



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1242

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Samake

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

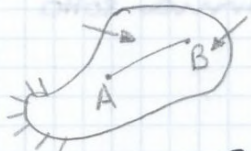
Fondamenti di Meccanica Strutturale

scritto 3es + 6dom teoria Fare esercizi

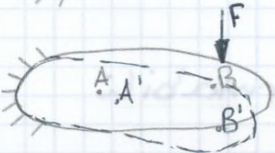
Questo corso si basa sullo studio di Gusci, Travi, Piastre e Solidi

Equazioni Fondamentali del Continuo Deformabile

Introduzione corpo deformabile



Si studiano corpi detti Corpi Rigiidi dove la distanza tra A e B, \overline{AB} non varia anche se sul corpo agiscono delle forze.



Ma in realtà ho una deformazione quindi $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$. Ciò che mi interessa è:

di quanto si deforma?

Un classico problema di meccanica strutturale è

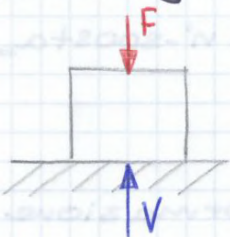


dove le aste ① e ② sono considerati

corpi Rigiidi e hanno un coeff. di elasticità

$$E \neq 0$$

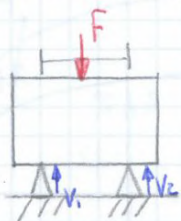
Consideriamo ora una scatola sulla quale, oltre alla forza peso, agisce una forza esterna F



Il Carico cioè la forza trasmessa al terreno è $\vec{V} = \vec{F}$

Questo vale anche per $E = \infty$ (Corpo Rigido)

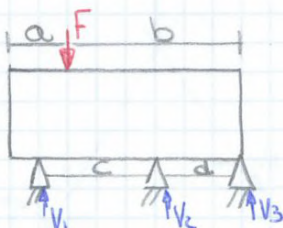
Ma se suppongo che il corpo poggia su più supporti e che questi supporti siano a distanze diverse.



Devo studiare la situazione per trovare V_i

$$V_1 = V_2 = \frac{F}{2}$$

Ma in questo caso con $a \neq b$ e $c \neq d$, quanto valgono V_1, V_2, V_3 ?



$V =$ Reazioni Vincolari

Quindi l'equazione generale della deformazione sarà

$$f(\vec{s}, \hat{\sigma}, \hat{\epsilon})$$

Per individuare \vec{s} ho bisogno di 3 numeri (u, v, w)

Per individuare $\hat{\sigma}$ e $\hat{\epsilon}$ me ne servono 9 ciascuno

Tensori Le grandezze in fisica prendono questo nome. Il numero di variabili per definire un tensore si ottiene da

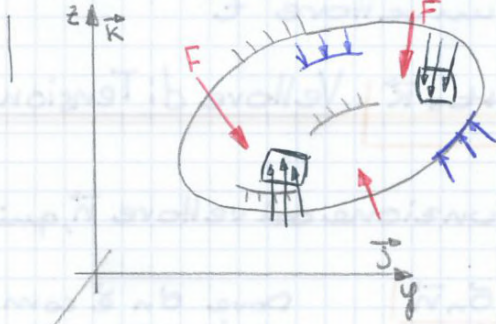
$$d^n \quad \therefore d = \text{dimensione}$$

• Δ ordine 1

• $n = \text{ordine}$

• $\hat{\sigma}, \hat{\epsilon}$ ordine 2

Tornando allo stato di spostamento introduco delle notazioni sul corpo Ω di volume V .



Forze Applicate $F_e [N]$

Forze di Linea $F_l = \left[\frac{N}{m} \right]$

Forze di Superficie $F_s \left[\frac{N}{m^2} \right]$

Forze di Volume $F_v \left[\frac{N}{m^3} \right]$

Il corpo sarà deformabile solo in alcune direzioni.

In altre si comporterà come Corpo Rigido.

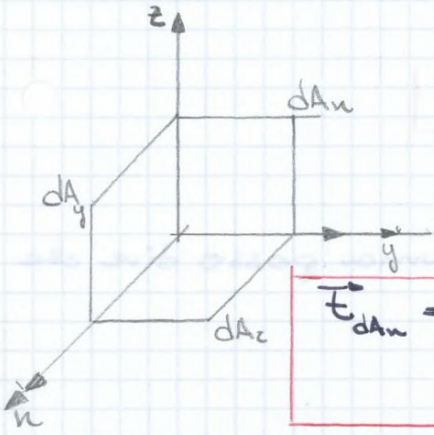
Se tutti i punti, linee, aree e volumi su cui non sono applicate delle Forze posso applicare Vinedi

Equazioni Fondamentali dei Continui Deformabili

$$f(\vec{s}, \hat{\sigma}, \hat{\epsilon}) = 0$$

Sono equazioni differenziali alle derivate parziali. Note le condizioni iniziali so le condizioni finali.

Componenti Speciali di Tensione



È conveniente che il pedice indichi la direzione \perp all'area dA considerata. Per ognuna delle aree posso definire dF e quindi \vec{t}

$$\vec{t}_{dA_x} = t_{x dA_x} \vec{i} + t_{y dA_x} \vec{j} + t_{z dA_x} \vec{k} = \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{t}_{dA_y} = \sigma_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \sigma_{yz} \vec{k} = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}$$

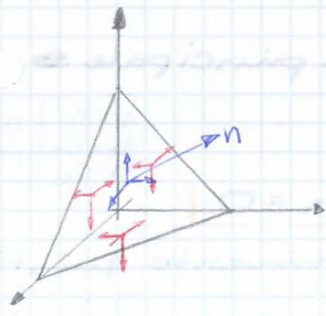
$$\vec{t}_{dA_z} = \sigma_{zx} \vec{i} + \sigma_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k} = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Qualsiasi altra \vec{t}_{dA} può essere ricavata come composizione lineare di $\langle t_{dA_x}, t_{dA_y}, t_{dA_z} \rangle$.

Dalla matrice $\hat{\sigma}$ posso ricavare i generici t_x, t_y, t_z , basta risolvere le equazioni della statica nelle tre direzioni

Quindi le componenti di dF di n saranno equilibrate da quelle sulle facce



$$\begin{cases} t_x dA = \sigma_{xx} dA_x + \sigma_{yx} dA_y + \sigma_{zx} dA_z \\ t_y dA = \sigma_{xy} dA_x + \sigma_{yy} dA_y + \sigma_{zy} dA_z \\ t_z dA = \sigma_{xz} dA_x + \sigma_{yz} dA_y + \sigma_{zz} dA_z \end{cases}$$

Convenzione di disegno

$F \oplus \rightarrow$ Esce dal solido
 $F \ominus \rightarrow$ Entra nel solido

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xx} \vec{n}_x + \sigma_{yx} \vec{n}_y + \sigma_{zx} \vec{n}_z \\ t_y = \sigma_{xy} \vec{n}_x + \sigma_{yy} \vec{n}_y + \sigma_{zy} \vec{n}_z \\ t_z = \sigma_{xz} \vec{n}_x + \sigma_{yz} \vec{n}_y + \sigma_{zz} \vec{n}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_x = \frac{dA_x}{dA} \\ n_y = \frac{dA_y}{dA} \end{cases} \quad n_z = \frac{dA_z}{dA}$$

componenti, ho diviso \perp per dA

Se facendo gli autovalori ρ_0

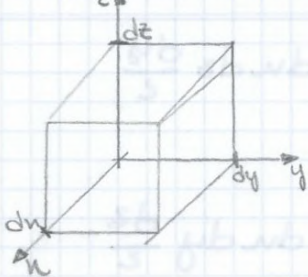
- $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33} \neq 0 \Rightarrow \text{Stato di Tensione Tridimensionale} \\ \text{solo } 1 \text{ ~~tra~~ \text{tratte} = 0 \Rightarrow \text{Stato di Tensione Bidimensionale} \\ \text{solo una tratta} \neq 0 \Rightarrow \text{Stato di Tensione Monodimensionale} \end{array} \right.$

Nel caso Mono non possono esistere sforzi di Taglio.
In Fisica non esistono Mono e Bi, sono solamente teorici e comodi per i calcoli.

Le direzioni principali sono direzioni di estremo di massimo e di minimo. Le direzioni $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ sono **ESTREMALI**

Equazioni Indefinite di Equilibrio

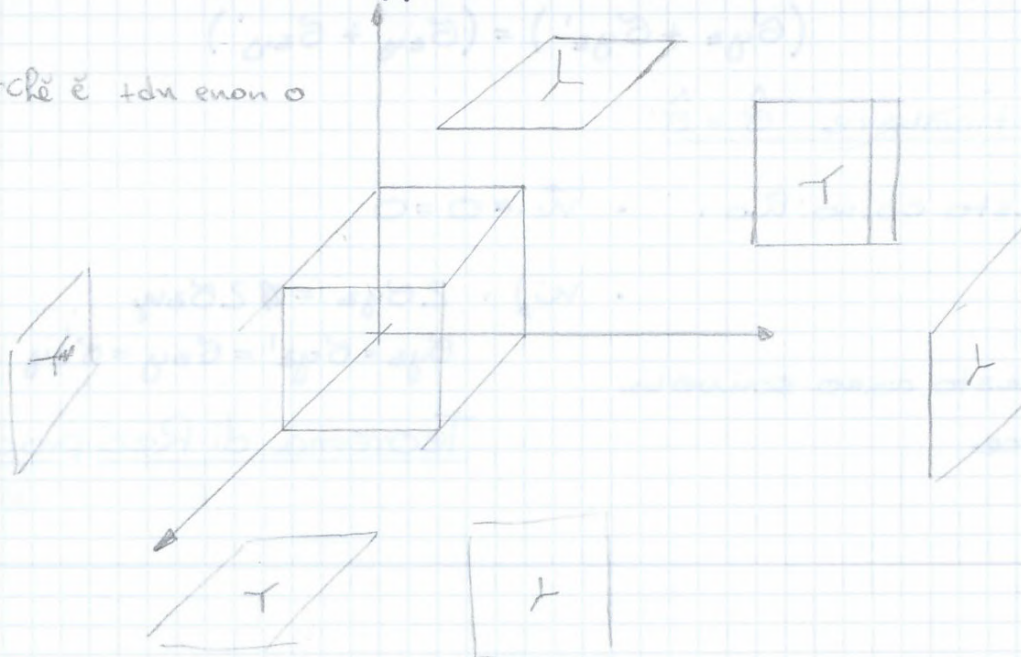
Sono equazioni che coinvolgono $\hat{\sigma}$ e variano nel generico punto $P(x, y, z)$.



Individuo un cubo elementare di volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Questo cubo fa parte del corpo D come la sezione lungo π di prima ma qui ρ_0 è facce su ognuna delle quali $\rho_0 \vec{e}$.

I vettori \vec{T} delle facce dovranno essere in equilibrio con le forze applicate al cubo.

0' perché è $\pm dx$ e non 0



In questo caso scrive la matrice di $\hat{\sigma}$ e R_0

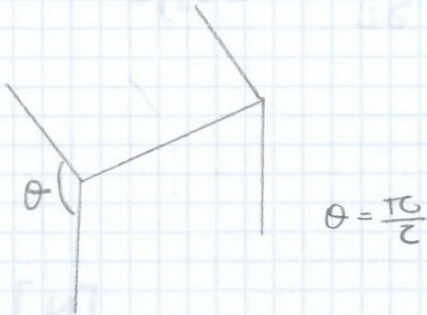
$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \forall i \neq j \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}^T} \quad \text{perci\u00f2}$$

Teorema di Cauchy

Riduco le incognite da 9 a 6 infatti

$$\boxed{\sigma_{ny} = \sigma_{yn}}$$

È applicabile solo se θ , angolo tra due facce è $\frac{\pi}{2}$



Caso in cui $\hat{\sigma} \neq \hat{\sigma}'$

Passando da σ a σ' mi sposto di dx, dy, dz a seconda della faccia, quindi posso dire che:

$$\boxed{\sigma'_{yy} = \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} dy} \quad \boxed{\sigma'_{nz} = \sigma_{nz} + \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nz} dn}$$

Se faccio sostituzioni di questo tipo nella $\square \leftarrow R_0$

$$(\underbrace{\sigma_{yz}}_{(d^3)} + \underbrace{\sigma'_{yz}}_{(d^4)}) \frac{1}{2} dx dy dz = (\underbrace{\sigma_{zy}}_{(d^3)} + \underbrace{\sigma'_{zy}}_{(d^4)}) \frac{1}{2} dx dy dz$$

Prodotto degli infinitesimi di ordine superiore (trascurabili) quindi conservo il Teorema di Reciprocità $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

Se invece sostituisco nella $\square \leftarrow$

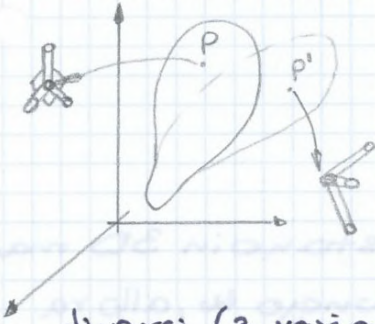
$$-\underbrace{\sigma_{yn}}_{(1)} dx dz + \underbrace{\sigma'_{yn}}_{(2)} dx dz = -\sigma_{yn} dx dz + \left(\sigma_{yn} + \frac{\partial \sigma_{yn}}{\partial y} dy \right) dx dz = \frac{\partial \sigma_{yn}}{\partial y} dy dx dz$$

Facendolo anche per le altre 4 R_0

$$\frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_{yn}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zn}}{\partial z} = 0$$

Tensore di Deformazione $\hat{\epsilon}$ e Stato di Deformazione

Il tensore $\hat{\epsilon}$ caratterizza lo stato di deformazione.



Per caratterizzare la deformazione studio come sono variate le fibre in seguito alla deformazione. Le tre fibre inizialmente lunghe uguali e ortogonali ora avranno lunghezze diverse (3 variabili) e angoli diversi (3 variabili). In tutto ho 6 variabili, erano 9 ma per il teorema di Reciprocità si riducono a 6 poiché l'angolo tra x e y è lo stesso tra y e x

Componenti Speciali di Deformazione

Lineari Allungamento lungo x ϵ_{xx}

ϵ_{yy} Allungamento lungo y

ϵ_{zz} Allungamento lungo z

Angolari ϵ_{xz} ϵ_{zx} ϵ_{yx}

ϵ_{xy} ϵ_{yz} ϵ_{zy}

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Le componenti speciali di deformazione devono soddisfare le Equazioni di Congruenza e Compatibilità

Studiamo ora le relazioni tra $\hat{\epsilon}$ e $\vec{\Delta}$

Conoscendo uno conosco anche l'altro

Relazioni Geometriche : in 1D per esempio se so che la fibra fa ϵ_{xx} allora conosco anche Δu



$$\begin{cases} \epsilon_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \epsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \end{cases}$$

γ viene usata per le deformazioni angolari e per convenzione in ingegneristiche vale $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$.

Quindi ricapitolando

$$\{\hat{\epsilon}\}^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$$

$$\{\hat{\sigma}\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}$$

Se io considero 3 fibre ortogonali, queste si deformeranno nella direzione principale di

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

e questi sono i tre autovalori ai quali corrispondono

$$\text{i tre vettori } \lambda_1 = \epsilon_{xx} \quad \lambda_2 = \epsilon_{yy} \quad \lambda_3 = \epsilon_{zz}$$

$$\vec{n}_1 \quad \vec{n}_2 \quad \vec{n}_3$$

Invarianti non dipendono dal riferimento

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \\ I_2 = -\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \epsilon_{xx} \epsilon_{zz} - \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \\ I_3 = \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \end{cases}$$

Stato di deformazione Piano 2D

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

1D $\hat{\epsilon} = \{\epsilon_{yy}\}$

Relazioni Non Lineari $\hat{\epsilon} - \hat{\gamma}$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Relazioni Non Lineari di Von Kármán

Gli unici termini non lineari e non trascurabili sono quelli in w .

Si svolge tutto nell'ipotesi che $\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{xx}^{VK} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{yy}^{VK} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^{VK} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

Tutto questo valeva per 1D ma in realtà sono in 3D perché σ non è una ma $\{\hat{\sigma}^T\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$ e le deformazioni sono $\{\hat{\epsilon}^T\} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$.
 Quindi mi serve una matrice C che funga da E, cioè

$$\boxed{\{\epsilon\} = S^{6,6} \{\sigma\} \quad \{\sigma\} = C^{6,6} \{\epsilon\} \quad S = C^{-1}}$$

Questa è la legge di Hooke generalizzata a 3D.

La matrice C può dipendere dal materiale che può essere:

Omogeneo \Rightarrow C e S non sono $f(x, y, z)$ posizione

Isotropo \Rightarrow comportamento indipendente dalla direzione.

Queste sono solo ipotesi: in realtà non esiste.

$$C^{6,6} = \begin{pmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{matrix} xx \\ yy \\ zz \\ xz \\ yz \\ xy \end{matrix}$$

Se il materiale è ISOTROPO gli sforzi taglianti sono disaccoppiati dai normali e viceversa. Se applico una σ_{xx} questa produce deformazioni anche lungo x e y quindi il quadrante è nullo.

G: Modulo di Deformazione a Taglio $\begin{cases} \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \sigma_{xz} = G \gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} = G \gamma_{yz} \end{cases}$

Per scrivere la parte ① uso:

λ e G : Coefficienti di Lamé

Quindi grazie a λ e G posso scrivere la legge di Hooke generalizzata. Questi λ e G sono funzione di E e di

ν : Modulo di Poisson

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad \boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

$$dL_{\sigma_{nn}} = dF_n \cdot du = \sigma_{nn} \epsilon_{nn} du dy dz = \sigma_{nn} \epsilon_{nn} dV$$

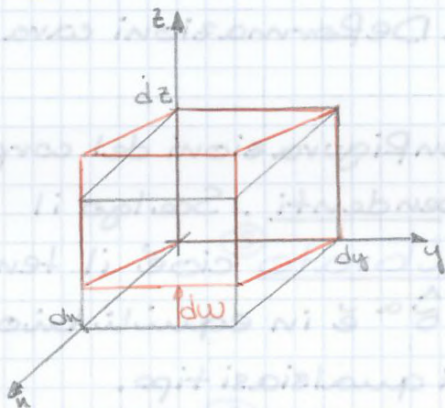
Il lavoro totale normale sarà la somma di tutti i $dL_{\sigma_{ii}}$

Ho $\frac{1}{2}$ perché in realtà la relazione fra σ e ϵ è di $\frac{1}{2}$



$$\text{shaded square} = \frac{1}{2} \text{rectangle}$$

TAGLIOI



$$\begin{cases} dw = \gamma_{nz} du \\ dF_{\tau_{nz}} = \tau_{nz} dy dz \end{cases}$$

$$dL_{\tau_{nz}} = dF_{\tau_{nz}} dw = \tau_{nz} \gamma_{nz} dV$$

e poi lo facciamo per le altre direzioni

Il lavoro interno posso anche scriverlo come

$$L_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \int_V \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} dV, \quad i, j = n, y, z$$

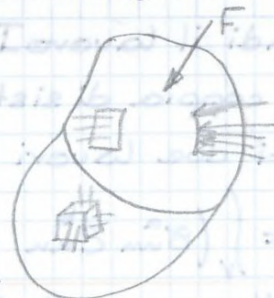
Quando su un corpo agiscono $\hat{\sigma}$ e $\hat{\epsilon}$ allora

Lavoro di Deformazione $L_d = \int_V \frac{1}{2} \{\sigma^T\} \{\epsilon\} dV$

metto il coefficiente $\frac{1}{2}$ SOLO se σ e ϵ sono legate

LAVORO ESTERNO

Considerando forze concentrate, di linea, di superficie e di volume ognuna di queste genera uno spostamento \vec{s} nella direzione della forza



$$L_e = \sum_{i=1}^{N_c} \vec{F}_i \cdot \vec{s}_i + \sum_{i=1}^{N_s} \int_S \vec{F}_s \cdot \vec{s} ds + \sum_{i=1}^{N_v} \int_V \vec{F}_v \cdot \vec{s} dv + \sum_{i=1}^{N_e} \int_e \vec{F}_e \cdot \vec{s} de$$

Questo lavoro esterno L_e ^{sarà} ~~sarà~~ uguale all' Energia Esterna

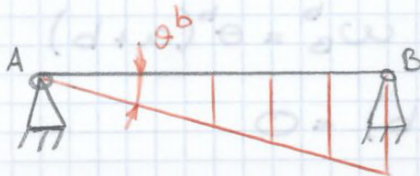
A cosa serve il PLV?

Ipotizziamo di avere il sistema "a" Equilibrato. se $L_i = L_e$ allora "b" è per forza Congruente cioè R_0 una Condizione di Congruenza per "b".

Allo stesso modo dato un sistema "b" congruente R_0 Condizione di Equilibrio per "a".

Inoltre posso usarlo per trovare le reazioni vincolari.

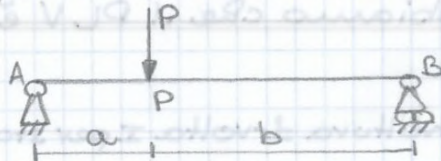
Pensiamo a un caso dove per ipotesi R_0 "b" Congruente



Come posso usare PLV per trovare l'equilibrio, cioè trovare le reazioni vincolari ovvero le forze che stanno in "a"?

Posso prendere un sistema "b" dove non ho l'appoggio B e il corpo, Congruente, può ruotare. Il punto forte è che "a" e "b" sono completamente Isolati.

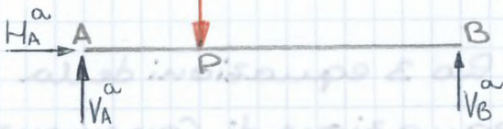
Consideriamo la trave Reale, come posso scrivere le



equazioni della statica con il PLV?

Iniziamo da V_B . In questo caso

R_0 una Condizione di Equilibrio per "a", il sistema "b" posso inventarlo basta che sia congruente.



A e B non hanno apici perché sono caratteristiche del corpo e non di "a" o "b".

Per "b" posso prendere tantissime configurazioni purché

$\cup \Rightarrow$ (— \ / ~ \ / ~ \ /) congruenti, ovvero la deformazione
 $\cap \Rightarrow$ (/ \ / ~ \ / ~ \ /) deve essere continua.

Calcoliamo quindi il Lavoro Esterno

$$L_e^{ab} = P^a \cdot W_P^b - V_A^a W_A^b - V_B^a W_B^b + H_A^a \cdot W_A^b$$

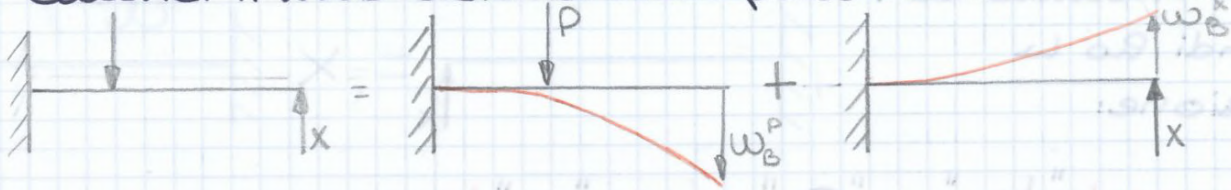
Metto ω ?
sono \int

se il mio scopo è calcolare V_B questa deve fare uno spostamento altrimenti il termine si annulla, quindi scelgo uno tra gli infiniti "b" che mi dia uno spostamento di B.

lavori con w_B^0 $L_e^{ab} = X^a w_B^b$

La linearità mi permette di usare la sovrapposizione degli effetti.

Quindi il mio sistema reale posso vederlo come



Se io voglio calcolare lo \vec{x} sperimentalmente vado a trovare la forza che mi dà lo stesso spostamento w_B .

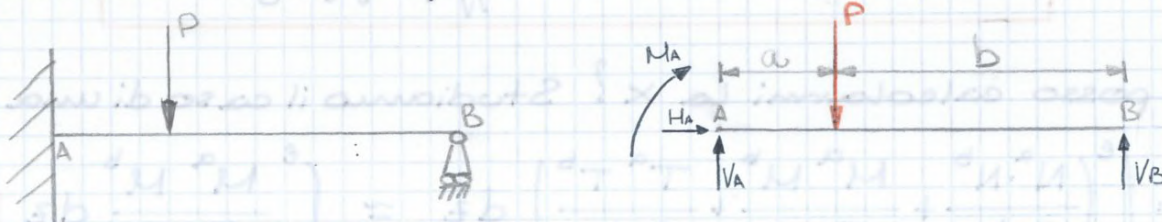
Di solito la forza \vec{x} è presa di valore unitario \parallel

Abbiamo quindi visto che il PLV può essere usato con due linee di procedimento:

Forma agli Spostamenti Virtuali: quando i potizzo il "b" congruente, ho tutti i δ^b uguali e ho PLV = Equazione di Equilibrio.

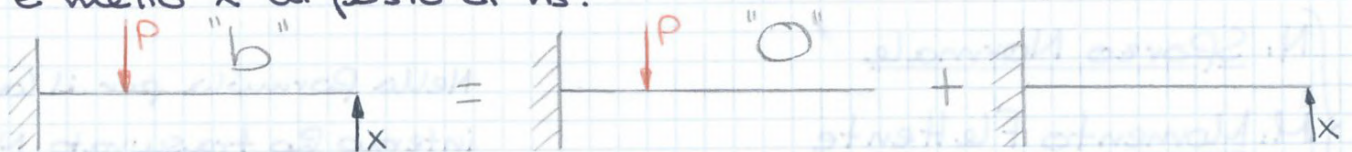
Forma alle Forze Virtuali: "a" è equilibrato e su "b" scrivo le condizioni di congruenza

Studiamo un esempio



In questo caso ho 4 incognite.

A questo punto applico la sovrapposizione degli effetti e metto \vec{x} al posto di V_B .



Questa struttura può deformarsi in varie forme. Tra tutte devo considerare una deformazione che mi dia congruenza ovvero considero \vec{x} come un carico applicato.

Quindi, nel nostro caso abbiamo:

$$L_i^{ab} = \int_0^l \frac{M^a M^b}{EI} dz = 0$$

e per svolgerlo mi servono M^a e M^b , ma dalla \perp Po

$$"b" = "0" + x "a" \Rightarrow M^b = M^0 + x M^a$$

$$\boxed{M^b(z) = M^0(z) + x M^a(z)}$$

Quindi $L_i^{ab} = \int_0^l \frac{M^a (M^0 + x M^a)}{EI} dz$ da cui ricavo

$$x = \frac{\int_0^l \frac{M^0 M^a}{EI} dz}{\int_0^l \frac{M^a M^a}{EI} dz}$$

Quindi per risolvere problemi Iperstatici devo saper calcolare questi integrali.

Prima di studiare i diagrammi MNT studiamo le

Caratteristiche di Sollecitazione della Trave

Abbiamo approssimato lo studio 3D \Rightarrow 2D

su ogni elemento dA della sezione \perp a \vec{z} Po:

$$d\vec{F} = \vec{t} dA$$

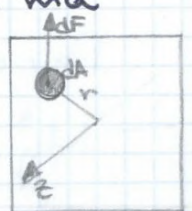
quindi per tutta la sezione

$$\boxed{\vec{R} = \int_A d\vec{F} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \int_A \vec{t} dA = \int_A \hat{\sigma} \vec{n} dA}$$

quindi dovrei conoscere il $\hat{\sigma}$ per ogni punto della sezione.

Nella teoria delle strutture non basta conoscere \vec{R} ma mi serve anche un momento

$$\boxed{M = \int r d\vec{F} = \int r \hat{\sigma} \vec{n} dA = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}}$$



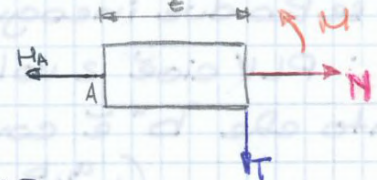
Caratteristiche di Sollecitazione $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ 113

Vedi anche un esempio:

$$H_A = F$$

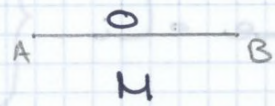
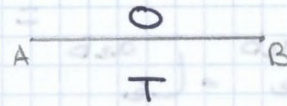
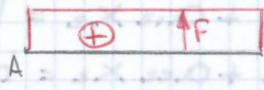


se prendo una generica sezione a una distanza ϵ Ro.



come calcolo N, M, T relativi alle dist?

$$\begin{cases} N = F \\ M = 0 \\ T = 0 \end{cases} \text{ e i relativi diagrammi sono}$$

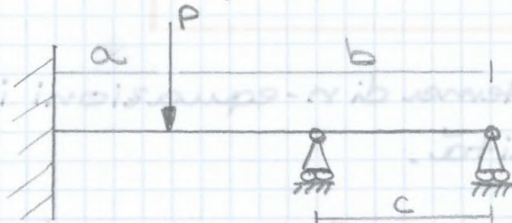


Abbiamo visto come applicare il PLV a strutture. Questa è un caso particolare di un generico corpo d e per questo corpo Ro preso "a" equilibrato e "b" congruente. Nel PLV Ro sempre anche $\vec{s}^a, \hat{e}^a, F^b$ e σ^b ma non si usano per i calcoli.



Abbiamo fin'ora studiato un sistema 1-volta Iperstatico, e ne abbiamo studiato la relazione: $"b" = "0" + X "a"$ e l'equazione dei lavori: $L_e^{ab} = L_i^{ab} \Rightarrow L_i^{ab} = 0$

ma se ora prendiamo una struttura:



Il grado di Iperstaticità è 2 quindi devo applicare PLV 2 volte. Devo trovare due "b" e due "a". Come sistema "b" scelgo con lo stesso criterio solo che ora Ro due

Forze, potevo anche fare una forza e un momento. Anche qui applico la sovrapposizione degli effetti quindi:



$$"b" = "0" + "X_1" + "X_2"$$

ma anche qui è come prima e Ro

$$"b" = "0" + X_1 "a_1" + X_2 "a_2"$$

Il PLV vale per qualunque corpo C non solo per le travi. Quindi in linea di principio il PLV mi permette di calcolare le equazioni indefinite di equilibrio e le equazioni di deformazione e spostamento.

Per un generico corpo C infatti ho $L_i^{ab} = L_e^{ab}$ con

$$L_i^{ab} = \int_V (\epsilon_{mn}^b \sigma_{mn}^a + \dots + \gamma_{ny}^b \sigma_{ny}^a) dV \quad L_e^{ab} = \int_S p^a z^b dS$$

ma come ricavavo le equazioni indefinite di equilibrio da queste equazioni?

Per farlo devo ipotizzare "b" congruente e quindi ho

$$\epsilon_{mn} = \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \epsilon_{ny} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots$$

Esaminando solo il primo pezzo ho che

$$L_{i_{mn}}^{ab} = \int_V \epsilon_{mn}^b \sigma_{mn}^a dV = \int_V \frac{\partial u^b}{\partial x} \sigma_{mn}^a dV$$

ma per arrivare alle equazioni indefinite di equilibrio devo riuscire a scrivere il $L_{i_{ny}}^{ab}$ come

$$L_i^{ab} = \int_V u^b \left(\frac{\partial \sigma_{mn}^a}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^a}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} \right) dV$$

Per fare questo passaggio uso il Teorema di Gauss quindi posso dire:

$$L_{i_{mn}}^{ab} = \int_V \frac{\partial u^b}{\partial x} \sigma_{mn}^a dV = - \int_V \frac{u^b \partial \sigma_{mn}^a}{\partial x} + \int_S u^b \sigma_{mn}^a n_x dS$$

Per il PLV vale $L_e^{ab} = L_i^{ab} \Rightarrow \delta L_e^{ab} = \delta L_i^{ab}$

quindi ho:

Equazione agli Spostamenti Virtuali

$$L_i^{ab} = \int_V (\delta \epsilon_{mn}^b \sigma_{mn}^a + \dots + \delta \gamma_{ny}^b \sigma_{ny}^a) dV$$

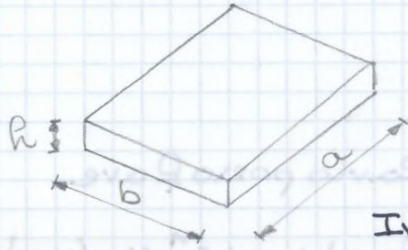
Equazioni alle Forze Virtuali

$$L_i^{ab} = \int_V (\delta \epsilon_{mn}^b \sigma_{mn}^a + \dots + \delta \gamma_{ny}^b \sigma_{ny}^a) dV$$

TEORIA DELLE STRUTTURE

Non studio più il generico corpo C ma studio le Strutture ovvero corpi dove nelle 3 dimensioni le misure non sono dello stesso ordine di grandezza.

Nel corpo C generico era così ma particolari corpi sono fatti diversamente.

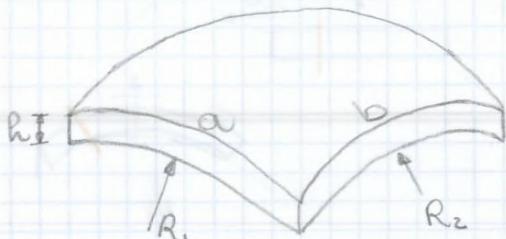


Pannello Piano, Piastra, Lastra

Struttura a Parete Sottile

In questo caso $R \ll a \gg R$, $b \gg R$

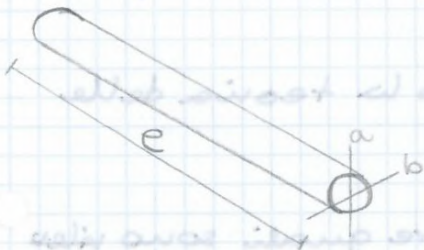
$$\frac{b}{R} \gg 1 \quad \frac{a}{R} \gg 1$$



Guscio, Struttura a Parete

Sottile dotata di Curvatura

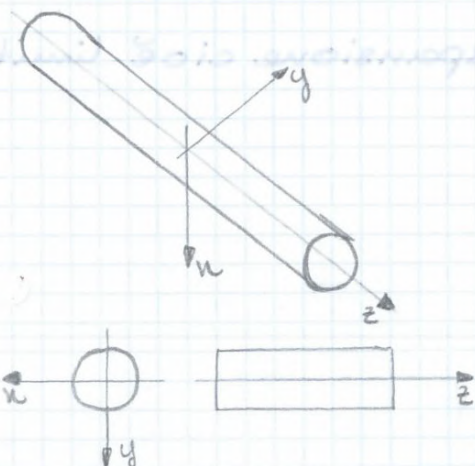
$$\frac{b}{R} \gg 1 \quad \frac{a}{R} \gg 1$$



Travi, Aste, Barre

$$\frac{e}{a} \gg 1 \quad \frac{e}{b} \gg 1$$

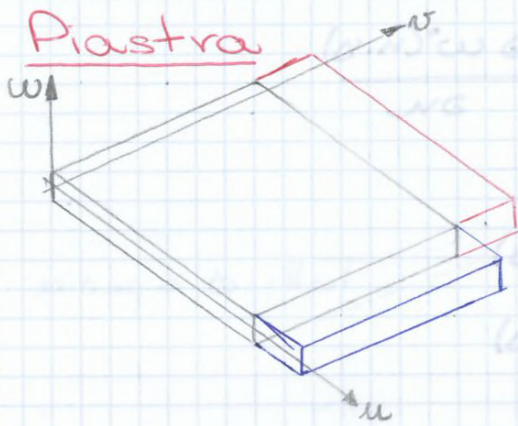
Considerando sempre le famose \vec{x} , \hat{e} , \hat{o} queste erano $f(x, y, z)$ ma se io passo al 2D e 1D sono ancora tutte e tre dimensioni rilevanti?



In questo caso \vec{x} , \hat{e} e \hat{o} sono rilevanti solo su z e su x, y diventano trascurabili.

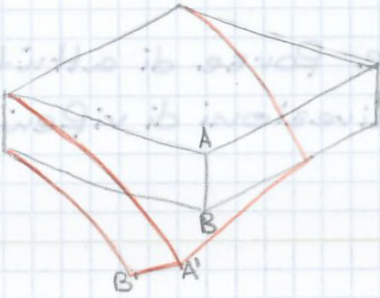
Quindi in 1D posso trascurare cosa succede su x, y perché la deformazione rilevante è su z .

Questo corpo 1D può essere approssimato a $\text{---} \rightarrow z$



Teoria Membranale della Piastra

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases}$$



Teoria della Flessione della Piastra

Teoria di Reissner-Mindlin

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \Phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \Phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases}$$

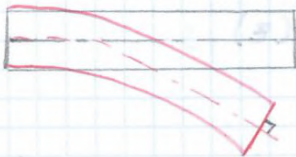
Lo spostamento $A \rightarrow A'$ e $B \rightarrow B'$ sono diversi per questo nelle formule tengo conto del fatto che \overline{AB} ruota e trasla per diventare $\overline{A'B'}$.

Il fatto che manca il termine z significa che per questa Teoria la piastra non può schiacciarsi

$$\boxed{\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \Phi_z(x,y) = 0} \quad \text{nelle ip: } \begin{cases} \bullet R = \text{cost} \\ \bullet \text{le norm sono linee rette} \end{cases}$$

Teoria di Kirchhoff

credo che si R_z quando si mantiene l'ortogonalità



Non ci sono scorrimenti a taglio normali alla direzione di riferimento, cioè

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

dove però

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \Phi(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = w'_{,x}(x,y)$$

Bo!!

Se introduciamo l'ipotesi di Sezione Rigida allora

Teoria di Timoshenko

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(z) \\ v(x, y, z) &= v_0(z) \\ w(x, y, z) &= w_0(z) + x\Phi_x(z) + y\Phi_y(z) \end{aligned} \right.$$

Vale nelle ipotesi di sezione costante e piana anche dopo la deformazione.

Questo significa che $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
ma allora ρ_0

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Teoria di Eulero-Bernoulli}$$

Ovvero quando ρ_0 una sezione rigida e piana e inoltre sono nulli gli scorrimenti a taglio.

Introduciamo gli **ELEMENTI STRUTTURALI**

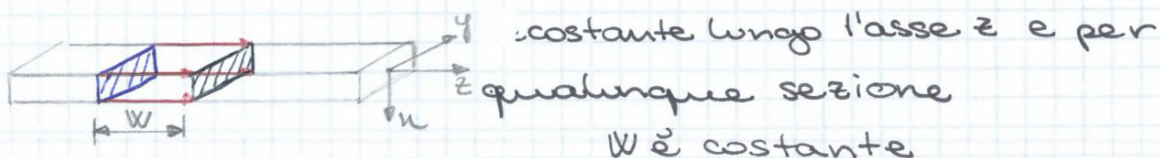
Asta

È un elemento strutturale 1D MEMBRANEA

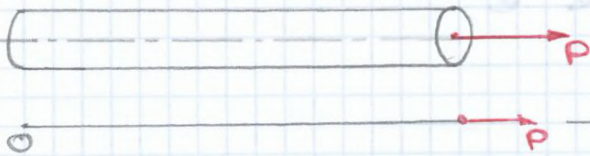
Abbiamo visto che per 1D, grazie alla teoria membranale, posso dire che la generica caratteristica

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^N F_i(x, y) f_i(z)$$

Per questi elementi strutturali abbiamo deformazione



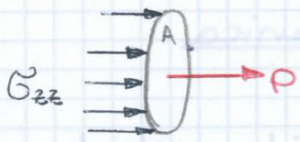
$$w(x, y, z) = w^0(z)$$



Se applico un carico P, quest'asta ha un solo grado di libertà: w .

Questo significa che se applico un incastro NON è più un'Asta perché si genera Flessione.

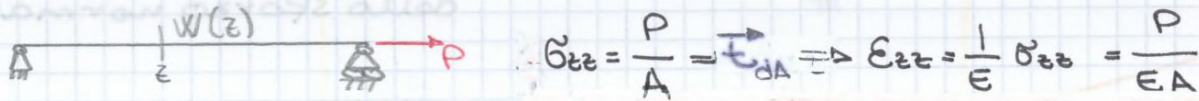
Ho un'Asta se e solo se ho SOLO Trazione (Compressione)



$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} = \frac{P}{EA}$$

Ad esempio per un'asta messa così ho



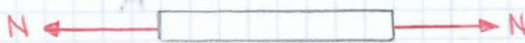
$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} = \frac{P}{EA}$$

e posso anche calcolare

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} \Rightarrow \frac{dw(z)}{dz} = \frac{P}{EA} \Rightarrow \int_0^z dw(z) = \int_0^z \frac{P}{EA} dz \Rightarrow w(z) - w(0) = \frac{P}{EA} z$$

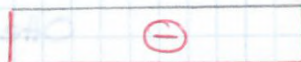
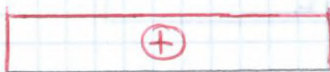
$$w(z) = w(0) + \frac{P}{EA} z$$

Introduciamo ora lo Sforzo Normale



$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

e studiando il grafico dello sforzo normale ho



Tirante

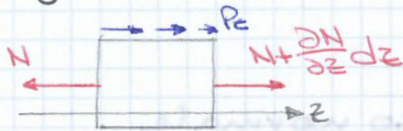
Puntone

Trazione

Compressione

è una Caratteristica di Sollecitazione

Guardando allos porzo normale sulla sezione dell'asta



Allora l'equilibrio è

$$-N + N + \frac{\partial N}{\partial z} dz = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial N}{\partial z} dz = N_{,z} = 0}$$

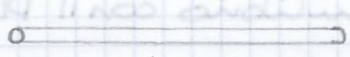
Mentre se agejingo il canico distribuito P_z

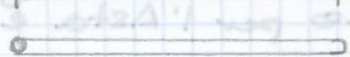
$$P_z dz - N + N + \frac{\partial N}{\partial z} dz = 0 \Rightarrow \boxed{N_{,z} = -P_z}$$

Sono le 2 condizioni di equilibrio

Carobiamo ora di utilizzare il PLV per l'Asta

Come sempre abbiamo i due sistemi:

"a"  F^a, σ^a Equilibrato

"b"  ϵ^b, w^b Congruente

$$L_i^{ab} = L_e^{ab}$$

Lavoro Interno dell'Asta

$$L_i = \int_V \{\sigma^a\} \{\epsilon^b\} dV = \int_V \sigma_{zz}^a \epsilon_{zz}^b dV = \int_0^e \sigma_{zz}^a \epsilon_{zz}^b A dz = \int_0^e \frac{N^a}{A} \cdot \frac{N^b}{AE} \cdot A dz$$

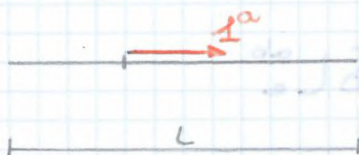
$$\boxed{L_i = \int_0^e \frac{N^a N^b}{EA} dz}$$

Vediamo un Esercizio

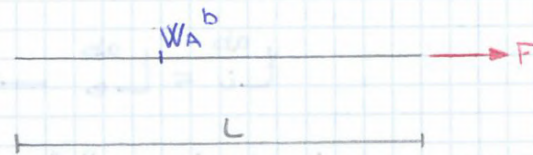
Voglio calcolare w_A usando PLV



"a" Equilibrato



"b" Congruente



"a" è il sistema esploratore dove metto una forza unitaria dove voglio calcolare lo spostamento

$$\boxed{L_e = w_A^b \cdot 1^a}$$

120

Quando ho Forze Virtuali (iperstatica) $\Rightarrow \delta S$

Quando ho ipotesi di b congruente $\Rightarrow \delta \epsilon$

Quindi posso omettere gli apici a e b.

Il sistema Virtuale è quello con il δ .

I due lavori sono:

$$\delta L_e = F \delta W(L) + \int P_z \delta W(z) dz$$

$$\begin{aligned} \delta L_i &= \int_V \delta \epsilon \sigma dv, \epsilon = \frac{dw}{dz} \Rightarrow \delta \epsilon = \frac{d}{dz} \delta W, dv = A dz, N = \int \sigma dA = \\ &= \int_0^L \sigma \frac{\partial}{\partial z} (\delta W) A dz = \int_0^L N \frac{d}{dz} \delta W dz \end{aligned} \quad \text{Applico Teorema della Divergenza}$$

$$\delta L_i = - \int \frac{dN}{dz} \delta W dz + N(L) w(L) - N(0) w(0)$$

Quindi PLV per l'Asta

$$- \int \frac{dN}{dz} \delta W dz + N(L) w(L) - N(0) w(0) = F \delta W(L) + \int P_z \delta W(z) dz$$

$$\int_0^L (-N_{,z} - P_z) \delta W dz = 0$$

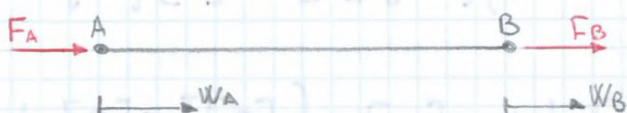
Questa si deve annullare per qualunque δW , quindi

$$N_{,z} = -P_z$$

Questa è una Relazione Forte perché dipende dal punto.

Consideriamo ora

possiamo scrivere



$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_A \\ W_B \end{pmatrix}$$

È un'esplorazione della relazione delle molle $F = KW$ e

K : Matrice di Rigidezza e se so scriverla significa che ho sviluppato il Metodo degli Elementi Finiti

Questa è Relazione Debole perché è generica per tutti i punti dell'asta.

$$SL_i = \{ \delta W \}^T [K] \{ W \}$$

$$SL_e = \{ \delta W \}^T \{ F \}$$

$$\{ F \} = [K] \{ W \}$$

Il PLV mi permette di vedere l'Asta come una molla con Rigidità $[K]$ che è una matrice composta da numeri e non funzioni. Come si calcola $[K]$?

$$[K] = \int_V [B]^T E [B] dV = \int_0^L \begin{pmatrix} -1/L \\ 1/L \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} -1/L & 1/L \end{pmatrix} A dz, \int_0^L dz = L$$

$$[K] = \frac{EA}{L^2} L = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{simmetrica} \\ \text{e} \\ \text{singolare} \end{array}$$

quindi posso calcolare

$$F_A = \frac{EA}{L} (W_A - W_B)$$

$$F_B = \frac{EA}{L} (-W_A + W_B)$$

ESEMPIO

Voglio trovare F_A e W_B

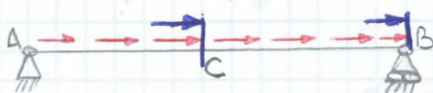


$$\begin{pmatrix} F_A \\ F \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ W_B \end{pmatrix}$$

$$F_A = \frac{EA}{L} (-W_B) \quad F = \frac{EA}{L} W_B \quad \text{da qui mi ricavo } W_B$$

$$W_B = \frac{FL}{EA} \rightarrow F_A = - \frac{EA}{L} \frac{FL}{EA} = -F$$

Con questo metodo non posso risolvere i problemi dove ho carichi distribuiti perché W non è più lineare. In fatti per



risolvere questi problemi spacco l'Asta in due tratti e applico un carico equivalente che mi porta al caso di prima a

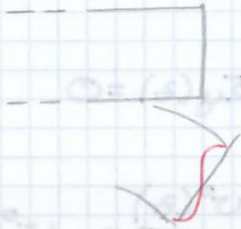
tratti AC, BC.

Teoria di Eulero-Bernoulli

Detta anche Teoria Ingegneristica della Trave è una teoria 1D flessionale che fa alcune ipotesi equivalenti a quelle della Piastra di Kirckoff. È una Teoria Assiomatica

I Ipotesi

La sezione pur deformandosi rimane PIANA



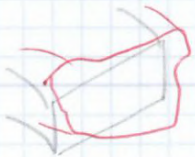
non fa il caso Rosso, su questa base ho

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(z) \\ v(x,y,z) = v^0(z) \\ w(x,y,z) = w^0(z) + x \Phi_x(z) + y \Phi_y(z) \end{cases}$$

Il fatto che non ho altre componenti u e v mi porta a

II Ipotesi

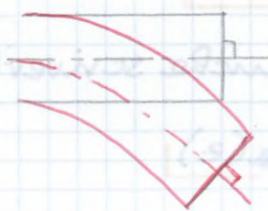
Sezione Indeformabile nel suo Piano



Non si verifica il Rosso.

III Ipotesi

Sezione sempre Ortogonale alla linea d'Asse



$$\gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$$

Sono trascurati gli scorrimenti a taglio che nascono dagli attriti tangenziali.

Quindi in altre parole trascuro

l'attrito e quindi non ho taglio né deformazione.

Vediamo ora il Tensore di Deformazione $\hat{\epsilon}$

$$\underline{\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

$$\underline{\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$\underline{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

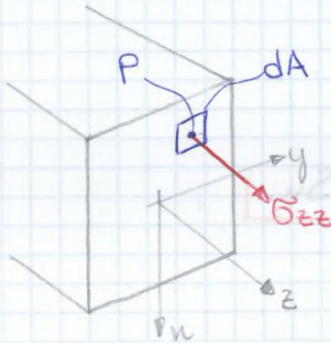
Ma come posso esprimere K_i in funzione delle caratteristiche di sollecitazione $N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$?

Per la teoria di Eulero B0 $\hat{\epsilon} \equiv \epsilon_{zz}$

e per il Plain Strain $\hat{\sigma} \equiv \sigma_{zz}$, $\sigma_{zz} \gg \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ ci sono no sono trascurati

$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}$$

Inoltre il Tensore degli sforzi dipenderà solo da σ_{zz}



$$dF = \sigma_{zz} dA$$

Le Caratt. di Sollecitazione sono

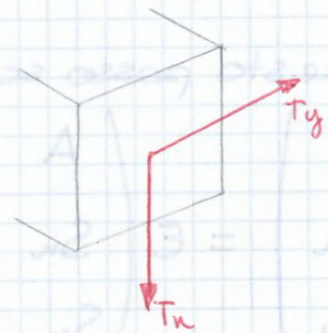
$N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$

Quali di queste sono legate a σ_{zz}

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA \quad (1)$$

$$T_x = T_y = 0$$

$$M_z = 0 \quad \text{perché // a } z \text{ quindi non da momento}$$



EULERO-BERNOULLI \Rightarrow NO TORSIONE

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA \quad (2)$$

$$M_y^* = \int_A x \sigma_{zz} dA \quad (3)$$

positivo quando $y \oplus$

positivo con la convenzione di segno

1, 2, 3 sono Relazioni di Equivalenza

Da quest'ultima posso calcolare K_i e quindi ricavarmi poi ϵ_{zz} e σ_{zz} e gli spostamenti

$$\begin{cases} K_1 = C_{11}^{-1} N + C_{12}^{-1} M_y + C_{13}^{-1} M_x \\ K_2 = C_{21}^{-1} N + C_{22}^{-1} M_y + C_{23}^{-1} M_x \\ K_3 = C_{31}^{-1} N + C_{32}^{-1} M_y + C_{33}^{-1} M_x \end{cases}$$

Se usassi un riferimento Baricentrico

$$C = E \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_y & I_{xy} \\ 0 & I_{xy} & I_x \end{pmatrix}$$

e per un Riferimento Centrale

$$C = E \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x \end{pmatrix} \quad \begin{cases} N = AE K_1 \\ M_y = EI_y K_2 \\ M_x = EI_x K_3 \end{cases}$$

quindi

$$\boxed{K_1 = \frac{N}{EA}} \quad \boxed{K_2 = \frac{M_y}{EI_y}} \quad \boxed{K_3 = \frac{M_x}{EI_x}}$$

$$\boxed{\epsilon_{zz} = \frac{N}{EA} + x \frac{M_y}{EI_y} + y \frac{M_x}{EI_x}}$$

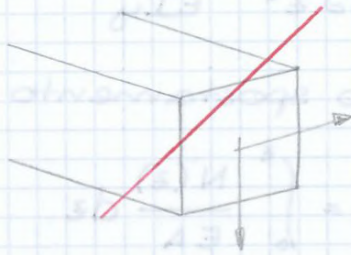
$$\boxed{\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + x \frac{M_y}{I_y} + y \frac{M_x}{I_x}}$$

Relazione di Navier

Notiamo che mentre la Deformazione dipende dal materiale (E), lo stato di Tensione no. Ma se sono in iperstatica Po che N, M_x, M_y dipendono dal materiale.

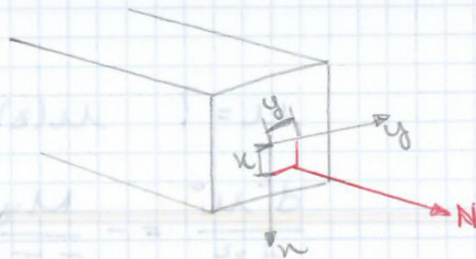
Sforzo Normale e Flessione

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$



L'Asse Neutro non ~~lo~~ passa per il baricentro.

Sforzo Normale Eccentrico



Posso spostare N al centro aggiungendo due momenti M_x e M_y per compensare

$$M_x = N \cdot y$$

$$M_y = N \cdot x$$

Tornando a uno studio più generico notiamo che σ dipende dall'area e dai Momenti d'Inerzia.

Se per esempio prendiamo una sezione caricata con solo sforzo di taglio abbiamo $\tau = \frac{N}{A}$ e quindi la tensione τ non dipende da come è fatta l'area (O, □, I) ma solo dal suo valore.

Mentre se consideriamo una sollecitazione di flessione allora varia da forma a forma perché il momento d'Inerzia varia a seconda della concentrazione delle masse.

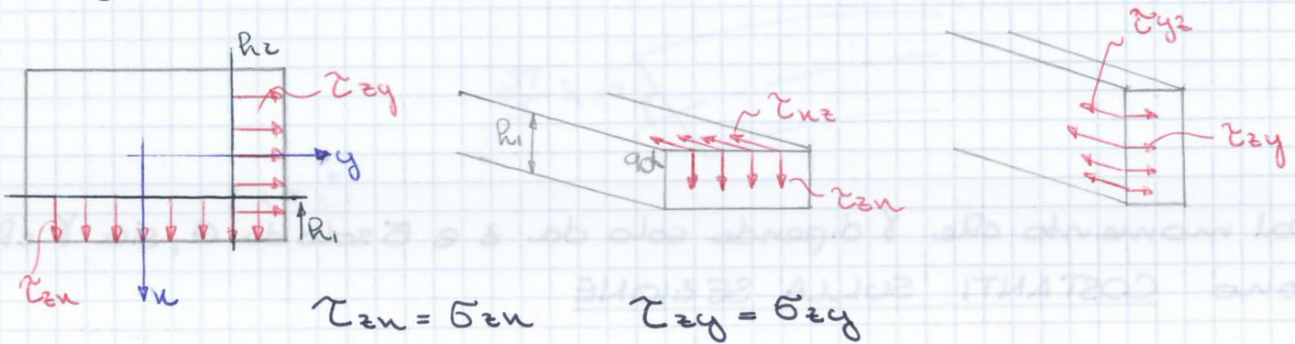


$$A = A' \quad I \neq I'$$

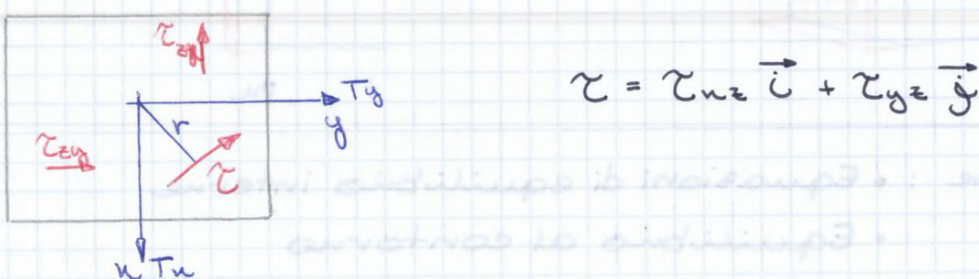
$$L_i^{ab} = \int_0^L \frac{N^a N^b}{EA} dz + \int_0^L \left(\frac{M_y^a M_y^b}{EI_y} + \frac{M_x^a M_x^b}{EI_x} \right) dz$$

Quando dimensiono devo considerare la G_R .

Abbiamo supposto, per la Teoria di Eulero, che le Tensioni di Taglio siano trascurabili ma in realtà non è così.



Che tipo di Risultante possono generare queste Tensioni?



$$T_x = \int_A \sigma_{xz} dA \quad T_y = \int_A \sigma_{yz} dA \quad M_z = \int_A \tau r dA$$

Queste Tensioni sono escluse dalla teoria di Eulero quindi si introduce la

Teoria della Trave di Timoshenko

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(z) \\ v(x,y,z) = v^0(z) \\ w(x,y,z) = w^0(z) + \Phi_x(z)x + \Phi_y(z)y \end{cases}$$

Ma se ai bordi τ è nulla, la sua equazione deve essere parabolica, cioè

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \propto x^2$$

Ma allora $w = \frac{\partial \delta}{\partial z} \propto x^3$

Per semplificare i calcoli viene introdotto un

Fattore Correttivo del Taglio $\chi < 1$

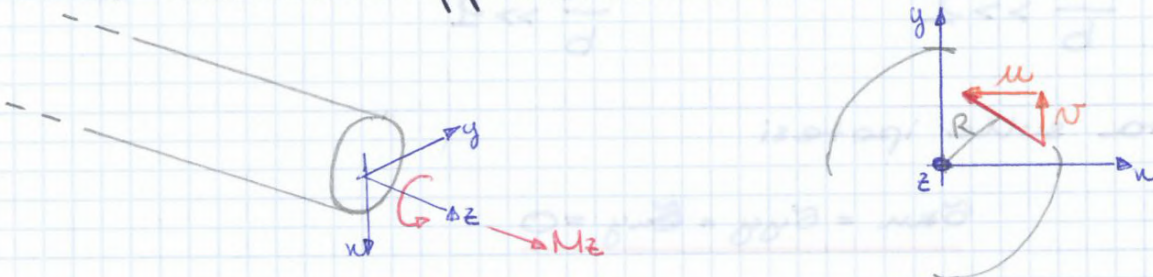
$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{A \chi_x}$$

$$\tau_{yz} = \frac{T_y}{A \chi_y}$$

Non è detto che $\chi_x = \chi_y$.

Tutte queste considerazioni fanno sì che, se introduciamo il taglio, allora dobbiamo arricchire le equazioni dello spostamento.

Cosa succede se applichiamo un momento M_z ?



Si suppone che la sezione Ruota Rigidamente.

Il momento M_z applicato genera una rotazione γ , perciò

$$u = -\gamma y$$

$$v = \gamma x$$

$$w = 0$$

Questo è un campo di spostamento che va bene se voglio studiare la torsione di una trave cilindrica.

Scriviamo allora le Equazioni Indefinite di Equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La prima e la seconda mi dicono che il taglio lungo x e lungo y non varia lungo z .

Mentre per la terza

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = 0$$

Ma questo significa che σ_{zz} può essere al massimo lineare.

Inoltre se con la Teoria di Venant, studiamo le Relazioni Geometriche e la legge di Hooke otteniamo

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} = 0$$

Quindi σ_{zz} è un piano sulla sezione.

Ma su queste considerazioni possiamo scrivere

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = K_0(z) + K_1(z)x + K_2(z)y$$

che sono diverse da quelle di Eulero, sono funzioni lineari di z e valgono

$$\begin{cases} K_0(z) = K_{00} + K_{01} \cdot z \\ K_1(z) = K_{10} + K_{11} \cdot z \\ K_2(z) = K_{20} + K_{21} \cdot z \end{cases}$$

Risolvendo questi problemi come abbiamo fatto per Eulero ottengo Navier

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

Se la sezione fosse fatta da materiali diversi fa merda ma Venant è ipotizza omogeneo e isotropo.

Un altro caso è

• $(T_x, T_y = 0)$ $(M_x, M_y, N) = 0$ $M_z \neq 0$ TORSIONE PURA

ovvero P_0 due momenti torcenti uguali e opposti



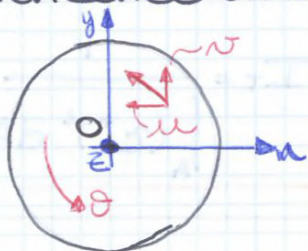
Con questo ultimo caso $\sigma_{zz} = 0$ allora l'equazione sulla divergenza diventa omogenea mentre quella sul rotore

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} = K_3 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

ma allora $\gamma_{xy} = 0$ Condizione di Rigidità cioè le fibre mantengono l'angolo, che avevano prima della deformazione, anche dopo. Rotazione Rigida

Quindi si può definire un angolo di rotazione $\vartheta(z)$ che varia da sezione a sezione ma lungo la stessa sezione è costante.

Prendendo una sezione, O Centro di Torsione e la posizione di tutti gli O sulla trave è Asse di Rotazione, allora



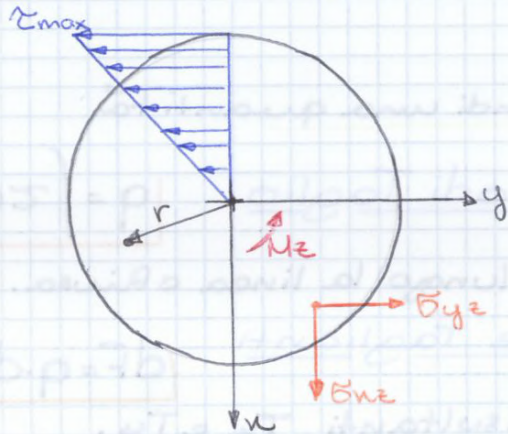
$$u = -\vartheta y \quad v = \vartheta x \quad w = 0$$

e se sostituiamo il modulo torsionale nel PLV, abbiamo

II Formula di Bredt $\dot{\theta} = \frac{M_z}{G I_T}$ \oplus

Vediamo ora come si comporta la Torsione pura al variare della sezione

Sezione Circolare



$\sigma = \text{costante}$

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -\sigma y \\ v(x, y, z) = \sigma x \\ w(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Per effetto del momento torcente M_z nascono delle tensioni tangenziali totali τ che nel centro di rotazione sono nulle e sono massime all'estremità della sezione.

Ma allora possiamo scrivere

perché non si ingobba

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -G \dot{\theta} y \\ \sigma_{yz} = G \gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G \dot{\theta} x \end{cases}$$

e definendo il Vettore Tangenziale Totale

$$\vec{\tau} = r \dot{\theta}$$

possiamo determinare

$$I_t = \frac{1}{\int_A |\tau|_{u=1}^2 dA}$$

con

$$M_z = \int_A (-\sigma_{xz} y + \sigma_{yz} x) dA = G \dot{\theta} \int_A (x^2 + y^2) dA = G \dot{\theta} I_p$$

ma dalla II Formula di Bredt \oplus

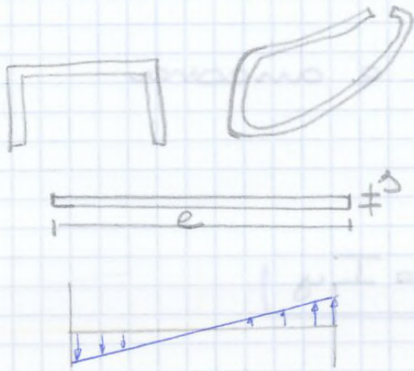
$$\dot{\theta} = \frac{M_z}{G I_t} \Rightarrow M_z = G \frac{M_z}{G I_t} I_p \Rightarrow I_t = I_p$$

31

ma con $dA = s \, de$ R_0

$$I_t = \frac{4 \Omega^2 s}{e}$$

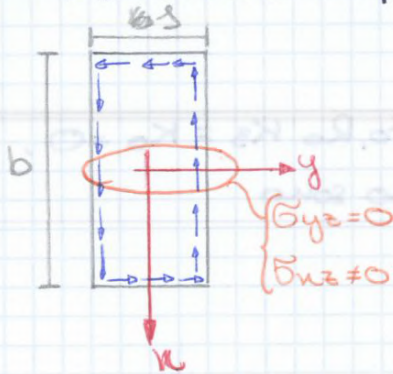
Sezione a Parete Sottile, Aperta



Anche qui $R_0 \frac{e}{s} \gg 1$, $M_z \neq 0$ ma la sezione è aperta, questo comporta che il Flusso delle tensioni di Taglio non è costante quindi può avere diverse distribuzioni.

Quindi la distanza della sezione dall'asse di rotazione non conta nulla.

Per studiare questo caso prendiamo una sezione così



patto con $\frac{b}{s} \gg 1$.

Ma allora nelle equazioni del Rotore e della Divergenza R_0

$$-\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} = K_3 = 2G \dot{\theta} \quad \text{integrando in } dy$$

$$\sigma_{xz} = -2G \dot{\theta} y$$

Allora lungo y la tensione varia proporzionalmente a y . Ma noi sappiamo $\dot{\theta}$ e il meno?

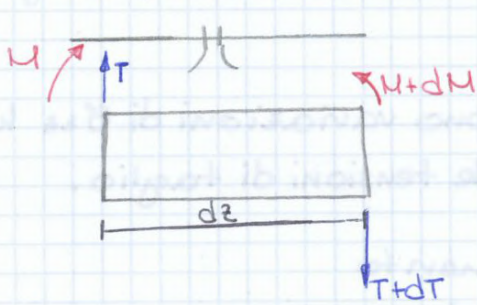
$$\dot{\theta} = \frac{M_z}{GI_t} \Rightarrow \sigma_{xz} = -\frac{2M_z}{I_t} y$$

ci serve quindi I_t

$$I_t = \frac{1}{\int \tau|_{M_z=1}^2 dA}, \quad \tau|_{M_z=1} = \sigma_{xz}, \quad I_t = \frac{1}{\int \left(\frac{2}{I_t} y\right)^2 dA} = \frac{I_t^2}{4 \int y^2 dA}$$

$$I_t = 4I_u = \frac{bs^3}{3}$$

Detto questo studiamo un tratto di trave, abbiamo già visto



$$T = \frac{dM}{dz} \text{ da cui } T_n = \frac{dM_y}{dz} = \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

supponendo I costante, allora possiamo derivare Navier lungo z.

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial M_y}{\partial z} \frac{x}{I_y} + \frac{y}{I_x} \frac{\partial M_x}{\partial z} = T_n \frac{x}{I_y} + T_y \frac{y}{I_x}$$

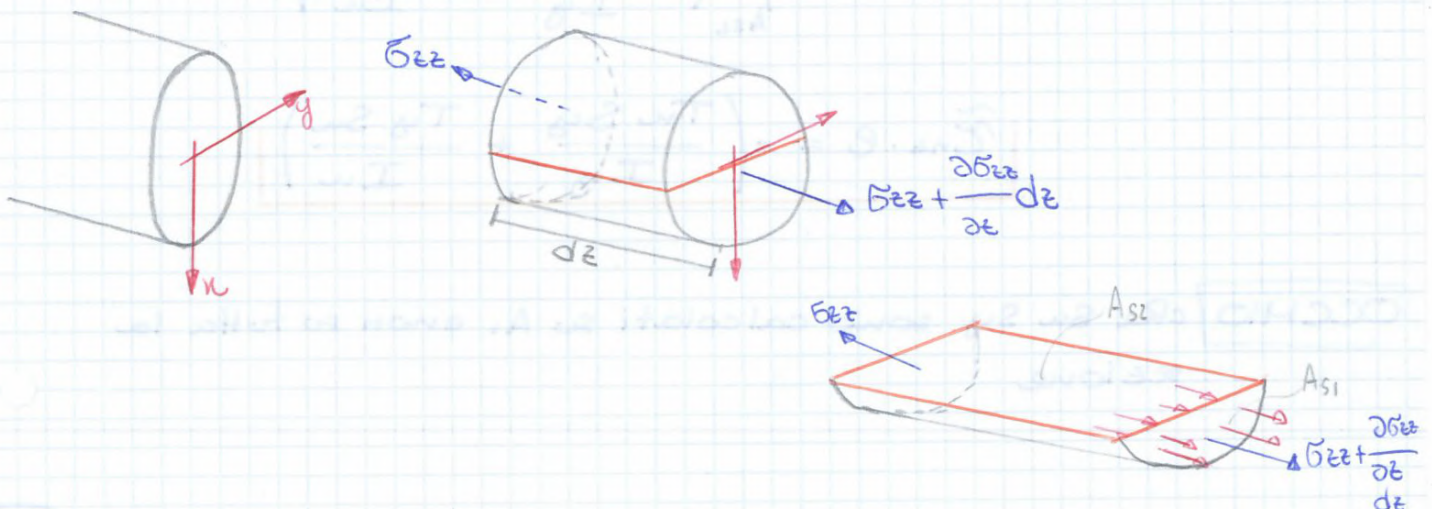
e sostituendo questo nelle equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \textcircled{1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = -T_n \frac{x}{I_y} - T_y \frac{y}{I_x} \\ \textcircled{2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{T_n x}{I_y} - \frac{T_y y}{I_x} \right) \\ \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{xz}} = \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

← equilibrio
congruenza
Fa dei coseni con segni e K_{11}, K_{21}

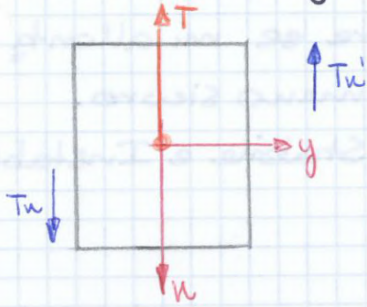
Tuttavia la risoluzione di queste equazioni non è semplice quindi si passa a una Soluzione Semplificata del Taglio. Questa mi dà una soluzione Equilibrata ricavata dalla $\textcircled{1}$ che però non necessariamente risolve le condizioni di congruenza della $\textcircled{2}$.

Si prende un riferimento Centrale, un Navier e DUE Assi di simmetria



Centro di Taglio

Data una geometria, tra tutte le posizioni in cui posso



applicare il taglio, ce ne una lungo la quale il taglio non genera torsione.

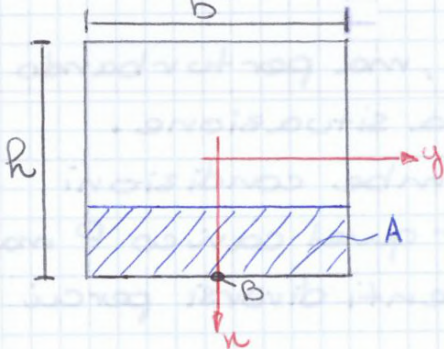
$$T = T_x \vec{i} + T_y \vec{j}$$

Se la sezione ha assi di simmetria il Centro di Taglio sarà lungo gli Assi ma

se non ci sono Assi di simmetria questo potrebbe essere anche fuori dalla sezione. Quindi per trovarlo guardo a come la sezione si deforma quindi il Centro di Taglio è funzione di τ_{xz} e τ_{yz}

Applicazione

Supponiamo $T_x \neq 0, T_y = 0 \Rightarrow q = \tau_{xz} \cdot e = -\frac{T_x S_y}{I_y} = -\frac{TS}{I}$



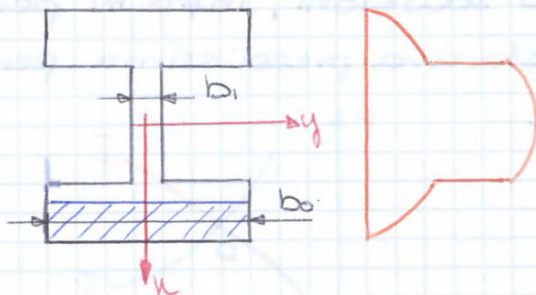
$$S = \int_A n \, dA \quad \text{voglio calc } \tau_{xz}$$

In B il Taglio è nullo.

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{b} \frac{TS}{I}, \quad S = A \cdot n_0 = b \left(\frac{h}{2} - n \right) n_0$$

$$\tilde{\tau}_{xz} \Big|_{\max} \Rightarrow n = 0$$

Un'altra sezione può essere



Il taglio è quasi tutto assorbito dall'Anima.

Quando dimensioniamo dobbiamo trovare il punto di σ_{\max} e τ_{\max} che può non essere lo stesso quindi usiamo

Criterio di Von Mises

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Quindi l'asta caricata di punta è un problema di stabilità.

TIRANTE



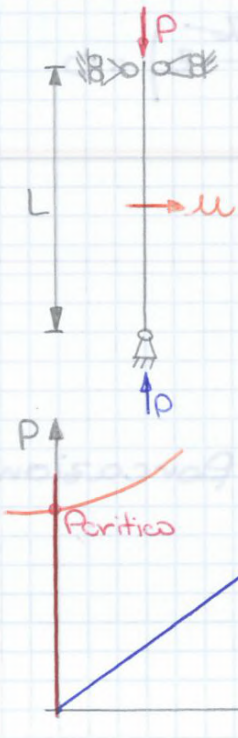
Se perturbo la condizione di equilibrio con un colpo in A la configurazione si deforma

$$\text{Dati: } A = 10 \text{ mm}^2 \quad \sigma_{cr} = 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$P_{max} = \sigma_{cr} \cdot A = 3600 \text{ N}$$

Non dipende da L, né dal tipo di sezione

PUNTONE



Per studiare la stabilità non possiamo considerare la condizione di equilibrio. Il problema sta nel verificare che tutte le sezioni siano stabili.

All'aumentare di P, u cresce fino a un Carico Critico dopo il quale, se seguo l'arangoine, si generano degli spostamenti lungo u.

Come impostiamo il problema?

Consideriamo la configurazione deformata e quella indeformata.



Considerando la generica sezione della trave abbiamo

Momento Interno

$$M_i = -u_{,zz} EI$$

Momento Esterno

$$M_e = P \cdot u$$

In aeronautica si svolge un'analisi non lineare in modo da poter superare il carico critico pur mantenendo la stabilità.

Semiguscio Ideale

È una struttura ideata dagli aerospaziali, sviluppata per l'analisi delle strutture a guscio rinforzate.

Consideriamo \perp ala e studiamo come è fatta la sezione.



Può essere piena ma peserebbe troppo allora si usa una sezione a parete sottile tuttavia lungo l'ala sono presenti macchinari o simili e la parete sottile non garantisce la stabilità, per di più il calcolo dello spessore in funzione della posizione non è semplice inoltre ho carichi concentrati.

Su questa base ho la necessità di rinforzare con elementi di irrigidimento la struttura. Questi sono Trasversali centine, fogli di alluminio in corrispondenza dei quali posso mettere carichi applicati o aperture; longitudinali correnti o longheroni.

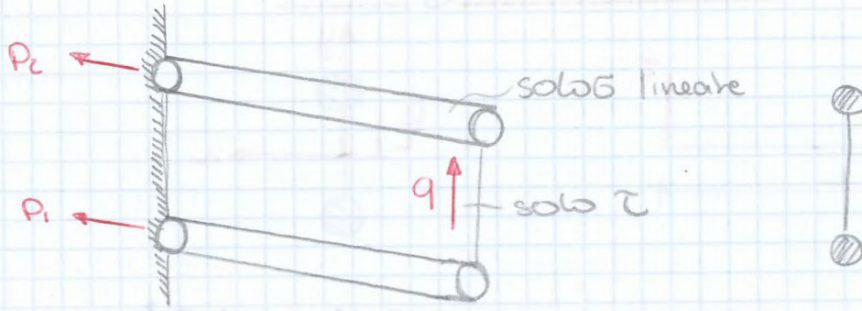
Questa nuova struttura prende il nome di

Guscio Rinforzato



Un metodo per semplificare l'analisi del Guscio Rinforzato è Semiguscio Ideale.

Quindi schematizziamo questa struttura come

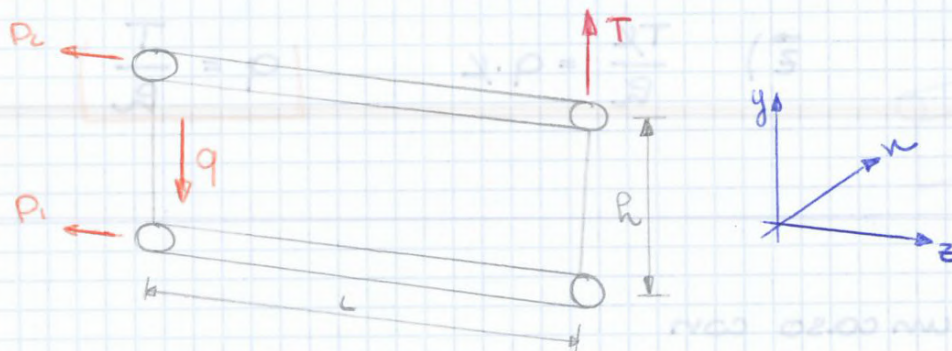


Schema del Semiguscio Ideale

Le mie incognite sono:

Sforzo Normale $P = \int_A \sigma dA$

Flusso di Taglio $q = \int \tau ds$



Se, per risolvere il problema, uso solo le equazioni della statica ho Semiguscio Puro

Scriviamo l'equilibrio

$\vec{x}) \quad 0 = 0$

$\vec{y}) \quad q \cdot R = T$

$\vec{z}) \quad P_1 + P_2 = 0$

$$q = \frac{T}{R}$$

$w) \quad TL = -P_2 R$

$$P_1 = -P_2 = \frac{TL}{R}$$

$y) \quad 0 = 0$

$z) \quad 0 = 0$

In questo modello trascuro M_z .