NUMERO: 1237

DATA: 27/10/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Lamberti D.

MATERIA: Geometria Eserc.

Prof. Cumino_Quelali

LAB_GEOMETRIA - $\boxed{11/03/2014}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 5

$\vec{u} = (1, 2, -2)$

$\vec{v} = (-2, 0, 1)$

$\vec{u}\,\vec{v} = -2 + 0 - 2 = -4$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 2 - \vec{j}\cdot(1-4) + \vec{k}(0+4) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$\vec{w} = (2, 3, 4)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{w}\,\vec{u} = 2+6-8=0 \\ \vec{w}\,\vec{v} = -4+0+4=0 \end{array}\right]$ $\vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{u}, \vec{w}$ SONO ORTOGONALI (PRODOTTO SCALARE $= 0$)

$$\begin{cases} |\vec{w}'| = 2 \\ \vec{w}' \perp \vec{u} \\ \vec{w}' \perp \vec{v} \end{cases}$$

$\vec{w}' = a(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 2a\vec{i} + 3a\vec{j} + 4a\vec{k}$

$|\vec{w}'| = \sqrt{4a^2 + 9a^2 + 16a^2} = \sqrt{29a^2}$

$$\sqrt{29a^2} = 2$$

$$29a^2 = 4$$

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{w}' = \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{29}}\vec{j} + \frac{8}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{i} - \frac{6}{\sqrt{29}}\vec{j} - \frac{8}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 8

$\widehat{\vec{u}\vec{v}} = ?$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}$ SONO VERSORI

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{v}+\vec{v}) = \vec{u}\vec{u} + \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}\vec{v}$

QUINDI $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}\vec{v} \longrightarrow 1 = 1 + 2\vec{u}\vec{v} + 1$

COL METODO DEL DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) 0 + 0 = 1 \neq 0$$ QUINDI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 13

$\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

$\longrightarrow \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$

$\vec{u}' \perp \vec{v}$

$\vec{u}'' \parallel \vec{v}$

$\vec{u}' (x, y, z) = (x, x, z)$

PERCHÉ PERPENDICOLARE A $\vec{v}$

$\vec{u}' \vec{v} = x - y = 0 \longrightarrow y = x$

$\vec{u}'' \cdot \vec{v} = a\vec{i} - a\vec{j}$

$\longrightarrow \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k} + a\vec{i} - a\vec{j}$

//, QUINDI DEVE ESSERE UN NUMERO

$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$

$$\begin{cases} 1 = x + a \\ 3 = x - a \\ -1 = z \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ x = 2 \\ z = -1 \end{cases} \longrightarrow \vec{u}' (2, 2, -1) \quad \vec{u}'' (-1, 1, 0)$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 14

$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$

$\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

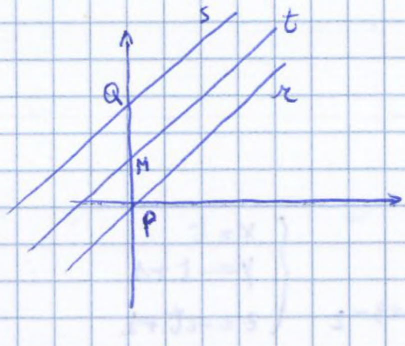
PROIEZIONE ORTOGONALE DI $\vec{v}$ SU $\vec{u}$

$$\vec{v}' = 1 \cdot \frac{(1, -1, 0)}{(\sqrt{2})^2} = \frac{(-1, 1, 0)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

SAPENDO CHE $|\vec{u}| = 2$, TROVARE $|\vec{u}'| \perp \vec{u}$ $\quad |\vec{u}'| \perp |\vec{v}|$

LAB. GEOMETRIA - $\boxed{18|03|2014}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 3




$t = ?$

$r : x - y = 0$

$s : x - y + 4 = 0$

$P(0,0)$

$Q(0,4)$

$\rightarrow M(0,2)$

$t : x - y + 2 = 0$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 4

$P(x_0, y_0, z_0)$

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$

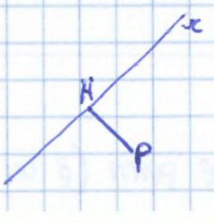
$$d(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$P(1, -3, \sqrt{2})$

$\alpha : x - 2y + \sqrt{2}z - 2 = 0$

$$d(P, \alpha) = \frac{|1 + 6 + \cancel{2} - \cancel{2}|}{\sqrt{1 + 4 + 2}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$



$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

DISTANZA TRA DUE RETTE SGHEMBE → PRENDO LA DISTANZA SULLA RETTA ORTOGONALE A ENTRAMBE

$r: P_1 + t\vec{v}$

$s: P_2 + t\vec{u}$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u})|}{|\vec{v} \wedge \vec{u}|}$$

NOI NON SEGUIAMO LA FORMULA, MA IL PROCEDIMENTO: DISTANZA TRA IL PIANO CHE CONTIENE LA SECONDA RETTA, PARALLELO ALLA PRIMA.

$$r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+3z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$$

$d(r,s) = ?$

→ DETERMINIAMO SE LE DUE RETTE SONO SGHEMBE

FORMA PARAMETRICA

$$r: \begin{cases} x = y - z \\ y = -3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \quad r \parallel \vec{u}\ (-4,-3,1)$$

$$s: \begin{cases} x = -y+1 \\ z = -y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -t+1 \\ z = -t+3 \\ y = t \end{cases} \quad s \parallel \vec{v}\ (-1,1,-1)$$

SE VOLESSIMO FARE LA FORMULA, AVREMMO $P_1(0,0,0)$; $P_2(1,0,3)$

PRENDIAMO r IN FORMA CARTESIANA E s IN FORMA PARAMETRICA.

$$\begin{cases} x = y - z \\ y = -3z \\ x = 1-t \\ y = t \\ z = 3-t \end{cases} \quad \begin{cases} t = 4/3 \\ t = 9/2 \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

→ FASCIO DI PIANI (PIANI CHE CONTENGONO LA RETTA s)

$\lambda(x+y-1) + \mu(y+z-3) = 0$

$\lambda x + \lambda y - \lambda + \mu y + \mu z - 3\mu = 0$

$\lambda x + (\lambda+\mu)y + \mu z - \lambda - 3\mu = 0$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ - QUIZ 9

$$r \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

F a) $r \cap s = P$ (INCIDENTI) → DA UNA PARTE HO $x=1$, DALL'ALTRA $x=0$ IL SISTEMA NON FUNZIONA (IMPOSSIBILE)

F b) $r // s$ → LINEARMENTE INDIPENDENTI

V c) $r // \pi : x=2$

F d) $r, s \in \alpha : x+y=0$

(b) $r // \vec{u}\ (0,1,2)$

$s // \vec{v}\ (0,2,1)$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{v}\ \vec{w} = 0$

$\pi \perp \vec{w}\ (1,0,0)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ - QUIZ 10

$P(1,1,1) \in \pi$

$\pi \perp \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)$

V a) $r(x,y,z) = (t,0,-t) // \pi$ → PRODOTTO SCALARE $\vec{v}\ \vec{u} = 0$

F b) $r(x,y,z) = (t,0,-t)$ INTERSECA $\pi$

F c) $r(x,y,z) = (t,t,t) // \pi$ → STESSO PROCEDIMENTO DI (a)

F d) $(1,0,-1) \in \pi$ → BASTA SOSTITUIRE PUNTO NEL PIANO

$x+y+k+z=0$

$1+1+1+k=0$

$k=-3$

$\pi : x+y+z-3=0$

(a) $r // \vec{v}\ (1,0,-1)$ → $\vec{v} \cdot \vec{u} = 1+0-1=0$

# GEOMETRIA - $\boxed{07/03/2014}$

SIA $A$ UNA MATRICE QUADRATA $(n \times n)$

SIA $B$ UNA MATRICE QUADRATA $(n \times n)$

DICIAMO CHE $A$ È INVERTIBILE SE $A \cdot B = B \cdot A = I$

MATRICE IDENTITÀ

QUESTO, SE $\exists B$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A^{-1} = \frac{1}{A}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

MATRICE INVERSA

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$|A|$ = DETERMINANTE DI $A$ = $ad - cb$

→ POSSO FARE PRODOTTO SOLO QUANDO N COLONNE 1ª MATRICE = N RIGHE 2ª MATRICE

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} ad - bc & \cancel{-ab + ab} \\ \cancel{cd - dc} & -bc + ad \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0!$ → SE $|A|$ FOSSE UGUALE A ZERO NON POSSO CALCOLARE LA MATRICE INVERSA

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = 2 - 2 = 0$ NON INVERTIBILE!

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} \to (-1)^{i+j}$$

POSSO CALCOLARE DETERMINANTE SOLO QUANDO LA MATRICE È QUADRATA

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|T| = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = 3+12-9 = 0$$

$\rightarrow$ ORA ANZICHÈ FARLO SULLA RIGA UNO, LO FACCIAMO SULLA COLONNA 3

$$|T| = 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

---

$\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{w}$

$\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$

$\vec{u} = (4, -10, 8) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = (1, -2, 3)$

$\vec{w} = (0, -1, -2)$

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \cdot \vec{w}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\vec{u} = 4(1, -2, 3) + 2(0, -1, -2)$$

$$= (4, -8, 12) + (0, -2, -4) = (4, -10, 8)$$

$= |\lambda| \sqrt{6} = 3 \longrightarrow |\lambda| = \frac{3}{\sqrt{6}}$ MODULO DEL VETTORE DI PARTENZA

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ PARALLELI DELLO STESSO VERSO

$|\lambda| = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ PARALLELI CON VERSO OPPOSTO

$$|\vec{v}| = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6}\right)$$

→ TROVARE VERSORE $\parallel \vec{u}$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

NORMALIZZAZIONE VETTORE (FAR DIVENTARE UN VETTORE VERSORE)

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

"NORMA"

ESERCIZIO

$\vec{u} = h\vec{i} + 2h\vec{j}$

$\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$

$h \in \mathbb{R}$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{6}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (h, 2h+1, 2)$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{h^2 + (2h+1)^2 + 4} = \sqrt{6}$$

$$h^2 + 4h^2 + 4h + 1 + 4 = 6 \rightarrow 5h^2 + 4h - 1 = 0$$

$$(h+1)(5h-1) = 0$$

$h = -1$

$h = \frac{1}{5}$

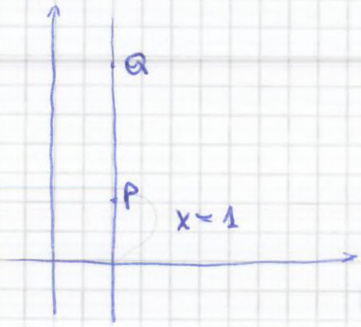
$w = (a3 + 2b)\vec{i} + (6a + 4b)\vec{j}$

$$\begin{cases} 3a + 2b = 3 \\ 6a + 4b = 5 \end{cases}$$ CONFRONTANDO CON $\vec{w}$ DATO INIZIALMENTE

$3a + 2b = \frac{5}{2}$ . NON ESISTONO a e b PERCHÈ SONO DUE RETTE PARALLELE

ESERCIZIO 2.1

EQUAZIONE CARTESIANA $r$ PASSANTE PER $P=(1,2)$ e $Q(1,5)$




$r: x-1=0$

PARAMETRICA:

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=t, \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.2

$$r: \begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+5 \end{cases}$$ FACCIO $x-2y$

TROVARE EQUAZIONE CARTESIANA

$$\begin{cases} x=2t-1 \\ 2y=2t+10 \end{cases}$$

$x-2y=-1-10$

$\boxed{x-2y+11=0}$

---

$s: 2x-y+3=0$

DARE EQUAZIONE PARAMETRICA

$y=2x+3$

$$s: \begin{cases} x=t, \quad t\in\mathbb{R} \\ y=2t+3 \end{cases}$$ OPPURE $$s: \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+5 \end{cases}$$

LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA NON È UNICA!

$\pi = ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n} = (a, b, c)$

QUINDI, $\vec{n_1}$ CHE DERIVA DA $\alpha$ :

$\vec{n_1} = (1, -2, 1)$

PER COMODITÀ PRENDO DIRETTAMENTE $\vec{n} = (1, -2, 1)$

$\downarrow$

$\pi = x - 2y + z + d = 0$

$d?$

$P \in \pi$

SOSTITUISCO P NEL PIANO

$2 - 2(-1) + 3 + d = 0 \longrightarrow d = -7$

$\pi : x - 2y + z - 7 = 0$

SE VOLESSI SAPERE SE UNA CERTA RETTA STA SUL PIANO:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

SOSTITUISCO NEL PIANO

$(1 + t) - 2(1 - t) + 1 - 7 = 0$

$t = \frac{7}{3}$

PUNTO DI INTERSEZIONE DELLA RETTA CON IL PIANO!

SE AVESSI OTTENUTO $0 = 0$ LA RETTA APPARTIENE AL PIANO

$r \cap \pi$

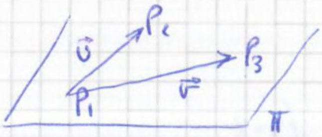
$\left(1 + \frac{7}{3}, 1 - \frac{7}{3}, 1\right)$

1^ METODO:

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

SOSTITUISCO I 4 PUNTI E RISOLVO IL SISTEMA A 4 EQUAZIONI CHE OTTENGO

2^ METODO



$\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \pi \perp \vec{m}$

VETTORE NORMALE

$\vec{u} \wedge \vec{v} \parallel \vec{m}$

$P_4 \in \pi$?

$\vec{u} = \overline{P_2 P_1} = (1,1,0) - (0,1,1) = (1,0,-1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{P_3 P_1} = (2,0,1) - (0,1,1) = (2,-1,0)$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - k = (-1,-2,-1)$

$\vec{m} = (1,2,1)$

$\pi = x + 2y + z + d = 0$

SOSTITUISCO $P_1$ PER TROVARE $d$

$0 + 2 + 1 + d = 0$

$d = -3$

$\pi = x + 2y + z - 3 = 0$

$P_4 \in \pi = ?$

$1 + 4 + 0 - 3 \neq 0$ QUINDI $P_4 \notin \pi$

CONSIDERO $t=0$ PER FACILITARMI

$$r: \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow P(-6,3,0) \in r$$

$$s: \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \longrightarrow Q(3,0,1) \in s$$

$$\vec{u} = \overline{QP} = (-6,3,0)-(3,0,1) = (-9,\ 3,-1)$$

$$\vec{v}_r \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i(-1-3) - j(9+1) + k(-3+9)$$

$$= -4i - 10j + 6k$$

$$\pi: -4x - 10y + 6z + d$$

SOSTITUIAMO Q PER TROVARE d

$$6 - 3 + d = 0$$

$$d = -3$$

$$\pi = 2x + 5y - 3z - 3 = 0$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 2.12

$$r: (x,y,z) = (1+t,\ 2+3t,\ 4t)$$

$$s: (x,y,z) = (2u,\ 2-u,\ -3u)$$

HANNO PUNTI IN COMUNE?

$$V_r = (1,3,4)$$

$$V_s = (2,-1,-3)$$

NON SONO PARALLELE POICHÉ VETTORI <u>NON</u> UNO MULTIPLO DELL'ALTRO

PER INCONTRARSI

$$\begin{cases} 1+t = 2u \\ 2+3t = 2-u \\ 4t = -3u \end{cases}$$

SE TROVO SOLUZIONI TROVO INTERSEZIONI

$$\begin{cases} 3x_1 = 4x_2 - x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 = 3x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 + \frac{1}{3} \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$x_3$ INCOGNITA LIBERA

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$2x + 3z = 1$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \\ y = -2z \end{cases}$

y ELIMINATA!

---

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -2z \end{cases}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

RIDURRE A SCALA LA SEGUENTE MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & +5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

---

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$\downarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + R_2$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) R_3 \to -\frac{5}{3} R_3 \longrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) R_2 \to R_2 + 3R_3$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) R_2 \to \frac{R_2}{(-2)}$$

FORMA FINALE:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) R_1 \to R_1 - 2R_2 - 2R_3$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$ SONO LA STESSA RETTA → INFINITE SOLUZIONI

---

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$ → RETTE PARALLELE - NESSUNA SOLUZIONE

$|A| = 0$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1$$

ABBIAMO 2 RIGHE NON NULLE $\to$ RANGO = 2 $\to$ DUE VETTORI LINEARMENTE INDIP.

$\to$ CERCO SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$ GENERATO DA $\vec{u}$ E $\vec{v}$ (È FORMATO DA TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DI $\vec{u}$ E $\vec{v}$):

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a(1,0,-1) + b(1,1,0)$$

$$= (\underset{x}{a+b}, \underset{y}{b}, \underset{z}{-a})$$

$$\downarrow$$

$$(y-z, y, z)$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y-z\}$$

$$\vec{w} = (y-z, y, z) \in S$$

$\to (0,0,0) \in S$? SÌ, BASTA SOSTITUIRE IN $y$ E $z$

$\to \vec{w_1} + \vec{w_2} \in S$?

$$\vec{w}_1 = (y_1 - z_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{w}_2 = (y_2 - z_2, y_2, z_2)$$
$$\to \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (y_1 + y_2 - (z_1 + z_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

QUESTO SOTTOSPAZIO È CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA.

$\to \lambda\vec{w} \in S$?

$$\lambda(y-z, y, z) = (\lambda y - \lambda z, \lambda y, \lambda z)$$

QUESTO SOTTOSPAZIO È CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO CON $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4

$\vec{u} = (1,0,0,1)$

$\vec{v} = (2,0,1,1)$

$\vec{w} = (1,0,1,0)$

VERIFICARE CHE IL VETTORE $(3,0,1,2) \in A$ $V = \mathcal{L}((u,v,w))$

COMBINAZIONE LINEARE

DATI I VETTORI

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_k} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}((\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_k}))$ È L'INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI

$\downarrow$

$a_1 \vec{v_1} + \dots a_k \vec{v_k}$,

DOVE $a_1, \dots a_k \in \mathbb{R}$

GIOVANNI $= (3,0,1,2)$

$\vec{g} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$(3,0,1,2) = a(1,0,0,1) + b(2,0,1,1) + c(1,0,1,0)$

$(3,0,1,2) = (a+2b+c, 0, b+c, a+b)$

$$\begin{cases} a+2b+c = 3 \\ 0 = 0 \\ b+c = 1 \\ a+b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2b+c = 3 \\ a+2b+c = 3 \end{cases} \rightarrow a = -2b - c + 3$$

$\exists$ $a, b, c$ TALI DA POTER SCRIVERE $\vec{g}$ COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$. SE NON ESISTONO (ANCHE SOLO UNA DELLE TRE NON ESISTE), NON POSSO SCRIVERE $\vec{g}$ COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI 3.

$(3,1,1,2) = \vec{m}$

$\vec{m} \in \mathcal{L}((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$?

$\vec{m} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \longrightarrow \begin{cases} a+2b+c = 3 \\ 1 = 0 \end{cases}$ QUI GIÀ MI BLOCCO PERCHÉ $1 \neq 0$!

NON BASTA CHE ABBIANO UGUALE DIMENSIONE! DEVONO ANCHE AVERE UGUALE BASE!

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad R_1 = R_1 + R_2$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LE BASI COINCIDONO $\rightarrow$ W e V COINCIDONO

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 8

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0,\ x = 0\}$$

VERIFICARE SE SI TRATTA DI UN SOTTOSPAZIO

1) $(0,0,0) \in V \rightarrow$ SÌ

2) $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in V$?

SICCOME AVEVAMO $x - y + z = 0,\ x = 0$

$\downarrow$

$-y + z = 0 \rightarrow y = z$

$\downarrow$

$\vec{v} = (0, y, y)$

$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (0, y_1, y_1) + (0, y_2, y_2) \in V$?

$(0, y_1 + y_2, y_1 + y_2)$

SÌ!

PERCHÉ HA LA STESSA FORMA DI $\underbrace{(0, y, y)}_{\vec{v}}$

3) $\lambda \vec{v} \rightarrow (0, \lambda y, \lambda y) \in V$? SÌ!

$\rightarrow$ QUINDI V È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_2 - R_1 \end{array}$$

NON RIESCO A ANNULLARE NESSUNA DELLE 3 RIGHE

↓

3 VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

↓

FORMANO UNA BASE

→ TROVARE LE COMPONENTI

$\vec{t} = 2j + 3k = (0,2,3)$ RISPETTO ALLA BASE PRECEDENTEMENTE INDIVIDUATA

$\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$t = (a+b+c, b, -a)$

$(0,2,3) = (a+b+c, b, -a)$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b = 2 \\ -a = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array}$$

↓

$t = -3\vec{u} + 2\vec{v} + 1\vec{w}$

QUESTO SIGNIFICA SCRIVERE LA $\vec{t}$ NELLA BASE CONSIDERATA

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 11

$\vec{a} = (3, -1, 2, 0)$

$\vec{b} = (3, 0, 1, -1)$

$\vec{c} = (0, -2, 2, 2)$

VEDO SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3/-2 \end{array}$$

↳ DUE VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI → DIMENSIONE = 2

QUANDO $K = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3 = R_3 + R_2$$

$\downarrow$

PER $K = -2 \longrightarrow rg(A) = 2$

QUINDI $\dim \ker f = 1 \iff K = -2$

$\rightarrow$ TROVARE GLI ELEMENTI DEL NUCLEO

$f(x, y, z) = (0,0,0)$

$x, y, z \in \ker f$

$f(x,y,z) = (x - 3y + 2z, -2x - 2y - 2z, 3x - y + 4z)$

HO SOSTITUITO $K = -2$

$\downarrow$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

CONTINUO A SCOMPORRE MATRICE

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \infty^{3-2} = \infty^1 \text{ SOLUZIONI}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5y \\ z = 4y \end{cases}$$

IL GENERICO ELEMENTO DEL NUCLEO È $(-5y, y, 4y)$

$y(-5, 1, 4)$

$B = (-5, 1, 4)$

BASE DEL NUCLEO

$\rightarrow$ POSTO $K = 1$, DETERMINARE $f^{-1}(0,0,6)$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad A \in A^{m,n}$

$B(Im f) = ((1,1,3), (-3,-2,-1), (2,1,4))$

$\to f^{-1}(0,0,6)$

$$f(x,y,z) = (0,0,6) \to \begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 3x-y+4z=6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - 8R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_3 \to R_3/6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 + R_3$$

$\downarrow$

$x=1, y=1, z=1$

$\to$ POSSO DIRE CHE $f^{-1}(\underbrace{0,0,6}_{\in Im(f)}) = (\underbrace{1,1,1}_{\in \mathbb{R}^3})$

$\in \mathbb{R}^3$ — INSIEME DI PARTENZA

USO $(e_1, e_2, e_3)$

---

TROVARE $(a,b,c)$ PER CUI

$$(0,0,6) = a(1,1,3) + b(-3,-2,-1) + c(2,1,4)$$

$y = x + t$
$3z = -3x - 2t$ $\longrightarrow \begin{cases} y = x + t \\ z = -x - \frac{2}{3}t \end{cases}$

IL GENERICO ELEMENTO DEL NUCLEO:

$(x, x+t, -x - \frac{2}{3}t, t) =$

$= (x, x, -x, 0) + (0, t, -\frac{2}{3}t, t)$

$x(1, 1, -1, 0) + t(0, 1, -\frac{2}{3}, 1)$

$(1, 1, -1, 0)$ e $(0, 1, -\frac{2}{3}, 1)$
SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI
$\downarrow$
FORMANO UNA BASE PER IL NUCLEO

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 3

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\vec{v} = (1, h+2, h) \in \ker f$
$\in \operatorname{Im} f$

$\vec{v} \in \ker f$ QUANDO $f(v) = 0$

$f(x, y, z) = (y + z, x + z, -x - y - 2z)$

$f(1, h+2, h) = (h + 2 + h, 1 + h, -1 - h - 2 - 2h)$

$= (2h + 2, 1 + h, -3 - 3h) = \vec{0}$
IN MODO CHE SIA KER f

$\begin{cases} 2(h+1) = 0 \\ h+1 = 0 \\ -3(h+1) = 0 \end{cases}$ se e solo se $\boxed{h = -1}$

$\vec{v} \in \operatorname{Im}(f)$ QUANDO $\vec{v}$ è COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ELEMENTI DELLA BASE
VETTORI

# LAB. GEOMETRIA - $\boxed{11/04/2014}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

SIA $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (È UN ENDOMORFISMO POICHÉ VA DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}^n$).

ENDOMORFISMO DEFINITO COME

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t,\ x+y-z-t,\ x+y+z+t,\ x+y-z-t)$$

1) DETERMINARE BASE E DIM DI NUCLEO E $\mathrm{Im} f$.

$\mathrm{Ker} f = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \}$

$f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{DIM}(\mathrm{Ker} f) = \underbrace{4}_{\text{INCOGNITE}} - \underbrace{2}_{Rg(A)} = 2$$

$\infty^{4-2} = \infty^2$ SOLUZIONI

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-x \\ t=-z \end{cases}$$

$\mathrm{Ker} f = \{ (x,-x,z,-z) \mid x,z \in \mathbb{R} \}$

$$(x,-x,z,-z) = x\underbrace{(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1)}_{\text{LINEARMENTE INDIPENDENTI}}$$

$$\underbrace{B}_{\text{BASE Ker}f} = ((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$$

DIM Ker f + DIM Im f = 3 → SIAMO IN $\mathbb{R}^3$

$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;$↳ 2 $\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;$ ↳ 1

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow (1,-1) \text{ MI DA } B_{Im f}$$

POICHÉ LE ALTRE DUE COLONNE SONO L.I DALLA PRIMA

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x+2y-z=0$$

$$z = x+2y$$

$$\ker f = \{(x, y, x+2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y, x+2y) = x(1,0,1) + y(0,1,2)$$

$$B_{\ker f} = ((1,0,1)(0,1,2))$$

BASE Im f: $B_{Im f} = (1,-1)$

2) TROVARE I VALORI DI $a \in \mathbb{R}$ PER CUI $g \circ f$ HA UNA MATRICE SIMMETRICA RISPETTO ALLA BASE CANONICA.

$A \in \mathbb{R}^{m,p}$

$f_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$

$f_A(v) = A\vec{v}$

$B \in \mathbb{R}^{m,m}$

$f_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$f_B(u) = B\vec{u}$

$f_B \circ f_A$:

$$B \cdot A : (m \cdot m)(m \cdot p) = m \cdot p$$

$$v \xrightarrow{f_A} Av \xrightarrow{f_B} BAv$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$g(x,y) = (x, x+ay, y) \text{ DATA DAL PROBLEMA}$$

## II' METODO

$$(g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(2y, 2x+z, y) =$$

$$= (2ay + 2x + z + ay,\ 2y + 4x + 2z + y,\ 2y + 6x + 3z + ay) =$$

$$= (2x + 3ay + z,\ 4x + 3y + 2z,\ 6x + (2+a)y + 3z).$$

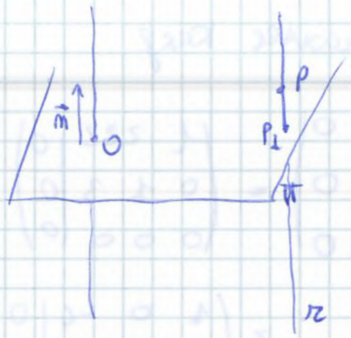
MATRICE CHE ABBIAMO TROVATO NOI PRIMA CON IL PRODOTTO

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

SIA $\pi$ IL PIANO DI EQUAZIONE $x = 2z$ E SIA $f$ L'ENDOMORFISMO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ CHE MANDA OGNI PUNTO $P \in \mathbb{R}^3$ NELLA SUA PROIEZIONE ORTOGONALE SU $\pi$.

IDENTIFICARE $\ker f$ E TROVARE UNA BASE $B$ DI $\mathbb{R}^3$ COMPOSTA DA DUE VETTORI $\in \pi$ E UNO $\in \ker f$




$P \in r \perp \pi$

$P_1 = r \cap \pi$

$f(P) = (0,0,0)$

$\pi: x - 2z = 0 \longrightarrow m = (1, 0, -2)$

$$r: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 \\ z = 0 - 2t \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\pi: \{(2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

GENERICO VETTORE $\in \pi$

$$(2z, y, z) = z(2,0,1) + y(0,1,0)$$

$$B = (\overbrace{(2,0,1), (0,1,0)}^{\in \pi}, \overbrace{(1,0,-2)}^{\in \ker f})$$

LAB. GEOMETRIA - $\boxed{15/04/2014}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 1.8

$V = \{ M \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} = 0 \}$

V SOTTOSPAZIO

BASE a V

$a_{21} = -a_{11} - a_{12}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$

CONDIZIONI

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$

2. $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{11}-a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ -\lambda a_{11} - \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$

$\lambda a_{11} + \lambda a_{12} - \lambda a_{11} - \lambda a_{12} = 0$

$0 = 0$

3. CHIUSO RISPETTO LA SOMMA

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{11}-a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ -a_{11} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

$= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

VETTORI GENERATORI

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ BASE DI V

▶ CERCHIAMO BASE DI V

$a_1(-3+x) + a_2(-9+x^2)$

$-3+x \, , \, -9+x^2$

SONO LINEARM. INDIPENDENTI?

DEFINISCO MATRICE IN BASE A $(1, x, x^2)$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ LINEARMENTE INDIP.

$\downarrow$

$B_V = (-3+x, -9+x^2)$ !

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 4.8

HO $2x+x^3, \, x+1, \, x^2+x, \, x^3-3x^2+1$

▶ VERIFICARE CHE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI E TROVARE UNA BASE DEL SOTTOSPAZIO CHE GENERANO.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ COMPONENTI DEI POLINOMI RISPETTO ALLA BASE CANONICA

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO 3 $\longrightarrow$ LINEARMENTE DIPENDENTI

$B_V = (1+x, \, 2x+x^3, \, 2x^2-x^3)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 5.8

$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_m)$ BASE DI $\mathbb{R}^m$

QUINDI USO GLI ULTIMI COMPONENTI TROVATI PER FINIRE LA BASE

$$B_V = \big((1,-2,1,1)(0,2,1,-1)(0,0,2,1)\big)$$

$U \cap V$ ?

GENERICO VETTORE DI V SARÀ: $a(1,-2,1,1) + b(0,2,1,-1) + c(0,0,2,1)$

$$(a, -2a+2b, a+b+2c, a-b+c) \in V$$

GENERICO VETTORE $\in V$

$U \cap V \rightarrow$ DEVO TROVARE VETTORI APPARTENENTI SIA AD $U$, SIA A $V$.

RISCRIVO $U$ INSERENDO GENERICO VETTORE $V$

$a - 2(a+b+2c) - 2a + 2b = 0$

$a - 2a \cancel{-2b} - 4c - 2a \cancel{+2b} = 0$

$-3a = 4c \quad \longrightarrow \quad a = -\frac{4}{3}c$

$$\left(-\frac{4}{3}c, \frac{8}{3}c + 2b, b + \frac{2}{3}c, -b - \frac{1}{3}c\right)$$

GENERICO VETTORE APPARTENENTE SIA A $U$, SIA A $V$.

$\longrightarrow$ CERCO BASE $U \cap V$

$(0, 2b, b, -b) + \left(-\frac{4}{3}c, \frac{8}{3}c, \frac{2}{3}c, -\frac{1}{3}c\right) =$

$= b(0,2,1,-1) + \frac{1}{3}c(-4,8,2,-1)$

$\downarrow$

$B_{U \cap V} = \big((0,2,1,-1)(-4,8,2,-1)\big)$

▶ ORA CERCO UN'ALTRA BASE DI $U$

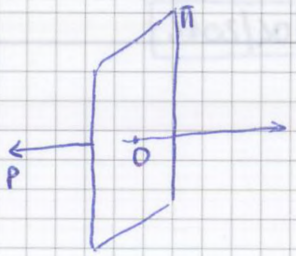
$B_U = \big((0,2,1,-1), (-4,8,2,-1), (0,0,0,1)\big)$

▶ STESSA COSA PER TROVARE UNA NUOVA BASE DI $V$

$B_V = \big((0,2,1,-1), (-4,8,2,-1), (0,0,2,1)\big)$

$\longrightarrow B_{\mathbb{R}^4} = \big((0,2,1,-1), (-4,8,2,-1), (0,0,0,1), (0,0,2,1)\big)$

→ CASO 2




SE $\overline{OP}$ È ⊥ AL PIANO π

↓

$$\overline{OP'} = -\overline{OP}$$

AUTOVALORE $T_1 = -1$

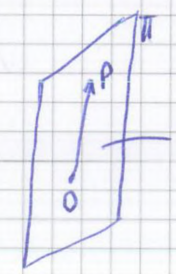
$$V_{-1} = L\big((2,-1,3)\big)$$

AUTOSPAZIO GENERATO DA COMB. LINEARE DAI VETTORI DELLA BASE $(2,-1,3)$

$$B_{V_{-1}} = \big((2,-1,3)\big)$$

$$\dim(V_{-1}) = 1$$

→ CASO 3




SE $\overline{OP}$ APPARTIENE A π, IL SIMMETRICO È SE STESSO!

↓

AUTOVALORE $T_2 = 1$

$$2x - y + 3z = 0$$

$$y = 2x + 3z$$

↳ GENERICO VETTORE $(x, 2x+3z, z) =$

$$= (x, 2x, 0) + (0, 3z, z)$$

$$\longrightarrow x(1,2,0) + z(0,3,1)$$

QUINDI $V_1 = L\big((1,2,0)(0,3,1)\big)$

LINEARMENTE INDIP.

↓

$$B_{V_1} = \big((1,2,0)(0,3,1)\big)$$

$$\dim(V_1) = 2$$

$T = 1$ MOLTEPLICITÀ $= 1$

$T = 2$ MOLTEPLICITÀ $= 2$

3) AUTOSPAZI

$T=1$

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{GENERICO VETTORE } (x, 0, x)$$

$$x(1,0,1)$$

$V_1 = \mathcal{L}((1,0,1))$

$B_{(V_1)} = (1,0,1)$

$DIM(V_1) = 1$

$T=2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -x + y = 0$$

$x = y$

GENERICO VETTORE $(y, y, z)$

$y(1,1,0) + z(0,0,1)$

$V_2 = \mathcal{L}((1,1,0)(0,0,1))$

$B_{(V_2)} = ((1,1,0)(0,0,1))$

$DIM(V_2) = 2$

$V_2 = \mathcal{L}((1,0,0))$

$B_{V_2} = ((1,0,0))$

$DIM(V_2) = 1$

$T = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{GENERICO VETTORE } (0,0,z)$$

$= z(0,0,1)$

$V_0 = \mathcal{L}((0,0,1))$

$B_{V_0} = ((0,0,1))$

$DIM(V_0) = 1$

QUESTO ENDOMORFISMO NON È SEMPLICE POICHÉ MOLTEPLICITÀ È DIVERSA DALLA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO ASSOCIATO:

MOLTEPLICITÀ $= 2$; $DIM(V_0) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

▶ SOSTITUISCO $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 2x+y=0$$

$y = -2x$

AUTOVETTORI : $(x,-2x) \rightarrow x(1,-2)$

$V_{-1} = \{(x,-2x),\ x \in \mathbb{R}\}$

GENERICO AUTOSPAZIO CON $\lambda = -1$

$BV_{-1} = ((1,-2))$

▶ SOSTITUISCO $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$-x+y=0$

$y = x$

AUTOVETTORI : $(x,x) \rightarrow x(1,1)$

$V_2 = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$

$BV_2 = ((1,1))$

▶ CASO $a=1,\ b=-2$ FATTELO A CASA

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 9.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ è DIAGONALIZZABILE?}$$

è DIAGONALIZZABILE SE LA DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI è UGUALE A MOLTEPLICITÀ AUTOVALORI

$\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$

BASE DI $\mathbb{R}^3$ FORMATA DA AUTOVETTORI

QUINDI ESISTE UNA BASE DI AUTOVETTORI PER L'ENDOMORFISMO ASSOCIATO A MATRICE DATA

STRATEGIA

DETERMINARE $P$ e $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ CON $D$ DIAGONALE e $P$ INVERTIBILE TALI CHE $P^{-1}AP = D$

$P$ HA PER COLONNE GLI AUTOVETTORI DELL'ENDOMORFISMO ASSOCIATO ALLA MATRICE $A$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

det $(B-\lambda I)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 1\,(-(1-\lambda)) = 0$$

$$-\lambda(-\lambda)(1-\lambda) - 1 + \lambda = 0$$

$$(\lambda^2)(1-\lambda) + \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+1) = 0$$

$\lambda = 1$

$\lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ MOLTEPLICITÀ 2

$\lambda = -1$ MOLTEPLICITÀ 1

$V_1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad -x + z = 0 \quad x = z$$

$V_1 = \{(z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

AUTOVETTORE: $(1, 0, 1)$
$(0, 1, 0)$

$V_{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad y = 0$$

$x = -z$

$V_{-1} = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

AUTOVETTORE: $(1, 0, -1)$

→ CONCLUSIONE:

$(x, y, -x-y)$ e $(x, 0, -x)$

$y = 0$

SONO VETTORI DI ENTRAMBE LE MATRICI MA SONO LINEARMENTE DIPENDENTI!

c) $f(1,0,0) = (1,3,1)$

NON SONO PARALLELI! $\longrightarrow$ $(1,0,0)$ NON È AUTOVETTORE

d) SE $(1,0,0)$ APPARTENESSE A $\ker f$, DOVREBBE ESSERE $f(1,0,0) = (0,0,0)$

$\downarrow$

INVECE VIENE $f(1,0,0) = (1,3,1)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 9.12

$M \in \mathbb{R}^{3,3}$

F a) È INVERTIBILE $M$

F b) $p(T) = 1 - T^3$

F c) $M$ NON È DIAGONALIZZABILE $\rightarrow$ STESSO MOTIVO DI A

V d) AUTOSPAZI TUTTI CON $\dim = 1$

a) $P^{-1} M P = D$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(D) = 0$

$\downarrow$

$\underline{\det(M) = 0}$, POICHÉ IL $\det(M) = \det(D)$ PER TEOREMA PRODOTTO

$\hookrightarrow$ NON INVERTIBILE

b) $P(T) = 1 - T^3$

$P(0) = 1$

d) VERA POICHÉ MOLTEPLICITÀ AUTOVALORI È TUTTI 1.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 9.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V a) 3 AUTOVALORI DISTINTI

F b) A È INVERTIBILE

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ IL SISTEMA HA UNA SOLA SOLUZIONE $x=0$, $y=0$

$\downarrow$

$\vec{v}(0,0)$

NON VA BENE!

SOLO VETTORE NULL

c) SI VEDE

d) È INVERTIBILE! $\det(M) = 1 \neq 0$

ESERCIZIO 9.15

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F a) $rg(M) = 1$

F b) AUTOVALORI CON $m = 1$

F c) DIAGONALIZZABILE

V d) AUTOSPAZI DISTINTI DI DIM $= 1 \longrightarrow$ FAI CALCOLI

a) $rg(M) = 3 \longrightarrow$ GIÀ RIDOTTA!

b) $$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda I) = 0 = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda = 2$

$\lambda = 2 \longrightarrow \lambda = 2 \quad m = 2$

$\lambda = 1 \qquad \lambda = 1 \quad m = 1$

c) AUTOVALORI SONO REALI, QUINDI OK!

$$(M - \lambda I) \rightarrow (M - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg(M - 2I) = 2$$

$\hookrightarrow DIM(V_2) = n - rg$

$3 - 2 = 1$

MOLTEPLICITÀ $= 2$ MA $DIM(V_2) = 1 \longrightarrow$ MATRICE NON SEMPLICE, QUINDI NON DIAGONALIZZABILE

$\boxed{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$V_2 = \{(z, 0, z)\} \ \forall z \in \mathbb{R}$

$B_{V_2} = ((1, 0, 1))$

$\quad \llcorner$ DIM = 1

---

$u = (-1, 2, 1) \in V_0$ (AUTOVETTORI)

$v = (1, 0, 1) \in V_2$

$w = (1, 1, -1) \in V_3$

$u \cdot v = 0$
$u\, w = 0$
$v \cdot w = 0$ GLI AUTOSPAZI SONO TRA LORO ORTOGONALI ? E SONO GENERATI ORDINATAMENTE DAI VETTORI $u, v, w$?

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 104

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 0$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda = 1 \quad ma = 2$

$\lambda = -1 \quad ma = 1$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -x = -\sqrt{3}z \\ \sqrt{3}/2\, x = 3/2\, z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{3}z \\ x = \frac{3}{\sqrt{3}} z \end{cases} \to x = \sqrt{3}z$$

$q(x,y) = 5x^2 + 2(2xy) + 8y^2$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-8) - 4 = 0$

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$

DUE CAMBIAMENTI DI SEGNO = 2 AUTOVALORI POSITIVI!

$q(0,0) = (0,0)$

$q(x,y)$ E' UNA FORMA QUADRATICA DI $f$ POSITIVA

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$

$(\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0 \longrightarrow \lambda = 9 \quad m_a = 1$

$\lambda = 4 \quad m_a = 1$

$\boxed{\lambda = 4}$

$\begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ 2 & 8-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad x = -2y$

$V_4 = \{(-2y, y)\} \ \forall y \in \mathbb{R}$

$B_{V_4} = ((-2, 1))$

$\llcorner$ DIM = 1

$\boxed{\lambda = 9}$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 2x = y$

$V_9 = \{(x, 2x)\} \ \forall x \in \mathbb{R}$

$B_{V_9} = ((1, 2))$

$\llcorner$ DIM = 1

▶ NORMALIZZO $u = (-2, 1)$

$\|u\| = \sqrt{5}$

$\det(A-\lambda I)=0$

$\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2-\frac{1}{4}=0$

$\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\lambda-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2} \longrightarrow \lambda=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix}\lambda=2 & m_a=1\\ \lambda=1 & m_a=1\end{matrix}\right]$ FORMA QUADR. DEFINITA POSITIVAMENTE (2 AUTOVALORI ENTRAMBI POSITIVI)

ALTERNATIVA (CARTESIO):

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

2 CAMBIO SEGNO → 2 AUTOVALORI POSITIVI.

→ FORMA CANONICA

$Q(x,y)=2x^2+y^2$

---

(5) $q(x,y)=3x^2+2\sqrt{7}xy-3y^2$

$A=\begin{pmatrix}3 & \sqrt{7}\\ \sqrt{7} & -3\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I)=0$

$\left((3-\lambda)(-3-\lambda)-7\right)=0$

$\left((3+\lambda)(-3+\lambda)-7\right)=0 \longrightarrow -9+\lambda^2-7=0$

$\lambda^2-16=0$

$\left.\begin{matrix}\lambda=4\\ \lambda=-4\end{matrix}\right]$ $m_a=1$

→ FORMA CANONICA

$Q(x,y)=4x^2-4y^2=4(x-y)(x+y)$

$Q(x,y)=0 \longrightarrow x=y$

$x=-y$

ESERCIZIO 10.7

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

F a) A HA 1 COME AUTOVALORE

V b) f NON È DEFINITA

F c) f È DEFINITA NEGATIVA

F d) POLINOMIO CARATTERISTICO $-T^2+T$

a) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{\lambda = -1}$

$\boxed{\lambda = 10}$

b) NON È DEFINITA! NON SO DIRE CHE SEGNO HA f POICHÉ $\lambda$ DI SEGNI OPPOSTI

c) f NO DEFINITA NEGATIVA

ESERCIZIO 10.8

$q(x,y) = x^2 - 2\sqrt{3}\,xy - y^2$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 1 - 3 = 0$

FACCIO CALCOLI $\rightarrow$ ESCLUDO a, b, c!

d) VERA, POICHÉ SE IO METTO $\lambda = 0$ IN $\lambda^2 - 1 - 3$ E OTTENGO $\underline{-4}$

NEGATIVO!

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$\lambda = -1 \quad m_a = 1$

$\lambda = 3 \quad m_a = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

FORMA CANONICA: $3X^2 - Y^2 - 5 = 0$

---

c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = 0 \quad \text{PARABOLA NON DEGENERE}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(B) = -4 \neq 0 \quad \text{NON DEGENERE}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(-\lambda)$$

$\lambda = 0 \quad m_a = 1$

$\lambda = 2 \quad m_a = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

FORMA CANONICA:

PARTE DI 2^ GRADO: $0X^2 + 2Y^2$

PARTE DI 1^ GRADO: DEVO DETERMINARE P

$\longrightarrow$ $\lambda = 0$

CERCO AUTOSPAZIO

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \longrightarrow y = -x$$

$V_0 = \{(x, -x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$B_0 = (1, -1)$

VOGLIO BASE ORTONORMALE $\longrightarrow$ DIVIDO PER IL MODULO

d) $xy=0$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \det(A)=0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$$

IPERBOLE DEGENERE

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \det(B)=0 \quad \text{DEGENERE}$$

FORMA CANONICA

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 1/2\\ 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} \longrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \quad m_a=1$$

$$\lambda=-\frac{1}{2} \quad m_a=1$$

$$\downarrow$$

$$D=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

FORMA CANONICA : $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2=0$

$$x^2-y^2=0$$

$\hookrightarrow (x-y)(x+y)=0$

$\llcorner$ SONO DUE RETTE INCIDENTI; IN PARTICOLARE BISETTRICE DEL NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO

---

e) $x^2+y^2=0$

DEGENERE $\longrightarrow$ CORRISPONDE A 1 PUNTO (L'ORIGINE)

---

f) $x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=0$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \longrightarrow \det(A)$ ... ECCETERA, MA POTEVO FARE DIRETTAMENTE

$$(x+2y-1)^2=0$$

VEDO CHE È DEGENERE!

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=4-4=0 \quad \text{PARABOLA DEGENERE}$$

$$\rightarrow (-2,-4)\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\left(0, -\frac{10}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -\frac{10}{\sqrt{5}} Y$$

FORMA CANONICA: $5Y^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} Y + 1 = 0$

$$5Y^2 - \frac{10\sqrt{5}}{5} Y + 1 = 0$$

$$5Y^2 - 2\sqrt{5}\, Y + 1 = 0$$

$$(\sqrt{5}\, Y - 1)^2 = 0$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 11.2

$$-x^2 + y^2 + 2x + 3 = 0$$

F a) RETTE INCIDENTI

V b) IPERBOLE

F c) NON CONTIENE PUNTI REALI

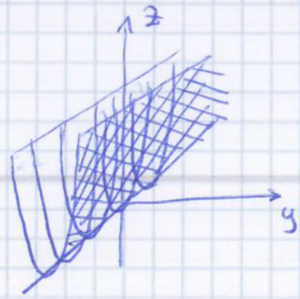
F d) È UNA PARABOLA

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = -1 < 0$ IPERBOLE (b) $\rightarrow$ ESCLUDO (c) e (d)

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(B) = -4 \neq 0$ NON È DEGENERE, QUINDI NON POSSONO ESSERE RETTE INCIDENTI

(a)

V d) S CONTIENE ASSE $x$



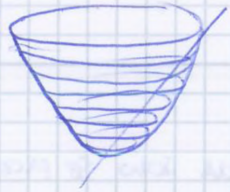

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 11.6

$S: z = x^2 + 3y^2$

F a) S NON HA PUNTI REALI

$(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

TAGLIO CON $z = 1$



F b) S è UN CONO CON VERTICE IN O

→ ABBIAMO APPENA VISTO CHE NON LO è!

ESEMPIO DI CONO CON VERTICE NON IN O:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} + 1$$

OPPURE

$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$$

F c) $S \cap \{z=1\}$ è UN'IPERBOLE

→ VIENE UN'ELLISSE CON $z = 1$

SE TAGLIASSI INVECE CON $x = 1$ VIENE PARABOLA!

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$$ PARABOLA

SE VOLESSI IPERBOLE

$$\begin{cases} x = 1 \\ z^2 = x^2 + 3y^2 \end{cases}$$ IPERBOLE

METODO ALTERNATIVO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\uparrow P_1(x)$ $\uparrow P_2(x)$ $\uparrow P_3(x)$ $\uparrow P_4(x)$

$rg(A) = 3 \longrightarrow$ 4 INCOGNITE

5 EQUAZIONI

$\infty^{4-3} = \infty^1$ SOLUZIONI

ESERCIZIO 12.1

$C: P(t) = (e^t + 1, 0, 2t)$

F a) C NON È REGOLARE

$P'(t) = (e^t, 0, 2) \neq (0,0,0)$

$\forall t \in \mathbb{R}$, QUINDI REGOLARE

V b) LA RETTA tg A C NEL PUNTO $(2,0,0)$ È $\parallel$ A $\vec{i} + 2\vec{k}$

RETTA tg ALLA CURVA NEL PUNTO $t_0$ È:

$$\sigma(t) = P(t_0) + (t - t_0) P'(t_0)$$

$$(2,0,0) = (e^t + 1, 0, 2t)$$

$$\Rightarrow t = 0$$

COSÌ VERIFICO ANCHE CHE IL PUNTO $(2,0,0)$ APPARTIENE A P

$$P'(0) = (1,0,2)$$

$$\sigma(t) = (2,0,0) + (t-0)(1,0,2) = (2+t, 0, 2t)$$

c) C HA VETTORE tg NULLO IN ALMENO UN PUNTO

$$P'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

d) C NON È PIANA

$P(t) = (e^t + 1, 0, 2t)$

$y = 0 \to$ È PIANA!

ESERCIZIO 12.2

$\gamma(t) = (t^2 + t^3, \cos t + 1, 1 - t^2)$

$\gamma'(t) = (2t + 3t^2, -\sin t, -2t)$

$\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = 0}$

c) DETERMINARE PUNTI DI $\gamma(t)$ IN CUI È PERPENDICOLARE A $\vec{u}$

$\vec{u} = (1,-1,-1)$

$\sigma(t) \perp \vec{u}$

$\gamma'(t) \cdot \vec{u} = 0$

$(2t, 1, 3t^2-2t)(1,-1,-1) = 0$

$2t - 1 - 3t^2 + 2t = 0$

$3t^2 - 4t + 1 = 0 \longrightarrow \Delta = 16 - 12 = 4$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6} < \begin{matrix} 1 \\ 1/3 \end{matrix}$

$t = 1 \longrightarrow P_1 = (-1, 1, 0)$

$t = 1/3 \longrightarrow P_{1/3} = \left(-\frac{17}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$

SOSTITUENDO IN $\gamma(t)$ INIZIALE

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

LA CURVA $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, \sin t + \cos t)$

F a) STA IN UN PIANO $\perp$ ALL'ASSE $x$

$z = x + y$ È IL PIANO CHE CONTIENE LA CURVA!

$\Updownarrow$

$x + y - z = 0 \longrightarrow \vec{n} = (1,1,-1)$

ASSE $x = (1,0,0)$

NON PARALLELI! NON SI VERIFICA $\vec{n} \parallel \vec{i}$

F b) STA IN UN PIANO PARALLELO ALL'ASSE $x$

$\vec{n} \cdot \vec{i} = 0$

$(1,1,-1)(1,0,0) = 1 \neq 0$

V c) STA IN UN PIANO PASSANTE PER O

$(0,0,0) \in \pi = ?$ SÌ!