO $\Rightarrow \vec{V}_{CM} = cost.$

Esempio 2D

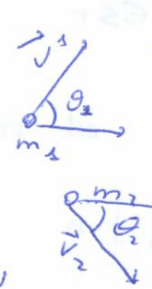
$m_1 \Rightarrow \vec{V}_0 \Rightarrow \vec{V}_0 = 2\,m/s$, EST

$m_2 =$ FERMA $\Rightarrow$ DOPO URTO $m_1$ ha velocità dimezzata e devieta di $\frac{\pi}{4}$ verso NORD

$\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V}_x = 0$, $\vec{V}_y = 0$ $\qquad U_0 = V_0 \vec{u}_x + 0$




DOPO URTO




$$\vec{V}_1 = \frac{V_0}{2}\cos\theta_1 \vec{u}_x + \frac{V_0}{2}\sin\theta_1 \vec{u}_y$$

$$\vec{V}_2 = V_2\cos\theta_2 \vec{u}_x + V_2 \sin\theta_2 \vec{u}_y$$

$q_{in} = q_{fin} \Rightarrow$ SCOMPONIAMO IN FORMA VETTORIALE

$(x) \Rightarrow m_1 V_0 = m_1 \frac{V_0}{2}\cos\theta_1 + m_2 V_2 \cos\theta_2$

$(y) \Rightarrow 0 = m_1 \frac{V_0}{2}\sin\theta_1 + m_2 V_2 \sin\theta_2$

$\theta_2 < 0$

- URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO

$\Rightarrow$ DOPO URTO

$v_f = \vec{V}_1^{\,f} = \vec{V}_2^{\,f} \Longrightarrow$ INCOGNITE SONO 2 (MODULO + ANGOLO)

$E_{diss.} > 0$

Esempio

$m_1$ $\quad V_0 = 2\ m/s$ e $m_1$ FERMA URTO ANAELASTICO COMPL.

$$\vec{q}_{in} = \vec{q}_{fin}$$

$(x) \Rightarrow m_1 V_0 = m_1 V\cos\theta + m_2 V\cos\theta$

$(y) \Rightarrow 0 = m_1 V \sin\theta + m_2 V \sin\theta \qquad \theta = 0$

## URTO VINCOLATO

$\vec{V} \neq 0 \Rightarrow \vec{R}^{ext} \neq 0$ quindi $\vec{q}_{in} \neq \vec{q}_{fin}$ $\quad \dfrac{\Delta \vec{q}_{TOT}}{\Delta t} = \vec{F}^{EXT}_{media} = \vec{V}^{ext}_{media}$

se considero le singole particelle

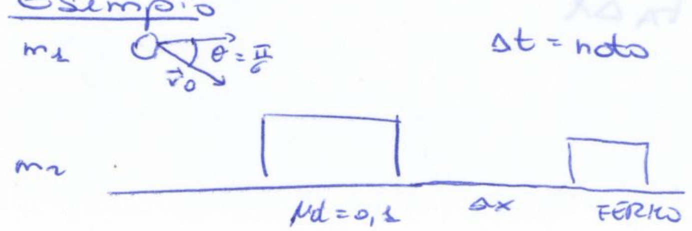
$$\frac{\Delta q_i}{\Delta t} = \vec{F}^{ext}_{med_i} + F^{int}_{med_i}$$

INCOGNITE FORZE E I DATI SONO VELOCITÀ PRIMA E DOPO

PUÒ ESSERE QUINDI ELASTICO O ANAELASTICO

Esempio

$\Delta t =$ noto




TROVARE $\Delta x$

URTO COMPL. ANAELASTICO

$[0, \Delta t] \Rightarrow$ URTO

$[\Delta t, t_f] \Rightarrow$ MOTO

$\vec{V} = \vec{N} \qquad \vec{N} = N\hat{u}_y$

$\Rightarrow$ $x$ NON VINCOLATO

$\Rightarrow$ $y$ VINCOLATO

$q^x_{in} = m v_0 \cos\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad q^x_{fin} = (m_1 + m_2)\, v_f$

$m_1 v_0 \cos\frac{\pi}{6} = (m_1 + m_2)\, v_f$

$$\vec{F}^{\,media\,x}_{int} = \frac{\Delta \vec{q}_i}{\Delta t}$$

# CORPO RIGIDO

Insieme continuo di masse infinitesime non deformabili

↓ COSTITUISCONO VOLUME

↓ DISTANZA FISSA: traiettorie tra le particelle parallele

- $W^{INT} = 0 \longrightarrow F^{int}$ non importanti
- INSIEME ⟶ SISTEMA DI PUNTI CON $N = \infty$ e masse infinitesime quindi la sommatoria diventa un integrale di volume

$$\sum \longrightarrow \int_V \Longrightarrow M = \int_V dm$$

- CENTRO DI MASSA

$$\vec{r}_{CM} = \int \frac{\vec{r}_i\, dm}{m} \quad \left[ \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right]$$

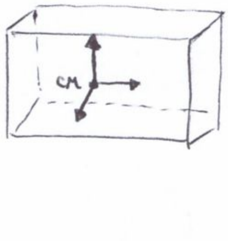
- DENSITÀ

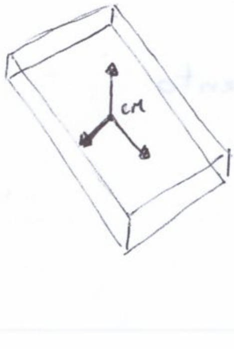
$$\rho \overset{def}{=} \frac{dm}{dV} \Longrightarrow dm = \rho\, dV$$

$\rho(\vec{r}) \Longrightarrow$ CORPO NON OMOGENEO $\qquad \rho = cost. \Longrightarrow$ CORPO OMOGENEO

$$m = \int_V dm = \int_V \rho\, dV = \rho \int_V dV = \rho V$$

- Differenza con il sistema di punti è costituita dai GRADI DI LIBERTA'
  - Centro di massa ed Assi principali (direzioni ortogonali tra loro) equivalente a 3 spigoli del corpo rigido



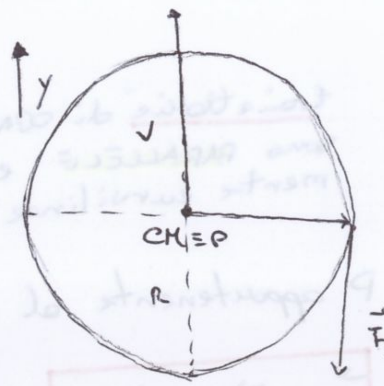



- EQUAZIONI MOTO

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F} \quad \text{dove} \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad , \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{dove} \quad \vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i + M_{APPL.}$$

Esempi:

1.




PIANO ORIZZONTALE → V (VINCOLO)

$F_y = -F_1 + V$

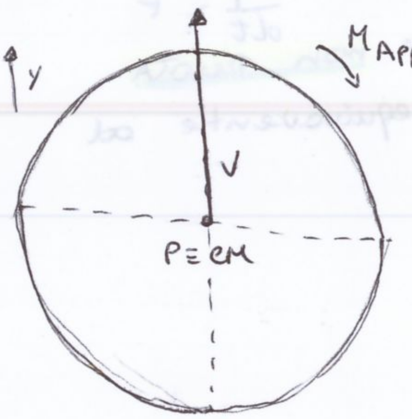
Polo in CM quindi

$\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{F}_1 + 0 \wedge \vec{V}$ → SENZA MOMENTO APPLICATO

$dq_y = F_y dt = 0$ perchè CM è un punto fisso

$\hookrightarrow F_y = 0 \longrightarrow V = F_1$

2.




$d\vec{L} = \vec{M} dt \Longrightarrow \int d\vec{L} = \int \vec{M} dt$

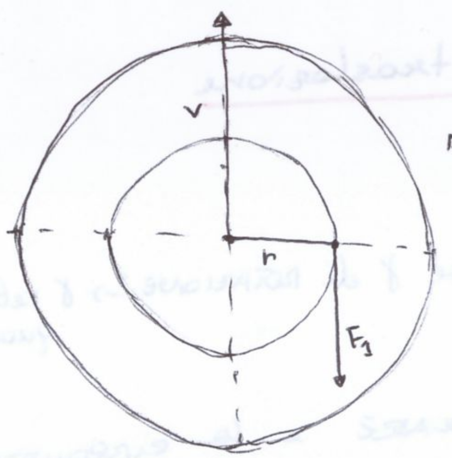
$$\boxed{\vec{L} - \vec{L}_0 = \vec{M} \Delta t}$$

$M_{APP} \perp$ ALLA LAVAGNA ~ COPPIA

$F_y = V = 0$

$$\vec{M} = \underbrace{\sum_i \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i}_{0 \wedge V \, + M_{APP}} + M_{app}$$

3.




$\curvearrowright M_{APP} > 0$

$$\begin{cases} F_y = V - F_1 \\ M = F_1 \cdot r - M_{APP} + 0 \cdot V \end{cases}$$

$\vec{v}_P \neq \vec{v}_{CM} \neq \vec{v}_Q \longrightarrow$ VELOCITÀ DIVERSE

$\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P \neq \vec{\omega} \wedge \vec{r}_Q$ per ogni $P' \in \gamma \Rightarrow \vec{v}_{P'} = 0$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \Longrightarrow$$ equazione descritta dal moto di rotazione perché l'asse gira

3) MOTO DI ROTO-TRASLAZIONE

- $v_{TR} \neq 0$
- $\omega \neq 0$

$\vec{v}_P = \vec{v}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$ ; $\vec{v}_{CM} = \vec{v}_{TR} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{CM}$

se e solo se $CM \in \gamma \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{TR}$

equazioni: $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ ; $\vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$

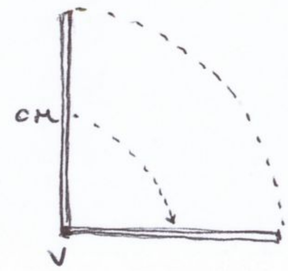
CASO PARTICOLARE = puro rotolamento sfera di raggio R

$\vec{v}_{TR} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$ $\quad \vec{v}_{TR}$ e $\omega$ NON INDIPENDENTI

Scelta di $\gamma$ come asse di rotazione MOLTO IMPORTANTE

Esempio:

1.




ASSE $\gamma$ ⊥ ALLA LAVAGNA in V

$\forall P \Rightarrow$ TRAIETTORIA CIRCOLARE = PURA ROTAZIONE

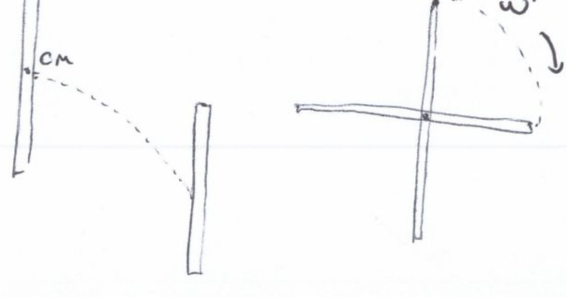
$\vec{\omega}$, $\vec{v}_{TR} = 0$ $\quad \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \frac{\vec{\ell}}{2}$ $\quad \vec{v}_V = 0$

ASSE $\gamma$ ⊥ AL FOGLIO NEL CM

ROTOTRASLAZIONE
- NO PURA TRASLAZIONE orientamento assi cambia
- NO PURA ROTAZIONE

A) TRASLAZIONE PURA $\vec{v}_{TR}$ stessa traiettoria circolare nel CM

B) RUOTO → P descrive traiettoria circolare




A) $\forall P$ $\quad \vec{v}^A_P = \vec{v}_{TR}$ $\quad \vec{v}^A_{CM} = \vec{v}_{TR}$ $\quad \vec{v}^A_V = \vec{v}_{TR}$

B) $\vec{v}^B_P = \omega \wedge l/2$ $\quad \vec{v}^B_{CM} = 0$ $\quad \vec{v}^B_V = \omega' \wedge l/2$

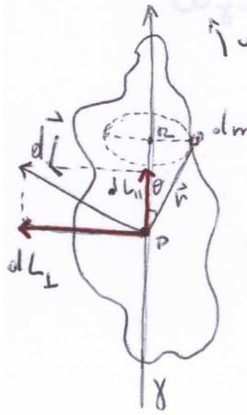
CORPO RIGIDO → Riepilogo:

- 2 MOTI INDIPENDENTI: CM → $\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} = ma_{CM}$; ROTAZIONE ASSI → $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- TRASLAZIONE + ROTAZIONE (specificare sempre $\gamma$)
  - $\gamma$ passante per CM $\Longrightarrow \vec{v}_{TR} = \vec{v}_{CM}$ (traslazione coincidente con il moto di CM) quindi $\vec{F} = ma_{TR}$ ; $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
  - $\gamma$ passante per un punto fisso (VINCOLO) $\Longrightarrow v_{TR} = 0$
    $\vec{v}_P = 0 = \vec{v}_{TR}$ poichè nel moto traslatorio tutti i punti hanno la stessa velocità quindi $\Longrightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- MOMENTO ANGOLARE DEL CORPO RIGIDO

$\vec{L} = \int_V d\vec{L}$ integrale di volume dei momenti angolari delle singole masse infinitesime che costituiscono il corpo




P = POLO

dm → PURA ROTAZIONE

$d\vec{L} = \vec{r} \wedge dm\vec{v}$

$\vec{v} = \vec{v}_{tan} \Longrightarrow \perp$ al foglio ENTRANTE

$\vec{r} \perp \vec{v}$ quindi $\longrightarrow$ $\boxed{d\vec{L} = r \cdot dm \cdot v}$

TRAIETTORIA CIRCOLARE $\Longrightarrow v = \omega \cdot R$

se cambio dm $\longrightarrow$ $\omega$ NON CAMBIA

$dL_{\parallel} = dL\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dm\,\omega \cdot R \cdot \underbrace{r\sin\theta}_{R} = dm \cdot \omega \cdot R^2$

$dL_{\perp} = dL\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dm\,\omega R\, r\cos\theta$

$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} u_{\gamma} + \vec{L}_{\perp} u_{\perp}}$ $\longrightarrow$ $L_{\parallel} = \int_V dL_{\parallel} = \int_V \omega R^2 dm = \omega \overbrace{\int_V R^2 dm}^{I_\gamma}$

dove $I_\gamma = \underbrace{\int_V R^2 dm}_{\geq 0}$ MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE $\gamma$

sempre $> 0$ quindi $\vec{L}_{\parallel} \neq 0$ se $\vec{\omega} \neq 0$

COME IMPOSTARE LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI 

$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt} = m\vec{a}_{cm} \\ \mathcal{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = I_\gamma \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = I_\gamma \vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\vec{q} &= \int \vec{F}\,dt \\ \Delta\vec{L} &= \int \vec{\mathcal{M}}\,dt \end{aligned}\right\}$$ SE LA FORZA AGISCE PER UN $\Delta t$

Come impostare i problemi:

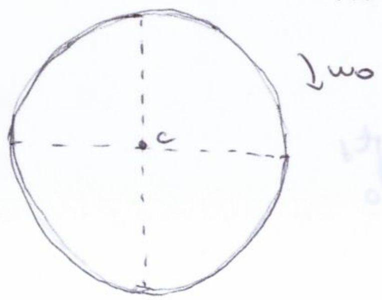
- Scelta di $\gamma$
  - PUNTO FISSO $\Longrightarrow$ MOTO DI PURA ROTAZIONE $\Longrightarrow$ eq: $\vec{\mathcal{M}} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
  - CENTRO DI MASSA $\Longrightarrow$ eq: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$ ; $\vec{\mathcal{M}} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Se $\vec{F} = 0 \Longrightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \mathcal{M}$

Se $\vec{\mathcal{M}} = 0 \Longrightarrow \vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$

PROBLEMI

1. Disco posizionato su un piano orizzontale vincolato nel centro. Ad un $t_0 = 0$ disco ha $\omega_0$ NOTA, viene applicato un $\mathcal{M}_f$ FRENANTE NOTO. Conoscendo $I$ si determini $\Delta t$ per fermarsi.



- Scelgo $\gamma$ per il centro del disco (PUNTO FISSO) ortogonale al foglio

So che: $\mathcal{M} = -\mathcal{M}_f \longrightarrow$ DUE MODI PER RISOLVERE PROBLEMA

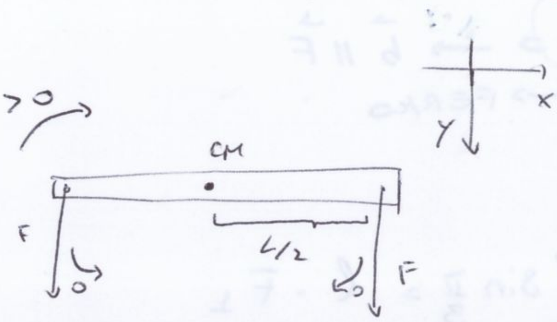
i) $\mathcal{M} = I\alpha \longrightarrow \alpha = -\dfrac{\mathcal{M}_f}{I}$

EQUAZIONI MOTO CIRCOLARE con $\alpha = \text{cost}$

$$\begin{cases} \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ 0 = \omega_0 + \alpha t \end{cases}$$

3. Sbarra di massa $m$ e lunghezza $L$ ed $I = \frac{1}{12} mL^2$ ($\gamma$ per CM) appoggiata sul piano orizzontale: (6)

a) Se agli estremi vengono applicate due Forze parallele, concordi e uguali in modulo




$\gamma$ per CM $\quad F_T = 2F\vec{u}_y$

$M = 0 = F \cdot L/2 - F \cdot L/2 = 0$

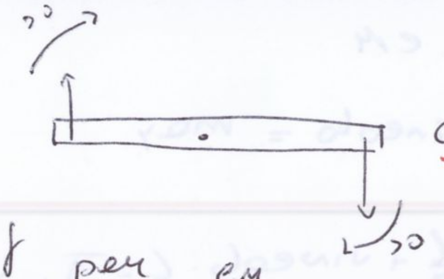
$F_T = m a_{CM}$ lung $y$

MOTO DI PURA TRASLAZIONE

$v_f = v_0 + \vec{a}_{CM} t$

$y_f = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_{CM} t^2$

b)



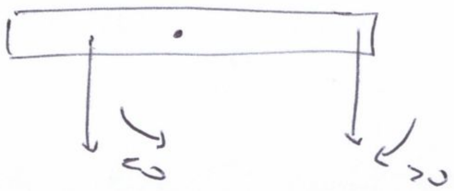

Coppia di forze uguali ed opposte agli estremi.

$\gamma$ per CM $\Longrightarrow F_T = 0$

$M = F \cdot \frac{l}{2} + F \frac{l}{2} = F \cdot l$

Siccome $M = I\alpha = F \cdot L \longrightarrow \begin{cases} \omega_f = \omega_0 + \alpha t \\ \theta_f = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$

c) Forze applicate a distanza $L/4$

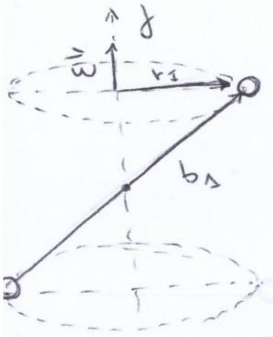



$\gamma$ per CM

$F_T = 2F\vec{u}_y$

$M = F\frac{L}{2} - F\frac{L}{4} > 0$

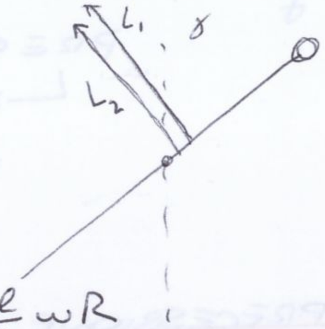
i) $m a_{CM} = 2F \longleftrightarrow$ RUOTA E TRASLA $\quad$ ii) $I\alpha = M$




$$\vec{L}_1 = b_1 \wedge m v_1$$

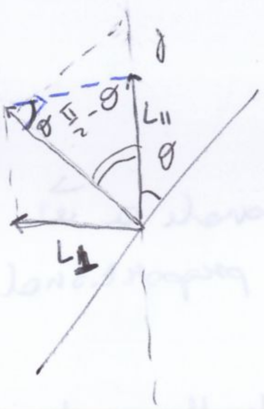
$$\vec{v}_1 = \omega \wedge \vec{r}_1 \longrightarrow \text{ENTRANTE}$$

$$L_1 \perp b_1$$
$$\perp v_1$$




$$L_1 = m b_1 v_1 = m \frac{l}{2} \omega R$$

$$L = 2 m \frac{l}{2} \omega R$$




$$L_{\parallel} = L\sin\theta = 2m\underbrace{\frac{l}{2}\sin\theta}_{h}\,\omega R = \underbrace{2mR^2}_{I_\gamma}\omega = I_\gamma \omega$$

$$L_{\perp} = L\cos\theta = 2m\frac{l}{2}\cos\theta\,\omega R = 2mh\omega R \cdot \omega_\perp(t)$$

## MOTO DI PURA PRECESSIONE

$$\vec{\omega} = \text{cost} \Longrightarrow |\vec{L}| = \text{cost}$$

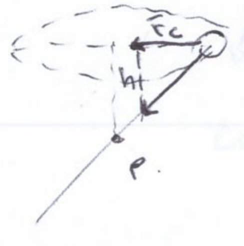
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ è } \perp \text{ a } \vec{\omega} \text{ e } \perp \vec{L}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\omega \wedge \vec{L}_{\parallel}}_{0 \,\to\, \vec{\omega} \parallel \vec{L}_{\parallel}} + \omega \wedge \vec{L}_{\perp} \quad \text{dove } \omega \perp L_{\perp}$$

$$\left|\frac{dL}{dt}\right| = \omega \vec{L}_{\perp} \longrightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \omega \wedge \vec{L}_{\perp} \qquad |M| = \omega L_{\perp}$$

Esempio: Sbarra con precessione

$$|\vec{M}| = \omega(2mh\omega R) = 2mh\,\underbrace{\omega^2 R}_{\text{acc. centrip.}} = 2 m a_c h$$




queste forze può provenire da un vincolo $\vec{V}$

$$M_1 = F_c \cdot h \qquad M = 2F_c \cdot h$$

## ENERGIA CINETICA

Si ragiona in dinamica sul concetto di lavoro

**LAVORO DI ROTAZIONE**

$$d\vec{W} = \vec{M} \wedge d\vec{\theta} \qquad \vartheta = \theta_{wy}$$

$$W = \int_{\vartheta(t)} \vec{M}\, d\theta = \int \underbrace{I_\gamma}_{\text{cost.}} \alpha\, d\theta = I_\gamma \int \frac{d\omega}{dt} d\theta = I_\gamma \int \omega\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} I_\gamma (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\Delta K_{rot} = W_{rot} = \frac{1}{2} I_\gamma (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_\gamma \omega^2 \longrightarrow \text{PURA ROTAZIONE}$$

- **ROTAZIONE ⟹ PUNTO**

| PUNTO | ROTAZIONE |
|---|---|
| $m$ | $I_\gamma$ |
| $\vec{r}$ | $\vec{\theta}$ |
| $\vec{v}$ | $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ |
| $\vec{a}$ | $\vec{\alpha}$ |
| $\vec{F} = m\vec{a}$ | $M = I_\gamma \alpha$ NO PRECESSIONE |
| $\vec{q} = m\vec{v}$ | $L = I_\gamma \vec{\omega}$ |
| $k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ | $k = \frac{1}{2} I_\gamma \omega^2$ |

NOTA BENE ⟶ corpo rigido ~ PUNTO + ROTAZIONE

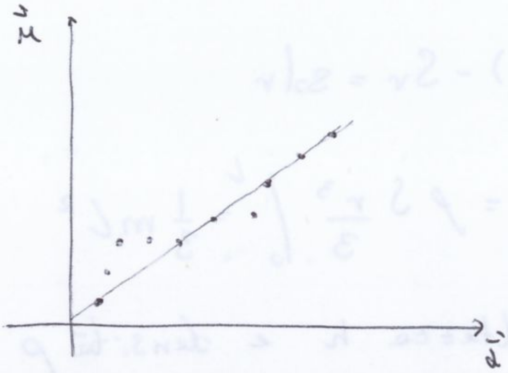
$\gamma = CM$ $\qquad v_{CM} = v_{TR} \longrightarrow K_{TR} = \frac{1}{2} m v^2_{CM}$

$\qquad\qquad \omega \Longrightarrow K_{ROT} = I_\gamma \omega^2$

$\gamma$ = VINCOLO $\qquad v_{TR} = 0 \qquad K_{TR} = 0$

PUNTO FISSO

Ottengo una serie di punti $P_i$ $(M_i, \alpha_i)$ da questo posso fare un grafico




La teoria $\vec{M} = I_\gamma \alpha$ pretende che sia una retta

Svolgo operazione di FIT → trovo la $f(\alpha)$ che meglio approssima

$$M = a + b\,\alpha$$

$a \sim 0$

$b$ → coincide con il <u>coeff. d'inerzia $I$</u>

b) Se la geometria è semplice posso usare la definizione

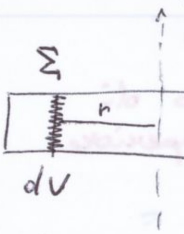
⇒ calcolo teorico

⇒ individuo un $dV$ che ha uno stesso $R$ per ogni $P \in dV$

⇒ INTEGRALE NORMALE

Es: Sbarra lunga $L$ e sezione $S$ e densità $\rho$

$$m = \rho V = \rho S \cdot L$$



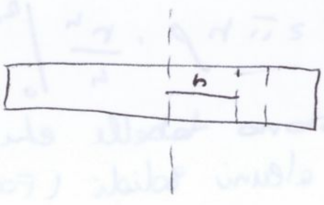

ASSE $\gamma$ passante per CENTRO DI MASSA

$\forall P \in \Sigma_1 \Rightarrow R = r$

$\forall P \in dV$ ha una distanza $R$ circa $r$

quindi:

$$dV = V_2 - V_1 = S(r+dr) - Sr$$




$\boxed{R = r + dr}$

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \rho R^2 dV = \int_{-l/2}^{l/2} \rho r^2 S dr = \rho S \frac{r^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \rho \frac{S}{3}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

$$= \frac{m S}{L \cdot S} \cdot \frac{l^3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12} m L^2$$

$\rho$

TROVARE ASSE $\gamma'$ // ASSE $\gamma$ PER IL CM? $\longrightarrow$ TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

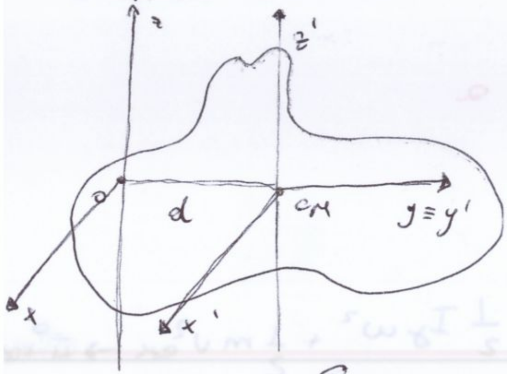
ENUNCIATO: Se ho un $I_\gamma$ dove $\gamma$ passa per il CENTRO DI MASSA ed un ASSE $\gamma'$ // $\gamma$ a distanza $d$ da $I_{\gamma'}$ ho:

$$I_{\gamma'} = I_\gamma + md^2$$

$d^2 \longrightarrow$ distanza tra gli assi

DIMOSTRAZIONE: consideriamo due assi $z$ e $z'$ tra di loro paralleli distanti $d$.

z' PASSA PER C.M




RELAZIONE TRA LE COORDINATE

$$x = x' \qquad z = z' \qquad y = d + y'$$

Il momento d'inerzia del generico punto $P_i$ rispetto a $z$ è dato:

$$m_i(x_i^2 + y_i^2) \longrightarrow R^2 \quad \text{ma } R = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

quindi $R = x_i^2 + y_i^2$

Sommiamo ed utilizziamo la formula di trasformazione:

$$I_z = \textstyle\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i(x_i'^2 + (y_i' + d)^2) =$$

$$= \underbrace{\textstyle\sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2)}_{I_{z'}} + \sum_i m_i d^2 + \underbrace{2d \textstyle\sum_i m_i y_i'}$$

$\boxed{= 0 \text{ poiché } \sum_i m_i y_i' = m y'_{cm} \text{ ma } y'_{cm} = 0 \text{ in } s'ei}$

C.V.D

$$\boxed{\text{quindi} \quad I_z = I_{z'} + md^2}$$

$I_{z'} \downarrow$ PER C.M

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER