NUMERO: 1233

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lamberti D.

MATERIA: Analisi I

Prof. Pellerey

ANALISI $\boxed{30/09/2013}$ PELLEREY FRANCO
ALFIO CRILLO - ESERCITATORE

PELLEREY → FRANCO.PELLEREY@POLITO.IT → RICEVIMENTO STUDENTI GIOVEDÌ 11 - 13

CRILLO → ALFIO.CRILLO@POLITO.IT

INVIARE MAIL SOLO CON INDIRIZZO MAIL DEL POLI!

LIBRI: [CANUTO, TABACCO - ANALISI MATEMATICA 1 (TEORIA + ESERCIZI)]

SEGUE LE NOTAZIONI UTILIZZATE DA PELLEREY.

LIBRO DI SOLI ESERCIZI → PROF. LANCELOTTI, ED. CELID

ESAME: 20 DOMANDE CON 5 POSSIBILI RISPOSTE, TEMPO 1 ORA.
VOTO MAX CON IL QUIZ = 24 → DOMANDA GIUSTA +1, SBAGLIATA -0,25
18 = 10,5

POI PUOI FARE LO SCRITTO

RIPASSO

INSIEMISTICA (RICHIAMI)

INSIEME = COLLEZIONE NON ORDINATA DI OGGETTI

{ROSSO, BLU, BIANCO}
{BLU, BIANCO, ROSSO}
NON ORDINATO ⇒ SONO LO STESSO INSIEME PERCHÉ NON MI INTERESSA L'ORDINE.

NOTAZIONI

Y, X, A, B → MAIUSCOLE X INDICARE INSIEMI

y, x, a, b → MINUSCOLE X INDICARE OGGETTI APPARTENENTI A INSIEMI

$\in$ APPARTIENE → $x \in X$

$\notin$ NON APPARTIENE → $x \notin X$

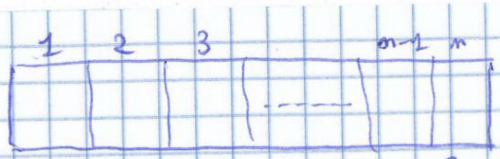
GIALLO $\notin$ {ROSSO, BLU, BIANCO}

$\subseteq$ SOTTOINSIEME → $A \subseteq B$ ⇒ SE $a \in A$ ALLORA $a \in B$

A SOTTOINSIEME DI B

$B \subseteq B$ MA $B \not\subset B$

SOTTOINSIEME STRETTO, È UN PO' COME CON IL $<$ O $\leq$



$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$$

- COMPLEMENTARIETÀ

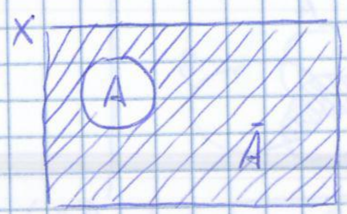
SIA X UN INSIEME

$A \subseteq X$

$\bar{A} \equiv CA = X - A$

DIVERSE NOTAZIONI PER INDICARE IL COMPLEMENTARE DI A IN X

COMPLEMENTARE DI A = TUTTI GLI OGGETTI DI X NON PRESENTI IN A



- UNIONE, INTERSEZIONE

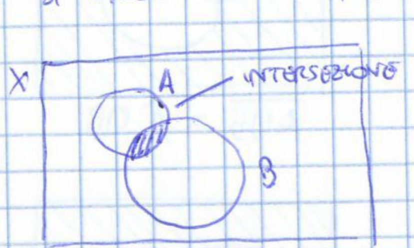
$\cap, \cup$

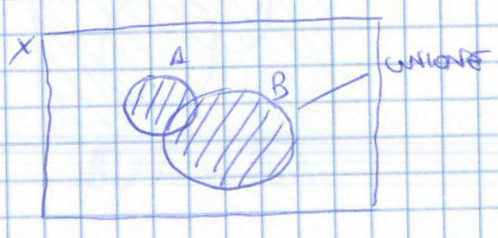
DATI A e B $\quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

OGGETTI CHE STANNO SIA IN A CHE IN B

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

SOMMA DI TUTTI GLI OGGETTI CHE SI TROVANO IN A, B O IN ENTRAMBI





LOGICA (ELEMENTI DI ...)

PROPOSIZIONE LOGICA : È UN ENUNCIATO IL QUALE È INEQUIVOCABILMENTE VERO O FALSO

ES: TORINO È IN ITALIA
MARCO È UNA DONNA

CONNETTIVI LOGICI = SONO DELLE OPERAZIONI DEFINITE SULLE PROPOSIZIONI LOGICHE

a) NEGAZIONE : DATA $p \rightarrow \neg p$
($\neg$)

NOT O NON

TORINO È IN ITALIA → TORINO NON È IN ITALIA

INEQUIVOCABILMENTE UNA DELLE DUE È FALSA È L'ALTRA È PER FORZA VERA

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1

È SEMPRE VERA TRANNE QUANDO È VERA LA PRIMA MA NON LA SECONDA

p 1 = VERA
0 = FALSA

b) CONGIUNZIONE : DATI $p, q \rightarrow p \wedge q$
($\wedge$)

et

RICONOSCIUTO COME UN $\boxed{\text{MINIMO}}$

È VERA SE ENTRAMBE SONO VERE (p E q VERE)
IN TUTTI GLI ALTRI CASI È FALSA

c) DISGIUNZIONE : DATI p E $q \rightarrow p \vee q$
($\vee$)

or

RICONOSCIUTO COME UN $\boxed{\text{MASSIMO}}$

ANALISI - $\boxed{02/10/2013}$

SERVIZIO TUTORAGGIO DALLE 11.30 ALLE 14.30 AULA 6D TUTTI I GIORNI

SI RIPRENDE IL DISCORSO SULLA LOGICA - PROPOSIZIONI DEL 30/09/13

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1

p 1 VERA / 0 FALSA

$\boxed{\text{PREDICATO}}$ = ENUNCIATO LA CUI VALIDITÀ DIPENDE DA UN ARGOMENTO X $p(x), q(x), r(x)$

$p(x)$ = "x è un ~~enunciato~~ NUMERO PARI"

DESCRIZIONE DI INSIEMI

$A = \{x : p(x)\}$ $B = \{x : q(x)\}$

$A \cup B = \{x : p(x) \vee q(x)\}$

$A \cap B = \{x : p(x) \wedge q(x)\}$

$\boxed{\text{QUANTIFICATORI}}$ = SIMBOLI USATI PER ESPRIMERE QUANTITÀ DI OGGETTI.

$\forall$ (UNIVERSALE) $\forall x : p(x)$

$\forall$ essere umano : essere è mortale

$\exists$ (ESISTENZIALE) $\exists x : p(x)$

(esiste almeno una ...)

$\exists$ una nazione : si trova Torino

$\exists!$ (esistenziale quando ne esiste uno solo) $\exists! x : p(x)$

(esiste ed è unico x ...)

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots$

PERIMETRI DEI POLIGONI CIRCOSCRIVIBILI ALL CRF CON n LATI CRESCENTE!

TUTTAVIA AL CRESCERE DEL NUMERO DI LATI NON SI ARRIVERÀ MAI A TROVARE IL VALORE DELLA CRF

TORNANDO AL PROBLEMA (1)...

$\sqrt{2}$ NON È RAZIONALE

SUPPONIAMO CHE LO SIA: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

RIDUCIAMO m ED n AI MINIMI TERMINI

$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \rightarrow 2n^2 = m^2$

$\rightarrow m^2$ è pari $\rightarrow m$ è pari

$\rightarrow m = 2p \rightarrow m^2 = 4p^2$

QUINDI $\rightarrow \cancel{2}n^2 = \overset{2}{\cancel{4}}p^2 \rightarrow n^2 = 2p^2$

$\rightarrow n^2$ pari $\rightarrow n$ pari

$\rightarrow m, n$ pari $\rightarrow$ CONTRADDIZIONE!

INFATTI SE FOSSERO ENTRAMBI NUMERI PARI SAREBBE IMPOSSIBILE CHE VENGA $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

AL FINE DI RISOLVERE QUESTI PROBLEMI FURONO INTRODOTTI $\boxed{\text{NUMERI REALI}}$

$\mathbb{R}$ = TUTTI $\mathbb{Q}$ PIÙ TUTTI I NUMERI ESPRIMIBILI CON <u>INFINITE CIFRE DOPO LA VIRGOLA E NON PERIODICI</u>

$\rightarrow$ IRRAZIONALI

$\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$

I) TUTTE LE OPERAZIONI DEFINITE SU $\mathbb{Q}$ SI ESTENDONO AD $\mathbb{R}$

II) $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$ = PRESI DUE REALI DISTINTI ESISTONO INFINITI RAZIONALI TRA DI LORO

III) $\mathbb{R}$ È <u>COMPLETO</u> = SIANO A, B INSIEMI DI NUMERI REALI

1^ DEFINIZIONE DI COMPLETEZ. $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} : a \leq s \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

INSIEMI LIMITATI

DATO $A \subseteq \mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORMENTE

se $\exists b \in \mathbb{R} : a \leq b \ \forall a \in A$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}$ LIMITATO INFERIORMENTE

se $\exists b \in \mathbb{R} : b \leq a \ \forall a \in A$

ESEMPIO

$A_1 = \{1, 7, 8, 15\}$ → limitato SUPERIORMENTE, LIMITATO INFERIORMENTE

$A_2 = \{m^2 : m \in \mathbb{N}^+\}$ → NON LIMITATO SUPERIORMENTE, LIMITATO INFERIORMENTE

b è DETTO MAGGIORANTE DI A se $b \geq a \ \forall a \in A$

b è DETTO MINORANTE DI A se $b \leq a, \ \forall a \in A$

20 è MAGGIORANTE DI A_1, 0 è MINORANTE DI A_1

A_2 NON HA MAGGIORANTE, 0 è MINORANTE di A_2

1 è MINORANTE DI A_2

$b \in \mathbb{R}$ è DETTO MASSIMO DI A se
- è UN MAGGIORANTE
- APPARTIENE ALL'INSIEME A $(b \in A)$

$b \in \mathbb{R}$ è DETTO MINIMO DI A se
- è UN MINORANTE
- APPARTIENE AD A $(b \in A)$

$A = \{\frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}^+\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

$\max(A) = 1 \quad \min(A) = ? \rightarrow \nexists$ NON SI PUÒ TROVARE UN MINIMO PERCHÉ BISOGNEREBBE DIVIDERE INFINITESIMALMENTE

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ = b è DETTO ESTREMO SUPERIORE (O INFERIORE) se è IL PIÙ PICCOLO (O IL PIÙ GRANDE) TRA TUTTI I MAGGIORANTI (O MINORANTI)

→ $\sup(A)$ → $\inf(A)$

$\boxed{\text{ALCUNE GRANDEZZE UTILI}}$

FATTORIALE (DI UN NUMERO INTERO) ① $n \in \mathbb{N}^+$ ② $n = 0$

$0! = 1$

$$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

$n = 4$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

COEFFICIENTE BINOMIALE

$k, n \in \mathbb{N}^+$ $\quad k \le n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

È IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI CARDINALITÀ K DI UN INSIEME DI CARDINALITÀ n

$$\frac{10!}{3!\,7!} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120$$

n INDIVIDUI → DEVO ESTRARNE K

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)\,(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{COEFFICIENTE BINOMIALE}} a^i b^{n-i}$$

I NUMERI DEL COEFF. BINOMIALE SONO QUELLI DEL TRIANGOLO DI TARTAGLIA!

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = \frac{3}{1} = 3$$

RIGA

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{1 \cdot 3!} = 1$$

DIAGONALE

RIGA 0 →	1			
RIGA 1 →	1	1		
RIGA 2 →	1	2	1	
RIGA 3 →	1	3	3	1
	0	1	2	3

$\boxed{\text{NOTAZIONI}}$: $f: A \to B$

INSIEME CODOMINIO

INSIEME DOMINIO

$f: a \in A \longmapsto b \in B$

L'OGGETTO a CONTENUTO IN A VERRÀ TRAMUTATO IN UN OGGETTO DI $b \in B$

ES.: FUNZIONE ELEVAMENTO AL QUADRATO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

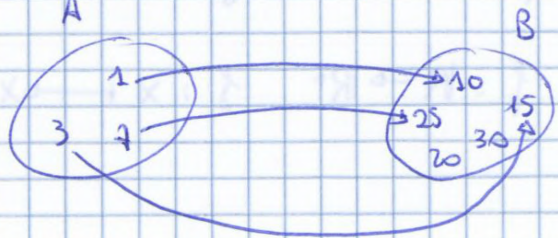
$f: x \longmapsto x^2$
$f: t \longmapsto t^2$ STESSA ROBA

IMMAGINE

DATO $x \in A$, $y = f(x) \in B$

y è DETTO IMMAGINE DI x

DATO $C \subseteq A$, A QUESTO CORRISPONDONO DIVERSE IMMAGINI, UNA PER OGNI $c \in C$ È DETTO IMMAGINE DI C, $f(C)$ L'INSIEME DI QUESTE IMMAGINI



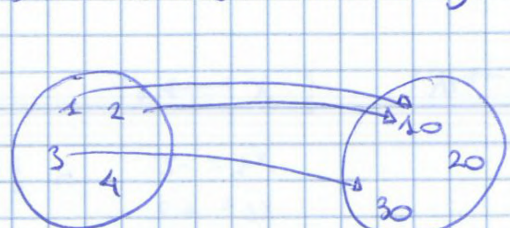
$C = \{1, 7\}$

$f(C) = \{10, 25\}$

CONTROIMMAGINE

$f: A \to B$

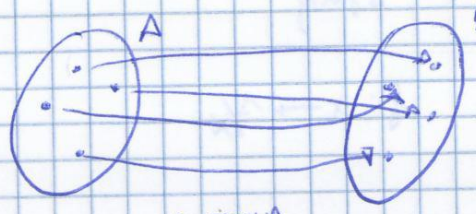
PRESO $y \in B$ È DETTO CONTROIMMAGINE DI y L'INSIEME $\{x \in A : f(x) = y\}$



$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ INIETTIVA PERCHÉ ELIMINO -2 !

INVERTIBILE O BIETTIVA

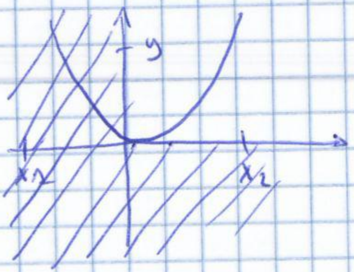
$f: A \to B$ è DETTA INVERTIBILE SE è CONTEMPORANEAMENTE INIETTIVA E SURIETTIVA (BIETTIVA)



BIETTIVA

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

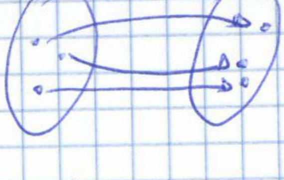
$f: x \mapsto x^2$



RAPPRESENTAZIONE DI FUNZIONI

x	y
1	1
2	4
-2	4

O

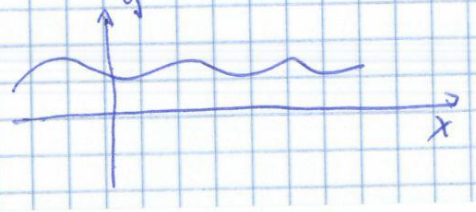


RAPPRESENTAZIONE ANALITICA $y = f(x)$

DOVE $f(x)$ RAPPRESENTA UNA SEQUENZA DI OPERAZIONI "ELEMENTARI" DA APPLICARE A X

$$y = \left(\frac{x^2-7}{12}\right)^{1/3}$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



ANALISI 1 - 09/10/2013

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ A = CdE di f

B = IMMAGINE di A RISPETTO f

$= f(A)$

- f è LIMITATA SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) SE B è LIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE)
- f AMMETTE UN MAX (MIN) SE B AMMETTE UN MAX (MIN)
- PUNTO DI MAX (MIN) è IL PUNTO $(x_0, f(x_0))$ TALE CHE PER CUI $f(x)$ è IL MAX (MIN) DI B PUNTO DI MAX x_0

MAX (MIN) — ASSOLUTI / RELATIVI (LOCALI)

INTORNO

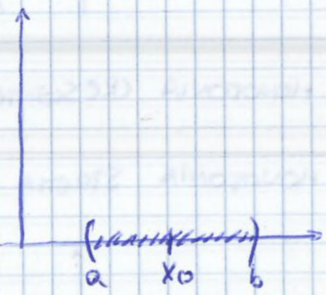
SIA $x_0 \in A$ $\quad$ $(x_0 \in \mathbb{R})$

è DETTO INTORNO DI x_0 UN INTERVALLO APERTO $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ TALE CHE $x_0 \in (a,b)$

I_{x_0} = INTORNO DI x_0

$\boxed{ES.}$ $I_1(0,2)$

$I_1 = (0,10)$



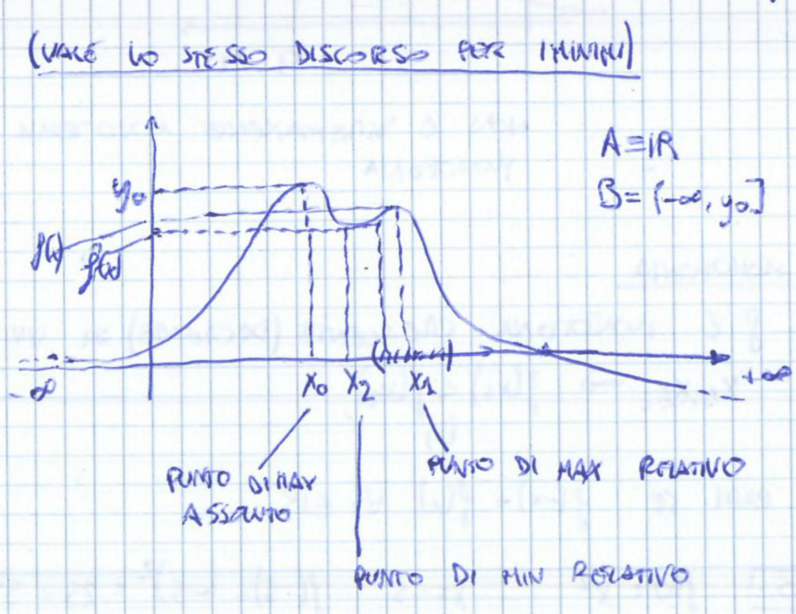
def: x_0 è UN PUNTO DI MAX ASSOLUTO SE $f(x_0)$ è MAGGIORE O UGUALE DI $f(x)$ $\forall x \in A$

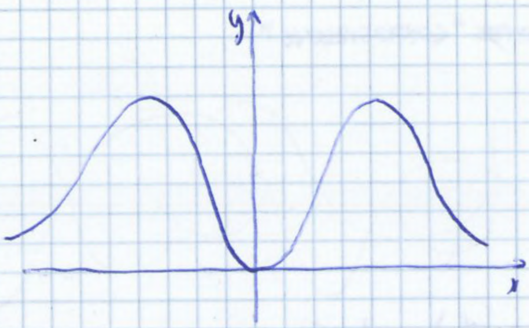
x_0 è UN PUNTO DI MAX RELATIVO SE $\exists I_{x_0}$ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I_{x_0}$

(VALE LO STESSO DISCORSO PER I MINIMI)

$A \equiv \mathbb{R}$

$B = (-\infty, y_0]$

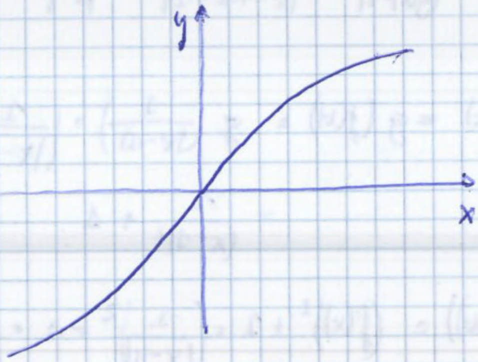




FUNZ. PARI SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ASSE y

– f è DETTA DISPARI se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{ES.:}$ $f(x) = x^3$ $\quad x = -5 \quad f(-5) = -125 = -(5^3) = -f(5)$



FUNZ. DISPARI SIMMETRICHE RISPETTO ALL'ORIGINE

OPERAZIONI SU FUNZIONI

SIANO $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

→ SOMMA $h = f + g \quad h : x \longmapsto h(x) = f(x) + g(x)$

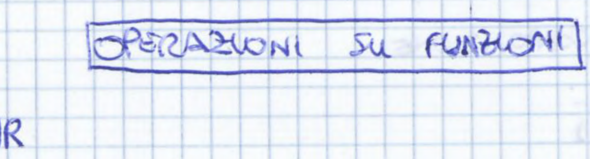
→ DIFFERENZA $h = f - g \quad h : x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x)$

→ PRODOTTO $h = f \cdot g \quad h : x \longmapsto h(x) = f(x) \cdot g(x)$

→ QUOZIENTE $h = f/g \quad h : x \longmapsto h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$x : g(x) \neq 0$

→ COMPOSIZIONE



$g : A \to B$

$f : B \to C$

$h = f \circ g$

$h(x) = f(g(x))$

INVERSA DI f LA $g: B \to A$ TALE CHE $\forall x \in A \quad g(f(x)) = x$

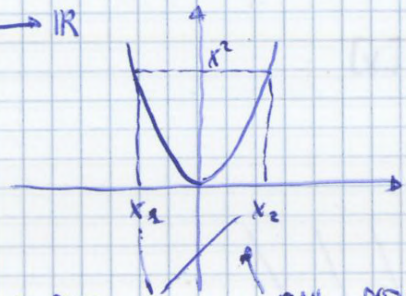
$\forall x \in B \quad f(g(x)) = x$

NOTAZIONE UTILIZZATA DALLA FUNZIONE INVERSA f^{-1}

ANCHE SE A PELLE NON PIACE!

$f: x \longmapsto x^2$

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$



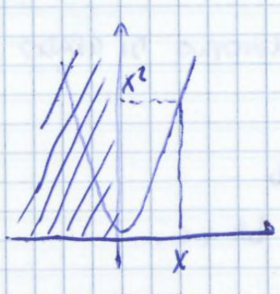
NON SAPREI DA DOVE SONO ARRIVATO!

QUI NON POSSO FARE L'INVERSA PERCHÉ NON È INIETTIVA

COSÌ POSSO FARLO:

$f: x \longmapsto x^2$

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^+$



CLASSIFICAZIONE FUNZIONI

→ FUNZIONI DEFINITE A TRATTI = SONO FUNZIONI $f(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

→ VALORE ASSOLUTO $|x| = \begin{cases} -x & x<0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

→ PARTE INTERA DI X $[x]$ = è IL PIÙ GRANDE INTERO z TALE CHE $z \leq x$

$[-0{,}12] = -1$

$[1{,}37] = 1$

$[0{,}15] = 0$

→ FUNZIONI IRRAZIONALI

$$f(x) = \sqrt[m]{P_m(x)}$$

C.d.E → $\mathbb{R}$ se m DISPARI

se m PARI → $\{x \in \mathbb{R} : P_m(x) \geq 0\}$

→ FUNZIONI IRRAZIONALI FRATTE

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}}$$

C.d.E → $\mathbb{R} - \{x : Q_m(x) = 0\}$ → se DISPARI

SE PARI $\mathbb{R} - \{x : Q_m(x) = 0\} - \{x : \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} < 0\}$

$\boxed{\text{NOTA}}$: $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ ≥ 0 $\quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$ ≥ 0 ≥ 0

SE LO PONGO X=0, LA PRIMA È DEFINITA, LA SECONDA NO

NON HO SOLUZIONI IN $\mathbb{R}$

→ FUNZIONI PERIODICHE

UNA FUNZIONE $f(x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è DETTA PERIODICA DI PERIODO $p>0$ SE
$f(x+p) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (O AL SUO DOMINIO)

p È IL PIÙ PICCOLO VALORE DEI VALORI p PER CUI RISULTA PERIODICA

$f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = f(x)$

SICCOME SI RIPETE È INUTILE SCRIVERLO

→ FUNZIONI POTENZA $\boxed{a^x}$

$2^3 = 8$

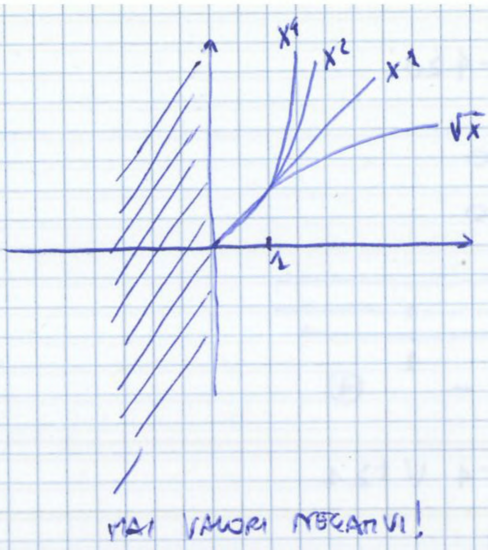
$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

2^{π}

- a^n $n \in \mathbb{N}$ $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n° \text{ VOLTE}}$ $\quad a^0 = 1$

- $a^{n+m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m} = a^n \cdot a^m$



MAI VALORI NEGATIVI!

$f(x) = x^{\pi}$

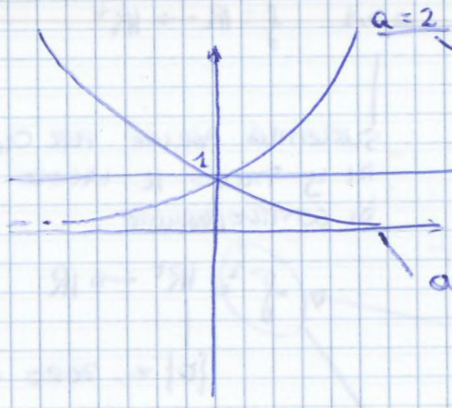
$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\pi}}$

$CdE = \mathbb{R}^+$

→ FUNZIONE ESPONENZIALE

$f : x \longmapsto a^x$ $\boxed{a > 0}$ SEMPRE BASE POSITIVA!

$f \ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^+$



SONO STRETTAMENTE CRESCENTI PER $a > 1$

SONO STRETTAMENTE DECRESCENTI PER $0 < a < 1$

PARTICOLARMENTE IMPORTANTE → $f(x) = e^x$ e = NUMERO DI NEPERO $\simeq 2{,}7172\ldots$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ESEMPIO

TROVARE CdE E SEGNO

$$f(x) = 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4$$

- $CdE = \mathbb{R}$
- SEGNO $f(x) \geq 0$ $2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 \geq 0$

log CON PARTICOLARE IMPORTANZA:

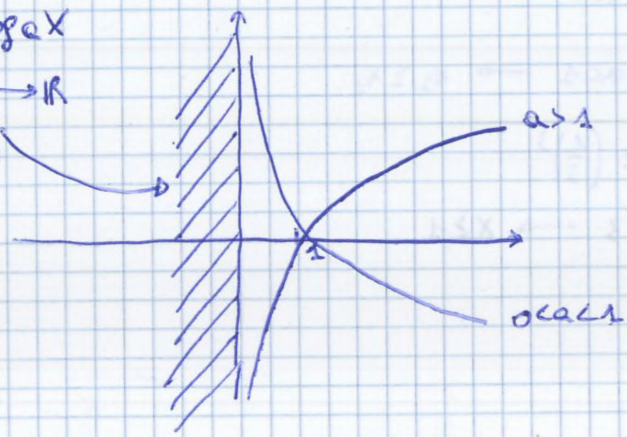
$a = 10 \quad \log_{10} X = \text{Log}\, x$

$a = e \quad \log_e x = \ln x$ LOGARITMO NATURALE $= \log x$

$f(x) = \log_a X$

$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$\{0\}$



$\log_a 1 = 0$

$a > 1$
$0 < a < 1$

AL'TRE PROPRIETÀ

- $\log_a a = 1$
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x,y > 0$

DIMOSTRAZIONE OSSERVIAMO CHE $x_1 = x_2 \iff a^{x_1} = a^{x_2}$ $(a \neq 1)$

$$\underbrace{a^{\log_a (xy)}}_{xy} = \underbrace{a^{\log_a x + \log_a y}}_{a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}}$$

$a^{\log_a x} = x$, $a^{\log_a y} = y$

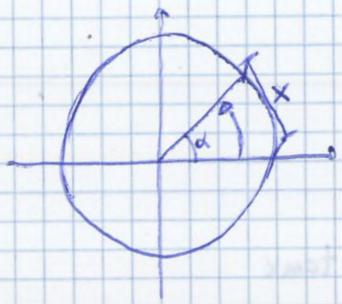
ANALOGAMENTE:

- $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ (per x,y OPPORTUNI)
- $\log_a (x^y) = y \log_a x$ (per x,y OPPORTUNI) — x POSITIVA, y: $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

ANALISI 1 - 10/10/2013

TESTO ESERCIZI MATEMATICA → GUILLERMO, QUELALI - ESERCIZI SVOLTI DI ANALISI MATEMATICA I
CLUT EDITORE

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



$360° \leftrightarrow 2\pi$

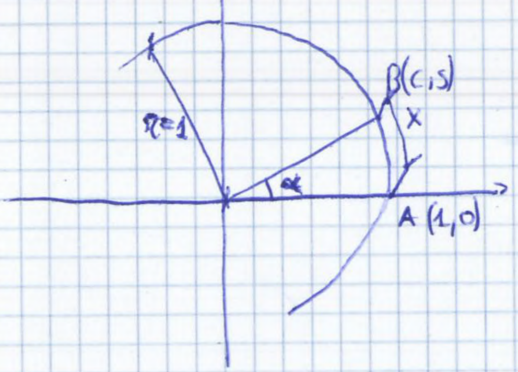
$180° \leftrightarrow \pi$

$90° \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$

$\alpha : 360° = x : 2\pi$

$$\boxed{x = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}}$$

$30° \leftrightarrow \frac{\pi}{6}$



ANGOLO x

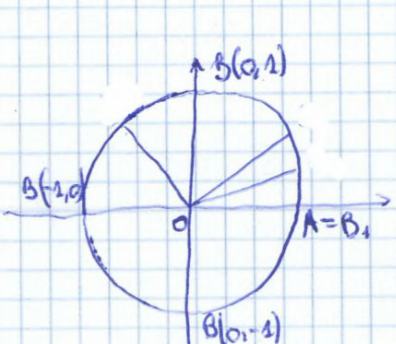
$C \rightsquigarrow C(x)$

$S \rightsquigarrow S(x)$

B PUNTO SULLA CRF DOPO UNO SPOSTAMENTO DI LUNGHEZZA x, PARTENDO DA A.

È DETTA $\cos : x \mapsto \cos(x)$ = PRIMA COORDINATA DEL PUNTO B

È DETTA $\text{sen} : x \mapsto \text{sen}(x)$ = SECONDA COORDINATA DEL PUNTO B.



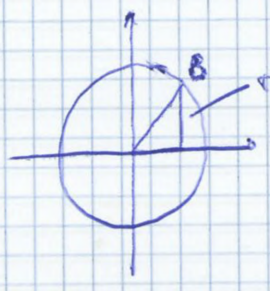
x	$\text{sen}\,x$	$\cos x$	$\text{tg}\,x$
0	0	1	0
$\pi/2$	1	0	NO
π	0	-1	0
$3/2\pi$	-1	0	NO
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

LA FUNZIONE NON È DEFINITA, LA TG NON ESISTE

→ **PROPRIETÀ FUNZIONI TRIGONOMETRICHE**

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

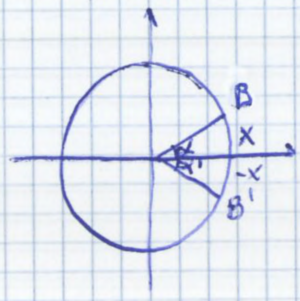
  $\forall x \in \mathbb{R}$



TRIANGOLO RETTANGOLO!!

- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

  $\cos(-x) = \cos x$

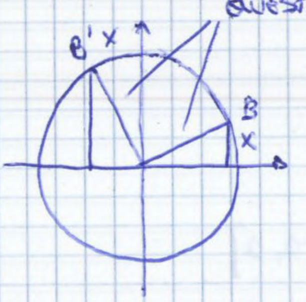


- $\cos(\pi - x) = -\cos x$

  $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

- $\operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos x$

QUESTI DUE TRIANGOLI SONO UGUALI!



$$\text{CdE}(tg) = \mathbb{R} - \left\{ \dots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots \right\}$$
$$= \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

IMMAGINE DI SEN = $[-1, 1]$

IMMAGINE DI COS = $[-1, 1]$

IMMAGINE DI TG = $\mathbb{R}$

→ **OPERAZIONI**

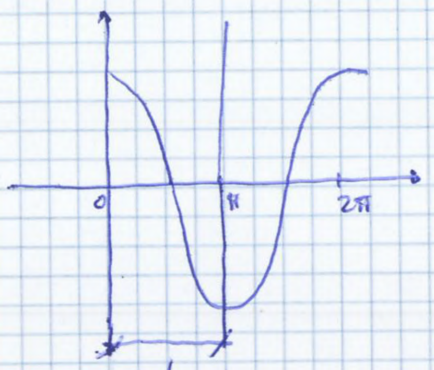
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x$

  $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

- $\cos(x+y) = \cos x \cdot \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

  $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

COSX INVERSA → arcos

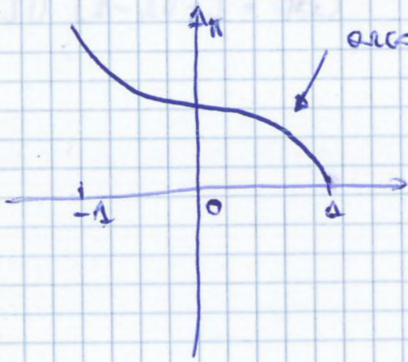


INTERVALLO CONSIDERATO POICHÉ NON È INIETTIVA

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

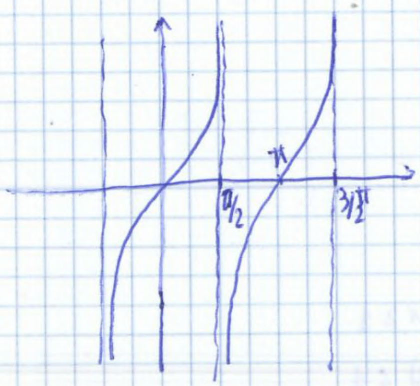
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

x	cosx
0	1
π/2	0
π	-1
arcos x	x



arcosx ASSUME SEMPRE VALORI POSITIVI!

tgx INVERSA → arctg



NON È INIETTIVA!

INTERVALLO CONSIDERATO $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

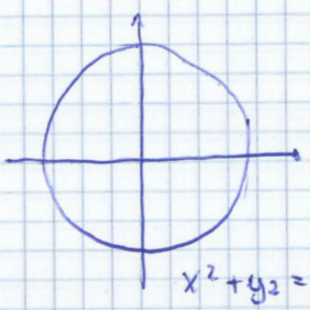
$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

o

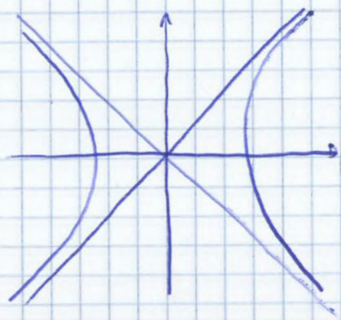
arctan

FUNZIONI IPERBOLICHE



$x^2 + y_2 = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



$x^2 - y^2 = 1$

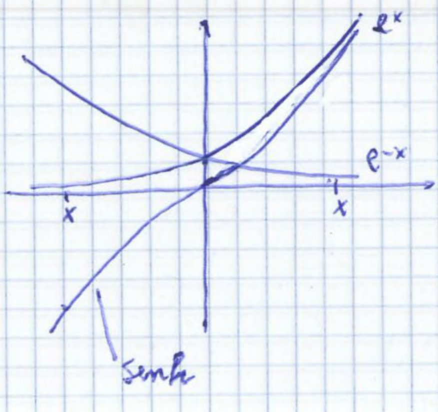
senh e cosh servono a soddisfare $x^2 - y^2 = 1$, come fa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ con $x^2 + y^2 = 1$

senh (seno iperbolico) : $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

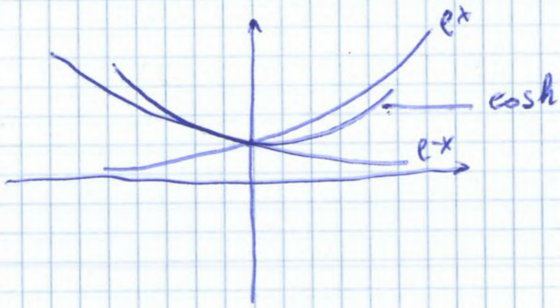
cosh (coseno iperbolico) : $x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{senh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty)$



▶ ESEMPIO

$S_1 = \left\{ a_n = \frac{1}{n} \,,\, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

$S_2 = \left\{ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,,\, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

$= \left\{ 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots \right\}$

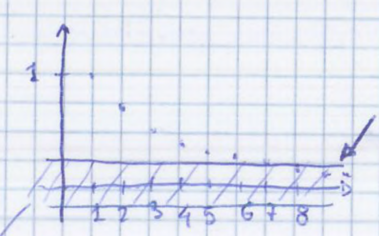
$S_3 = \left\{ (-1)^n \,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$

$= \left\{ 1, -1, 1, -1, \dots \right\}$

QUESTE SUCCESSIONI IN REALTÀ SONO TUTTE FUNZIONI PER CUI PRESO UN GENERICO n VALORE NATURALE DANNO UN NUMERO $\mathbb{R}$.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f: n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$



QUESTA FUNZIONE SI SCHIACCIA SULLO ZERO

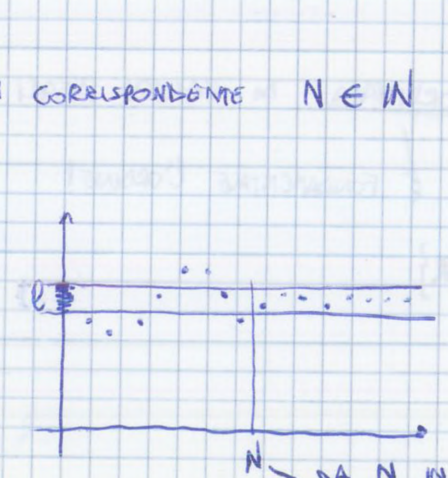
QUESTA FASCIA INDICA L'INTORNO! PIAN PIANO SI ARRIVERÀ AL PUNTO IN CUI TUTTI I VALORI CASCHERANNO NELL'INTORNO (POICHÉ SI AVVICINANO PROGRESSIVAMENTE SEMPRE DI PIÙ ALLO ZERO).

PER $n \to \infty$, VALE $a_n \to 0$

DEFINIZIONE DICIAMO CHE S CONVERGE AD $l \in \mathbb{R}$ (O "HA LIMITE" l)

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l}$$

SE $\forall I(l)$ $\exists$ UN CORRISPONDENTE $N \in \mathbb{N}$ TALE CHE $a_n \in I(l)$ $\forall n > N$



DA N IN POI, I VALORI CADONO TUTTI NELL'INTORNO DI l

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

NUMERO DI NEPERO!

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ S È DETTA MONOTONA CRESCENTE [DECRESCENTE] SE $a_{n+1} \geq a_n$ $[a_{n+1} \leq a_n]$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ SIA S MONOTONA,

ALLORA ESSA È CONVERGENTE OPPURE DIVERGENTE

INOLTRE SE MONOTONA

① • SIA S ILLIMITATA SUPERIORMENTE $\to$ DIVERGE

② • SE S SUPERIORMENTE LIMITATA $\to$ CONVERGE

a' $l = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

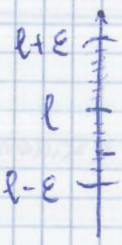
VALE LO STESSO DISCORSO SE LIMITATA INFERIORMENTE, A MENO DEL SUP, DOVE INVECE CI SARÀ INF.

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE TEOREMA}}$ $\boxed{\text{CONVERGE}}$ ②

SIA S MONOTONA CRESCENTE, SUPERIORMENTE LIMITATA

SIA, $l = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$



ALMENO UN a_N CADE IN QUESTO INTORNO

SE $l = \sup\{a_n\}$

$l - \varepsilon < a_N < \sup\{a_n\}$

TUTTI GLI $a_N \leq a_n$ $\forall n > N$

ALLA LUCE DI QUESTO:

$$l - \varepsilon < a_N < a_n < l \quad \forall n > N$$

$I\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

INTORNO VA DA $1/4$ A $3/4$

QUINDI IO VOGLIO CHE $\frac{1}{4} < a_n < \frac{3}{4}$ (DA UN CERTO N IN POI)

$$\frac{1}{4} < \frac{n+1}{2n} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{2n}{4} < n+1 < \frac{6n}{4}$$

$$2n < 4n+4 < 6n$$

$$\begin{cases} 2n > -4 \\ 2n > 4 \end{cases}$$

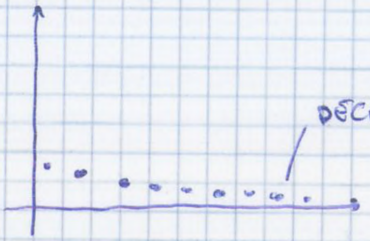
$$\begin{cases} n > -2 \\ n > 2 \end{cases} \longrightarrow n > 2 \longrightarrow \boxed{N=3}$$

3 PERCHÉ $n \in \mathbb{N}^+$ QUINDI PRENDO QUELLO SUBITO SUCCESSIVO AL 2 DA QUESTO VALORE IN POI TUTTI GLI a_n CADRANNO NELL'INTORNO

ESEMPIO

$$S = \left\{ a_n = \frac{2n}{1+n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ 0, 1, \frac{4}{5}, \frac{6}{10}, \dots \right\}$$



DECRESCE: IPOTETICAMENTE IL LIMITE SARÀ ZERO.

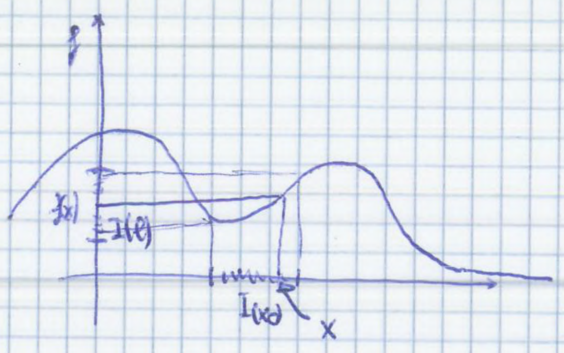
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0$$

$$I(0) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

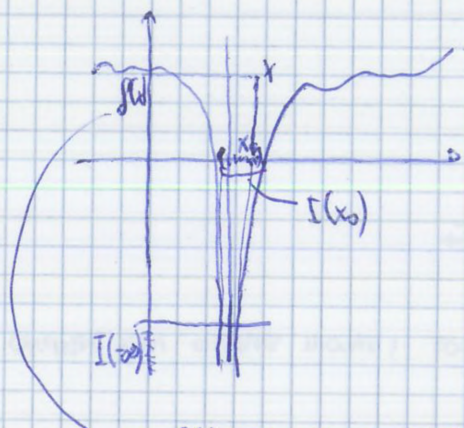
SCELTO ARBITRARIAMENTE

SEMPRE VERA $\forall n$

$$-\frac{1}{10} < \frac{2n}{1+n^2} < \frac{1}{10}$$

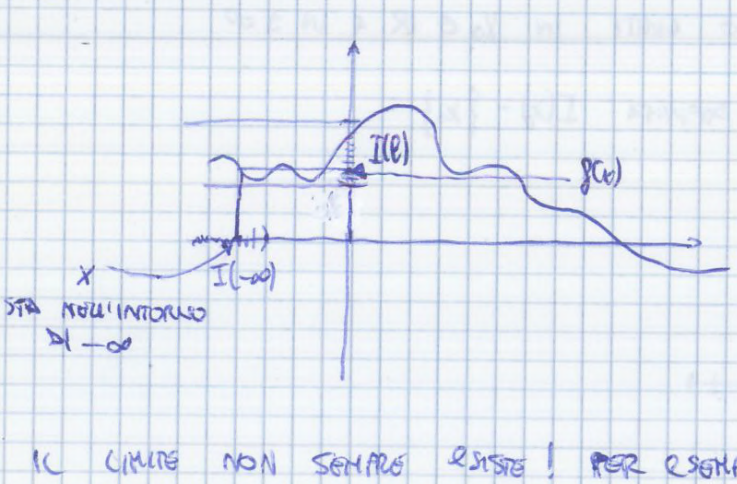


▶ $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



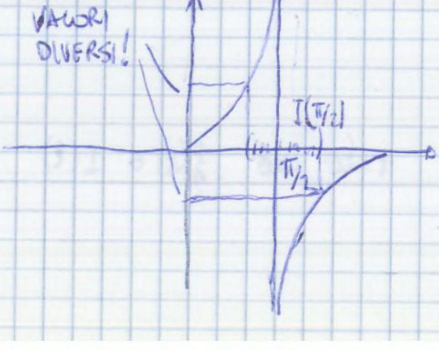
LA $f(x)$ STA IN QUELL'INTORNO DI x_0!

▶ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$



IL LIMITE NON SEMPRE ESISTE! PER ESEMPIO PER $tg\, \pi/2$

▶ $\lim_{x \to \pi/2} tg x = +\infty$? NON ESISTE!



SIA $\varepsilon < \frac{|l_2 - l_1|}{2}$

→ TROVO $I_1(x_0)$ TALE CHE $f(x)$ SIA NELL'INTORNO DI l_1 (PRESA UNA QUALSIASI x)

→ TROVO $I_2(x_0)$ TALE CHE PRESA UNA QUALSIASI x, $f(x)$ SIA NELL'INTORNO l_2

$I = I_1(x_0) \cap I_2(x_0) \quad (\neq \emptyset)$

SIA $x \in I$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in I_1(x_0) \\ f(x) \in I_2(x_0) \end{array}\right] \text{ IMPOSSIBILE}$$

SI CONCLUDE CHE l_1 NON PUÒ ESSERE DIVERSO DA l_2

LIMITI NELLA PRATICA

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 7x + 1 \longrightarrow 4 - 14 + 1 = \underline{-9!}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} \longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1-1}} = \underline{1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} \longrightarrow \frac{\infty^2+1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

▶ FORME INDETERMINATE

$\frac{0}{n} = 0$

$\frac{n}{0} = \pm\infty$

$\frac{\infty}{n} = \pm\infty$

$\frac{n}{\infty} = 0$

① $\frac{\infty}{\infty}$ ② $\frac{0}{0}$ ③ $\infty - \infty$ ④ $\infty \cdot 0$ ⑤ 0^0 ⑥ ∞^0 ⑦ 1^∞

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(x+1+\frac{|x|}{x}\right)}{\cancel{x}} \longrightarrow 0+1 \pm 1$$

PER VIA DEL VALORE ASSOLUTO POSSO AVERE DUE RISULTATI DIVERSI!

PER $\lim_{x \to 0^-} = 0$

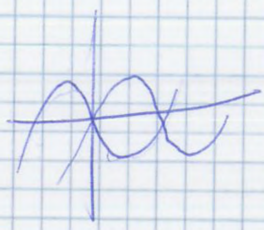
$\lim_{x \to 0^+} = 2$

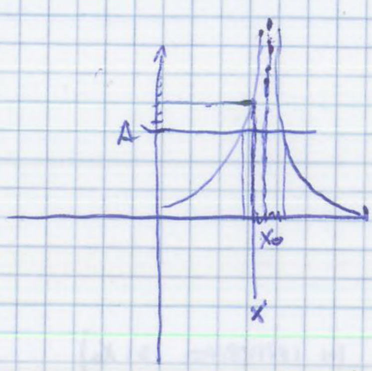
▶ $\ell = +\infty$

PRENDO $I(\ell) = (A, +\infty)$, DOVE $A > 0$

ALLORA, $\exists I(x_0) : f(x) \in I(\ell) \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$ $\qquad (f(x) \in (A, +\infty))$

QUINDI SI CONCLUDE CHE $f(x) > A > 0$





TEOREMA = RISULTATO PRINCIPALE, PIÙ IMPORTANTE

COROLLARIO = DIRETTE CONSEGUENZE DEI TEOREMI.

LEMMA = ENUNCIATI MOLTO SEMPLICI UTILIZZATI NELLA DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI.

COROLLARIO

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

SUPPONIAMO $\exists I(x_0)$ TALE CHE $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

ALLORA $\ell \geq 0$

→ DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

SIA $\ell < 0$ PER ASSURDO

ALLORA $\exists \hat{I}(x_0)$ TALE CHE $f(x) < 0 \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

PRENDIAMO UN NUOVO INTORNO, COSTITUITO DALL'INTERSEZIONE DELL'INTORNO USATO NEL COROLLARIO E QUELLO TROVATO ORA "PER ASSURDO".

$$I = I(x_0) \cap \hat{I}(x_0)$$

SIA $x \in I$

▶ $f(x) \geq 0$
▶ $f(x) < 0$

] IMPOSSIBILE! CIÒ CHE È SBAGLIATO È L'AFFERMAZIONE INIZIALE $\ell < 0$!

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO) (CASO FINITO)

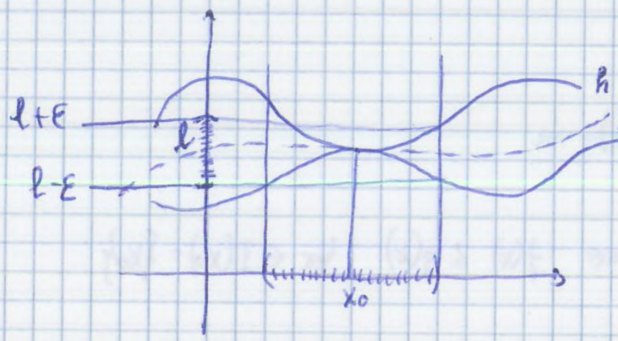
SIA $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

SIANO $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

SUPPONIAMO ESISTA UN INTORNO x_0 TALE CHE $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

ALLORA ESISTE

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$



→ DIMOSTRAZIONE

FISSIAMO A NOSTRO PIACERE $I(l)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \to \exists\, I f(x_0) : \forall x \in I f(x_0) - \{x_0\}$ VALE $f(x) \in I(l)$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \to \exists\, I h(x_0) : \forall x \in I h(x_0) - \{x_0\}$ VALE $h(x) \in I(l)$

SIA $I = I(x_0) \cap I f(x_0) \cap I h(x_0)$

SIA $x \in I \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\Downarrow$$

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

QUINDI $g(x) \in I(l)$

$\to \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

→ ALCUNE APPLICAZIONI IMMEDIATE DEL TEOREMA DEL CONFRONTO

① $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to \frac{0}{0}$?

USANDO IL TEOREMA DEL CONFRONTO ...

SIA $x > 0$

$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$

QUINDI CERCO DI DIMOSTRARE $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) \cdot g(x)| = 0 \qquad x \in I(x_0) - \{x_0\}$

faccio $x \to x_0$ $\quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|f(x) g(x)|} = |f(x)| \cdot |g(x)| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{c\,|g(x)|}$

▶ PROPRIETÀ

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$

ALLORA $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \ell + m$

→ DIMOSTRAZIONE

FISSATO $I(\ell + m)$ DEVO TROVARE $I(x_0)$ ...

$(\ell + m - \varepsilon, \ell + m + \varepsilon) \qquad \varepsilon > 0$

se $\varepsilon > 0 \to \frac{\varepsilon}{2} > 0$

PRESO $I_{\varepsilon/2}(\ell) \to \exists\, I^f(x_0) - \{x_0\} : \forall x \in I^f(x_0) - \{x_0\} \longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

PRESO $I_{\varepsilon/2}(m) \to \exists\, I^g(x_0) - \{x_0\} : \forall x \in I^g(x_0) \{x_0\} \longrightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$I(x_0) = I^f(x_0) \cap I^g(x_0)$. SIA $x \in I(x_0) - \{x_0\}$

$$\underbrace{|f(x) + g(x) - (\ell + m)|}_{\substack{\downarrow \text{ QUINDI} \\ < \varepsilon}} = |(f(x) - \ell) + (g(x) - m)| \le |f(x) - \ell| + |g(x) - m| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

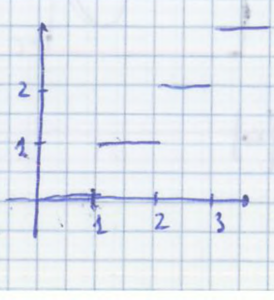
▶ CONTINUITÀ

SIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

SIA $x_0 \in Dom(f)$

DICIAMO CHE f È CONTINUA IN x_0 SE $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

NON SEMPRE È VERO → $\boxed{\text{ES.:}}$ $f(x) = [x]$



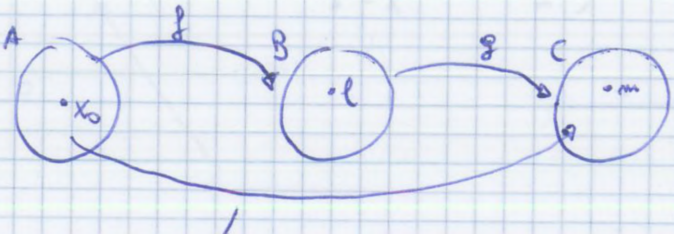
$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DI SOSTITUZIONE O SCAMBIO LIMITE - FUNZIONE CONTINUA)

SIA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. SIA g, TALE CHE g DEFINITA $I(l) - \{l\}$ E CHE

I) $l \in \mathbb{R}$, ALLORA g È CONTINUA IN l

II) $l = \pm\infty$, ALLORA $\exists \lim_{y \to l} g(y)$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$



CON IL TEOREMA POSSO PASSARE DIRETTAMENTE DA x_0 A m.

$$\text{I)} \left[\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y) = g(l) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x_0)\right)\right]$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

① $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x^2+1}{3x^2}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{3x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$!

② $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 0^+}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(\infty) = \infty$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} =$

$= \ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = \boxed{1}$

④ $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \boxed{e}$

→ DIMOSTRAZIONE (TEOREMA DI SCAMBIO)

$\lim_{y \to l} g(y)$ LO CHIAMIAMO m

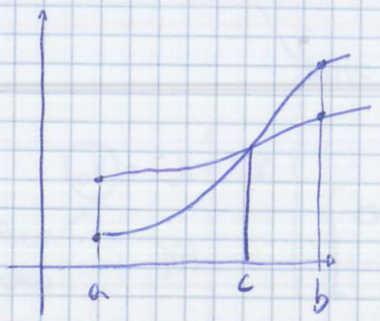
SIA $\lim_{y \to l} g(y) = m$. FISSO $I(m)$. ALLORA $\exists I(l)$ TALE CHE $g(y) \in I(m)$ $\forall y \in I(l) - \{l\}$

NOTA: POSSO TOGLIERE $- \{l\}$

COROLLARIO

SIANO f e g CONTINUE IN $[a,b]$

SIA $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$



ALLORA $\exists c \in (a,b)$ TALE CHE $f(c) = g(c)$

→ DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO $h(x) = f(x) - g(x)$

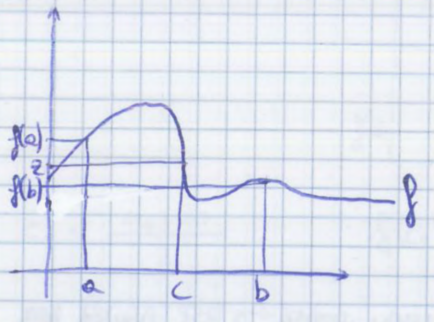
$h(a) < 0 \quad h(b) > 0 \qquad h$ CONTINUA

ALLORA PER IL TEOREMA PRECEDENTE $\exists c \in (a,b) : h(c) = 0$

→ $f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$

TEOREMA (VALORI INTERMEDI)

SIA f CONTINUA IN $[a,b]$. ALLORA ESSA ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA $f(a)$ e $f(b)$



→ DIMOSTRAZIONE

- $f(a) = f(b) \rightarrow$ OVVIO
- $f(a) > f(b) \rightarrow$ LA DIMOSTRAZIONE CHE SEGUE RIGUARDA QUESTA IPOTESI!

SIA $z \in [f(b), f(a)]$

CONSIDERIAMO $g(x) = z$

$g(a) < f(a)$

$g(b) > f(b)$

g CONTINUA

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $\longrightarrow m \neq 0 \longrightarrow y = mx + q$, DOVE $q = \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]}$ — SE IL LIMITE NON ESISTE NON POSSIAMO DEFINIRE L'ASINTOTO
- $\longrightarrow m = 0 \longrightarrow$ NO ASINTOTO
- $\longrightarrow \pm\infty \longrightarrow$ NO ASINTOTO
- $\longrightarrow \nexists \longrightarrow$ NO ASINTOTO

$\boxed{\text{ES.: } m = 0}$ $f(x) = \sqrt{x}$

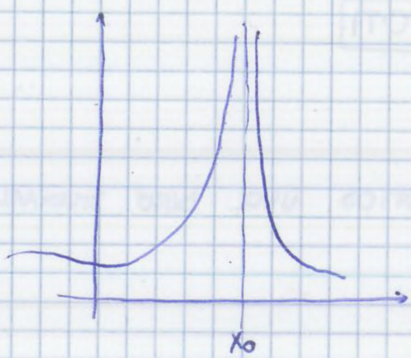
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0 \,!$$

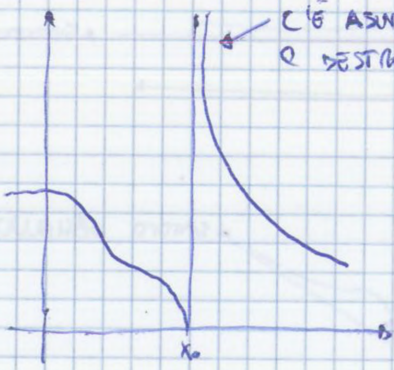
▶ ASINTOTI VERTICALI

SE $x_0 \notin Dom(f)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ [EVENTUALMENTE SOLO LIMITE DESTRO O SOLO LIMITE SINISTRO]



$x = x_0$

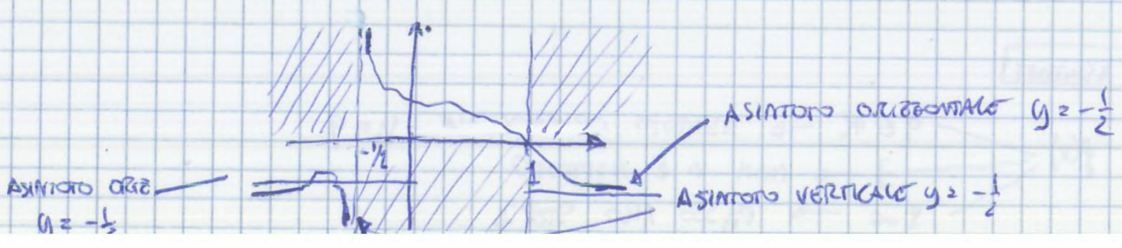


C'È ASINTOTO ANCHE SE I LIMITI SINISTRO E DESTRO SONO DIVERSI!

$x = x_0$

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1-x}{2x+1}$ $\quad Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$



ANALISI 1 - $\boxed{24/10/2013}$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$\ell \in \mathbb{R}$, $\ell < +\infty$
$\ell > -\infty$

$g(x) \neq 0$, $x \neq c$

SE $\ell \in \mathbb{R} \rightarrow f$ È CONTROLLATA DA g

$$\underbrace{f = O(g)}_{}, \; x \to c$$

QUANDO VEDO QUESTO SO CHE IL RAPPORTO DI f e g È UGUALE A ℓ.

- $\ell \neq 0$ f È <u>EQUIGRANDE</u> a g. PER $x \to c$

  STESSO ORDINE DI GRANDEZZA

  $f \asymp g$, $x \to c$

  SIMBOLO DI "<u>EQUIGRANDE</u>"

  NEL CASO IN CUI VENISSE $= 0$ POSSO FARE CAMBIO DI SCALA PER AVERE GLI STESSI ORDINI DI GRANDEZZA

  $g_1 = 60\, g$

- $\ell = 1$ f È EQUIVALENTE a g, $x \to c$

  $f \sim g$, $x \to c$

  SIMBOLO DI <u>EQUIVALENZA</u>

  SIGNIFICA CHE HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO E IN QUEL LIMITE SONO INDISTINGUIBILI $\rightarrow$ OTTENGO LO STESSO RISULTATO ANCHE INVERTENDO f e g.

- $\ell = 0$ f È TRASCURABILE RISPETTO a g, per $x \to c$

  $f = o(g)$, $x \to c$

  SIMBOLO DI "TRASCURABILE RISPETTO A..."

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \sin(x) \sim x, \; x \to 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \qquad \sin(x) = o(x), \; x \to +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin(x)}{tg(x)} = 0 \qquad \sin(x) = o(tg\, x), \; x \to \pi/2$$

▶ $x^n = o(x^m),\ x \to 0$

$$\Downarrow$$
$$n > m$$

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} = 0$$

▶ $x^n = o(x^m),\ x \to \pm\infty$

$$\Downarrow$$
$$n < m$$

$$0 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to \infty} x^{n-m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{|n-m|}}$$

INFINITESIMI ED INFINITI

$f : I_c(S) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

f è INFINITESIMA IN $c \iff \lim_{x \to c} f(x) = 0$

f è INFINITA IN $c \iff \lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

→ DEFINIZIONE

SIANO f e g INFINITESIME

- se $f \asymp g,\ x \to c \Rightarrow f$ e g SONO INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE
- se $f = o(g),\ x \to c \Rightarrow f$ è INFINITESIMA DI ORDINE SUPERIORE A g.

QUINDI TENDE A ZERO PIÙ VELOCE!
INFATTI QUANDO $f = o(g)$ IL RAPPORTO È ZERO.

- se $g = o(f),\ x \to c \Rightarrow f$ è INFINITESIMA DI ORDINE INFERIORE

→ SE NON SI VERIFICA NESSUNO DEI 3 CASI ESAMINATI VUOL DIRE CHE NON RIESCO A TOGLIERE LA FORMA INDETERMINATA (NON POSSO CALCOLARE IL LIMITE)
È IL CASO DEGLI INFINITI/INFINITESIMI INCONTROLLABILI.

ANALISI 1 - $\boxed{28/10/2013}$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\ell[\varphi(x)]^\alpha} = 1$$

ALLORA $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = \ell$$

$$f(x) \sim \ell\,[\varphi(x)]^\alpha \,,\ x \to c$$

$$p(x) = \ell\,[\varphi(x)]^\alpha$$ PARTE PRINCIPALE DI X

▶ INFINITESIMI CAMPIONE

$$\varphi(x) = x - x_0 \,,\ x_0 \in \mathbb{R}$$

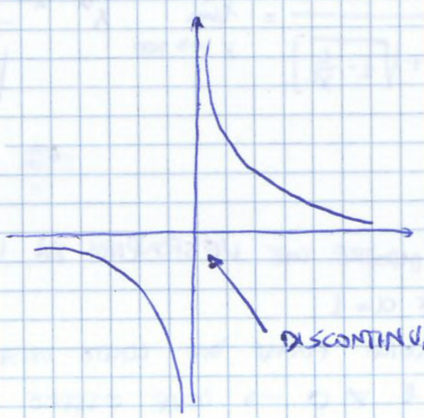
$$\varphi(x) = |x - x_0| \,,\ x_0 \in \mathbb{R}$$

x_0 DEVE ESSERE REALE SE NO IL LIMITE DIVERGEREBBE!!

▶ INFINITI CAMPIONE

$$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0} \,,\ x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x - x_0|} \,,\ x_0 \in \mathbb{R}$$



DISCONTINUA IN $x=0$ CON SALTO DI DISCONTINUITÀ PARI A 0

▶ INFINITESIMI CAMPIONE

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad c = +\infty$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x|} \qquad c = -\infty$$

▶ INFINITI CAMPIONE

$$\varphi(x) = x \qquad c = +\infty$$

$$\varphi(x) = |x| \qquad c = -\infty$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ ORDINE DI INFINITESIMO

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt[5]{x}}{x^4}$$

per $x \to +\infty$, QUINDI PRENDO LA FORMA $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{\alpha-2} + x^{\alpha-\frac{19}{5}}\right)$$

$$f(x) = x^{-2} + x^{1/5 - 4} = x^{-2} + x^{-\frac{19}{5}}$$

A QUESTO PUNTO HO DUE POSSIBILITÀ DI SCELTA, OVVERO $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = \frac{19}{5}$

TRA I DUE DEVO PRENDERE IL MINIMO! OVVERO $\alpha = 2$

DUNQUE L'ORDINE DI INFINITESIMO È 2!

$p(x) = \frac{1}{x^2}$ IL LIMITE È UGUALE A 1 POICHÉ $\underbrace{x^0}_{\downarrow\, 1} + \underbrace{x^{2-\frac{19}{5}}}_{\downarrow\, 0}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ ORDINE DI INFINITESIMO

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

RAZIONALIZZO!

per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \sqrt{x^2+1} - x$

$\sin\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

POSSO TOGLIERE IL SIN POICHÉ SE L'ARGOMENTO TENDE A ZERO, TENDE A ZERO ANCHE IL SIN

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

RAZIONALIZZATO!

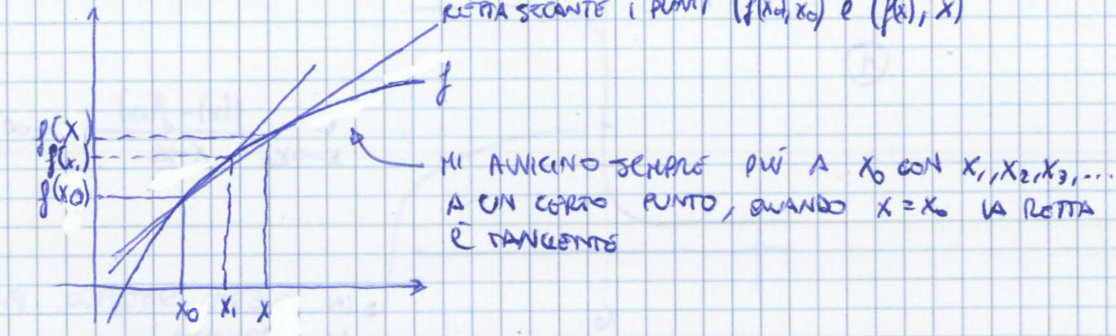
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{2}$$

$\alpha = 1$ PERCHÉ IL LIMITE DEVE DARE UN NUMERO $\neq 0$ e $\neq \infty$!

ANALISI 1 - $\boxed{31/10/2013}$

CALCOLO DIFFERENZIALE (DERIVATE)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in Dom(f)$. SIA f DEFINITA IN $I(x_0)$



$\Delta x = x - x_0$ INCREMENTO DELLA VARIABILE INDIPENDENTE

$\Delta f = f(x_0) - f(x)$ INCREMENTO DELLA VARIABILE DIPENDENTE

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ RAPPORTO INCREMENTALE

→ COEFFICIENTE ANGOLARE RETTA <u>SECANTE</u>

$$m_{\text{SECANTE}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\downarrow x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

SE ESISTE FINITO, ALLORA È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE

▶ <u>DEFINIZIONE</u>

È DETTA DERIVATA DI f IN x_0 LA QUANTITÀ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ QUANDO ESSO È FINITO $(\in \mathbb{R})$.

IN TAL CASO TALE LIMITE VIENE DENOTATO CON $f'(x_0)$ — DERIVATA (NOTAZIONE)

→ <u>ALTRE NOTAZIONI</u>:

1) $D[f(x_0)]$

2) $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$

SE QUESTA DERIVATA ESISTE ALLORA LA RETTA TANGENTE ALLA FUNZIONE CON x_0

→ RETTA PASSA IN $(x_0, f(x_0))$, COEFFICIENTE ANGOLARE $f'(x_0)$

$\boxed{\text{NOTA}}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \qquad \begin{aligned} x - x_0 &= h \\ x &= x_0 + h \end{aligned}$$

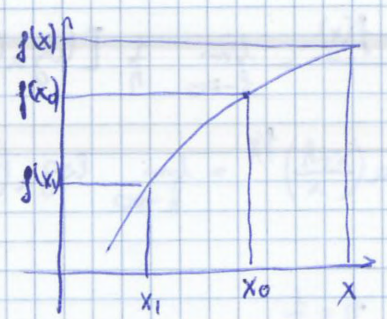
$\boxed{\text{NOTA}}$ (DERIVATA DESTRA, DERIVATA SINISTRA)

$$\left.\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ f'_-(x_0) & \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}\right] \text{ SE COINCIDONO} = f'(x)$$

$\boxed{\text{NOTA}}$

SE f È CRESCENTE IN UN CERTO INTERVALLO I, ALLORA f' È ≥ 0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



- NEL CASO DI $f(x)$ È ≥ 0 POICHÉ NEL LIMITE IL RAPPORTO $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ È $\frac{\text{POSITIVO}}{\text{POSITIVO}}$
- È POSITIVO ANCHE NEL SECONDO CASO $(f(x_1))$ POICHÉ IL RAPPORTO È $\frac{\text{NEGATIVO}}{\text{NEGATIVO}}$!

QUINDI QUANDO LA FUNZIONE È CRESCENTE, DERIVATA È POSITIVA.

▶ DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

(1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = x^0 = 1$ $\qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

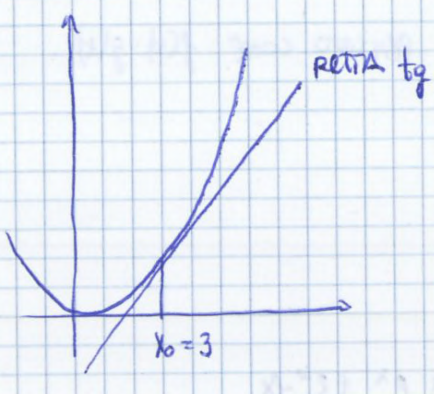
$f(x) = a \quad a \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

ESEMPIO

Data $f(x)=x^2$, TROVARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA tg a f NEL PUNTO $x_0=3$



$$y = f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{=9}$$

$$f'(x) = D[x^2] = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$y = 6 \cdot (x-3) + 9$$

▶ REGOLE DERIVAZIONE

① $D[f(x) \pm g(x)] = D[f(x)] \pm D[g(x)]$

→ DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

STESSA COSA PER LA SOMMA!

② $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

→ DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) \overbrace{- f(x)\, g(x+h) + f(x)\, g(x+h)}^{\text{SOMMO E SOTTRAGGO } f(x) g(x+h)} - f(x)\, g(x)}{h}$$

→ DIMOSTRAZIONE

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

SIA $\ell(z) = \dfrac{f(y+z)-f(y)}{z} + f'(y)$ $\qquad \ell(0)=0$

ℓ è CONTINUA IN $z=0$

$$\lim_{z\to 0} \ell(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(y+z)-f(y)}{z} - f'(y) = f'(y) - f'(y) = 0$$

INOLTRE

$$\boxed{f(y+z)-f(y) = z\cdot(\ell(z)+f'(y))}$$

→ $g(x) = y$ $\qquad g(x+h)-g(x) = z$ $\qquad g(x+h) = y+z$

DOBBIAMO CALCOLARE

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(y+z)-f(y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{z(\ell(z)+f'(y))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot (\ell(z)+f'(y)) =$$

$$g'(x)\cdot(0+f'(g(x))$$

$$= g'(x)\cdot f'(g(x))$$

ESEMPIO

$h(x) = e^{2x+1}$

$= f(g(x))$

$f(x) = e^x$

$g(x) = 2x+1$

$f'(x) = e^x$

$g'(x) = D[2x+1]$

$= D[2\cdot x] + D[1]$

$= 2 + 0$

formula $h(x) = c\cdot f(x) \longrightarrow \boxed{h'(x) = c\cdot f'(x)}$ AGGIUNGI A FORMULARIO!

→ DIMOSTRAZIONE $\quad h'(x) = 0\cdot f'(x) + c\cdot f'(x) = c\cdot f'(x)$

ESEMPIO

$h(x) = x^{\alpha}$ CONSIDERIAMO IL CASO CON $\underline{x<0}$

$= \left(-g(x)\right)^{\alpha}$

$= (-1)^{\alpha} \left(g(x)\right)^{\alpha}$

$g(x) = -x$

$g(x) \geq 0$

$h'(x) = (-1)^{\alpha} \cdot \alpha \left(g(x)\right)^{\alpha-1} \cdot g'(x) =$

$= (-1)^{\alpha} \cdot \alpha \left(g(x)\right)^{\alpha-1} \cdot (-1) =$

$= (-1)^{\alpha+1} \cdot \alpha \left(g(x)\right)^{\alpha-1} =$

$= \alpha (-1)^{\alpha-1} \cdot \cancel{(-1)^2} \cdot \left(g(x)\right)^{\alpha-1} =$

$= \alpha \left(-1\, g(x)\right)^{\alpha-1} = \alpha\, x^{\alpha-1}$

FUNZIONI ELEMENTARI (7)

$h(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

$= f(g(x))$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g(x) = x \ln a \qquad g'(x) = \ln a \cdot 1$

$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x) =$

$= e^{g(x)} \cdot \ln a =$

$= e^{x \ln a} \cdot \ln a =$

$= \boxed{a^x \cdot \ln a}$ per $a>0$

FUNZIONI ELEMENTARI (8)

$h(x) = \operatorname{tg} x$

$= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$= f(x)/g(x) \longrightarrow h'(x) = \dfrac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{(g(x))^2}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x$

$g(x) = \cos x \qquad g'(x) = -\operatorname{sen} x$

2 POSSIBILI RISULTATI!

$h'(x) = \dfrac{\cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

② $D[\arccos x] = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

③ $D[\operatorname{arctg} x] = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$

ESEMPIO

$h(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$

$h'(x) = ?$

$= f(g(x))$ perché $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$g(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{1/2} \longrightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

$= \frac{1}{3}(g(x))^{-2/3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$

$= \frac{1}{3}(x+\sqrt{x})^{-2/3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

ESERCIZIO

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ $(x>1)$

$h'(x) = ?$

$= (\ln x)^{-1/2}$

$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$

$g(x) = \ln x \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{1}{2}(g(x))^{-3/2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{(\ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x} =$

ESERCIZIO

$f(x) = \ln\left(\sqrt{(x-1)^3}\right)$ $(x>1)$

$= g_1(g_2(g_3(x)))$

ANALISI 1 - 06/11/2013

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \text{DOM}(f)$

SUPPONIAMO CHE NON ESISTA f' IN x_0 $\to$ QUINDI x_0 PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

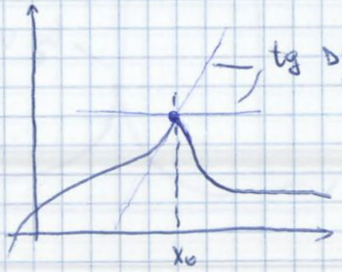
FUNZIONE È DEFINITA MA NON DERIVABILE!

POTREBBERO ESISTERE lim DESTRO E SINISTRO $\to \exists\, f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$

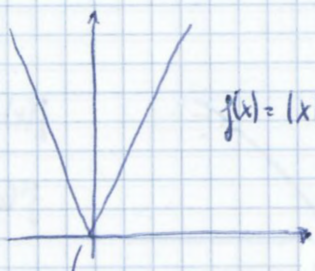
LA CLASSIFICAZIONE VIENE FATTA IN BASE AL COMPORTAMENTO DI $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$

x_0 è PUNTO ANGOLOSO se $\exists\, f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ MA SONO DIVERSE TRA LORO OPPURE QUANDO ALMENO UNA DELLE DUE ASSUME VALORE FINITO.

ESEMPIO



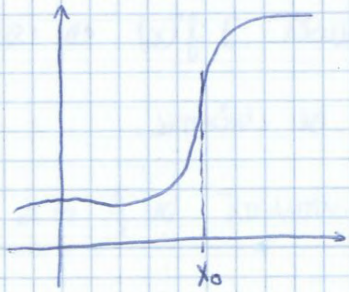
tg DIVERSE PER I RAMI SINISTRO/DESTRO DELLA CURVA.



PUNTO ANGOLOSO

x_0 è PUNTO A tg VERTICALE se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ ASSUMONO VALORE ∞ DI SEGNO CONCORDE, OVVERO ENTRAMBI $+\infty$ O ENTRAMBI $-\infty$.

ESEMPIO



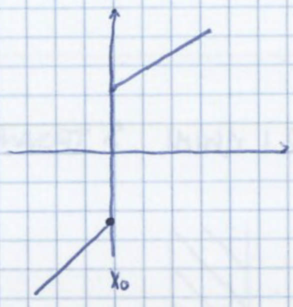
$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 + x & x < 0 \end{cases}$$

$f'(x) = +1$, $x > 0$ $\qquad$ $f'(x) = +1$, $x < 0$ $\longrightarrow$ DOVREI AFFERMARE CHE $f'(0) = 1$

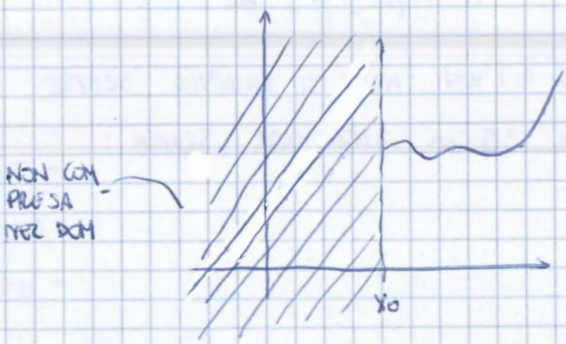
MA NON POSSO PERCHÉ NON È CONTINUA!

PER QUESTO DEVO AVERE f CONTINUA IN x_0



$\boxed{\text{NOTA}}$

CERTE VOLTE NON ESISTE $f'(x_0)$, MA ESISTE $f'_+(x_0)$ o $f'_-(x_0)$ PERCHÉ x_0 È UN ESTREMO DEL DOMINIO



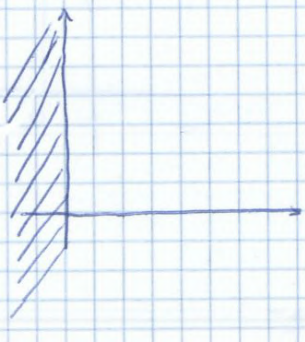
IN QUESTI CASI SI DICE CHE f È DERIVABILE IN x_0 $\quad f'(x_0) = f'_+(x_0)$ $\quad$ (OPPURE $f'(x_0) = f'_-(x_0)$)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$f(x) = x^{3/2} = \sqrt[2]{x^3}$

$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $\qquad$ $Dom(f) = \{x \geq 0\}$

$f'(0) = \frac{3}{2}\sqrt{0} = 0$



MA, PER IPOTESI, $\exists f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$

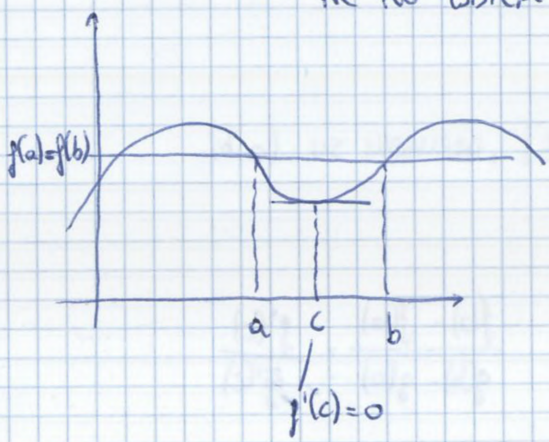
$\rightarrow$ NECESSARIAMENTE $= 0 \rightarrow f'(c) = 0$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (ROLLE)

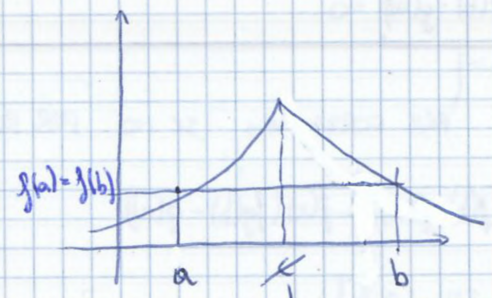
SIA $f(x)$ CONTINUA SU $[a,b]$ E DERIVABILE SU (a,b)

SIA $f(a) = f(b)$ $\rightarrow$ ALLORA ESISTE $c \in (a,b)$ TALE CHE $f'(c) = 0$

NE PUÒ ESISTERE ANCHE PIÙ DI UNO!



SE LA FUNZIONE NON FOSSE OVUNQUE DERIVABILE SU (a,b):



DIMOSTRAZIONE

f CONTINUA IN $[a,b]$, f DERIVABILE IN (a,b), $f(a) = f(b)$

$\exists$ MIN, MAX SU $[a,b]$ PER WEIERSTRASS

1) $m = M \rightarrow f$ è COSTANTE $\quad f'(x) = k \quad f'(x) = 0$

$f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a,b)$

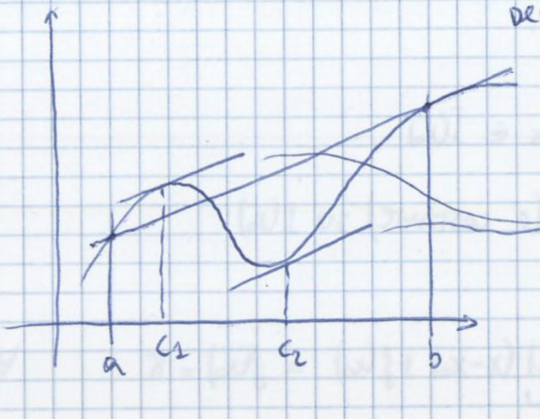
2) $m < M \rightarrow$ ALLORA $m \leq f(a) = f(b) \leq M$

ALMENO UNA DELLE DUE DISUGUAGLIANZE È STRETTA

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (LAGRANGE o VALOR MEDIO)

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$, DERIVABILE SU (a,b)

ALLORA $\exists c \in (a,b)$ TALE CHE $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ → COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA CHE UNISCE I PUNTI $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$



COEFFICIENTE ANGOLARE UGUALE A $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$! SONO QUINDI PARALLELE

DIMOSTRAZIONE

$h(x) = r(x) - f(x)$

h è CONTINUA IN $[a,b]$

h è DERIVABILE IN (a,b)

$h(a) = h(b) = 0$

QUINDI PER ROLLE $\exists c \in (a,b)$ TALE CHE $h'(c) = 0$

$h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a) - f(x) \longrightarrow h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1 - f'(x)$

USATA LA FORMULA DELLA RETTA!
$y - y_0 = m(x - x_0)$

SE ANZICHÉ $f'(x)$ METTO $f'(c)$

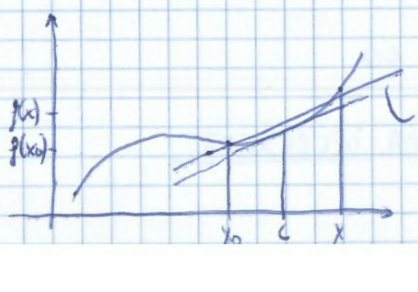
$h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1 - f'(c) = 0$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$

SIA f DERIVABILE IN $I(x_0)$

SIA $x > x_0$ (PUÒ ESSERE CHIARAMENTE ANCHE $x < x_0$)
$x \in I(x_0)$

ALLORA $\exists c \in (x_0, x)$ TALE CHE $f(x) = f'(c)(x - x_0) + f(x_0)$

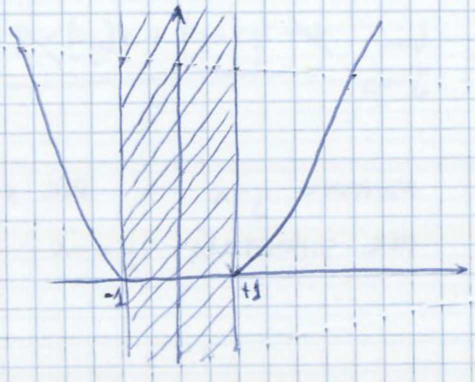


COEFFICIENTE ANGOLARE PARI A $f'(c)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ - STUDIO DI FUNZIONI

$f(x) = \sqrt{x^2-1}$

1) Cde $\rightarrow x^2-1 \geq 0 \qquad x^2 \geq 1 \qquad x \leq -1 \vee x \geq 1 \qquad Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



LA FUNZIONE È PARI

2) SEGNO

$f(x) \geq 0 \rightarrow \forall x \in Dom(f)$

3) LIMITI

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1-1 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

4) ASINTOTI

(solo $x \to +\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ QUINDI NO ASINTOTI ORIZZONTALI

ASINTOTO OBLIQUO $\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 = m$

$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \infty - \infty$

$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1-1/x^2} - 1\right) \rightarrow \infty \cdot 0$

USO ORDINE DI INFINITO:

$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{1-1/x^2}-1\right)}{1/x}$

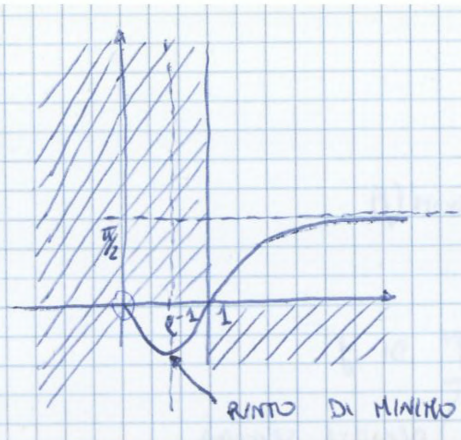
$z^3 - 8 = (z-2)(z^2+2z+4)$

$\frac{-2 \pm \sqrt{12}\, i}{2} \qquad -1+6i \qquad -1-6i$

$z^2 = \pm\sqrt{-4} \qquad z^2 = \pm 2i$

$z = \pm\sqrt{+2i} \qquad \pm\sqrt{-2i}$

$(z^4+4)^2$



3) LIMITI

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(x\ln x) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln x\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x\ln x) = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$$ ASINTOTO ORIZZONTALE $y = \frac{\pi}{2}$

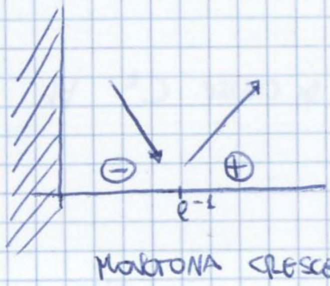
4) STUDIO DELLA MONOTONIA

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x\ln x)^2}\cdot\left[1\ln x + x\,\frac{1}{x}\right] = \underbrace{\frac{1}{1+(x\ln x)^2}}_{\text{SEMPRE POSITIVO!}}\cdot(\ln x + 1)$$

$f'(x) \geq 0 \longrightarrow \ln x + 1 \geq 0$

$\ln x \geq -1 = \ln e^{-1}$

$x \geq e^{-1}$



MONOTONA CRESCENTE PER $x > e^{-1}$

MONOTONA DECRESCENTE PER $0 < x < e^{-1}$

NON ABBIAMO NESSUN PUNTO DI MASSIMO POICHÉ $\frac{\pi}{2}$ È ASINTOTO E NON VIENE MAI TOCCATO E 0 NON COMPRESO NEL DOMINIO.

DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0} \text{ OPPURE } \frac{\infty}{\infty}$$

SE $\exists f', g'$ IN $I(x_0)$, CON $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I(x_0)$ E SE $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (EVENTUALMENTE ANCHE $\pm\infty$)

ALLORA $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

→ TALE REGOLA PUÒ ESSERE APPLICATA RIPETUTAMENTE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ESEMPIO

→ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0}$ QUESTO LIMITE DOVREBBE FARE $\frac{1}{2}$

$\overset{DH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{0}{0}$

VUOL DIRE "APPLICO DE L'HÔPITAL"

$\overset{DH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

→ $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{DH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} \to \frac{\infty}{1} = \infty$

→ $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{DH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

NON DERIVO TUTTO IL RAPPORTO, BENSÌ DERIVO NUMERATORE E DENOMINATORE SEPARATAMENTE!

→ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{2}{\operatorname{sen} x} \to \frac{1}{0^+} - \frac{2}{0^+} = \infty - \infty$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{x \operatorname{sen} x} \to \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$

FACCIO MCM PER RICONDURMI A UNA FORMA RISOLVIBILE CON DE L'HÔPITAL