



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1243

DATA: 27/10/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Samake

MATERIA: Meccanica delle Macchine

Prof. Jacazio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

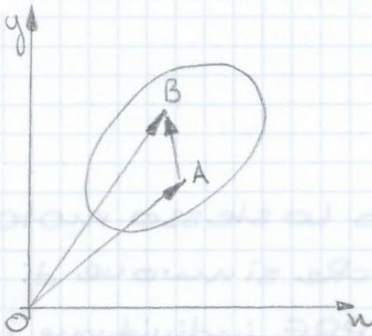
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# Meccanica delle Macchine

Esame 4 es  
in 4 ore

## Cinematica dei Corpi Rigidi



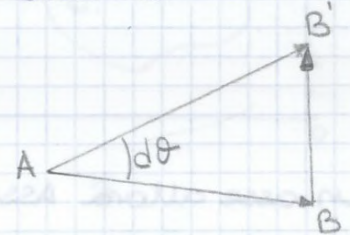
In un corpo rigido la distanza  $\overline{AB}$  non varia durante il moto, quindi

$$\boxed{\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}} \quad \frac{d(\vec{OB})}{dt} = \frac{d(\vec{OA})}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d(\vec{AB})}{dt}}$$

Dato che  $AB$  è costante potrà solo rotare e non aumentare o diminuire. Quindi posso scrivere

$$\frac{d(AB)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB' - AB}{\Delta t}, \quad |\vec{BB}'| = |\vec{AB}| d\theta,$$



$$\left| \frac{d(AB)}{dt} \right| = \frac{AB \delta \theta}{\delta t} = \overline{AB} \frac{d\theta}{dt} = AB \cdot \dot{\theta}$$

Se il corpo sta rotando in senso  $\curvearrowright$  allora  $\dot{\theta} \perp \vec{AB}$  e diretta in senso antiorario.

La rapidità con la quale varia la derivata è

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} = \omega \vec{k}}$$

Il verso è deciso dalla regola mano dx.

Quindi posso dire che  $\frac{d(\vec{AB})}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$  quindi

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}} \quad (1)$$

$\vec{\omega}$  è una grandezza caratteristica di tutto il corpo, non varia da punto a punto.

Studiamo ora l'accelerazione

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{AB}}{dt}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB}} \quad (2)$$

1 e 2 valgono sia nel piano che nello spazio.

1



Un corpo che si muove nel piano ha un moto determinato da 3 informazioni indipendenti ovvero 3 Gradi di Libertà.

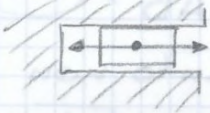
Nello spazio ne ha 6.

Per un corpo rigido piano ha dei vincoli ovvero qualcosa che mi toglie gradi di libertà

**CERNIERA** Toglie due gradi di libertà, infatti  $y$  e  $x$  non possono variare. L'unico che varia è  $\theta$ .



**GUIDA LINEARE** Toglie due gradi di libertà, non può variare  $y$  e  $\theta$ . L'unico che varia è  $x$



**APPOGGIO SCORREVOLE** Può variare  $\theta$  e  $x$  ma  $y$  è fisso. Può essere pensato come combinazione di cerniera e guida lineare



È interessante studiare i vari vincoli.

Consideriamo Biella-Manovella

Il numero di gradi di libertà è

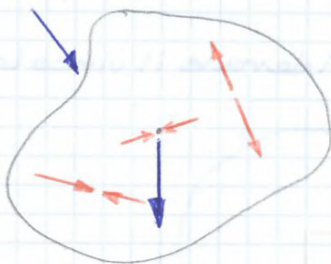
$$N = 3(1) + 3(2) - 2(A) - 2(B) - 1(C) = 1$$

Quindi noto l'angolo  $\theta$  posso conoscere tutte le posizioni relative a quel  $\theta$ .

Se togliessi il vincolo C avrei  $N = 2$  quindi per conoscere completamente il sistema avrei bisogno di  $\theta$  e  $\varphi$



Consideriamo ora le forze agenti su un corpo rigido. Parlo di  $F^{ext}$  e  $F^{int}$  ma devo definire cos'è esterno e interno. Le forze interne sono adde a due uguali e opposte.



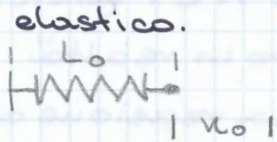
Le forze sono esterne se la sorgente che le genera è esterna al corpo (forze di campo). Possiamo anche parlare di

forze attive e forze reattive. Forze Attive: dipendono dallo stato di moto del corpo. Forze Reattive: dipendono dalle forze interne e dalle altre forze.



## Studiamo ora le MOLLE

Sono soggette a una caratteristica che è la forza di richiamo elastico.



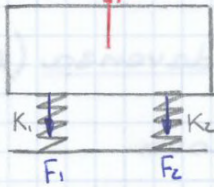
$$u_0 = \frac{F}{K} \quad K: \text{coeff che varia da molla a molla}$$

$$\boxed{F = K u_0}$$



Questo vale anche per la compressione

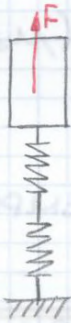
Cosa succede se ho più molle agenti sullo stesso corpo?



$$\begin{cases} F_1 = K_1 u \\ F_2 = K_2 u \end{cases} \quad F = F_1 + F_2 = K_1 u + K_2 u = (K_1 + K_2) u$$

Quindi le due molle equivalgono a una con

$$\boxed{K_e = K_1 + K_2}$$

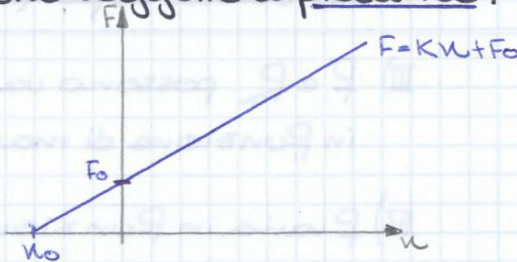
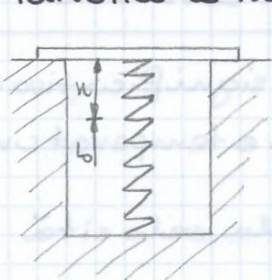


$$\begin{cases} u_1 = \frac{F}{K_1} \\ u_2 = \frac{F}{K_2} \end{cases} \quad u = u_1 + u_2 = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} = F \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

Quindi

$$\boxed{\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$$

Talvolta le molle sono soggette a precarico.



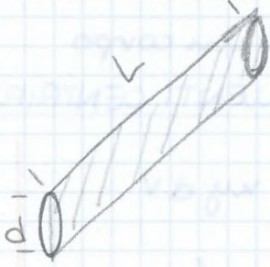
Tutto questo era un ragionamento per le molle di trazione compressione

## MOLLA DI TORSIONE

$$C = K_t J$$



## Attrito Viscoso



Sezione maestra  $A = d \cdot L$

$C_R$  e  $C_L$  a parità di dimensioni variano in funzione del n° di Reynolds

$$Re = \frac{\rho v b}{\mu}$$

$b$ : dipende da dimensioni e altre cose.

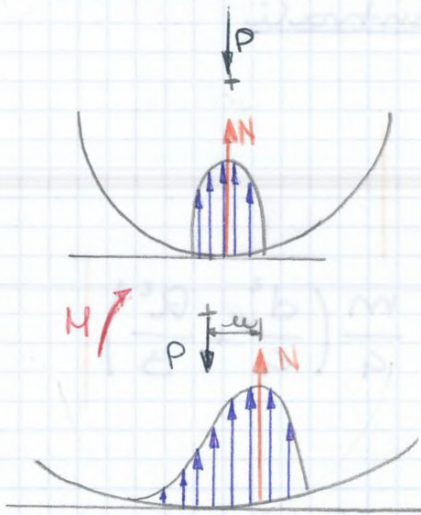
Per un corpo che ruota in un fluido  $R_0$  un momento Resistente pari a

$$M_R = \frac{1}{2} \rho C_M R^3 \omega^2$$

## Resistenza al moto di Rotolamento

In statica  $R_0$  solo  $P$  e  $N$  di ugual modulo e che agiscono sulla stessa retta d'azione.

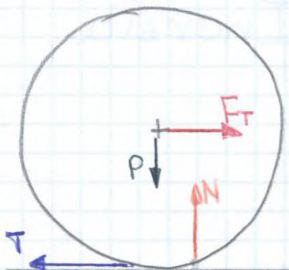
Ma se applico una coppia  $M$  se questa non è sufficientemente grande non  $R_0$  moto perché la forza d'attrito volvente si oppone al moto che genera una coppia con  $P$  e si oppone a  $M$ .



$\mu$ : Parametro di Attrito Volvente [m]

$$M = P\mu = N \cdot \mu, \quad P = N$$

Ma per generare il moto potrei anche avere



$$P\mu = F_T r$$

è  $P=N$  cancellare la  $T$

$$F_T = P \frac{\mu}{r}, \quad F_T = T, \quad P = N$$

$$\frac{T}{N} = \frac{\mu}{r} = f_v$$

$f_v$ : coeff. di attrito volvente  $f_v < f$

$f_v$  dipende dal materiale.

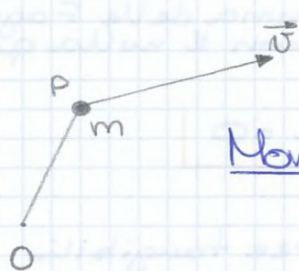
$\mu$  dipende dal raggio con relazione  $\mu = k \sqrt[3]{r}$

$f_v$  dipende da  $\omega$  come

$$f_v = f_{v_0} + f \omega^c$$



# Dinamica dei Corpi Rigidi



Quantità di Moto  $\vec{Q} = m\vec{v}$

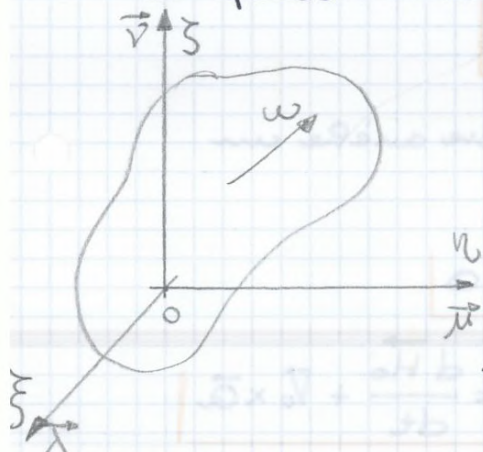
Momento Rispetto a O della Quantità di Moto

$\vec{H}_O = \vec{OP} \times \vec{Q}$

Questo è per una massa puntiforme. Per un corpo rigido i casi sono 2:

- O è un punto fisso
- O coincide con il baricentro del corpo

In questi casi sono in una situazione dove gli assi sono Assi Principali d'Inerzia



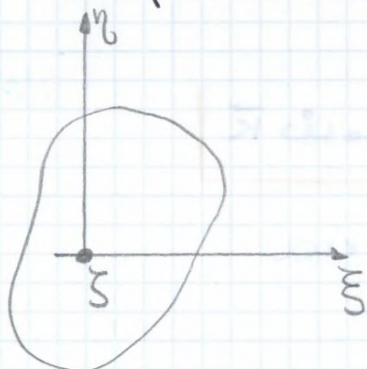
$$\begin{cases} p = \vec{\omega} \cdot \vec{\lambda} \\ q = \vec{\omega} \cdot \vec{\mu} \\ r = \vec{\omega} \cdot \vec{\nu} \end{cases}$$

$\vec{H}_O = I_\xi p \vec{\lambda} + I_\eta q \vec{\mu} + I_\zeta r \vec{\nu}$

Se invece O non è fisso e non coincide con il baricentro

$\vec{H}_{O'} = \vec{H}_O + \vec{Q} \times \vec{OO'}$

Nel piano Ro:



$\vec{H}_O = I_\xi \omega \vec{\nu}$

$\vec{H}_O = I_\eta \omega \vec{\mu}$

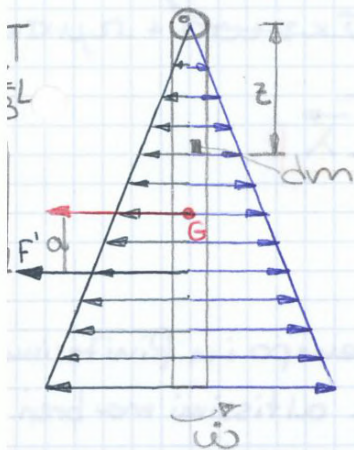
## Equazioni di Equilibrio Dinamico

Una massa puntiforme che viaggia a velocità  $\vec{v}$  e sulla massa agiscono n-forze. Se  $\vec{v} \neq 0$  o  $\vec{v} = k \text{cost}$  allora ho Equilibrio Statico





Consideriamo un corpo che ruota attorno ad un asse fisso



Per questo corpo di lunghezza  $L$  la massa è uniformemente distribuita e il baricentro è a  $\frac{L}{2}$ . Applicando un momento che mi dà cioè ogni punto del corpo avrà la sua accelerazione proporzionale alla distanza da  $O$ . Se considero una mini massa  $dm$  su di essa si genererà una forza d'inerzia opposta a  $\omega$ .

$$dF' = z \ddot{\omega} dm, \quad dm = \frac{M}{L} dz \quad \text{quindi}$$

$$dF' = z \ddot{\omega} \frac{M}{L} dz \Rightarrow \int_{F'_{tot}} \Rightarrow F' = \int dF' = \int_0^L z \ddot{\omega} \frac{M}{L} dz = \ddot{\omega} \frac{M}{L} \int_0^L z dz =$$

$$\boxed{F' = \frac{1}{2} M L \ddot{\omega} = M \vec{a}_G} \quad \text{Perché } \frac{1}{2} L \ddot{\omega} \text{ è } \vec{a}_G$$

Questa risultante non passa per il baricentro in fatti, come noto dal grafico delle forze passa per il baricentro del triangolo cioè a  $\frac{2}{3} L$ .

Se volessi pensare  $F'$  applicata a  $G$  potrei farlo ma perché si possa fare devo tenere conto dello spostamento e quindi devo aggiungere un momento che compensi lo spostamento. Questo momento vale

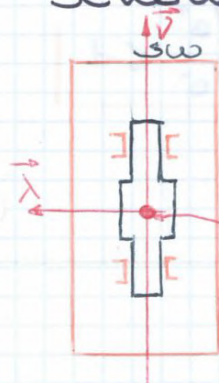
$$\boxed{M'_G = F' a = \frac{1}{2} M L \ddot{\omega} \left( \frac{3}{2} L - \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2} M L^2 \ddot{\omega} = \boxed{I_G \ddot{\omega}}}$$

Se allo stesso modo applicassi  $F'$  in  $O$  allora il momento per compensare sarebbe

$$\boxed{M'_O = F' \frac{2}{3} L = \frac{1}{2} M L \ddot{\omega} \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} M L^2 \ddot{\omega} = \boxed{I_O \ddot{\omega}}}$$

Quindi il sistema di forze d'inerzia si dice ridotto a un sistema con  $F'$  applicata a  $G$  (oppure  $O$ ) più un momento  $M_G$  (oppure  $M_O$ )

Se ho un sistema non piano dove ① ruota attorno a  $\vec{v}$  e ② ruota attorno a  $\vec{\mu}$  allora avrò

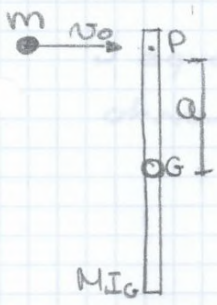


$$\begin{cases} \vec{\omega} = \omega \vec{v} + \Omega \vec{\mu} \\ \vec{H}_G = \cancel{S \Omega \vec{\mu}} + I \omega \vec{v} \end{cases}$$

non considero  $S \Omega \vec{\mu}$  perché  $\Omega \ll \omega$  quindi trascurab



## Urto fra Corpi Liberi Ecentrici

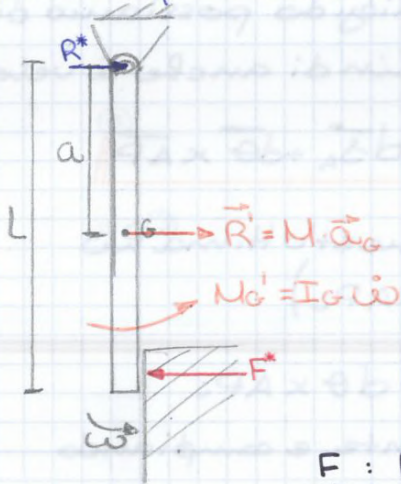


date le condizioni iniziali  $v_G = 0$  e  $\omega = 0$

$$\begin{cases} m v_0 = m v^* + M v_G^* \\ m v_0 a = m v^* a + I_G \omega^* \\ e = - \frac{v^* - v_P}{v_0} \\ v_P = v_G^* + a \omega \end{cases}$$

Per risolvere il problema basta risolvere queste 4 equazioni in 4 incognite.

## Urto fra Corpi Vincolati



In questo caso è importante studiare la reazione nel vincolo. Scriviamo quindi le equazioni di equilibrio.

$$M_o) : F^* \cdot L - M \vec{a}_G \cdot a - I_G \dot{\omega} = 0, \quad a_G = a \cdot \dot{\omega}$$

$$F^* = \frac{1}{L} \dot{\omega} (I_G + M a^2)$$

$$\vec{F} : R^* - F^* + R' = 0 \quad R^* = F^* - M \vec{a}_G = F^* - M a \dot{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^* = \frac{1}{L} \dot{\omega} (I_G + M a^2) - M a \dot{\omega} = \dot{\omega} \left( \frac{I_G}{L} + \frac{M a^2}{L} - M a \right)$$

$$R^* = \dot{\omega} \left( \frac{I_G}{L} - M \left( a - \frac{a^2}{L} \right) \right)$$

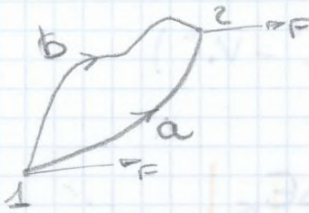
Durante l'urto  $\dot{\omega}$  è molto alto  $\Rightarrow R^*$  sarà molto alto almeno che non ponga

$$L = a + \frac{I_G}{M a} \quad \text{allora } R^* = 0$$

Questa L mi identifica il Centro di Percossa ovvero il punto dove, se vi applico  $F^* \Rightarrow R^* = 0$



Definito un confine del corpo, tutte le coppie di forze interne sono equilibrate e la loro Risultante è nulla. Tuttavia questo non comporta che il loro punto di applicazione sia lo stesso. Infatti il lavoro prodotto non è nullo. Se applichiamo una forza a un punto questo per effetto



della forza compie si muoverà lungo una traiettoria. Tuttavia il lavoro prodotto non varia in funzione della traiettoria ma è unicamente dei punti di partenza e arrivo, si dice quindi che è Conservativo cioè

$$(L_{1 \rightarrow 2})_a = (L_{1 \rightarrow 2})_b$$

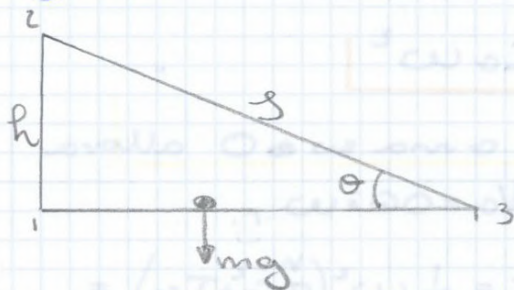
Per esprimere questa conservazione si può usare

### Energia Potenziale U

$$L_{12} = U_1 - U_2$$

### Gravitazionale

$$\Delta U = mgR$$



Per andare da 1 a 2 posso fare

•  $1 \rightarrow 2 \Rightarrow (L_{12})_{12} = mgR$

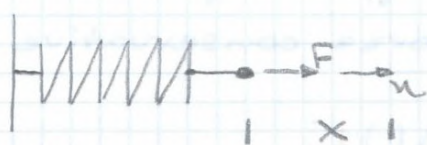
•  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 = (L_{12})_{12} = L_{13} + L_{23} =$

$= mg s \sin \theta =$

$= mgR$

$$(L_{12})_{12} = (L_{12})_{132}$$

### Elastica $\Delta U = \frac{1}{2} k \Delta x^2$



$$L = \int_0^x -kx dx$$

$$L_{12} = -\frac{1}{2} k x^2 = U_1 - U_2$$

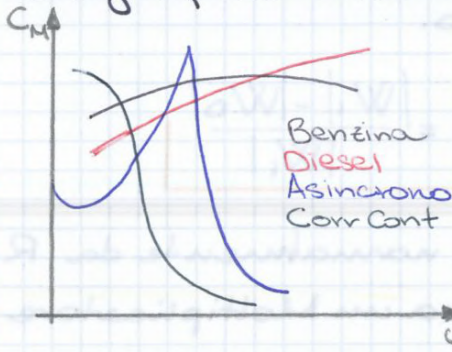


Studiamo ora la trasmissione del moto nei sistemi meccanici.

La trasmissione della potenza avviene tra un motore M e un utilizzatore U. Il motore sviluppa una coppia motrice  $C_M$  e l'utilizzatore  $R_a$  invece una coppia che si oppone al moto ed è coppia Resistente. Quindi si ha:

- Moto Accelerato  $W_M > W_R$
- Moto Decelerato  $W_M < W_R$
- Moto Stazionario  $W_M = W_R$

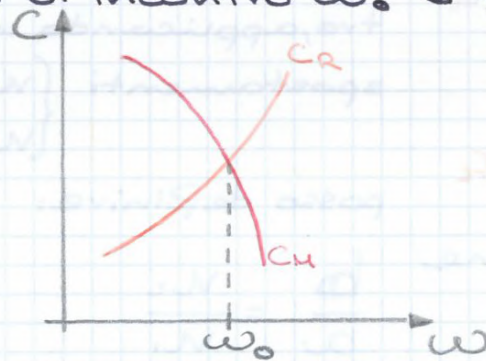
Un grafico utile è quello  $C_M/\omega_M$  dove l'andamento della  $C_M$  in  $f(\omega_M)$  prende il nome



### CARATTERISTICA MECCANICA

Questa Caratteristica Meccanica varia per tipo di motore e dimensioni.

Anche un Utilizzatore  $R_a$  ha una Caratteristica meccanica che in genere ha un andamento  $\square$ . Mettendo insieme  $C_M$  del Motore e dell'Utilizzatore abbiamo che il punto di incontro  $\omega_0$  è Condizione di Regime



Possiamo vedere questo meccanismo come inverso e quindi:



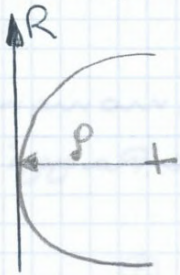
$$C_U \omega_U = C_M^* \omega_M$$

$$C_U^* = C_U \frac{\omega_U}{\omega_M} = C_U \tau$$

Sfruttando i Riduttori, ad esempio, posso sfruttare meglio il motore della macchina. Dispositivi come gli Argenti invece convertono Rotaz in Traslazione e viceversa.



Se ora consideriamo invece la presenza di attrito al perno, la risultante  $R$  non passerà per il centro ma sarà



tangente al cerchio d'attrito a sinistra poiché si deve opporre a  $\theta$ . Il cerchio d'attrito ha raggio  $p$  perché l'equilibrio al momento sarà

$$F_1(a-p) = F_2(b+p) \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{a-p}{b+p} = \frac{a}{b} \frac{1 - \frac{p}{a}}{1 + \frac{p}{b}}$$

Quindi il rendimento sarà:

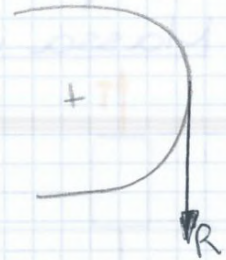
$$\eta_d = \frac{F_2 u_2}{F_1 u_1} = \frac{a}{b} \frac{1 - \frac{p}{a}}{1 + \frac{p}{b}} \frac{b}{a} = \frac{1 - p/a}{1 + p/b}$$

Se ora invertiamo la macchina in modo da avere  $F_1$  forza resistente e  $F_2$  forza motrice abbiamo che la risultante  $R$  si sposta a dx del cerchio d'Attrito perciò otteniamo

$$F_1(a+p) = F_2(b-p) \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{b-p}{a+p} = \frac{b}{a} \frac{1 - \frac{p}{b}}{1 + \frac{p}{a}}$$

il rendimento sarà

$$\eta_i = \frac{F_1 x_1}{F_2 u_2} = \frac{b}{a} \frac{1 - \frac{p}{b}}{1 + \frac{p}{a}} \frac{a}{b} = \frac{1 - p/b}{1 + p/a}$$

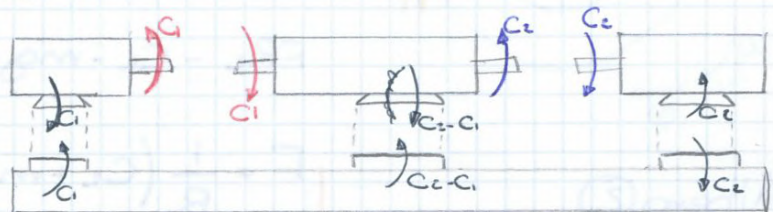
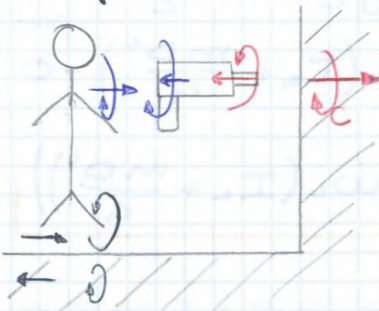


Quindi si nota che  $\eta_i < \eta_d$  e la differenza  $\eta_d - \eta_i$  è tanto piccola quanto è piccolo  $p$ .

Nel caso in cui  $\eta_i = 0$  allora la macchina è detta Irreversibile.

## Studio delle Forze di Carico

Studiare le forze (e coppie) che si generano tra i vari componenti che interagiscono



Nelle applicazioni ingegneristiche è molto importante perché devo studiare le deformazioni e rafforzare il materiale dove serve.



Se mi interessa conoscere l'accelerazione della massa basta, dopo aver calcolato  $\omega$ , ricavarmi  $\dot{\omega}$  tornando indietro

OSS | L'accelerazione  $\dot{\omega}$ , a numeratore  $R_0 C_1 - \tau C_2 - \tau mg \frac{D}{2}$  che è come il discorso delle forze e la Riduzione con le coppie. A denominatore  $R_0$  un  $I_e$  equivalente che tiene conto di tutte le masse e inerzie ridotte all'asse  $\perp$ .

Se si considera  $E_k$  di un sistema a una certa velocità  $R_0$

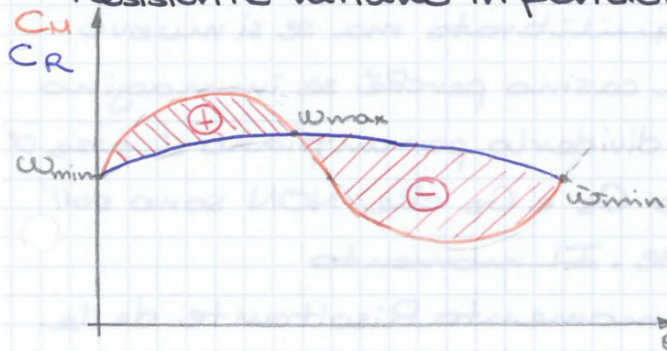
$$E_k = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

Se considero un  $I_e$  equivalente che faccia  $E_k = \frac{1}{2} I_e \omega^2$  allora

$$I_e = I_1 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m \left(\frac{\dot{z}}{\omega_1}\right)^2 = I_1 + I_2 \tau^2 + m \left(\frac{\dot{z}}{\omega_1}\right)^2$$

OSS | Nell'es di prima  $R_0$  considerato gli alberi così le forze peso aveva Mom nullo. Potevo studiare tutto l'insieme del sistema ma allora dovevo tenerne conto.

Studiamo ora un caso dove la coppia Motrice e la coppia Resistente variano in funzione dell'angolo  $\theta$  ovvero  $C = f(\theta)$



Nella prima fase  $C_M > C_R$  e quindi  $\omega$  aumenta, nella seconda invece  $C_R > C_M$  quindi  $\omega$  torna a valori normali. A noi interessa che la differenza tra  $\omega_{max}$  e  $\omega_{min}$  sia minima cioè:

IRREGOLARITÀ PERIODICA  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{medio}} \quad \text{①}$$

questa deve essere molto bassa.

Variando  $\omega$  anche l'energia cinetica varia e  $R_0$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = \Delta L$$

dove  $I$  sarà il mom d'inerzia di tutto il sistema ridotto all'albero motore.

$$\Delta L = \frac{1}{2} I (\omega_{max} + \omega_{min}) (\omega_{max} - \omega_{min})$$





Questa coppia si genera perché  $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ . In fatti per  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$   $\frac{dH_G}{dt} = 0$ . Questo si ha anche per  $S = I \Rightarrow$  sfera. Da

questo si deduce che affinché un corpo sia in equilibrio

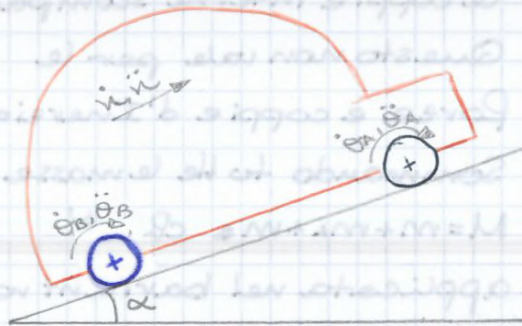
- Equilibrio Statico: G sull'asse di rotazione
- Equilibrio Dinamico: Asse Rotaz  $\equiv$  Asse Principi d'Inerzia

Per ottenere questo basta mettere o togliere massa laddove in modo da equilibrare tutto.

## Caratteristiche Principali della Dinamica dei Veicoli su Ruote

Guardando un'auto ho 3 elementi principali: Asse Ruote 1

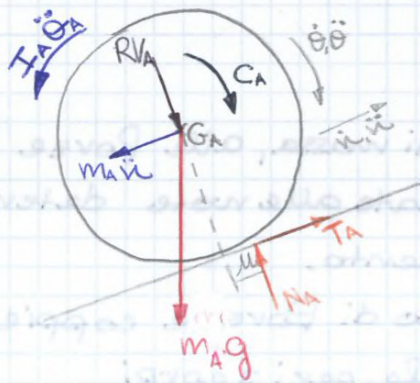
- Asse Ruote 2
- Scaea



Fissiamo un verso positivo. Non necessariamente  $\theta_A = \theta_B$  (sono uguali solo se ho rotolamento senza strisciamento)

Consideriamo elemento per elemento:

### Asse Ruota (A)



La direzione di  $T_A$  dipende dal verso del moto. In generale lo metto così poi al max lo cambio dopo i calcoli.

La coppia  $C_A$  trasmessa dal motore può essere positiva, negativa o nulla a seconda che la ruota sia motrice o resistente.

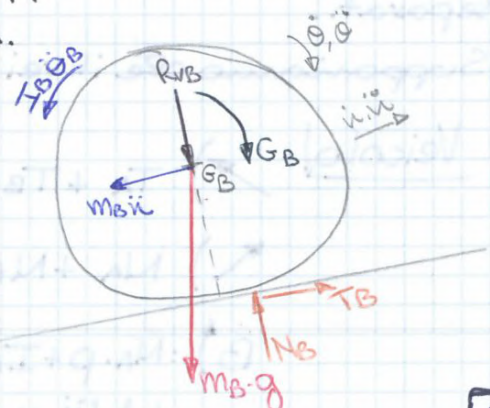
Poi ho forze e coppie d'inerzia.

$R_{VA}$  è il peso del veicolo scaricato su A.

### Asse Ruota (B)

Ho le stesse considerazioni fatte per (A)

In teoria avrei anche la resistenza aerea dinamica ma è trascurabile





Ruota A)

$$G_A \uparrow: N_A \cdot u + T_A \frac{d}{z} - C_A + I_A \ddot{\theta}_A = 0$$

Potrei fare anche l'equilibrio per le forze ma non mi serve

Ruota B)

$$G_B \uparrow: N_B \cdot u + T_B \frac{d}{z} - C_B + I_B \ddot{\theta}_B = 0$$

Quindi ho un sistema lineare di 7 incognite in 5 equazioni quindi per risolverlo devo fare delle ipotesi che poi verifico: ipotizzo Puro Rotolamento delle ruote

$$\ddot{u} = \ddot{\theta}_A \frac{d}{z} = \ddot{\theta}_B \frac{d}{z}$$

Quindi ora posso risolvere il problema e dopo che devo verificare le ipotesi e per farlo dovrò fare:

$$\frac{|T_A|}{N_A} \leq f_a \quad \frac{|T_B|}{N_B} \leq f_a$$

e la nostra ipotesi è giusta se e solo se sono vere entrambe, se non è così, tipo  $\frac{T_A}{N_A} > f_a \Rightarrow \ddot{u} \neq \ddot{\theta}_A \frac{d}{z}$  allora posso dire che in ogni istante  $T_A = f N_A$  e quindi le relazioni non sono più cinematiche ma dinamiche. Devo fare occhio al verso e segno di  $T_A$  e  $T_B$  e per sicurezza prendo il modulo.

Devo sempre tenere conto che:

- avo lte  $I \cdot \ddot{\theta}$  è trascurabile
- se so che sono in puro rotolamento allora la  $\textcircled{3}$  è trascurabile quindi

$$1 \left\{ T_A + T_B = Mg \sin \alpha + R + M \ddot{u} \right.$$

$$2 \left\{ N_A + N_B = Mg \cos \alpha \right.$$

$$3 \left\{ N_A \cdot u + T_A \frac{d}{z} = C_A \right.$$

$$4 \left\{ N_B \cdot u + T_B \frac{d}{z} = C_B \right.$$

Somma 3 e 4

$$(N_A + N_B)u + (T_A + T_B) \frac{d}{z} = C_A + C_B$$

Sostituisco 1 e 2 in questa

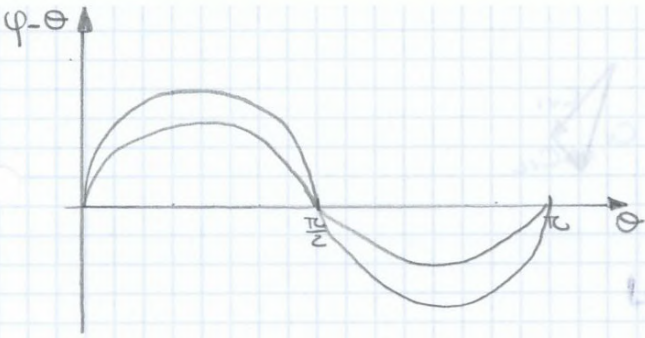
$$Mg \cos \alpha u + (Mg \sin \alpha + R + M \ddot{u}) \frac{d}{z} = C_A + C_B$$

Dalla quale ricavo facilmente  $\ddot{u}$ .

Tutto questo vale SOLO per PURO ROTOLAMENTO



## Rapporto di Trasmissione



$$\tau_{\text{medio}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$$

ma istantaneamente non è uguale a 1 ma compresa

$$\cos \alpha \leq \tau_{\text{istantaneo}} \leq \frac{1}{\cos \alpha}$$

Supponendo  $\omega_1$  costante (che chiamiamo  $\omega$ ) allora

$$\omega_{2 \text{ max}} = \frac{\omega}{\cos \alpha}$$

$$\omega_{2 \text{ min}} = \omega \cos \alpha$$

$$\Delta \omega = \omega_{2 \text{ max}} - \omega_{2 \text{ min}} = \omega \left( \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) = \frac{\omega}{\cos \alpha} (1 - \cos^2 \alpha) =$$

$$\Delta \omega = \omega \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

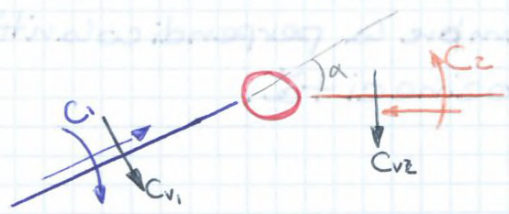
per piccoli  $\alpha$

$$\Delta \omega = \omega \alpha^2$$

Questo tipo di trasmissione è molto utile tolto il problema dell' $\omega$  variabile che genera vibrazioni e sollecitazioni.

Noi abbiamo considerato  $\omega_1$  costante ma non è sempre così, quindi  $\Delta \omega$  può gravare su uno o sull'altro albero. Per esempio le vibrazioni generate da  $\Delta \omega$  influenzano di più l'albero con Inerzia minore.

Studiamo ora un caso. Supponiamo di avere velocità basse.



Ho una coppia Motrice  $C_1$  e una Resistente  $C_2$ . Immaginiamo Coppie d'Inerzia Trascurabili perché ho velocità basse e niente attrito  $\Rightarrow \eta = 1$

$C_1$  e  $C_2$  sono a regime e hanno stesso modulo ma non stessa direzione e quindi non si equilibrano, infatti ho le reazioni vincolari nei supporti che mi danno le coppie vincolari  $C_{1v}$  e  $C_{2v}$ . Queste sono  $\perp$  ai rispettivi alberi. se non ci fossero  $C_{1v}$  e  $C_{2v}$  gli alberi tendono ad allinearsi,  $\alpha \rightarrow 0$

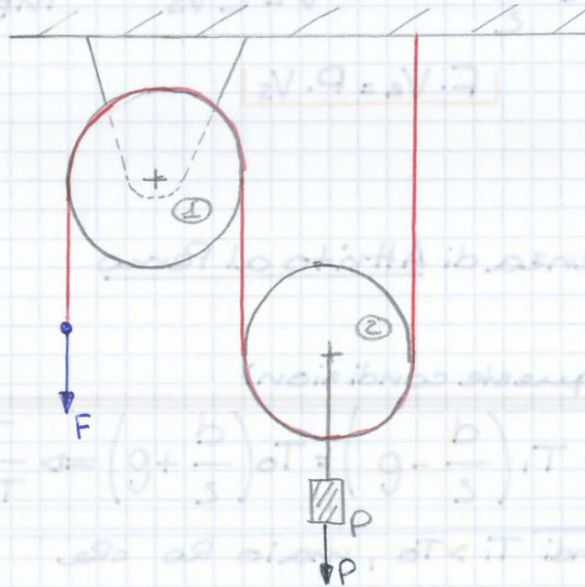


## Trasmissioni con Elementi Flessibili

Con flessibile ci riferiamo a elementi che macroscopicamente sono flessibili anche se microscopicamente sono costituiti da Elementi Rigidi (vedi Catene).

Possono servire per trasportare il moto tra due assi paralleli oppure negli organi di sollevamento.

## Organi di Sollevamento



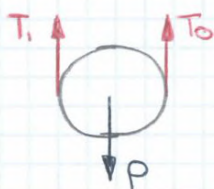
① è una Puleggia Fissa

② è una Puleggia Mobile

Il mio scopo è quello di tirare su P applicando F.

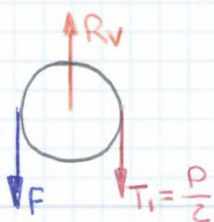
Facciamo il corpo libero; in assenza di Attrito

Puleggia 2



$$\left. \begin{array}{l} \uparrow) T_0 + T_1 - P = 0 \\ \curvearrowright) T_0 \frac{d}{2} - T_1 \frac{d}{2} = 0 \end{array} \right\} T_1 = T_0 = \frac{P}{2}$$

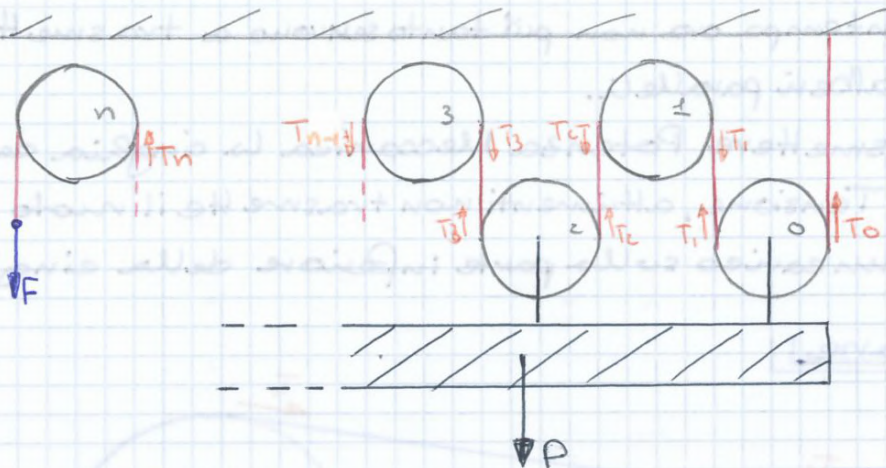
Puleggia 1



$$R_v = F + T_1 = P \quad \left\{ F = \frac{P}{2} \right.$$



Lo stesso ragionamento vale per un organo composto da più pulegge



$$T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1} + T_n = P$$

$$\begin{cases} T_1 = T_0 (1+k) \\ T_2 = T_1 (1+k) \\ T_3 = T_2 (1+k) \\ T_4 = T_3 (1+k) \\ \dots \\ T_n = T_{n-1} (1+k) \end{cases}$$

$$F = T_0 (1+k)^n$$

$$P = T_0 [1 + (1+k) + (1+k)^2 + (1+k)^3 + \dots + (1+k)^{n-1}]$$

Per la cinematica dato che non dipende da \$k\$ posso studiarla per \$k=0\$. Per comodità assumo \$\rho=1 \Rightarrow F = \frac{P}{4}\$

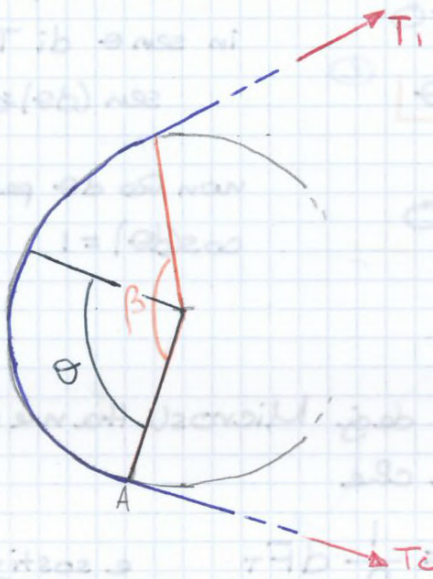
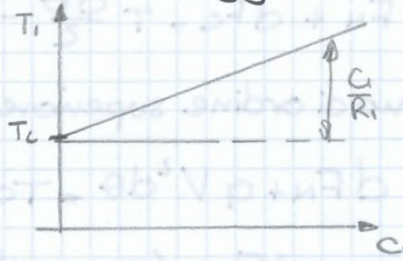
$$F \cdot V = P \cdot V_s \Rightarrow V_s = \frac{V}{4}$$

Tutto questo vale per moto a regime. Se ho accelerazione ho due problemi in fatti oltre a fare tutto il ragionamento già fatto devo anche tenere conto delle Inerzie sia di trascinamento (\$m \ddot{u}\$) che di rotazione (\$I \ddot{\theta}\$)



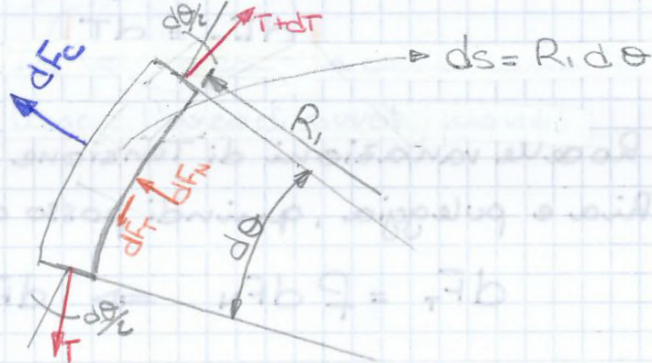
Quando applico  $C_1$  ho che  $T_1 > T_2$  quindi la tensione della cinghia varia tra  $T_1$  e  $T_2$  con legge ricavata dalla 1

$$T_1 = T_2 + \frac{C_1}{R_1}$$



$\beta$ : Angolo di Avvolgimento

$\theta$ : Angolo di Variazione di Tensione



Io voglio capire come varia la tensione lungo l'arco di avvolgim. Se io considero un  $d\theta$  di cinghia avvolto sulla puleggia, su questo elemento agiscono delle forze: lungo tutto l'elemento ho tensione variabile tra  $T$  e  $(T+dT)$ . Sulla faccia di contatto tra cinghia e puleggia ho la forza radiale  $dF_m$  e la tangenziale  $dF_t$ . Se  $\omega$  è alta allora si sviluppa una forza centrifuga che tende a separare la cinghia dalla puleggia e vale

$$dF_c = dm \frac{v^2}{R_1}$$

se definisco Massa per lunghezza che è una grandezza caratteristica delle cinghie allora

$$q = \frac{m}{e} \left[ \frac{R_g}{m} \right]$$

$$dm = q ds = q R_1 d\theta$$

$$dF_c = q v^2 d\theta$$



Quindi l'elemento di cinghia, quando è sulla puleggia, si accorcia e si slitta. Quindi  $R_0$  scorrimento laddove  $R_0$  variazione di Tensione. Dato che è la puleggia a trascinare la cinghia  $R_0$  che la cinghia rimane indietro e si accorcia perché  $R_0$  slittato.

Se avessi aderenza in  $T_2$  e slittamento in  $T_1$  mi troverei in una situazione di Puleggia Condotta dove è la cinghia a trascinare la puleggia che quindi va più piano.

Riferendomi al grafico di  $T=f(\theta)$   $R_0$

Angolo di Scorrimento  $0 \div \theta^*$

Angolo di Aderenza  $\theta^* \div \beta$

Pensando alla  $\textcircled{3}$  posso dire che

$$T_{1\max} = T_2 e^{f\beta_1}$$

quindi

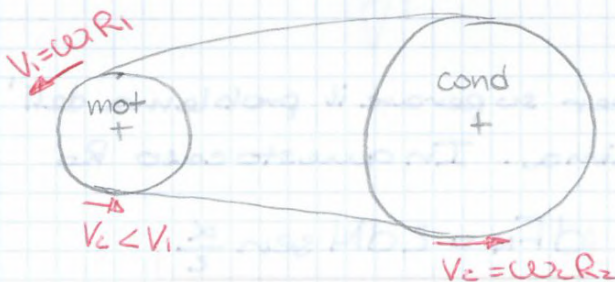
$$C_{1\max} = (T_{1\max} - T_2) R_1 = T_2 (e^{f\beta_1} - 1) R_1$$

in queste condizioni  $R_0$  Scorrimento Globale

Quindi le trasmissioni a cinghia sono limitate dal fatto che la coppia massima è funzione di attrito  $f$  e raggio  $R$ .

Inoltre a causa dei microslittamenti non vale

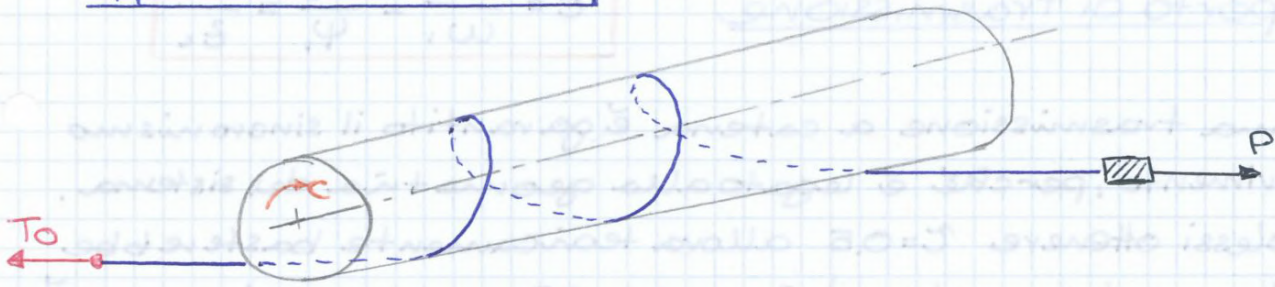
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq \frac{r_1}{r_2}$$



$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} < \frac{R_1}{R_2}$$



## Applicazione / Esempio



Ho un tamburo sul quale è avvolta una corda per molti giri.

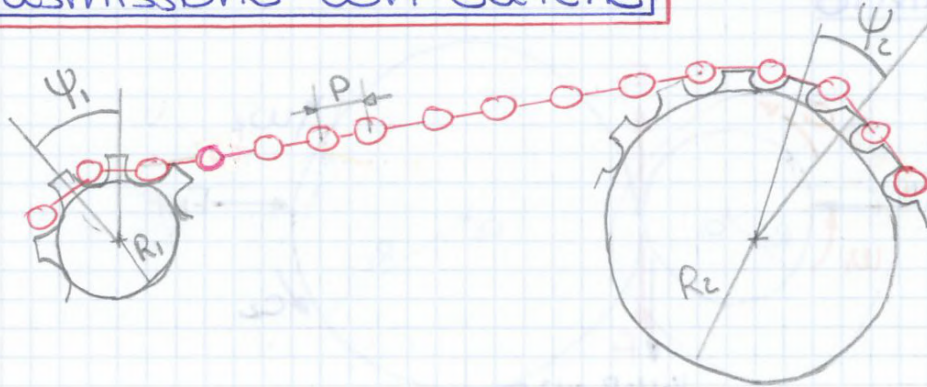
Viene applicata una coppia  $C$  per tirare su il peso. Ma perché la corda tiri su il peso deve essere aderente al cilindro quindi deve tenderla con  $T_0$ . Per cui  $R_0$ :

$$P = T_0 e^{f\theta^*} = T_0 e^{2\pi N f}$$

$$C = (P - T_0) \frac{d}{2} = T_0 (e^{2\pi N f} - 1) \frac{d}{2}$$

La tensione  $T_0$  deve essere costante.

## Trasmissione con Catene



In una catena a rulli la distanza tra i due rulli è il PASSO

I rulli simettono tra dente e dente e tra questi denti vi sono gli angoli

$$\psi_1 = \frac{2\pi}{z_1}$$

$$\psi_2 = \frac{2\pi}{z_2}$$

$$z = n^\circ \text{ denti}$$

Studiando il funzionamento di una catena, se guardo quando è in funzione avanza di un passo per volta.

Nell'intervallo  $\delta t$  in cui avanza di un passo le due ruote avranno rotato di  $\psi_1$  e  $\psi_2$  e quindi avranno le velocità

$$\omega_1 = \psi_1 \delta t$$

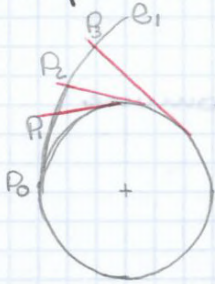
$$\omega_2 = \psi_2 \delta t$$



le Roote Dentate dovranno quindi comportarsi come Roote d'Attito.

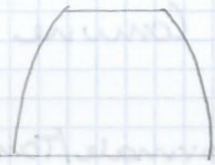
## Roote Dentate

Per realizzare questo ho bisogno che il profilo del dente sia particolare ovvero a Evolvente di Circonferenza

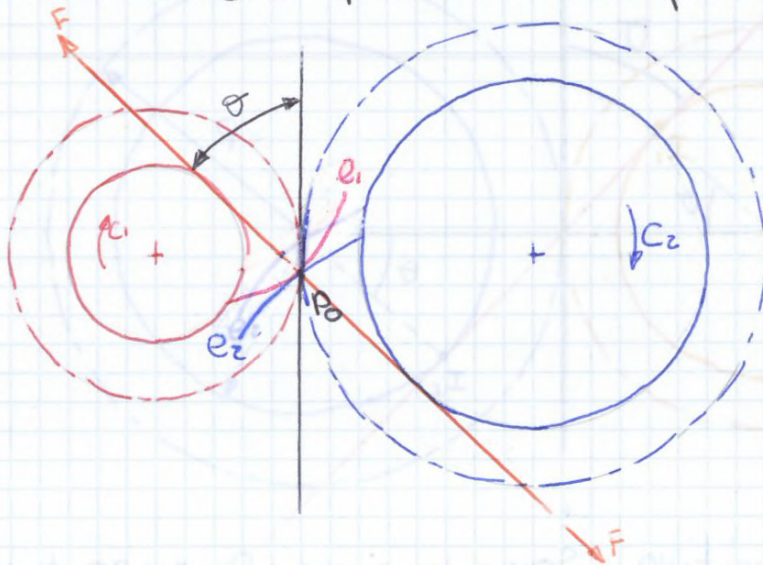


Questo si ottiene prendendo un cavo e svolgendolo lungo la circonferenza, tenendolo sempre teso.  $No\ Evolvente \Rightarrow r \neq cost$

La curva  $e_1$  è la Curva a Evolvente della Circonferenza Fondamentale. La proprietà di questa curva è che la normale alla curva nel generico punto  $P_i$  è sempre tangente alla circonferenza fondamentale.



Prendiamo ora due Circonferenze Fondamentali, entrambe con le rispettive curve a evolvente  $e_1$  e  $e_2$ , e portiamole a contatto ovvero quando i due punti dell'evolvente si toccano

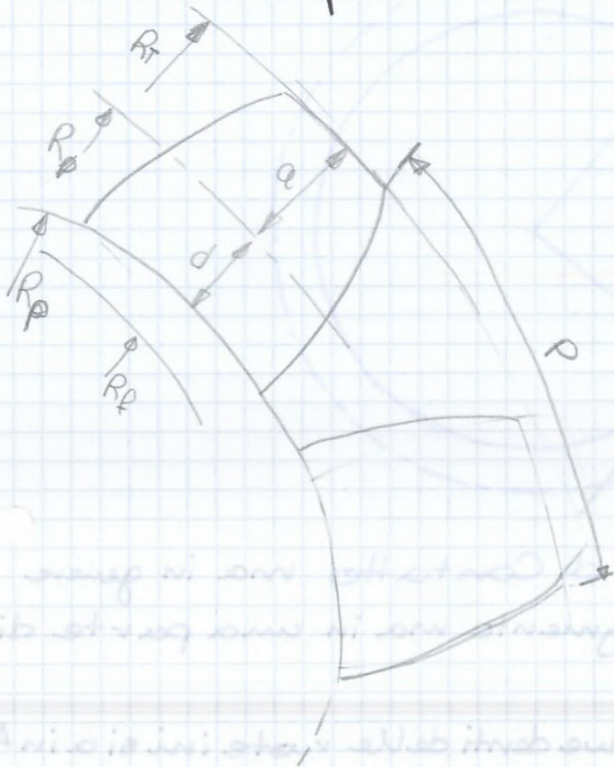


Essendo i due evolventi due curve continue, nel punto  $P_0$  di contatto hanno la stessa tangente e la stessa normale. La Normale Comune ai due evolventi coincide con la Tangente Comune alle due circonferenze fondamentali.

Se ora immagino le due ruote in movimento i due evolventi non si incrociano più in  $P_0$  ma in  $P_i$  che però conserva le caratteristiche di normalità e tangenziale.



Le Circonferenze Fondamentali sono due circonferenze Fisiche mentre la Primitiva è Ideale infatti spostando  $O_2$  i raggi fondamentali si mantengono mentre quelli Primitivi no perché varia  $\cos \theta$ .



Raggio di Testa  $R_T$

Raggio di Piede  $R_P$

Raggio Primitivo  $R$

Raggi Fondamentale  $R_F$

Passo  $p$

Addendum  $a$

Dedendum  $d$

Numero di denti  $z$

Modulo  $m$

$$p \cdot z = 2\pi R$$

$$\frac{p}{\pi} = m$$

$$m z = 2R$$

$$R_F z = 2\pi R_F \Rightarrow \frac{R_F}{p} = \frac{R_F}{R} = \cos \theta$$

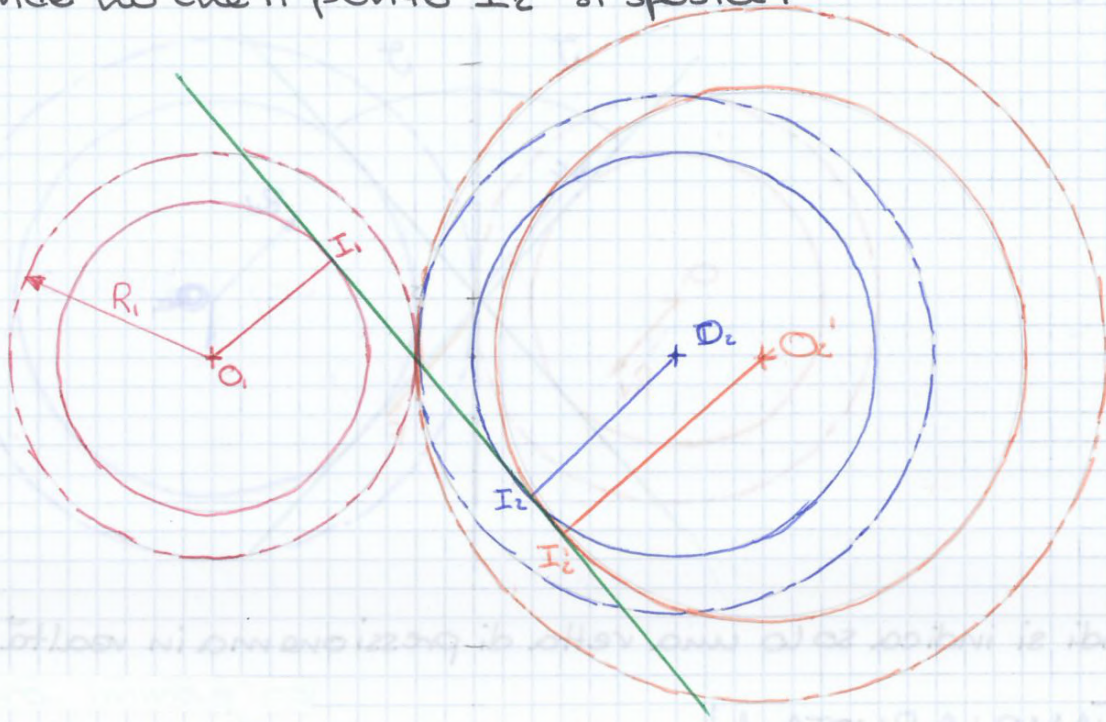
$$a = R_T - R = m$$

$$d = \frac{5}{4} m$$

Pignone la ruota più piccola



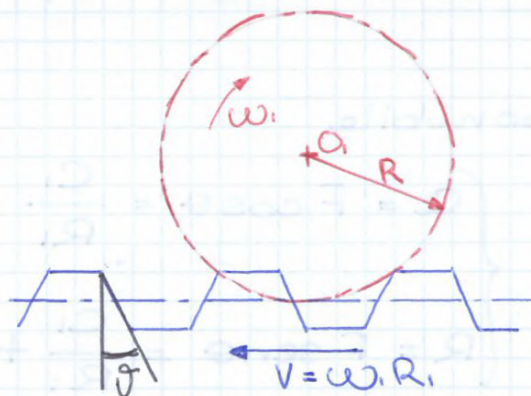
Se ora immagino di usare un'altra nota in  $O_2'$  e più grande  $R_0$  che il punto  $I_2$  si sposta.



Allora l'evolvente della Ruota 2' sarà meno incurvato rispetto all'evolvente di 2 e più mi sposto, cioè aumento  $R$ ,  $R_0$  evolvente che tende a una Retta. Ma in grana sempre bene.

Se faccio un ragionamento al limite e considero una ruota 2' con un Raggio Infinito  $R_0$  che l'evolvente è una Retta e quindi Realizzo

Rocchetto - Cremagliera



Tutte le proprietà sul dimensionamento valgono anche qua.



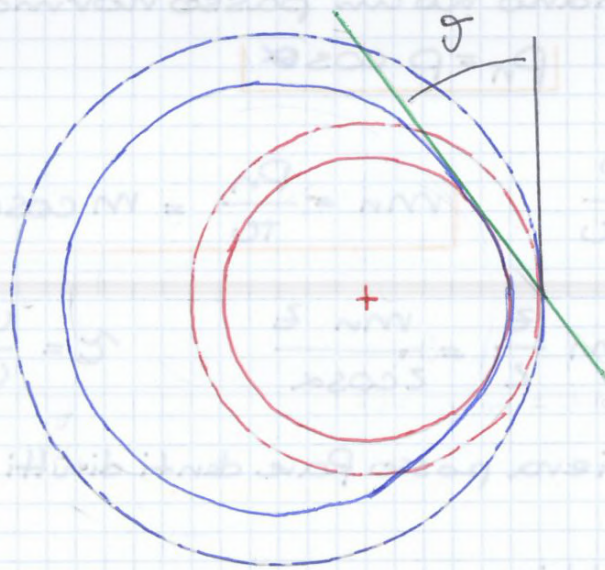
Nelle ruote dentate si cerca di avere un basso  $\theta$  ( $14^\circ < \theta < 35^\circ$ ) e un basso numero di denti, ma non troppo perché poi non posso realizzare l'ingranaggio.

$$z_{\min} = \frac{z}{\sin^2 \theta}$$

$$\tau = \frac{z_2}{z_1}$$

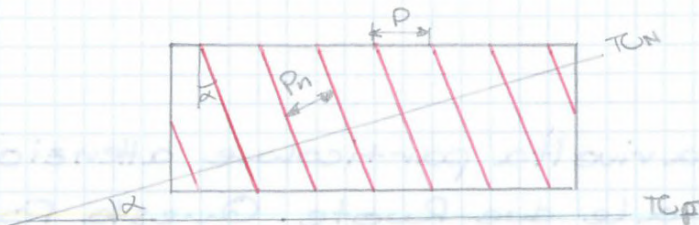
Le Ruote si fanno per Involuppo

## Ingranaggio Interno



È un metodo usato per realizzare un Ingranaggio con 2 Ruote che girano nello stesso verso.  
Le considerazioni sul dimensionamento ecc valgono sempre.

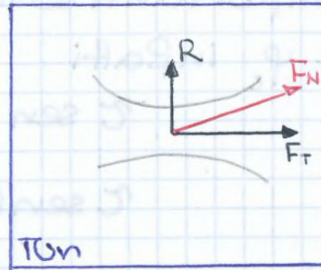
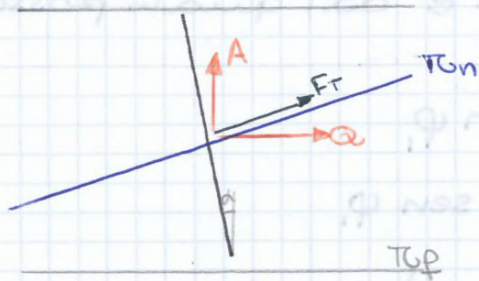
## Ruote Dentate Elicoidali



Nelle Ruote finora studiate ho che i denti sono tutti paralleli tra loro quindi la forza si applica di colpo a tutto il dente quindi si generano vibrazioni.

Per porre rimedio a questo problema inclino il dente





equilibra la coppia applicata. Ma per queste ruote solo Q equilibra la coppia. A è una componente assiale.

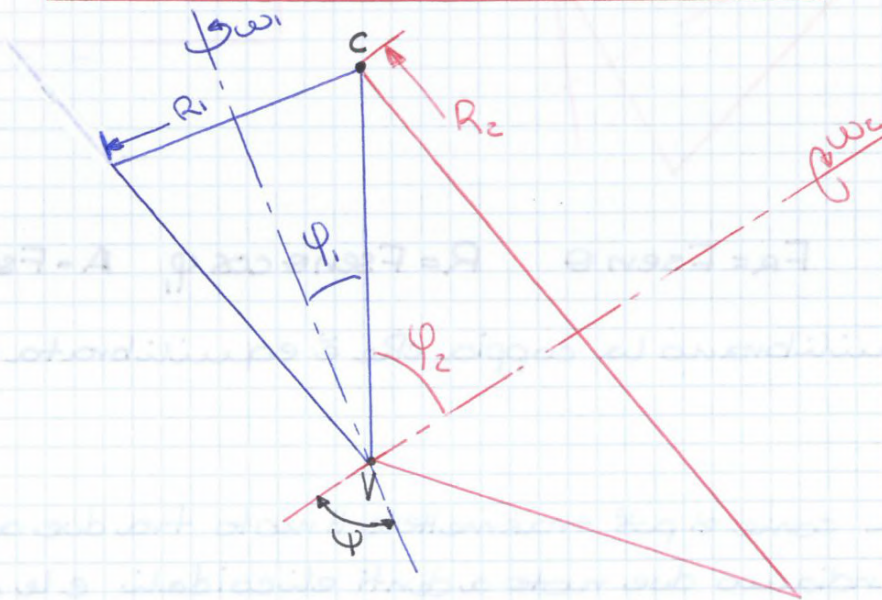
$$Q = F_T \cos \alpha \quad A = F_T \sin \alpha \quad R = F_N \sin \theta_N \quad F_T = F_N \cos \theta_N$$

Quindi il vantaggio delle elicoidali è che non ho vibrazioni tuttavia si genera una componente assiale che dovrà essere equilibrata dai supporti.

$$Q = \frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$$

Una particolare applicazione è quella con 2 eliche con uguale  $\alpha$  ma opposto.

## Ruote Dentate Coniche



Supponiamo di voler trasmettere il moto tra due assi incidenti inclinati di  $\psi$

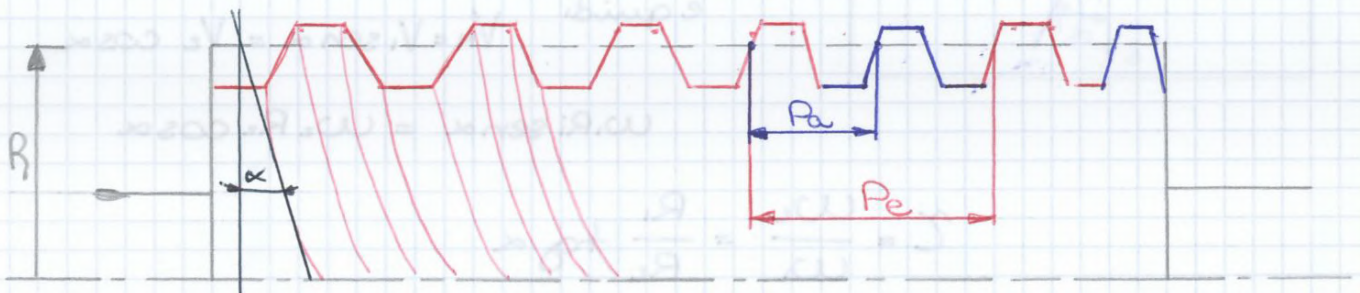
$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad z = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \quad \begin{cases} R_1 = \sqrt{C} \cdot \sin \varphi_1 \\ R_2 = \sqrt{C} \cdot \sin \varphi_2 \end{cases}$$



# Ingranaggio a Vite

Ho una Ruota Dentata e una Vite Senza Fine che trasmettono il moto tra due assi a 90°.

La Vite è fatta in modo da avere i denti a trapezio e l'angolo  $\alpha$  è contato dalla perpendicolare all'asse della vite alla tangente all'inclinazione del dente. Questo angolo non è da confondersi con quello delle Ruote Elicoidali.



$$P_e = 2\pi R_1 \tan \alpha$$

$$\frac{P_e}{2\pi} = R_1 \tan \alpha$$

$$P_e = z_1 P_a$$

$$z' = n^\circ \text{ di Principi}$$

Se si applica una coppia alla vite e si genera un moto  $\omega_1$ , possiamo dire che quando la vite è ruotata di un dente  $\sigma$  la sagoma a trapezio si sposta quindi  $R_a$  una rotazione  $\sigma$  corrispondente a una velocità  $V$ .



$$\frac{\sigma}{n} = \frac{2\pi}{P_e}, \quad n = \frac{P_e}{2\pi} \sigma$$

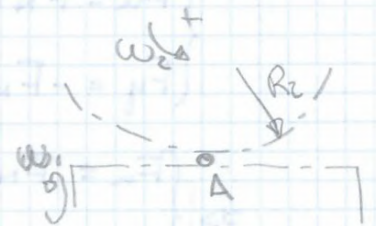
$$V = \frac{P_e}{2\pi} \omega_1$$

Quindi

$$V_A = \omega_2 R_2$$

$$V_A = \frac{P_e}{2\pi} \omega_1$$

$$z = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{P_e}{2\pi R_2} = \frac{z_1}{z_2} \frac{P_a}{P_a} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \tan \alpha}{R_2}$$



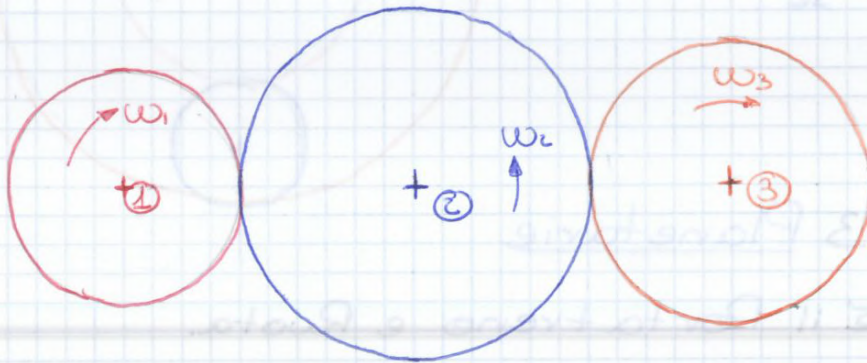


$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{(\cos \vartheta_N - f/\operatorname{tg} \alpha)}{(\cos \vartheta_N + f/\operatorname{tg} \alpha)} = \frac{z_2}{z_1} \frac{(\cos \vartheta_N - f/\operatorname{tg} \alpha)}{(\cos \vartheta_N + f/\operatorname{tg} \alpha)}$$

se invece è la Ruota a essere Motrice

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1}{z_2} \frac{(\cos \vartheta_N - f/\operatorname{tg} \alpha)}{(\cos \vartheta_N + f/\operatorname{tg} \alpha)}$$

## Ruotismi Ordinari



I tre assi sono fissi, per questo è definito Ordinario. Con i Ruotismi si associa al Rapporto di Trasmissione un Segno quindi  $R_0$  segno Negativo quando cambio il verso di rotazione.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = - \frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = - \frac{z_2}{z_3}$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} = \left( - \frac{z_1}{z_2} \right) \left( - \frac{z_2}{z_3} \right) = \frac{z_1}{z_3}$$

Questi Ruotismi sono usati per avere lo stesso senso di Rotaz.

Un'altra possibile configurazione è



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = - \frac{z_1}{z_2}, \omega_2 = \omega_3, \frac{\omega_4}{\omega_3} = - \frac{z_3}{z_4}$$

$$\gamma = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{z_3}{z_4} \cdot \frac{z_1}{z_2}$$



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{z(R_1+R_2)} = \frac{z_1}{z_1+z_2} = \frac{z_1}{z_1+z_2}$$

Immaginiamo di essere seduti sul Portatreno, Vediamo un Ruota  
suo Ordinario con

Formula di Willis

$$\tau = \frac{\omega_2 - \omega}{\omega_1 - \omega}$$

Occhio al  
segno di  $\tau$

mentre il rapporto di trasmissione che avrei se il portatreno  
fosse fisso è

$$\tau = \left(-\frac{z_1}{z_3}\right) \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_1}{z_2}$$

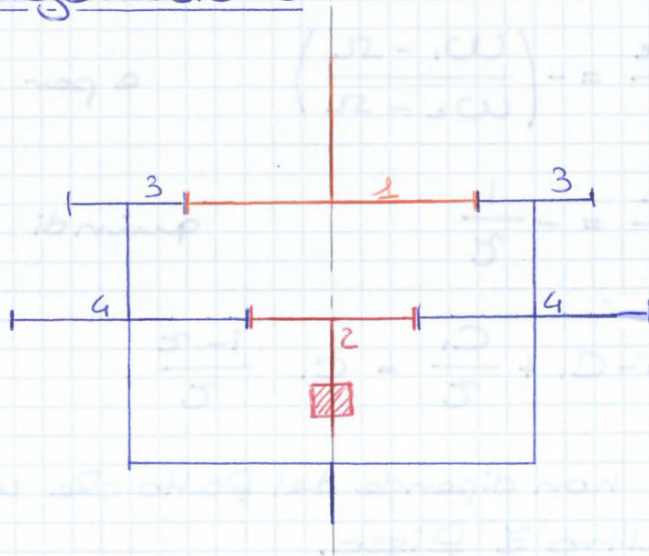
e quindi possiamo dire

$$\omega_2 - \omega = \tau \omega_1 - \tau \omega$$

$$\omega(\tau - 1) = \tau \omega_1 - \omega_2, \text{ ma se } \omega_2 = 0$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\tau}{\tau - 1} = \frac{-\frac{z_1}{z_2}}{-\frac{z_1}{z_2} - 1} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$$

## 2° Configurazione



La Ruota 2 potrebbe essere esterna che ingrana con la 4  
internamente. Anche qui bloccata 2,  $\omega_2 = 0$  e vale

$$\omega(\tau - 1) = \tau \omega_1$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\tau}{\tau - 1}$$



Allora per Willis  $\tau = -1 = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega}$

$$\omega_2 - \Omega = -\omega_1 + \Omega$$

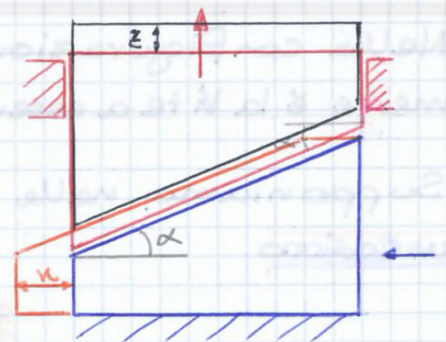
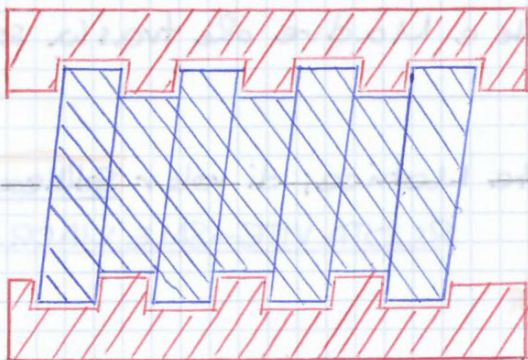
$$\omega_1 + \omega_2 = 2\Omega$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

In questo modo trasmetto sempre la stessa  $\Omega$  all'asse Ruote ma  $\omega_1$  e  $\omega_2$  variano

$$\frac{C_2}{C_1} = 1 \Rightarrow C_p = -2C_1$$

### Vite - Madrevite



Il filetto non deve avere per forza sezione a Trapezio. L'importante è che vite e madre vite abbiano filetto con egual sezione. In molte applicazioni ho sezione rettangolare.

Tra i due si genera un moto elicoidale: ho sia Rotazione che Traslazione. In molti casi a uno impedisco di traslare, all'altro di ruotare. Per esempio posso vincolare assialmente la Vite di modo che possa solo ruotare, mentre consento alla Madre Vite solo la traslazione. Così facendo trasformo il moto da rotatorio a traslatorio o viceversa. ☹

Per scegliere chi ruota e chi trasla si guarda allo scopo ultimo del componente.

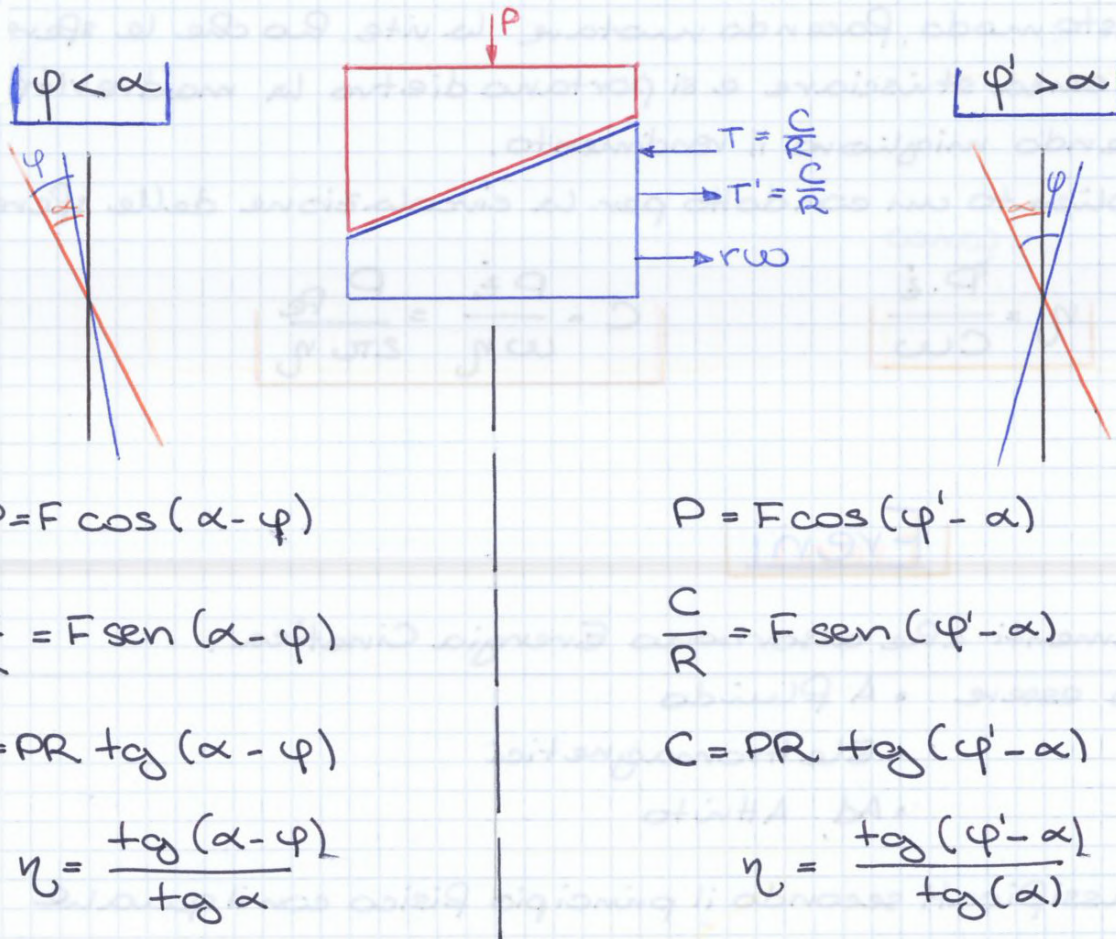


e ~~senza~~ riferendo ci alla (2) ←

$$\eta = \frac{P \cdot z}{C \omega} = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{R \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

### SCENDE MADRE → RUOTA VITE

Con questa configurazione ho due casistiche



Nella configurazione  $\varphi < \alpha$  ho che il rendimento è minore del caso iniziale, inoltre se  $\varphi$  tende a  $\alpha$ ,  $\eta$  tende a  $\emptyset$  quindi applicando una coppia nulla, ho una resistenza a un carico infinito Irreversibilità.

Nel caso di  $\varphi > \alpha$  devo applicare  $T'$  altrimenti non ho moto.

Questi dispositivi vengono usati per convertire Rotazione in Traslazione oppure come Riduttori e Moltiplicatori. Tuttavia hanno un basso rendimento.



Si generano delle forze tangenziali e radiali che danno una risultante che sarà circa applicata in A.

Quindi per il disco  $F_N$  non da momento mentre  $F_T$  mi da

Coppia Frenante  $C_f = F_T R = F_N f R$

questa coppia varia in funzione di s

Facendo l'equilibrio alla cerniera

$$S R - F_N \cdot a - F_T \cdot b = 0$$

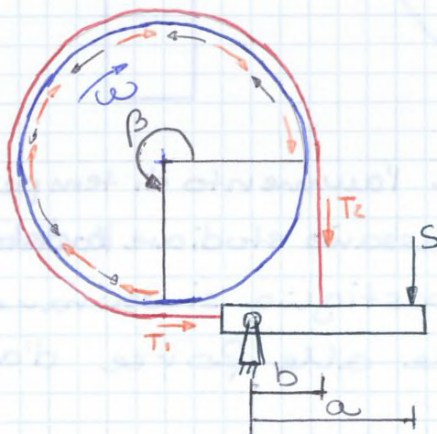
$$S \cdot R - F_N \cdot a - F_N f \cdot b = 0$$

$$F_{N_{sx}} = \frac{S R}{a + f b}$$

$$M_{F_{sx}} = \frac{f R a S}{a + f b}$$

Normal mente ho due ganasce con i perni agli opposti. Se così non fosse una frenerebbe più dell'altra a seconda del senso di rotazione. Così facendo invece ho frenata massima in ~~senso~~ un senso e minima nell'altro. Possono essere interne.

NASTRO



Tirando il nastro si sviluppano delle forze tangenziali che frenano il tamburo. Come già visto per le cinghie

$$T_1 = T_2 e^{f\beta}$$

$$T_2 = \frac{S a}{b}$$

$$M_f = (T_1 - T_2) R = T_2 (e^{f\beta} - 1) R = \frac{S a}{b} R (e^{f\beta} - 1)$$



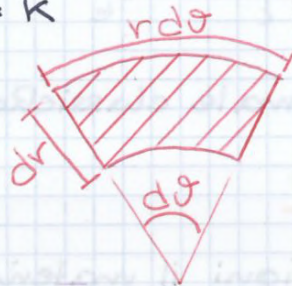
$$\frac{dS}{dt} = \gamma f p \omega R$$

con.  $\frac{dS}{dt}$  rateo di variazione, costante

•  $\gamma, f, \omega$  costanti

ma allora

$$p \cdot R = k \quad p \propto \frac{k}{R}$$



inoltre

$$\int_A p dA = S, \quad dA = R dr d\theta$$

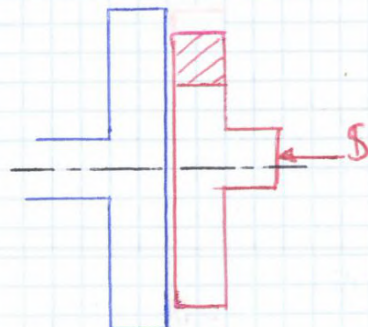
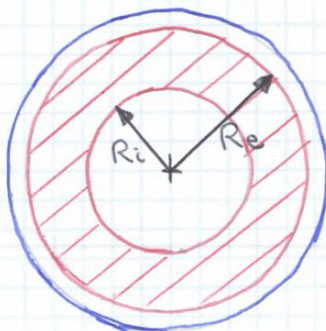
$$S = \int_A \frac{k}{R} R dr d\theta = k (R_e - R_i) \alpha$$

$$k = \frac{S}{(R_e - R_i) \alpha}$$

$$M_F = \int_A p \cdot R dA = k f \int_A R dr d\theta = k f \frac{1}{2} (R_e^2 - R_i^2) \alpha \quad \text{ sost } k$$

$$M_F = \frac{1}{2} S f (R_e + R_i)$$

### Frizioni





# Vibrazioni

Quando un corpo o un sistema di corpi oscilla intorno a un punto di equilibrio per effetto di un impulso  $P_0$  la tendenza del mio corpo a tornare nella posizione di equilibrio, Vibrazione Libera.

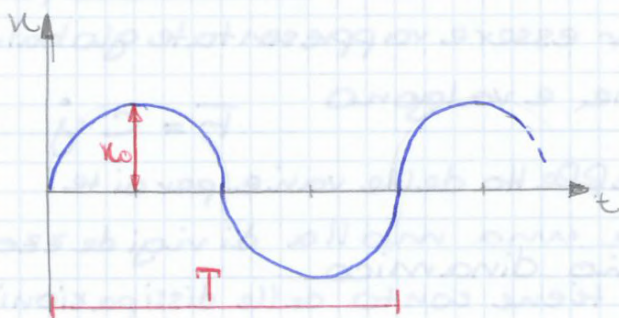
Se invece continuo a sollecitare il corpo con una forza e lo mantengo in oscillazione  $P_0$  Vibrazione Forzata

Nelle vibrazioni si ha un continuo scambio di Energia tra Cinetica e Potenziale.

Queste Vibrazioni possono essere caratterizzate da un moto periodico, Oscillazioni Periodiche, o non periodico, Oscillazioni Casuali.

Quando parliamo di Vibrazioni Periodiche si ha un andamento sinusoidale e qualunque sia la periodicità questa può essere sviluppata come serie di Fourier, composizione di sinusoidi, quindi per il nostro studio studiamo una sinusoidale.

$$u = u_0 \sin(\omega t)$$



Semi Ampiezza di Oscillazione

$$u_0 [m]$$

Periodo  $T [s]$

$$2\pi = \omega T$$

Pulsazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

indica la rapidità con cui varia nel tempo

Frequenza

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} [Hz]$$

Dato che  $[\omega] = [f]$  a meno del fattore  $\frac{1}{2\pi}$  sono uguali possiamo intenderle come la stessa cosa.



Allora

$$\frac{F}{k} = y + \frac{2\zeta}{\omega_N} \dot{y} + \frac{1}{\omega_N^2} \ddot{y}$$

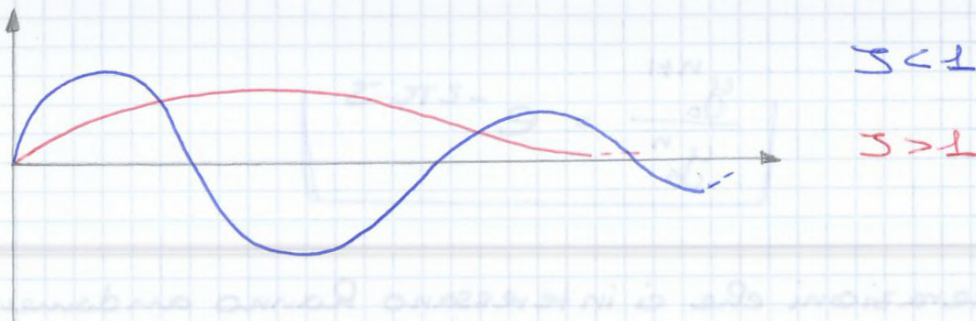
Risolvendo quest'equazione in  $R_0$  che applicando un impulso istantaneo  $R_0$  due situazioni diverse al variare di  $\zeta$

### $\zeta < 1$ Risposta Oscillatoria Smorzata

$$y = y_0 e^{-\zeta \omega_N t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_N t)$$

l'ampiezza di oscillazione è decrescente.

### $\zeta > 1$ Risposta Non Oscillatoria non la studiamo



In questo corso studiamo le vibrazioni ~~te~~ per le elevate accelerazioni che ne conseguono e che mi impongono di ~~ver~~ avere delle reazioni vincolari.

A parità di  $\omega_N$ , tanto maggiore è  $\zeta$  (sempre  $< 1$ ) tanto più rapido è lo smorzamento.

### $\omega_N$ Pulsazione Propria di Oscillazione Non Smorzata

è la pulsazione che il sistema avrebbe se non fosse smorzato.

$\zeta$  è Adimensionale, se  $\zeta < 1$  Sistema Sottosmorzato e allora

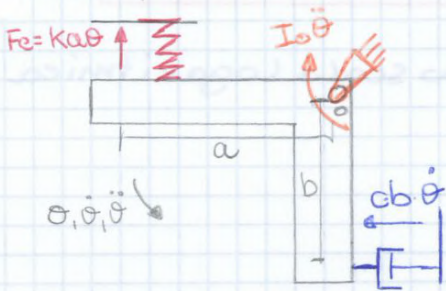
Pulsazione Propria di Oscillazione  $\omega = \omega_N \sqrt{1-\zeta^2}$

Periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega_N \sqrt{1-\zeta^2}}$



Per alcune applicazioni può essere difficile impostare correttamente le equazioni di equilibrio dinamico.

Esempio.



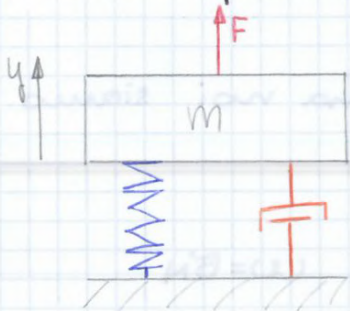
$$ka^2 \theta + cb^2 \dot{\theta} + I_0 \ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{I_0}{ka^2} \ddot{\theta} + \frac{cb^2}{ka^2} \dot{\theta} + \theta = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_N^2} \ddot{\theta} + \frac{2\zeta}{\sigma_N} \dot{\theta} + \theta = 0$$

equazione differenziale di II ordine.

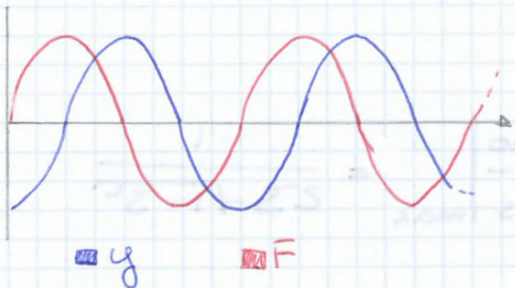
Vediamo ora il caso in cui al sistema molla-massa, non applico un impulso istantaneo ma una forza costante.



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F, \quad F = F_0 \sin(\omega t)$$

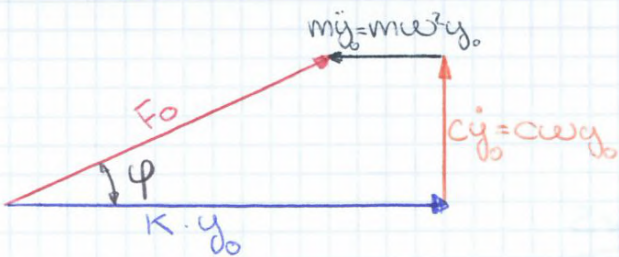
$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{con}$$

$\varphi$  Angolo di Fase



Determinare l'ampiezza di  $\varphi$  significa risolvere l'equazione differenziale.

$$F_0 = \sqrt{(ky_0 - m\omega^2 y_0)^2 + c^2 y_0^2 \omega^2} =$$



$$F_0 = k y_0 \sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \frac{c^2 \omega^2}{k^2}}$$

da cui

$$y_0 = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_N^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2}{\sigma_N^2} \omega^2}}$$

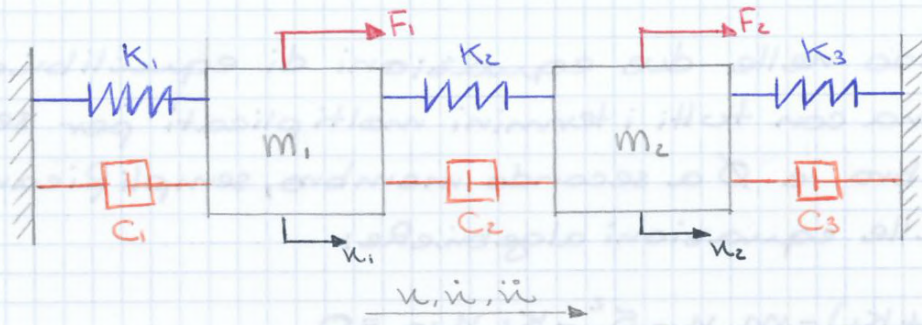
ma noi sappiamo

$$c\omega y_0 = (k y_0 - m\omega^2 y_0) \tan \varphi \quad \text{quindi}$$



Quanto detto fin'ora fa riferimento a sistemi a un grado di libertà.

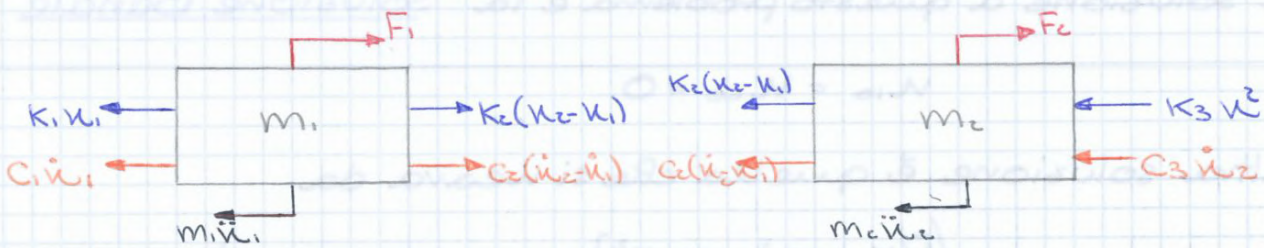
## Vediamo ora Sistemi a due Gradi di Libertà



La configurazione del sistema è data dalla posizione delle due masse quindi ho due gradi di libertà.

Per analizzare il sistema devo prendere un sistema di Riferimento Coerente per  $u, \dot{u}, \ddot{u}$ .

Facciamo il corpo libero.



$$\begin{cases} -K_1 u_1 - C_1 \dot{u}_1 + K_2 (u_2 - u_1) + C_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - m_1 \ddot{u}_1 = F_1 \\ -K_2 (u_2 - u_1) - C_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - m_2 \ddot{u}_2 + F_2 + K_3 u_2 + C_3 \dot{u}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 (K_1 + K_2) + \dot{u}_1 (C_1 + C_2) + m_1 \ddot{u}_1 - K_2 u_2 - C_2 \dot{u}_2 = F_1 \\ -K_2 u_1 - C_2 \dot{u}_1 + u_2 (K_2 + K_3) + \dot{u}_2 (C_2 + C_3) + m_2 \ddot{u}_2 = F_2 \end{cases}$$

A noi ci interessa questo studio per vedere che non vada in frequenza propria di oscillazione quindi, per sapere qual'è la frequenza propria, devo avere basso smorzamento (se fosse alto non avrei problemi) ma allora se ho basso smorzamento toglgo tutti i C.

Ma se ho un basso smorzamento, il sistema oscilla anche con piccolissimi impulsi allora  $F \sim 0$ .

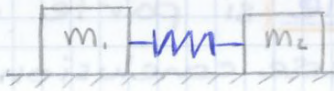


In generale prevale il modo con frequenza propria più bassa.

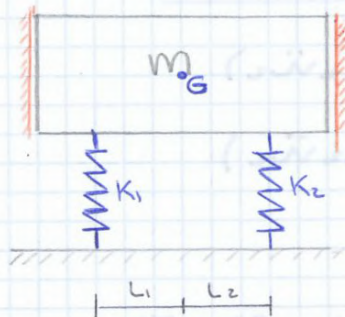
Se guardiamo alla  $\pm$  il numeratore è la differenza di due termini quindi è possibile che con  $\sigma_2$  (che è maggiore di  $\sigma_1$ ), il numeratore sia negativo quindi le due masse oscillano in contro fase.

Se in un'applicazione non ci sono  $K_3$  e  $C_3$  allora è come se nelle formule fatte mancasse la molla e lo smorzatore, basta fare  $K_3=0$ .

Se invece ho un sistema fatto così ho  $\underline{\sigma_1 = 0}$

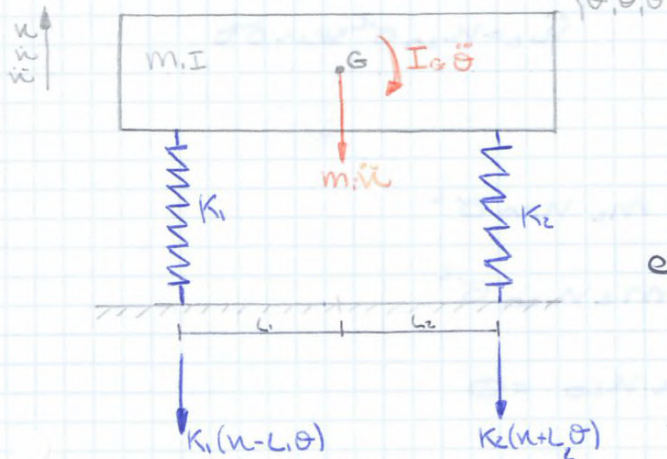


Un'altra applicazione nella quale posso avere due gradi di libertà, ma con una sola massa, si ha se questa può sia traslare che ruotare.



Se ho il vincolo  $\square$  non può ruotare e ho  $K_B = K_1 + K_2$  ma se toglgo i vincoli

$$\begin{cases} -K_1(u - L_1\theta) - K_2(u + L_2\theta) - m\ddot{u} = 0 \\ K_1(u - L_1\theta)L_1 - K_2(u + L_2\theta)L_2 - I_G\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -(K_1 + K_2)u - (K_2L_2 - K_1L_1)\theta - m\ddot{u} = 0 \\ u(K_1L_1 - K_2L_2) - \theta(K_1L_1^2 + K_2L_2^2) - I_G\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

e come prima tenendo conto di

$$u = u_0 \sin(\sigma t) \quad \theta = \theta_0 \sin(\sigma t)$$

$$\ddot{u} = -u_0 \sigma^2 \sin(\sigma t) \quad \ddot{\theta} = -\theta_0 \sigma^2 \sin(\sigma t)$$

sostituendo ottengo



$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} - \alpha_{11} m_1 & -\alpha_{12} m_2 \\ -\alpha_{21} m_1 & \frac{1}{\sigma^2} - \alpha_{22} m_2 \end{pmatrix} = 0$$

e dalla soluzione avvo situazioni tipo:



Se l'albero è sottoposto a flessione-torsione, balla alla velocità critica.

Vediamo ora Trasmissibilità delle Vibrazioni

Durante le vibrazioni, che forza viene trasmessa alla struttura di supporto?



$$F_0^2 = (k y_0 - m y_0 \omega^2)^2 + c^2 y_0^2 \omega^2 = y_0^2 (k - m \omega^2)^2 + c^2 \omega^2 y_0^2$$

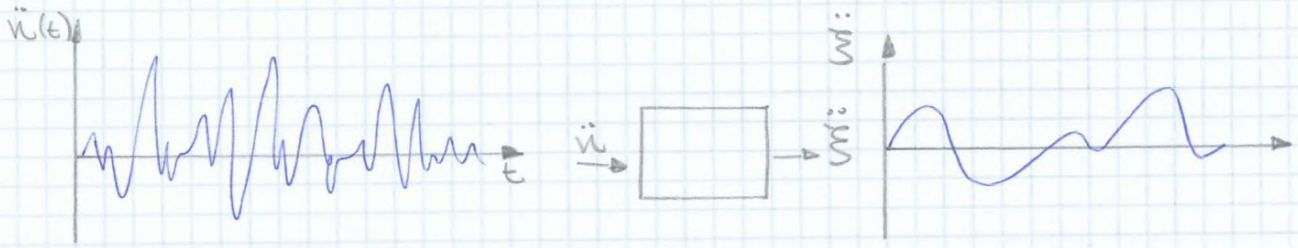
$$y_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_N^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2 \omega^2}{\sigma_N^2}}}, \quad \sigma_N = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{2\zeta}{\sigma_N} = \frac{c}{k}$$

$$F_{T0} = \sqrt{k^2 y_0^2 + c^2 y_0^2 \omega^2} = k y_0 \sqrt{1 + \frac{4\zeta^2 \omega^2}{\sigma_N^2}}$$

$$\frac{F_{T0}}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4\zeta^2 \omega^2}{\sigma_N^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\sigma_N^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2 \omega^2}{\sigma_N^2}}}$$



Se prendo un segnale e lo filtro facendo passare soltanto la frequenza  $f_0 \pm$  una banda  $\Delta f$

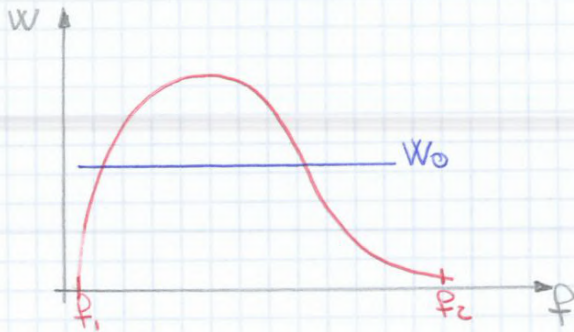


Se prendo il quadrato di questo segnale filtrato e lo integro nel tempo, dividendo per  $T$  ho

$$\ddot{u}_i^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{u}_i^2(t) dt$$

Densità Spettrale di Potenza

$$W = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\ddot{u}_i^2}{\Delta f}$$



Rumore Bianco

$$\ddot{y}_0^2 = \frac{\pi W_0 f_n}{4 \zeta}$$

Se avessi oscillazioni forzate

$$\ddot{y}_0 = \sqrt{\frac{\pi W_0 f_n Q}{2}}$$

Oscillazioni Auto-Eccitanti