NUMERO: 1238

DATA: 27/10/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Lamberti D.

MATERIA: Geometria

Prof. Cumino

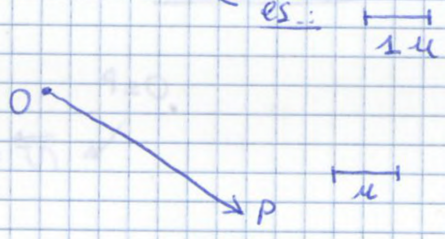
GEOMETRIA - $\boxed{03/03/2014}$

caterina.cumino@polito.it

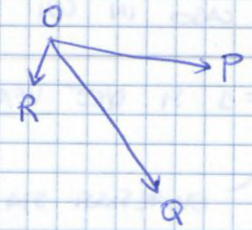
## $\boxed{\text{VETTORI}}$ DELLO SPAZIO DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

<u>DEFINIZIONE</u> (VETTORE) = UN VETTORE È (FISSATO IN UN PUNTO O, FISSATA UN'UNITÀ DI <u>MISURA DELLA LUNGHEZZA</u>) UN SEGMENTO ORIENTATO DI

es.:

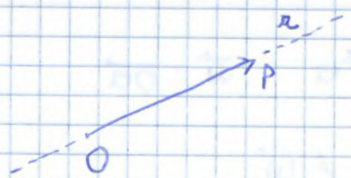



ORIGINE O (PUNTO FISSO!) E CON PUNTO DI ARRIVO CHE VARIA A SECONDA DEL VETTORE




INDICO CON V L'INSIEME DEI VETTORI APPLICATI NEL PUNTO O.

→ IL VETTORE O − P È CARATTERIZZATO DA:




1. DIREZIONE (APPARTIENE ALLA RETTA r → HA DIREZIONE DELLA RETTA r)
2. VERSO (INDICATO DALLA FRECCIA → DA O VERSO P)
3. LUNGHEZZA DEL SEGMENTO $\overline{OP}$ (<u>MODULO</u>, O <u>NORMA</u>)

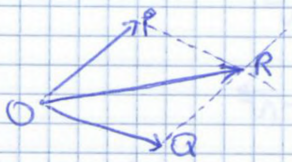
SE INDIVIDUO QUESTE TRE CARATTERISTICHE, SO TUTTO DEL VETTORE

## OPERAZIONI

→ **SOMMA**

DATI $\vec{v} = \vec{OP}$, $\vec{w} = \vec{OQ}$

$\vec{v} + \vec{w}$




<u>PER DEFINIZIONE</u> = $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$

IL VETTORE $\vec{OR}$ TROVATO STA SUL PIANO INDIVIDUATO DA $\overline{OQ}$ e $\overline{OP}$

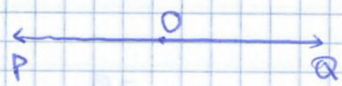
<u>OSSERVAZIONI</u>:

$$|\vec{OR}| \leq |\vec{OP}| + |\vec{OQ}|$$

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

<u>CASI PARTICOLARI</u>

① 


STESSA DIREZIONE, STESSO MODULO, VERSI OPPOSTI

$$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{0}$$

② 


$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{OP} \\ \vec{w} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \vec{v} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

<u>DEFINIZIONE</u> = SE $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{0}$, ALLORA $\vec{OQ}$ È <u>L'OPPOSTO</u> DI $\vec{OP}$

↓

$$\vec{v} = \vec{OP}$$

$$-\vec{v} = \vec{OQ}$$

## CASI PARTICOLARI

① SE $m = 0$, $0\vec{v} = ?$

$$|0\vec{v}| = |0| \cdot |\vec{v}| = 0 \cdot |\vec{v}| = 0$$

ALLORA $\vec{v} = \vec{0}$ VETTORE NULLO

② $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$, PRENDENDO $m = -1$

$-1\vec{v}$ STESSA DIREZIONE

VERSO OPPOSTO

MODULO:

$$|-1\vec{v}| = |-1| \cdot |\vec{v}| = 1 \cdot |\vec{v}| = |\vec{v}|$$

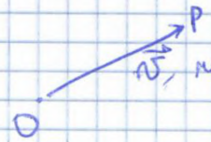
DUNQUE, $-1\vec{v}$ è OPPOSTO DI $\vec{v}$

$\downarrow$

NON SCRIVIAMO $-1\vec{v}$, MA DIRETTAMENTE $-\vec{v}$


③ $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$ CON $|\vec{v}| \neq 1$

VOGLIO RICAVARE UN VERSORE CON STESSA DIREZIONE E VERSO DI $\vec{v}$




$\vec{v}$, MODULO DIVERSO DA 1

QUI VOGLIO RICAVARE IL VERSORE DI $\vec{v}$

$\downarrow$

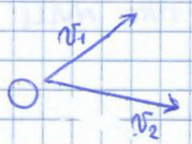
$\text{VERS}\,\vec{v}$

SO CHE $|\text{VERS}\,\vec{v}| = 1$

$$m \cdot \vec{v}, \quad m = \frac{1}{|\vec{v}|}$$

$$\text{VERS}\,\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

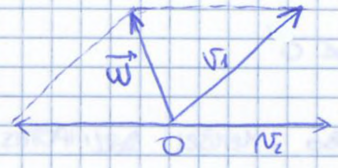
ESEMPIO




$a_1 = 2$

$a_2 = -1$

$\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$




DEFINIZIONE = DATI $\vec{v_1}, \vec{v_2} \dots \vec{v_m} \in V$

QUESTI VETTORI SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE UNO DI ESSI SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

$\Longrightarrow \vec{w}, 2\vec{v_1}, -\vec{v_2}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

SI PUÒ INFATTI SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI DUE.

→ EQUIVALENTEMENTE:

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_m}$ SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTONO COEFFICIENTI REALI $a_1, a_2, a_m$ NON TUTTI NULLI TALI CHE

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots a_m\vec{v_m} = \vec{O}$$

$\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$

SOTTRAGGO DA AMBO LE PARTI $\vec{w}$

$\vec{w} - \vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2} - \vec{w}$

$\underline{\vec{O} = -\vec{w} + 2\vec{v_1} - \vec{v_2}}$

COMBINAZIONE LINEARE DI $\vec{w}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ A COEFFICIENTI $-1, 2, -1$

NON TUTTI NULLI!

→ DUE VETTORI $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE HANNO DIREZIONE DIVERSA

NON NULLI

→ DUE VETTORI NON NULLI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE HANNO STESSA DIREZIONE

ESEMPIO

$\vec{v}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE SE ESISTE $m \neq 0$ TALE CHE $m\vec{v} = \vec{0}$

$\boxed{\text{NO!}}$

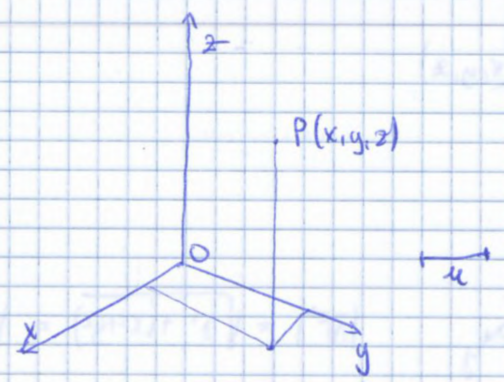
PERCHÉ $m\vec{v} = 0$ SE E SOLO SE $m = 0$

$\vec{v}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE SE E SOLO SE $\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE SE E SOLO SE $\vec{v} \neq \vec{0}$

COORDINATE CARTESIANE

$R(O, x, y, z)$ ORTOGONALE E MONOMETRICO

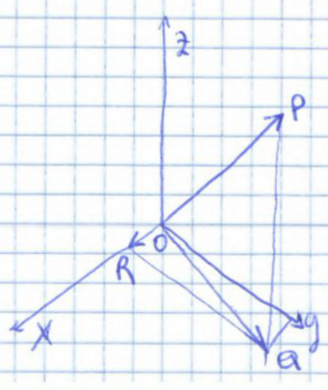



$P \longleftrightarrow (x, y, z)$

C'È UNA CORRISPONDENZA TRA IL PUNTO E LA TERNA $x, y, z$

$P \longleftrightarrow (1, 2, 3)$

PUNTI TERNE ORDINATE DI NUMERI REALI.




$\vec{OP} \longleftrightarrow x, y, z$

# GEOMETRIA - 04/03/2014

**TEOREMA**

DATI $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$\downarrow$

① $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$

② $\forall m \in \mathbb{R}$

$m \cdot \vec{v_1} = (m x_1, m y_1, m z_1)$

→ APPLICAZIONI DEL TEOREMA

ES.: DATO $\vec{v} = (1,2,3)$

TROVARE VERS $\vec{v}$

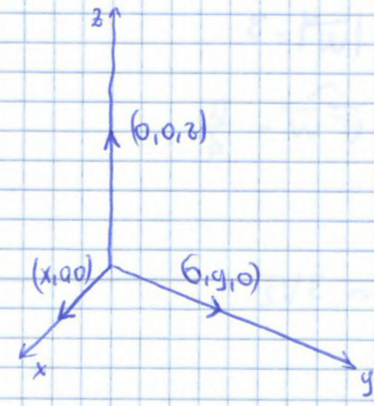

$$\text{VERS } \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1,2,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

PER SCRIVERE UN VETTORE IN COMPONENTI POSSO FARE ANCHE COSÌ:

$$\vec{v} = (x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$$

INTERPRETO:



ORA VOGLIO TROVARE QUANDO $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

QUANDO ALMENO UN VETTORE È $\vec{0}$ OPPURE QUANDO FORMANO UN ANGOLO DI $\underbrace{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi}$.

$\downarrow$

$\vec{v} \perp \vec{w}$

DALLA DEFINIZIONE SEGUE CHE $\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

1. $\forall \vec{v}, \vec{w}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ (COMMUTATIVA)

2. $\forall m \in \mathbb{R}$

$m(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (m\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v}(m \cdot \vec{w})$

3. $\forall \vec{u}$

$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$ (DISTRIBUTIVA)

4. $\forall \vec{v}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \cdot \underbrace{\cancel{\cos \widehat{\vec{v}\vec{v}}}}_{=1} = |\vec{v}|^2$

$\downarrow$

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

---

DATO $R(O, x, y, z)$

$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$

$= x_1\vec{i}(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) + y_1\vec{j}(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) +$

$+ z_1\vec{k}(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$

RICORDO CHE $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\alpha =$

$= \overline{OP}\, |\vec{u}| \cos\alpha$

$\longrightarrow \overrightarrow{OH} = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \text{vers}\, \vec{u} = \dfrac{\vec{v}\,\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{(\vec{v}\,\vec{u})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}$

**DEFINIZIONE** - PRODOTTO VETTORIALE

DATI $\vec{v}$ e $\vec{w}$

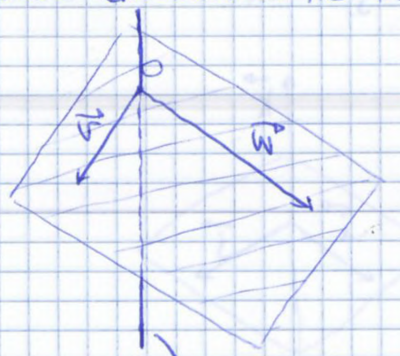
IL PRODOTTO VETTORIALE DI $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è IL VETTORE

$\vec{v} \wedge \vec{w} \longrightarrow |\vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}$

SI LEGGE v VETTORIALE w

MODULO DI $\vec{v} \wedge \vec{w}$

DIREZIONE = ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DA $\vec{v}$ e $\vec{w}$




RETTA ORTOGONALE AL PIANO

VERSO = REGOLA DELLA MANO DESTRA

OSSERVO: $\vec{w} \wedge \vec{v} \longrightarrow$ UGUALE MODULO e DIREZIONE MA VERSO OPPOSTO.

HO SCAMBIATO L'ORDINE DEI
DUE VETTORI NEL PRODOTTO

QUINDI, $\vec{w} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{w}$

$\longrightarrow$ IL PRODOTTO VETTORIALE NON è COMMUTATIVO.

**PROPRIETÀ**

① $\forall m \in \mathbb{R}$

$(m\vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge (m\vec{w}) = m(\vec{v} \wedge \vec{w})$

GEOMETRIA - $\boxed{04/03/2014}$

# MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

ELEMENTI DI UNA MATRICE

PUÒ ESSERE MATRICE <u>REALE</u> O <u>COMPLESSA</u>

ELEMENTI REALI

ELEMENTI COMPLESSI

$\mathbb{R}^{m,n}$ = INSIEME DI TUTTE LE MATRICI REALI DI $m$ RIGHE, $n$ COLONNE

$\mathbb{C}^{m,n}$ = INSIEME DI TUTTE LE MATRICI COMPLESSE $m$ RIGHE, $n$ COLONNE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

UNA MATRICE SI PUÒ INDICARE ANCHE CON:

$$A = (a_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

CON $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

$$a_{11} = 1$$

$$a_{12} = 3$$

$$a_{21} = 2$$

UNA MATRICE SI DICE <u>QUADRATA</u> SE $m$ RIGHE = $n$ COLONNE

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

DIAGONALE PRINCIPALE

MATRICE NULLA = SE TUTTI I SUOI ELEMENTI SONO ZERO.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ZERO IN GRASSETTO

MATRICE TRIANGOLARE ALTA = UNA MATRICE SI DICE TRIANGOLARE ALTA SE GLI ELEMENTI SOTTO LA DIAGONALE PRINCIPALE SONO TUTTI NULLI. → DEVE ESSERE QUADRATA

MATRICE TRIANGOLARE BASSA : UNA MATRICE SI DICE TRIANGOLARE BASSA SE GLI ELEMENTI SOPRA LA DIAGONALE PRINCIPALE SONO TUTTI NULLI.
→ DEVE ESSERE QUADRATA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

VETTORE RIGA = SI DICE VETTORE RIGA UNA MATRICE CON UNA SOLA RIGA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,3}$$

VETTORE COLONNA = SI DICE VETTORE COLONNA UNA MATRICE CON UNA SOLA COLONNA

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

→ VETTORI RIGA SI INDICANO CON $\mathbb{R}^{1,n}$
→ VETTORI COLONNA SI INDICANO CON $\mathbb{R}^{m,1}$

---

DATE $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

SOMMA MATRICI

ES.:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 6 & 15 & 21 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

## PROPRIETÀ

① $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

② $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$1 \cdot A = A$$

③ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

④ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

## PRODOTTO DI MATRICI

PER MOLTIPLICARE DUE MATRICI DEVONO AVERE LO STESSO NUMERO DI RIGHE E COLONNE

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ ← LA CONDIZIONE IN REALTÀ È CHE LE COLONNE DI UNA SIANO UGUALI ALLE RIGHE DELL'ALTRA

$B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,p}$

SI DICE $A \cdot B = C$ LA MATRICE APPARTENENTE A $\mathbb{R}^{m,p}$:

$$C = A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

## ESERCIZIO

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

SE A E B SONO MATRICI, L'UGUAGLIANZA È VERA?

$$(A+B)(A+B) = A \cdot A + AB + BA + BB = A^2 + \underline{AB + BA} + BB$$

NON VALE UGUAGLIANZA PERCHÉ CON LE MATRICI NON VALE PROPRIETÀ COMMUTATIVA.

## PROPRIETÀ DEL PRODOTTO CON TRASPOSTA

$$^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO = PER LE MATRICI NON VALE! INFATTI POSSO OTTENERE UNA MATRICE NULLA ANCHE PER PRODOTTO TRA DUE MATRICI NON NULLE.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## POTENZA DI MATRICI

SI PUÒ FARE SOLO CON MATRICI QUADRATE

DATA LA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ E $m > 1 \in \mathbb{N}$, SI DICE POTENZA DI $A$ ELEVATA AD $m$

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{m}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

## PRODOTTO MISTO

DI $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

DEFINIZIONE: PRODOTTO MISTO: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$

### ESEMPIO

$\vec{v} = (1,2,0)$
$\vec{w} = (2,3,0)$
$\vec{u} = (1,1,3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \cdot (-\vec{k}) = (1,1,3)(0,0,-1) = -3$

---

IN GENERALE: $\vec{u} = (a,b,c)$
$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$
$\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = a(y_1 z_2 - y_2 z_1) - b(x_1 z_2 - x_2 z_1) + c(x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$ = FACCIO, COME AL SOLITO, IL DETERMINANTE TROVANDO COSÌ UN NUMERO

### PROPRIETÀ

① $\vec{u} \cdot \vec{w} \wedge \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$

② $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u}$

QUANDO $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$?

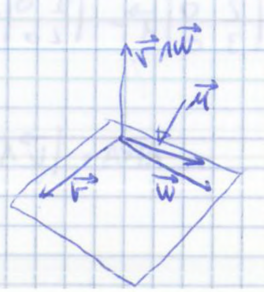
SE $\vec{u} = \vec{0}$ OPPURE $\vec{v} = 0$ OPPURE $\vec{w} = 0$

SE $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq 0$,

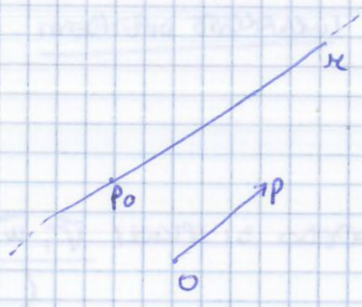
- $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$ QUANDO $\vec{v} = m\vec{w}$ ($\vec{v}$ e $\vec{w}$ HANNO UGUALE DIREZIONE)
- $\vec{v}$ e $\vec{w}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI,

$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$ SE $\underbrace{\vec{u} \perp \vec{v} \wedge \vec{w}}$

$\vec{u}$ STA SUL PIANO DI $\vec{v}$ e $\vec{w}$



# $\boxed{\text{GEOMETRIA ANALITICA}}$

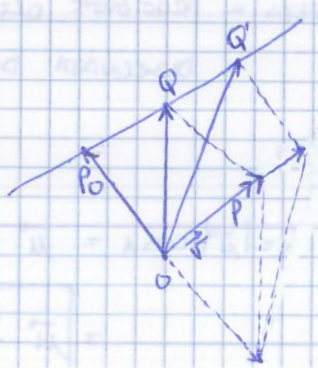



r è individuata da:

$P_0 \in r$

$\vec{v} = \vec{OP} \parallel \vec{r}$

Dato il vettore (e $P_0$) vi è una sola retta individuabile; viceversa, dato $P_0$ e la retta, vi sono infiniti vettori possibili.




$\vec{OQ} - \vec{OP_0} \parallel r \parallel \vec{v}$

$\vec{OQ_1} - \vec{OP_0} \parallel r \parallel \vec{v}$

Sarà sempre così per ogni $Q, Q_1, Q_2 \dots$

Quindi, $\forall Q \in r$, $\vec{OQ} - \vec{OP_0}$ è un vettore con la stessa direzione del vettore $\vec{v}$

$$\Updownarrow$$

$\vec{OQ} - \vec{OP_0}$ è linearmente dipendente da $\vec{v}$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\vec{OQ} - \vec{OP_0} = m\vec{v}}$ per un certo $m \in \mathbb{R}$

Equazione vettoriale della retta $r$

La retta ha equazione vettoriale $r: \vec{OQ} - \vec{OP_0} = m\vec{v}$

→ FACCIAMO LA STESSA COSA, MA IN 3 DIMENSIONI

ELIMINO $m$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 4m \\ y = 2 + 5m \\ z = 3 + 6m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{x-1}{4} \\ m = \frac{y-2}{5} \\ m = \frac{z-3}{6} \end{cases}$$

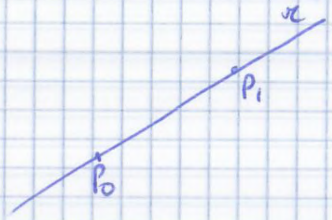
$$r: \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} \\ \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6} \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DI UNA RETTA NEL PIANO

EGUAGLIO $m$ A DUE A DUE (QUALSIASI COMBINAZIONE)

→ $\boxed{NB}$: LE COMPONENTI DI $\vec{v} \parallel r$ SI DICONO PARAMETRI DIRETTORI

→ ALTRO MODO PER INDIVIDUARE $r$



ASSEGNATO $P_0 \neq P_1$

PONGO $\vec{v} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$

$r: \vec{OQ} = \vec{OP_0} + m(\vec{OP_1} - \vec{OP_0})$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$P_1(1,1,2)$ TROVARE EQ. VETTORIALE ECC... DI $r$ PASSANTE PER $P_0$ e $P_1$

$P_0(1,2,3)$

$$r: (x,y,z) = (1,2,3) + m(0,-1,-1)$$

→ RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - m \\ z = 3 - m \end{cases}$$

→ RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

$$\begin{cases} x = 1 \\ m = 2 - y \\ m = 3 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 - y = 3 - z \end{cases}$$

$ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$

FORMA FINALE: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ EQUAZIONE CARTESIANA

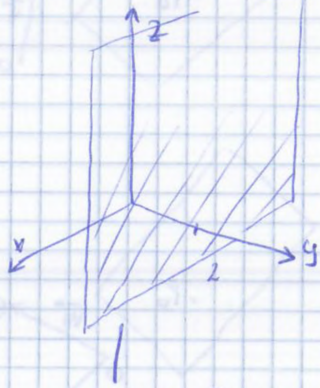
$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

TROVARE EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO PASSANTE PER $P_0(1,2,3)$ ORTOGONALE A $\vec{j}$

$\vec{j}(0,1,0)$

$$\alpha: \cancel{0(x-1)} + 1(y-2) + \cancel{0(z-3)} = 0$$

$$\alpha: y-2=0 \rightarrow y=2$$




PIANO PASSANTE PER $y=2$ E PARALLELO A $x$ E $z$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$s: (x,y,z)=(1,0,0)+m(1,2,0)$

S È DATA DA EQUAZIONE CARTESIANA $\alpha \cap (xy)$

PIANO XY

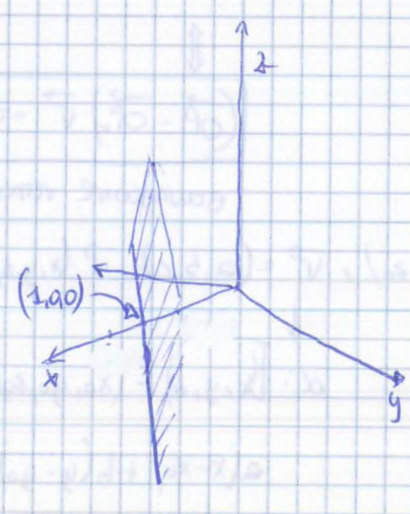
$$s: \begin{cases} x = 1+m \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow s: \begin{cases} y = 2(x-1) \\ z=0 \end{cases}$$

$s: y=2(x-1) \rightarrow \alpha: y=2(x-1)$

$\alpha: 2x-y+0z-2=0$

ORTOGONALE AL VETTORE $(2,-1,0)$

PASSANTE PER $P_0(1,0,0)$




$z=0 \rightarrow$ VUOL DIRE "PIANO XY"

$\alpha: y=2(x-1)$

$=2x-2$

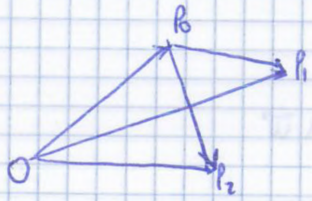
$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha: (x-1)\cdot 1 - y(-1) + z\cdot 1 = 0$$

$$x - 1 + y + z = 0$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

VERIFICO CHE $\underbrace{P_0, P_1, P_2}_{\text{DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE}}$ NON SIANO ALLINEATI




$P_0, P_1, P_2$ SONO ALLINEATI $\iff$ $(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$ e $(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$ HANNO STESSA DIREZIONE $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) = k(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0})$$

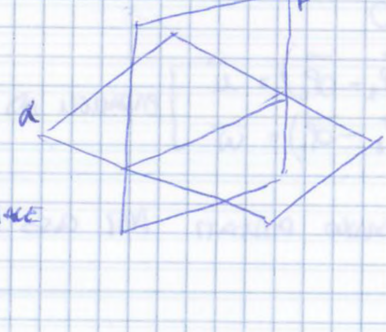
$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = (-1, 1, 0)$

$\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_0} = (-1, 0, 1)$

$\exists k \in \mathbb{R}$ TALE CHE $(-1, 1, 0) = k(-1, 0, 1)$? NO!

$\boxed{\text{RETTE e PIANI}}$

$$r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 & (\alpha) \\ x + 2y - z = 0 & (\beta) \end{cases}$$




TROVARE RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE (PARAMETRICA) DI $r$

SERVE $P_0 \in r$, $\vec{v} \parallel r$

$P_0$ È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = -1 \\ -2 - z = 0 \rightarrow z = -2 \end{array}$$

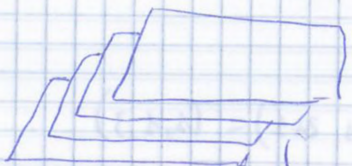
PUNTO DUE

$\gamma // \alpha$

$\gamma // \alpha \iff \gamma \perp (1,-1,0)$

$\Rightarrow \gamma : x - y + 0z + d = 0$

TROVARE $d \in \mathbb{R}$ TALE CHE $Q_0 \in \gamma$



FASCIO IMPROPRIO (INFINITI PIANI PARALLELI AD $\alpha$) DEVO TROVARE QUELLO PER CUI È SODDISFATTA LA CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER $Q$.

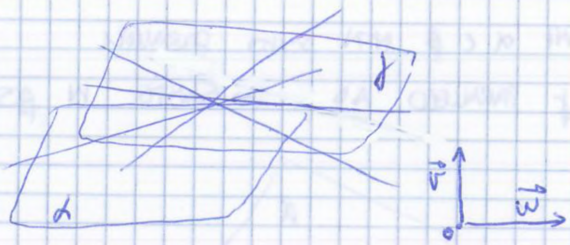
$Q_0(1,2,3) \in \gamma \iff 1 - 2 + d = 0$

$d = 1$

$\gamma : x - y + 1 = 0$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

TROVARE LA RETTA $s$ PARALLELA AD $\alpha$ PASSANTE PER $Q_0(1,2,3)$




$s // \alpha \iff s \subset \gamma, \ \gamma // \alpha$

$s$ PASSA PER $Q_0$, $s // \vec{w} \rightarrow$ DEVE ESSERE $\vec{w} \perp \vec{v}$

$\alpha \perp \vec{v}(1,-1,0)$

CERCO $\vec{w} \perp \vec{v}$

$\vec{w} = (l, m, n)$ TALE CHE $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

$(l, m, n)(1,-1,0) = 0$

$\boxed{l - m + 0 = 0} \rightarrow \vec{w}(l, l, n) \ \forall l, n \in \mathbb{R}$

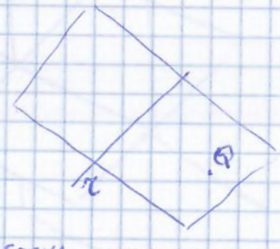
$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

DATE $r$ : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3-t \end{cases}$

$Q(2,2,0)$

TROVARE IL PIANO CHE CONTIENE SIA $r$, SIA IL PUNTO $Q$.

$\begin{cases} 2 = 1+t \\ 2 = 2 \\ 0 = 3-t \end{cases}$ $\nexists t \in \mathbb{R}$ / IL SISTEMA SIA SODDISFATTO! PERCIÒ $Q$ NON APPARTIENE A $r$.




→ TRASFORMO $r$ IN FORMA CARTESIANA:

$r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 3-(x-1) \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} y=2 \\ x+z-4=0 \end{cases}$

$F: \lambda(y-2) + \mu(x+z-4) = 0$

→ IMPONGO $Q \in F$

$\lambda(2-2) + \mu(2+0-4) = 0$

$-2\mu = 0 \longrightarrow \mu = 0, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$

QUINDI IL PIANO TROVATO SARÀ

$\beta: \lambda(y-2) = 0 \longrightarrow \beta: y-2=0$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

DATE $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3-t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1-u \\ y = 2+2u \\ z = 3+u \end{cases}$

DIRE IN CHE POSIZIONE RECIPROCA SONO

NON PARALLELE PERCHÉ $\underbrace{(1,0,-1)}_{\text{VETTORE PARALLELO A } r} \neq m \underbrace{(-1,2,1)}_{\text{VETTORE PARALLELO A } s}$

TROVATI DAI COEFFICIENTI DEI PARAMETRI $t$ e $u$

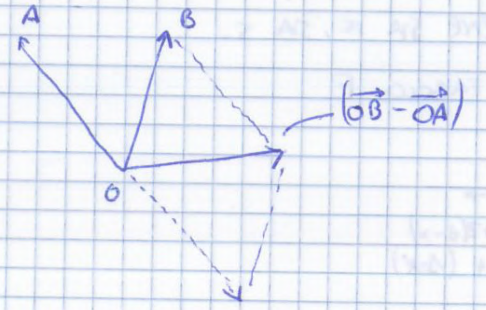
QUANDO A e B SONO DUE INSIEMI COME QUELLI DISEGNATI, $d(A,B)$ è IL MINIMO DELLE DISTANZE $d(P_A, P_B)$ DOVE $P_A$ VARIA IN A e $P_B$ VARIA IN B

IN $\mathbb{R}(O, x, y, z)$

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

CALCOLO $d(A,B)$




$$|\vec{OB} - \vec{OA}| = d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

ESEMPIO

DATO $C(1,2,3)$

DETERMINARE LA SUPERFICIE SFERICA DI CENTRO C e RAGGIO 3.


IMPONGO: $d(P,C) = 3$

$$\downarrow$$

$$d(P,C) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = 3$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9}$$

EQUAZIONE DELLA SUPERFICIE SFERICA CON RAGGIO 3 e CENTRO $(1,2,3)$

SE LO FACESSI IN $xy$, OTTENGO EQUAZIONE CRF

CALCOLARE $d(P_0, r)$

$\alpha$ PASSA PER $P_0$, $\perp (1, 1, -1)$

$$\alpha : 1(x-1) + 1(y-2) - 1(z-3) = 0$$

→ INTERSEZIONE $\alpha \cap r$

$$(1+t) - 1 + t - 2 - ((2-t) - 3) = 0$$
$$3t - 1 = 0$$
$$t = \frac{1}{3} \longrightarrow H\left(1+\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2-\frac{1}{3}\right)$$

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \sqrt{\left(1-1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(3-2+\frac{1}{3}\right)^2}$$

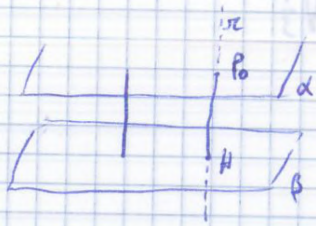
$\boxed{\text{FORMULE}}$

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$
$P_0 (x_0, y_0, z_0)$

→ DISTANZA TRA DUE PIANI

$\alpha \parallel \beta$

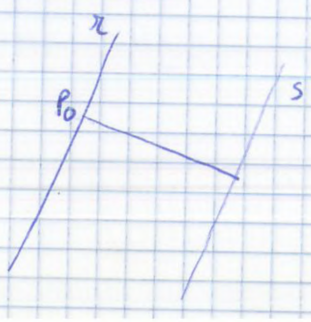



$\alpha \parallel \beta \rightarrow d(\alpha, \beta) = d(P_0, \beta)$ $\forall$ PUNTO $P_0 \in \alpha$

---

$r \parallel \alpha$, $d(r, \alpha) = d(P_0, \alpha)$ $\forall$ PUNTO $P_0 \in r$

→ DISTANZA $r \parallel s$




SE $r \parallel s \rightarrow d(r, s) = d(P_0, s)$, $\forall P_0 \in r$

QUINDI, $d(r,s) = d(P_0, \alpha)$

→ SCELGO A PIACERE $P_0$ (PER ESEMPIO IMPONGO $t=0$) → $P_0(1,1,1)$

$$d(P_0,\alpha) = \frac{|-\cancel{2}+\cancel{2}+1-4|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-3|}{3} = 1$$

## $\boxed{\text{SISTEMI LINEARI}}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

DUE EQUAZIONI IN $x,y$ LINEARI IN $x,y$

SISTEMA LINEARE DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

→ METODO DI SOSTITUZIONE

$$\begin{cases} x=-y \\ \cancel{-y}\cancel{+y}=2 \end{cases} \rightarrow 0=2 \text{ SISTEMA INCOMPATIBILE } (\nexists \text{ SOLUZIONE})$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=-y \\ \cancel{-2y}\cancel{+2y}=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 0=0 \end{cases}$$

SOLUZIONE DEL SISTEMA $(-y,y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$\infty^1$ SOLUZIONI, $y$ INCOGNITA LIBERA

---

UN SISTEMA LINEARE DI $m$ EQUAZIONI IN $n$ INCOGNITE A COEFFICIENTI IN $K (=\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

TERMINE NOTO

$$\downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DEL SISTEMA.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

MATRICE COMPLETA DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE DEL SISTEMA

QUANDO HO UN SISTEMA CON MATRICE DEI COEFFICIENTI A SCALA, FACCIO METODO DI SOSTITUZIONE DAL BASSO

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \longrightarrow x_1 - x_2 + 4/3 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \longrightarrow x_3 = 4/3 \\ 3x_4 = 2 \longrightarrow x_4 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{4}{3} \\ x_4 = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \text{SOLUZIONI } \left(x_2 - \frac{1}{3}, x_2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

$x_2$ SCELTA COME INCOGNITA LIBERA

ALTERNATIVA

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{4}{3} - 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\text{SOLUZIONI} = \left(x_1, x_1 + \frac{1}{3}, 4/3 + \frac{2}{3}\right)$$

$x_1$ SCELTA COME INCOGNITA LIBERA $\forall x_1 \in \mathbb{R}$

IN ENTRAMBI I CASI, SOLUZIONI PARI A $\infty^1$

**ESEMPIO** - SISTEMA LINEARE A SCALA

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3\left(1 - \frac{x_3}{2}\right) = 1 \\ x_4 = \frac{1}{2}(2 - x_3) \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3 - \frac{3}{2}x^3 = 1 \\ x_4 = \frac{1}{2}(2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - x_3 - 3 + \frac{3}{2}x_3\right) \\ x_4 = \frac{1}{2}(2 - x_3) \end{cases}$$

SOLUZIONI $\left(-1 + \frac{x_3}{4}, x_2, x_3, 1 - \frac{x_3}{2}\right)$

AL VARIARE DI $\underline{x_2, x_3 \in \mathbb{R}}$

INCOGNITE LIBERE

**ESEMPIO** - SISTEMA LINEARE A SCALA

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

MATRICE A SCALA, ED IN PARTICOLARE MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

TUTTE LE RIGHE IN A SONO NON NULLE → QUINDI SEMPRE COMPATIBILE; INOLTRE NON HO INCOGNITE LIBERE

$$A/B = \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -5/2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

RISOLUBILE CON 1 SOLUZIONE

DEFINIZIONE = DATA $M$ RIDOTTA A SCALA, SI DICE RANGO DI $M$ $[rg(M)]$ IL NUMERO DELLE SUE RIGHE NON NULLE

PROPOSIZIONE = SE $M$ È A SCALA LE SUE RIGHE NON NULLE SONO TRA LORO LINEARMENTE INDIPENDENTI

LO STESSO DISCORSO NON VALE PER LE COLONNE

$rg(M)$ = NUMERO DI INDICATORI

$rg(A/B) \geq rg(A)$

→ DIMOSTRAZIONE

1) LE SOLUZIONI DEL SISTEMA S① SONO ANCHE SOLUZIONI DI S②

$(c_1, c_2, \dots c_n)$ SOLUZIONI

2) SE $(c_1, c_2, \dots c_n)$ È SOLUZIONE DI S②

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \dots a_{1n}c_n = b_1 \\ \cancel{b_1} + \cancel{k}(a_{21}c_1 + \dots a_{2n}c_n) = \cancel{b_1} + \cancel{k}b_2 \end{cases}$$

$$a_{21}c_1 + \dots a_{2n}c_n = b_2$$

CHE È CIÒ CHE AVREI OTTENUTO SE FOSSI ANDATO A SOSTITUIRE LE SOLUZIONI NELLA SECONDA EQUAZIONE DEL SISTEMA.

COROLLARIO - METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS (METODO CHE CI PERMETTE DI PASSARE DA UN SISTEMA QUALSIASI A UN SISTEMA A SCALA EQUIVALENTE)

$(A|B) \longrightarrow (A'|B')$ DI SISTEMA EQUIVALENTE

POSSO FARE:

- UNO SCAMBIO DI RIGHE
- SOSTITUIRE ALLA RIGA $r_i$ LA RIGA $r_i + k\, r_j$, $k \in K$

ESEMPIO

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

→ RIDURRE A MATRICE A SCALA PER OTTENERE UN SISTEMA EQUIVALENTE.

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array}$$

# GEOMETRIA - 23/03/2014

ESERCIZIO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

DISCUTERE E RISOLVERE (METODO DI GAUSS)

$\longrightarrow$ A NON È A SCALA

RIDUCO A SCALA CON OPERAZIONI ELEMENTARI

(1) SCAMBIARE RIGHE SU $(A|B)$

$R_j \longleftrightarrow R_i$

(2) $R_i \rightarrow KR_j$, $K \neq 0$

(3) $R_i \rightarrow R_i + KR_j$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

NON C'È SOLUZIONE QUANDO HO $(0\ 0\ \dots\ |K)$, $K \neq 0$

SE NON HO UNA FORMA DI QUESTO TIPO, IL SISTEMA È COMPATIBILE.

$X_4$ NON È UN'INCOGNITA LIBERA (È UN INCOGNITA VINCOLATA) POICHÉ $X_4 = -1$

$X_3$ NON È UN'INCOGNITA LIBERA $\longrightarrow 2X_3 = 1 \longrightarrow X_3 = \frac{1}{2}$

$X_1, X_2$ CONTEMPORANEAMENTE LIBERE NO!

PERCHÉ C'È IL VINCOLO $2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \dots & & & & \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$ POSSO SCEGLIERE $X_1$ LIBERA OPPURE $X_2$ LIBERA

ALLORA $(A|B)$ HA UN'INCOGNITA LIBERA

$\infty^1$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 + 4 = 0 \\ 2X_3 = 1 \\ X_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2X_1 + X_2 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \\ X_3 = \frac{1}{2} \\ X_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = -\frac{X_2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ X_3 = \frac{1}{2} \\ X_4 = -1 \end{cases}$$

SOLUZIONI: $\left(-\frac{X_2}{2} + \frac{3}{4}, X_2, \frac{1}{2}, -1\right)$

② $rg(A) = rg(A|B) = r$

$(A|B) \longrightarrow (A'|B')$ RIDOTTA A SCALA

SUPPONGO CHE LE COLONNE DI A' LINEARMENTE INDIPENDENTI SIANO LE PRIME $r$

→ <u>RICORDO</u>: LE COLONNE SENZA INDICATORE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI DA QUELLE CHE LE PRECEDONO A SINISTRA

$C_1, C_2 \dots C_m$ COLONNE DI A'

$(x_1, x_2 \dots x_m)$ SOLUZIONE DI $(A'|B')$

$\Rightarrow x_1C_1 + x_2C_2 + \dots x_mC_m = B$

$x_1C_1 + x_2C_2 + \dots x_RC_R = -x_{R+1}C_{R+1} \dots - x_mC_m + B$

COMBINAZIONE LINEARE DELLE PRIME $r$ COLONNE (CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI)

$\underbrace{-x_{R+1}C_{R+1} \dots - x_m + C_m}_{\text{INCOGNITE LIBERE}} + B$

APPLICAZIONI

① SISTEMI OMOGENEI → $AX = 0$

DI SOLITO <u>NON</u> SI SCRIVE $(A|0)$, BENSÌ SI SCRIVE UNICAMENTE $(A)$ → "DATO IL SISTEMA OMOGENEO DI MATRICE A ..."

COMPATIBILITÀ: $rg(A) = rg(A|0)$

QUINDI <u>SEMPRE</u> COMPATIBILI, POICHÉ $\cancel{(0 \dots 0|k)\ k \neq 0}$

<u>MAI</u> → $k = 0$!

SOLUZIONE $\infty^{m-r}$

→ C'È ALMENO SEMPRE LA SOLUZIONE $(0, \dots 0)$

<u>OSSERVAZIONI</u>

$AX = B$, $B \neq 0$, SUPPONGO COMPATIBILE

DATE DUE SOLUZIONI $X_1 \neq X_2$

→ VUOL DIRE $AX_1 = B$

$AX_2 = B$

→ SOTTRAGGO, TROVANDO

$AX_1 - AX_2 = B - B$

$A(X_1 - X_2) = 0$

$rg(A) = 2 \longrightarrow$ SOLUZIONI $\infty^{4-2} \rightarrow \infty^2$

$\boxed{\text{Se } h \neq -1}$ A È A SCALA

$rg(A) = 3 \longrightarrow$ SOLUZIONI $\infty^{4-3} \rightarrow \infty^1$

$\boxed{\text{APPLICAZIONE}}$

$AX = B$

CON $X, B$ MATRICI QUALSIASI

$\rightarrow$ SI DIMOSTRA TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI E METODO DI GAUSS.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AX = I \rightarrow$ SE $X$ ESISTE, $X = A^{-1}$

MATRICE INVERSA DI A

$(A|B) = (A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$

RIDUCO A SCALA: CASO GENERALE $a \neq 0$, $c \neq 0$

$\downarrow$

$R_2 \rightarrow aR_2 - cR_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$

RIDOTTA A SCALA

$\rightarrow$ RANGO?

se $ad - bc \neq 0$, $rg(A) = 2$

$rg(A|B) = 2$

se invece $ad - bc = 0$, $rg(A) = 1$

$rg(A|B) = 2$

$ad - bc = \det(A)$

APPLICAZIONE - DIMOSTRAZIONE KRAMER

$AX = B$, A QUADRATA

$m \times m$ ; $rg(A) = m$

CON X e B MATRICI COLONNA

$\longrightarrow$ TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI MI DICE CHE $rg(A) = rg(A/B) = m$

$\Longrightarrow$ $AX = B$ RISOLUBILE

SOLUZIONI $\infty^{m - rg(A/B)} = \infty^{m-m} = 1$ SOLUZIONE SOLTANTO

CERCO LA SOLUZIONE

CASO 2X2

DATO SISTEMA $(A/B) = \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\middle| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right)$

CON $rg(A) = rg(A/B) = 2$

$AX = B$

$rg(A) = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}$, $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\underbrace{(A^{-1}A)}_{\text{MATRICE IDENTITÀ}} X = A^{-1}B \longrightarrow IX = A^{-1}B$

$\boxed{X = A^{-1}B}$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} db_1 - bb_2 \\ -cb_1 + ab_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} det \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix} \\ det \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\infty^2$ SOLUZIONI $\left(-\frac{x_3}{3}-x_4,\ -\frac{2x_3}{3}+1,\ x_3,\ x_4\right)$

→ SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\infty^2$ SOLUZIONI $\left(-\frac{x_3}{3}-x_4,\ -\frac{2x_3}{3},\ x_3,\ x_4\right)$

LA DIFFERENZA TRA LE SOLUZIONI DEL SISTEMA INIZIALE E LE SOLUZIONI DELL'OMOGENEO ASSOCIATO È SOLTANTO UN VETTORE:

$$\left(-\frac{x_3}{3}-x_4,\ -\frac{2x_3}{3}+1,\ x_3,\ x_4\right)=\left(-\frac{x_3}{3}-x_4,\ -\frac{2x_3}{3},\ x_3,\ x_4\right)+(0,1,0,0)$$

$\forall x_4, x_3$

GEOMETRIA – $\boxed{25/03/2014}$

$\boxed{\text{SPAZI VETTORIALI}}$ $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,\dots a_n),\ \forall a_i\in\mathbb{R}\}$$

$$=\mathbb{R}^{1,n}$$

MATRICE RIGA ($n$ COLONNE)

C'È UNA CORRISPONDENZA TRA $\mathbb{R}^{1,n}$ E $\mathbb{R}^{n,1}$

$$\mathbb{R}^{n,1}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ \forall a_i\in\mathbb{R}\right\}$$

MOMENTANEAMENTE $\mathbb{R}^n$ È INDIFFERENTEMENTE UGUALE A $\mathbb{R}^{1,n}$ O $\mathbb{R}^{n,1}$

→ IN $\mathbb{R}^n$ DEFINISCO UNA SOMMA $(a_1,a_2\dots a_n)+(b_1,b_2\dots b_n)\overset{def}{=}(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \dots\ a_n+b_n)$

→ IN $\mathbb{R}^n$ DEFINISCO IL PRODOTTO PER $K\in\mathbb{R}$

$$K(a_1,a_2,\dots a_n)\overset{def}{=}(Ka_1,Ka_2,\dots Ka_n)$$

$\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$

1) $\forall\vec{u}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

LA SOMMA È COMMUTATIVA

→ SEGUE DALLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA (ANALOGA) IN $\mathbb{R}$

PROP. 3) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PROP 4) $-\vec{v}$ ?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{2,3} \longleftrightarrow \mathbb{R}^{1,6} \longleftrightarrow \mathbb{R}^{6,1}$$

C'È CORRISPONDENZA TRA LE TRE!
È COME SE "SROTOLASSI" LA MATRICE.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,6}$$

---

$\mathbb{R}^n$ SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

$W \subseteq \mathbb{R}^n$

SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$

W SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^n$ SI DICE SOTTOSPAZIO VETTORIALE SE

1) W NON VUOTO

2) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$
"CHIUSO" RISPETTO ALLA SOMMA

3) $\forall \vec{u} \in W, \forall k \in \mathbb{R} \rightarrow k\vec{u} \in W$
"CHIUSO" RISPETTO AL PRODOTTO

"CHIUSO", OVVERO RIGUARDANTE LA SOMMA E IL PRODOTTO, QUALCOSA CHE ACCADE DIRETTAMENTE DENTRO IL SOTTOINSIEME E NON AL SUO DI FUORI

→ TUTTE LE RETTE PER O SONO SOTTOSPAZI.

2) SE $\vec{v} = 0$

$$W = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} = k \cdot \vec{0}, \forall k \in \mathbb{R} \} = \{ \vec{0} \}$$

VALGONO LE PROPRIETÀ 1,2,3 DEGLI SPAZI VETTORIALI

$\Rightarrow \{\vec{0}\}$ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE → <u>SOTTOSPAZIO IMPROPRIO</u>

3) $W = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3$ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI SE STESSO!

<u>SOTTOSPAZIO IMPROPRIO</u>

$\boxed{\text{NOMENCLATURA}}$ → $\{\vec{0}\}$ e $\mathbb{R}^3$ SI DICONO <u>SOTTOSPAZI IMPROPRI</u>

TUTTI GLI ALTRI, <u>SOTTOSPAZI PROPRI</u>

4) FISSO $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$W = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{u}, \forall a,b \in \mathbb{R} \}$$

VERIFICO PROPRIETÀ 1,2,3 SPAZI VETTORIALI

1) ALMENO $\vec{u}$ e $\vec{v} \in W$ → OK

2) $\vec{w_1} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$\vec{w_2} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v}$

DEVO VERIFICARE SEMPRE <u>ALMENO</u> PER UNA COPPIA! NON BASTA UN SOLO $\vec{w}$ PER VERIFICARE PROPRIETÀ.

$$\vec{w_1} + \vec{w_2} = (a\vec{u} + b\vec{v}) + (a_1\vec{u} + b_1\vec{v}) = \underbrace{(a+a_1)\vec{u} + (b+b_1)\vec{v}}$$

PER DEFINIZIONE $\in W$

QUINDI, VALE W "CHIUSO" ALLA SOMMA.

3) $\forall m \in \mathbb{R}$, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$$m\vec{w} = (ma)\vec{u} + (mb)\vec{v} \Longrightarrow \in W$$

W "CHIUSO" AL PRODOTTO

IN CONCLUSIONE, I PIANI PASSANTI PER O SONO SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$

⟹ ALLORA, <u>CONCLUSIONE ESERCIZIO</u>: SONO SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$ TUTTE LE RETTE PASSANTI PER O, I PIANI PASSANTI PER O, $\mathbb{R}^3$ e $\{\vec{0}\}$

# GEOMETRIA - 31/03/2014

→ COME SI PUÒ ASSEGNARE UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE $W \subseteq \mathbb{R}^n$?

## 1) ASSEGNANDO I GENERATORI

DATI $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r$ VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

CONSIDERO $W = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r) \underset{def}{=} \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{w} = \underbrace{a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots a_r\vec{v}_r}_{\text{GENERATORI}}, \forall a_i \in \mathbb{R}\}$

W È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI DI $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r$

**TEOREMA**

$W = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_r)$ è SPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^n$

**DIMOSTRAZIONE**

W è NON VUOTO, PERCHÉ ALMENO $\vec{v}_1 \in W$. → (NON È VUOTO)

$\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$

$\downarrow$

$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

$\vec{w}_1 = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \dots + a_r\vec{v}_r$

$\vec{w}_2 = a_1'\vec{v}_1 + a_2'\vec{v}_2 \dots + a_r'\vec{v}_r$

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (a_1\vec{v}_1 \dots + a_r\vec{v}_r) + (a_1'\vec{v}_1 + \dots + a_r'\vec{v}_r)$$

$$= (a_1 + a_1')\vec{v}_1 + (a_2' + a_2)\vec{v}_2 + \dots + (a_r + a_r')\vec{v}_r \in W$$

PER DEFINIZIONE

CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA

$\forall k \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{w}_1 = a_1\vec{v}_1 + \dots a_r\vec{v}_r$

$$k\vec{w}_1 = ka_1\vec{v}_1 + \dots ka_r\vec{v}_r =$$

$$= (ka_1)\vec{v}_1 + \dots (ka_r)\vec{v}_r$$

è COMBINAZIONE LINEARE DEI GENERATORI → $k\vec{w}_1 \in W$

CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO CON K

→ **ESEMPIO**

$\vec{v}_1 (1,2,3)$

$\vec{v}_2 (2,4,6)$

→ ALTERNATIVA

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = -2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

SO CHE $S = \{\text{SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ SONO SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$W = S$ = RETTA PASSANTE PER ORIGINE PARALLELA A $(1, -2, 1)$

$$= \{\vec{w} \in \mathbb{R} \mid \vec{w} = a\underbrace{(1,-2,1)}_{\text{UN GENERATORE}}, \forall a \in \mathbb{R}\}$$

È COME SE PENSASSIMO CHE TUTTI I VETTORI DEL SOTTOSPAZIO SONO MULTIPLI DEL GENERATORE

---

PROVO A TOGLIERE IL SECONDO GENERATORE:

$$\mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_3})$$

IL SOTTOSPAZIO RIMANE LO STESSO

$\boxed{\text{VERIFICA}}$

$$\left\{ \mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) \subseteq \mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_3}) \right\} \text{ ok}$$

$$a_1\vec{v_1} + a_3\vec{v_3} = a_1\vec{v_1} + \quad + a_3\vec{v_3} \in \mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$$

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} =?\ b_1\vec{v_1} + b_3\vec{v_3}$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = a_1 v_1 + a_2(2v_1) + a_3 v_3$$

$$\underbrace{(a_1 + 2a_2)}_{b_1}\vec{v_1} + \underbrace{a_3}_{b_2}\vec{v_3} = b_1\vec{v_1} + b_3\vec{v_3}$$

QUINDI POSSO BUTTARE VIA $\vec{v_2}$ CHE È "RIDONDANTE".

→ IN GENERALE, SE AGGIUNGO AI GENERATORI DI UN SOTTOSPAZIO W DEI VETTORI COMBINAZIONE LINEARE DEI GENERATORI, OTTENGO SEMPRE W.

QUINDI ESISTONO VETTORI ESSENZIALI AL SOTTOSPAZIO; ALTRI, RIDONDANTI.

TEOREMA

DATA UNA BASE $B_W$ DI $W \in \mathbb{R}^n$, LE COMPONENTI DI $\forall \vec{w} \in W$ RISPETTO A $B_W$ SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE.

DIMOSTRAZIONE

PER ASSURDO

$$\vec{w} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots a_n\vec{u}_n = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \dots b_n\vec{u}_n$$

$$\vec{w} - \vec{w} = 0$$

$$= (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots a_n\vec{u}_n) - (b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \dots b_n\vec{u}_n) =$$

$$= \boxed{(a_1 - b_1)\vec{u}_1 + (a_2 - b_2)\vec{u}_2 + \dots (a_n - b_n)\vec{u}_n} = 0$$

SE E SOLO SE
$a_1 - b_1 = 0$
$a_2 - b_2 = 0$
$\vdots$
$a_n - b_n = 0$
$\longrightarrow$
$a_1 = b_1$
$a_2 = b_2$
$\vdots$
$a_n = b_n$

NON È POSSIBILE AVERE DUE POSSIBILITÀ DI SCELTA QUANDO LAVORO CON LE COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO UNA BASE.

ESEMPIO

$\vec{v}_1(1,2,3)$, $\vec{v}_2(2,4,6)$, $\vec{v}_3(1,0,1) \in \mathbb{R}^3$

$$B_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_3)$$
$$B'_W = (\vec{v}_3, \vec{v}_1)$$
$$B''_W = (\vec{v}_2, \vec{v}_3), \dots$$

DEFINIZIONE — SI DICE <u>DIMENSIONE</u> DEL SOTTOSPAZIO $W \subseteq \mathbb{R}^3$ IL NUMERO DI VETTORI DI UNA SUA QUALUNQUE BASE

PER ESEMPIO, <u>$\dim W = 2$</u>

MA DEVO ESSERE SICURO NEL DEFINIRE IL NUMERO DI VETTORI DA CUI È DEFINITA UNA BASE.

TEOREMA

OGNI BASE DI $W$ HA LO STESSO NUMERO DI VETTORI.

BASTA PRENDERE DUE BASI QUALSIASI E DIMOSTRARE CHE QUESTE HANNO LO STESSO NUMERO DI VETTORI

TEOREMA

OGNI BASE DI W SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^m$ HA AL PIÙ $m$ ELEMENTI $\Longleftrightarrow$ DIM $W \leq m$

→ ESEMPIO

$W = (\vec{0}) \rightarrow$ DIM $W = 0$

$W = \mathcal{L}(1,2,3) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow$ DIM $W = 1$

$W = \mathcal{L}((1,2,3),(1,0,1)) \rightarrow$ DIM $W = 2$

DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^3$? → 3! PERCHÉ?

PER ESEMPIO LA BASE CANONICA

$$I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$\forall (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

SI CHIAMA BASE CANONICA PERCHÉ LE COMPONENTI DEL VETTORE $x,y,z$, CORRISPONDONO ALLE COORDINATE DEL PIANO $x,y,z$.

→ DALLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$, SI HA DIM $\mathbb{R}^3 = 3$

ANALOGAMENTE, DIM $\mathbb{R}^m = m$

DIMOSTRAZIONE

$W \subseteq \mathbb{R}^m$

DATO $\vec{u}_1 \in W$

$W = \mathcal{L}(\vec{u}_1) \longrightarrow$ DIM $W = 1$ SE $\vec{u}_1 \neq 0$, DIM $W = 0$ SE $\vec{u}_1 = 0$

SE NO $W \subset \mathcal{L}(\vec{u}_1) \Rightarrow \exists \vec{u}_2 \in W, \vec{u}_2 \notin \mathcal{L}(\vec{u}_1)$

ALLORA $W = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\vec{u}_2$ LINEARMENTE INDIPENDENTE DA $\vec{u}_1 \rightarrow$ DIM $W = 2$

OPPURE $W \subset \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \Longrightarrow \exists \vec{u}_3 \in \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ALLORA $W = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ OPPURE NO

→ TUTT'AL PIÙ ARRIVO A $W = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_m) = \mathbb{R}^m$

PER DEFINIZIONE DI DIMENSIONE $m$ È IL MAX NUMERO DI VETTORI DI $\mathbb{R}^m$ LINEARMENTE INDIPENDENTI.

$B_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_s)$

VETTORI CHE HO TENUTO (CHE NON HO SCARTATO)

## (2°) METODO (RIDUZIONE)

$$W = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\vec{v}_1, \dots \vec{v}_r$ GENERATORI

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \\ \vec{v}_r \end{matrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{r,n}$$

SE RIDUCO M A SCALA, FACCIO:

SCAMBIO DI RIGHE

$R_i \longmapsto KR_i,\ K \neq 0$

$R_i \longmapsto R_i + KR_j$

IL SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE RIGHE DI M È SEMPRE W

W È GENERATO ANCHE DALLE RIGHE DELLA MATRICE RIDOTTA A SCALA.
IN PARTICOLARE LE RIGHE NON NULLE DELLA MATRICE A SCALA SONO UNA BASE DI W

$$\dim W = rg(M)$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$\vec{v}_1 = (1,2,3)$
$\vec{v}_2 = (2,4,6)$
$\vec{v}_3 = (1,0,1)$

TROVARE BASE DI $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{RIDUCO A SCALA } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

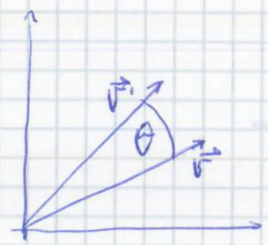
$$\Longrightarrow B_W \big((1,2,3), (0,-2,-2)\big)$$

È EVIDENTE CHE PER PER SCARTI AVREI OTTENUTO IL MEDESIMO RISULTATO

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ È LA TRASFORMAZIONE DI $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ A SEGUITO DELLA ROTAZIONE DI ANGOLO $\theta$.

IN REALTÀ È UNA FUNZIONE CHE : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

$\vec{v} \longmapsto \vec{v}'$ (RUOTATO DI $\theta$)




$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

DATA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

VOGLIO ASSOCIARE AD A UNA FUNZIONE

$$\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$$

È IMPORTANTE CHE SIA SCRITTO IN COLONNA

$$A\vec{v} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 + 2x_3 + 0 \\ 2x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

È UN VETTORE COLONNA AVENTE COMPONENTI IN $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$

È UNA FUNZIONE $f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

DEFINITA $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^4$

$$\boxed{f_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}} \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{dom}(f_A) = \mathbb{R}^4$$

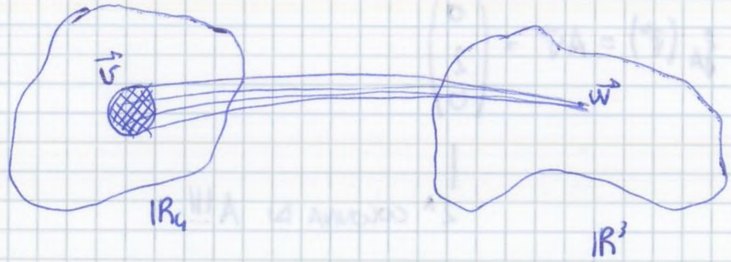
<u>DEFINIZIONE</u> $\rightarrow$ $f_A$ SI DICE <u>APPLICAZIONE LINEARE</u>

LINEARE POICHÉ PER ESEMPIO $x_1 + 2x_3$ È APPLICAZIONE LINEARE DI $x_1, x_2, x_3, x_4$

→ CONTROIMMAGINE

FISSO $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$

→ MI CHIEDO: ESISTE QUALCHE VETTORE $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ TALE CHE $f_A(\vec{v}) = \vec{w}$ ?




$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

SISTEMA LINEARE IN $x_1, x_2, x_3, x_4$

CERCARE $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ TALE CHE $f_A(\vec{v}) = \vec{w}$ NON È ALTRO CHE VEDERE SE IL SISTEMA È COMPATIBILE

CERCO (SE ESISTONO) SOLUZIONI.

USO MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 3$

$rg(A|B) = 3$

SOLUZIONI → $\infty^{4-3} = \boxed{\infty^1 \text{ SOLUZIONI}}$

PERCIÒ VUOL DIRE CHE CI SONO $\infty^1$ VETTORI TALI PER CUI $f_A(\vec{v}) = \vec{w}$

$\vec{v}$

→ DEFINIZIONE: $f_A^{-1}(\vec{w})$ = INSIEME DELLE CONTROIMMAGINI DI $\vec{w} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 \mid f_A(\vec{v}) = \vec{w}\}$

SOLUZIONE GENERICA $\left(-\frac{2x_4}{5}, -\frac{x_4}{10}, \frac{x_4}{5}, x_4\right) \forall x_4 \in \mathbb{R}$

$x_4\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 1\right)$

UNA BASE DI KER È $B_{KER} = \left(\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 1\right)\right)$

$\Rightarrow$ DIM $KER_{f_A} = 1$

DIMENSIONE = 1 PERCHÉ LA BASE È COSTITUITA DA 1 SOLO VETTORE.

$\rightarrow$ IN GENERALE, LA DIMENSIONE DEL NUCLEO ($\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$)

DIM $KER_{f_A}$ = NUMERO DELLE INCOGNITE LIBERE!

$= n - rg(A) = p$

NUMERO TOTALE INCOGNITE

$\Downarrow$

UNA BASE DEL $KER f_A$ SI OTTIENE DANDO IL VALORE $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \dots x_p = 0 \rightarrow \vec{v_1}$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dots x_p = 0 \rightarrow \vec{v_2}$

$x_1 = x_2 = \dots x_{p-1} = 0$, $x_p = 1 \rightarrow \vec{v_p}$

$B_{KER f_A} = (\vec{v_1}, \vec{v_2} \dots \vec{v_p})$

---

CERCO BASE E DIMENSIONE DI $Im f_A$

$Im f_A$ = SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE

DIM $Im f_A = rg(A)$

BASE $Im f_A$ DEVO RIDURRE PER COLONNA $\rightarrow$ PERCHÉ PER RIGHE FACCIO DEI CASINI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_3 \rightarrow 3C_3 - C_1 \\ C_4 \rightarrow 3C_4 - C_1 \end{matrix}$$

# GEOMETRIA – 07/04/2014

→ RICORDO

$M \in \mathbb{R}^{m,n}$ APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA

$f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DEFINITA

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \to f_M(\vec{v}) = M\vec{v}$

$$= M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^m \to f^{-1}_M(\vec{w}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_M(\vec{v}) = \vec{w}\}$

INSIEME DELLE CONTROIMMAGINI DI $\vec{w}$

$\ker f_M = f_M^{-1}(\vec{0}_{\mathbb{R}^m})$

SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$

$\dim \ker f_M = n - rg(M)$

$\mathrm{Im}\, f_M =$ IMMAGINE DI $f_M = \mathcal{L}$(COLONNE DI M) $\subset \mathbb{R}^m$

↓

$\dim f_M = rg(M)$

---

DEFINIZIONE: $f_M$ è INIETTIVA QUANDO $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n, \vec{v_1} \neq \vec{v_2} \Rightarrow f_M(\vec{v_1}) \neq f_M(\vec{v_2})$

$f_M$ SI DICE SURIETTIVA QUANDO L'IMMAGINE DI $f_M$ RIEMPIE TUTTO $\mathbb{R}^m$

↓

SURIETTIVA QUANDO $\mathrm{Im} f_M = \mathbb{R}^m$

⇕

$\dim \mathrm{Im} f_M = m$

$f_M$ SI DICE BIETTIVA QUANDO È SIA INIETTIVA, SIA SURIETTIVA → SI DICE ISOMORFISMO

→ $\boxed{\text{BIETTIVA} = \text{ISOMORFISMO}}$

---

$f_M : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$

IN QUESTO CASO SI PARLA DI ENDOMORFISMO.

## TEOREMA

DATA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ APPLICAZIONE LINEARE, SE SONO FISSATE UNA BASE $B_{\mathbb{R}^n}$ E UNA BASE $B_{\mathbb{R}^m}$, ALLORA ESISTE UNA MATRICE $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ TALE CHE $f = f_M$

**ESEMPIO**

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DEFINITA

$$f(x_1, x_2) = (x_1, 2x_1 + x_2, 3x_1)$$

SI VERIFICA CHE $f$ SODDISFA 1 + 2

PROPRIETÀ DATE IN DEFINIZIONE

$\Longrightarrow f$ È APPLICAZIONE LINEARE

SE FISSO BASE CANONICA IN $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

$$f = f_M, \text{ DOVE } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

INFATTI $f_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

→ **DIMOSTRAZIONE**

SUPPONGO FISSATE

$$B_{\mathbb{R}^n} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n)$$

$$B_{\mathbb{R}^m} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots \vec{w}_m)$$

DATA $f$, SO CHI SONO $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots f(\vec{v}_n)$

$$\Longrightarrow f(\vec{v}_1) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \dots a_{m1}\vec{w}_m$$
$$f(\vec{v}_2) = a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + \dots a_{m2}\vec{w}_m$$
$$\dots$$
$$f(\vec{v}_n) = a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \dots a_{mn}\vec{w}_m$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$f(\vec{v}_1)$ $\quad$ $f(\vec{v}_n)$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ENDOMORFISMO

DEFINITA DA

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - x_2 + m x_3,\ m x_2 - x_3,\ x_1 + x_2 + (1+m) x_3\right)$$

PER QUALI VALORI DI $m \in \mathbb{R}$ $f$ È SURIETTIVA, INIETTIVA OPPURE ISOMORFISMO

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0,1) \\ f(0,1,0) = (-1,m,1) \\ f(0,0,1) = (m,-1,(1+m)) \end{cases}$$

LA PRENDO COME BASE DI $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & (1+m) \end{pmatrix}$$

$$f \text{ SURIETTIVA} \iff \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \iff rg(M) = 3$$

$rg(M) = m$

ORA POSSO
- RIDURRE A SCALA
- $\det(M) \neq 0 \iff rg(M) = 3$

RIDUCO A SCALA

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_1$$

$R_3 \to m R_3 - 2R_2$

CON $m = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$m = 0 \to rg(M) = 3$

CON $m \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix} R_3 \to m R_3 - 2R_2$$

$\Longrightarrow$ LA MATRICE DI $f_B \circ f_A$ È $BA$

**ESEMPIO**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$BA$ NON SI RIESCE A FARE! $\Longrightarrow$ NON HA SENSO $f_B \circ f_A$

**ESEMPIO**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

CALCOLO $(f_B \circ f_A)(\vec{v})$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$(f_B \circ f_A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B\left[A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_2 + 0 \\ 2x_2 + 12x_1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

---

$\rightarrow$ CASO PARTICOLARE

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f_A"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

IDENTITÀ

$i_{\mathbb{R}^n}$ DEFINITA DA $i(\vec{v}) = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

IDENTITÀ

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$V = \mathbb{R}_2[x]$ = POLINOMI IN $X$ A COEFFICIENTI REALI, GRADO $\leq 2$

$\forall p(x) \in V,\ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ a_j \in \mathbb{R}$

SONO DEFINITE LA SOMMA E IL PRODOTTO PER UN NUMERO REALE E VERIFICANO LE 8 PROPERTIES.

---

▶ DATO $V$ SPAZIO VETTORIALE SU $K$, DEFINISCO COMBINAZIONE LINEARE, DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE, BASE, DIMENSIONE, APPLICAZIONE LINEARE $f: V \to W$

1) TROVARE BASE E DIMENSIONE DI $V = \mathbb{R}^{2,3}$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

SONO GENERATORI DI $V$

$\Downarrow$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI? SÌ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0$$

DIM = 6 $\rightarrow$ DIMENSIONE È UGUALE AGLI ELEMENTI DI UNA QUALSIASI BASE $\rightarrow$ 6

2) TROVARE BASE E DIMENSIONE

$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2$ = COMBINAZIONE LINEARE DI $1, X, X_2$

$\Longrightarrow$ $1, X, X_2$ SONO GENERATORI DI $\mathbb{R}_2[X]$

SONO ANCHE LINEARMENTE INDIPENDENTI?

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$$

NON È UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO IN $X$ !!!

È UN EQUAZIONE IN INCOGNITE $a_0, a_1, a_2$

$\downarrow$

X ASSUME SEMPRE TUTTI I VALORI

GEOMETRIA - $\boxed{08/04/2016}$

V NON VUOTO, $\vec{v} = V$ VETTORI

- OPERAZIONE DI SOMMA
- OPERAZIONE DI PRODOTTO PER $k \in K$

SI DICE K = SPAZIO VETTORIALE, QUANDO PER LE DUE OPERAZIONI SONO VERIFICATE LE 8 PROPRIETÀ.

- SI DEFINISCONO COME IN $\mathbb{R}^m$
- COMBINAZIONE LINEARE
- DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE
- BASE E DIMENSIONE
- APPLICAZIONI LINEARI

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$\mathbb{R}_2[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$$

UNA BASE PER ESEMPIO $(1, x, x^2)$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$(a_0, a_1, a_2) \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$(b_0, b_1, b_2) \longleftarrow b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

HO INSTAURATO UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA.
IDENTIFICO POLINOMI DI GRADO $\leq 2$ CON TERNA DI NUMERI.

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$

UNA FUNZIONE $f: V \to W$

($V, W$ SONO K-SPAZI VETTORIALI)

SI DICE APPLICAZIONE LINEARE SE VALGONO LE DUE PROPRIETÀ

① $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \ f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

② $\forall k \in K, \forall \vec{u} \in V, \ f(k\vec{u}) = k f(\vec{u})$

$\to$ C'È ISOMORFISMO TRA $\mathbb{R}^3$ E $\mathbb{R}_2[x]$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ GENERATORI DI $S$

→ SONO ANCHE LINEARMENTE INDIPENDENTI?

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ è LA GENERICA COMBINAZIONE LINEARE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A QUANTO DEVONO ESSERE UGUALI I COEFFICIENTI $a_{12}, a_{22}, a_{11}$ PER SODDISFARE L'UGUAGLIANZA?

↓

$a_{11}, a_{12}, a_{22} = 0$ solo se

$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$

$\Rightarrow$ UNA BASE $B_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I GENERATORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

↓

PERCIÒ COSTITUISCONO UNA BASE.

$\Rightarrow \dim S = 3$

**ESEMPIO**

$V = \mathbb{R}_2[X]$, DEFINISCO UNA FUNZIONE $f: V \longrightarrow V$ DATA DA $\forall p(t) \in V$, $f(p(x)) = \frac{dp(t)}{dt}$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = f(a_0) + f(a_1 x) + f(a_2 x^2) =$$

$$= 0 + a_1 f(x) + a_2 f(x^2) = 0 + a_1 + 2a_2 x$$

$f$ è UN'APPLICAZIONE LINEARE PERCHÉ SODDISFA LE PROPRIETÀ (SOMMA + PRODOTTO)

▶ CERCO UNA MATRICE ASSOCIATA A $f$:

ASSEGNO UNA BASE IN PARTENZA E UNA IN ARRIVO: PER ESEMPIO FISSO $B = (1, x, x^2)$

$$M_f^{B,B} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

↑ $f(1)$ ↑ $f(x)$ ↑ $f(x^2)$

IN COMPONENTI RISPETTO A $B$

$$U \cap W : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ x = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \to \text{ASSE } z$$

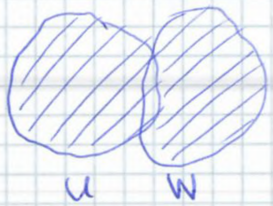
$$B_{U \cap W} = ((0,0,1))$$

---

$V$ : K-SPAZIO VETTORIALE

$U, W$ SOTTOSPAZI

$U \cup W = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \in U \text{ OPPURE } \vec{v} \in W\}$



UNIONE INSIEMISTICA → IN GENERALE <u>NON</u> PRODUCE UN SOTTOSPAZIO

NON CHIUSO RISPETTO LA SOMMA!

**SOMMA DI SOTTOSPAZI**

→ DEFINIZIONE

$U + W = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \text{ DOVE } \vec{u} \in U, \vec{w} \in W\}$

È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $V$

IN QUESTO CASO $U + W = \mathbb{R}^3$