NUMERO: 1234 DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Lamberti D.

MATERIA: Analisi I Eserc.

Prof. Pellerey_Grillo

ESERCITAZIONE ANALISI - $\boxed{01/10/2013}$

1) $A \cap B = \emptyset$
$\Leftrightarrow$

a) $A \in B$ NON PUÒ APPARTENERE, AL MASSIMO È CONTENUTO! (C)
b) $\forall a \in A, \forall b \in B \rightarrow a \in b$
c) $\forall a \in A, \forall b \in B \rightarrow a = b$
d) $\forall b \in B \rightarrow b \in A$
~~e)~~ $\forall a \in A, \forall b \in B \rightarrow a \neq b$ RISPOSTA ESATTA!

2) $\forall x \in A \rightarrow 2 \leq x < 3$

ORA DOBBIAMO NEGARE QUESTA PROPOSIZIONE

$$\exists x \in A : (x < 2) \vee (x \geq 3)$$

IN ANALISI UNA NEGAZIONE È UN'OPERAZIONE CHE CONSISTE, PER UNA PROPOSIZIONE DI QUESTO TIPO, IN TRE FASI:

- INVERTIRE IL QUANTIFICATORE: $\forall x \rightarrow \exists x$
- CAMBIARE ALLORA IN TALE CHE (UN'IMPLICAZIONE DIVENTA UNA SOLUZIONE)
- CAMBIARE IL SEGNO DI MINORAZIONE/MAGGIORAZIONE

SE CONTRADDICO INVECE $\forall x \in A \rightarrow x \notin [2,3)$

3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x > \delta \rightarrow f(x) > \varepsilon$

CONTRADDICO

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \forall x > \delta \rightarrow f(x) \leq \varepsilon$$

$\boxed{\text{DISEQUAZIONI}}$

$\frac{1-x}{1+x} < 1$ LA SOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE È UN INSIEME DI VALORI

NON POSSO TOGLIERE $x+1$ MOLTIPLICANDO $(x+1)$ DA ENTRAMBE LE PARTI PERCHÉ NON SO QUAL È IL SEGNO DEL DENOMINATORE! RISCHIEREI DI MOLTIPLICARE PER UNA QUANTITÀ NEGATIVA!

$$\frac{1-x}{1+x} - 1 < 0$$

$$\frac{\cancel{1} - x - \cancel{1} - x}{1+x} < 0$$

$$-2\frac{x}{1+x} < 0 \qquad 2\frac{x}{1+x} > 0$$

PROF. GRILLO - ANALISI 1 - $\boxed{03/10/2013}$

ESERCITAZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}$

$SUP(A)$ = è il più piccolo dei maggioranti di A

= è superiore se vale: $-1)\ \forall x \in A,\ x \leq \sup(A)$

$-2)\ \forall r < \sup(A),\ \exists x \in A : r < x \leq \sup(A)$

$\downarrow$

quindi $\exists \varepsilon > 0 : r = \sup(A) - \varepsilon : \exists x \in A : \underline{\sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A)}$

$= r < x \leq \sup(A)$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$INF(A)$ è inferiore di A se vale: $-1)\ \forall x \in A,\ x \geq \inf(A)$

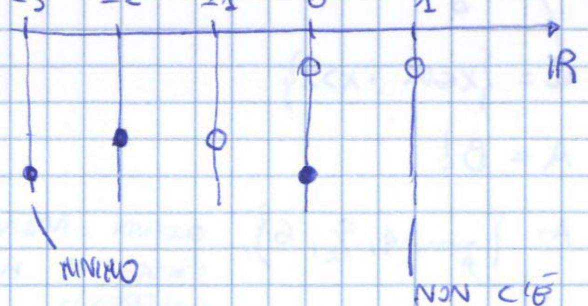
$-2)\ \exists \varepsilon > 0 : \exists x \in A \mid \inf(A) \leq x < \inf(A) + \varepsilon$

$\forall r > \inf(A)\ \exists x \in A$

$\inf(A) < x < r \rightarrow r = \inf(A) + \varepsilon$

ESERCIZIO 1

$A = (0,1) \cup [-2,-1) \cup \{-3,0\}$



NON C'È MASSIMO PERCHÉ NON PUÒ ESSERE RAGGIUNTO 1, SICCOME INTERVALLO APERTO.

ESERCIZIO 2

$A \subseteq \mathbb{R} : \sup(A) = 2$

$\inf(A) = 0$

a) È NECESSARIAMENTE VERO CHE 2 APPARTIENE ALL'INSIEME(A) FALSO, PERCHÉ NELLA DEF. $\inf(A) \leq x < \inf(A) + \varepsilon$

$B = \left\{ x < 3 - \frac{3}{m} : m \in \mathbb{N}^+ \right\}$

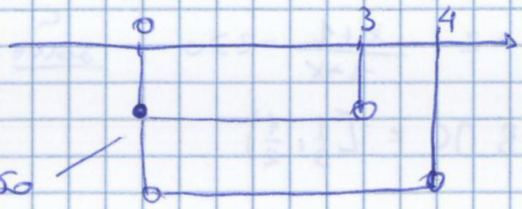
$X_m = 3 - \frac{3}{m}$

$X_1 = 3 - \frac{3}{1} = 0$

$X_2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$X_3 = 3 - \frac{3}{3} = 2$

$X_\infty = 3$ (LIMITE = TENDE A 3^-)



LO 0 È ESCLUSO PERCHÉ $0 < x < 4$

$A = \left\{ \frac{3}{2}, 2, \dots \right\}$ (3)

AMMETTE MINIMO $= \frac{3}{2}$, MA NON MASSIMO.

ESERCIZIO 4

$A, B \subseteq \mathbb{R}$: $\inf(A) = \inf(B) = 2$

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a \in B$ FALSA

b) $\exists \varepsilon > 0 : \forall a \in A, \forall b \in B \rightarrow a, b \in [2, 2+\varepsilon)$ FALSA

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in B : b \in A$ FALSA

d) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A, \exists b \in B : a, b \in (2, 2+\varepsilon)$ FALSA ← INF. DEVE ESSERE COMPRESO!

e) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A, \exists b \in B : a, b \in [2, 2+\varepsilon)$ VERA!

ESERCIZIO 5

QUALE DELLE SEGUENTI AFFERMAZIONI NON È VERA?

a) SE $a = \inf(A) \rightarrow a$ È UN MINORANTE DI A VERA, INFATTI L'INF È IL MAGGIORE DEI MINORANTI DI A

b) SE $a = \inf(A) \rightarrow a$ È MASSIMO TRA I MINORANTI VERA

c) SE $a = \text{MINIMO}(A) \rightarrow a$ È UGUALE A $\inf(A)$ VERA

d) SE a È $\inf(A)$, ALLORA $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ ALMENO UN $\bar{x} \in A : a \leq \bar{x} < a + \varepsilon$

VERA

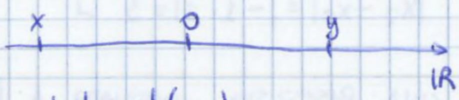
ESERCITAZIONE MATEMATICA ANALISI 1 - $\boxed{07/10/2013}$

$\boxed{\text{VALORE ASSOLUTO}}$ o MODULO = OPERAZIONE CHE ASSOCIA A UN NUMERO REALE ZERO (SE ESSO È ZERO) OPPURE IL SUO VALORE POSITIVO

PIÙ APPROPRIATO SE SI PARLA DI NUMERI COMPLESSI

$\boxed{\text{IL VALORE ASSOLUTO È UNA FUNZIONE}}$

$$|\ \ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$



$$|x| = d(x,0)$$

DISTANZA DI x DA 0

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$

DISTANZA DEFINITA IN $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

SI PRENDONO COPPIE DI VALORI REALI
LA $\times$ INDICA "PRODOTTO CARTESIANO"

$$d(x,y) \in \mathbb{R}_0^+$$

PROPRIETÀ DISTANZA:
- $d(x,y) = d(y,x)$
- d TRA DUE NUMERI x,y È SEMPRE UN NUMERO REALE, ZERO COMPRESO
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$

  $x = -x \to$ L'UNICO NUMERO REALE PER CUI È VERA QUESTA UGUAGLIANZA È $x = 0$

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

  per $x = -5$ ABBIAMO $-5 \leq -5 \leq 5$

- $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x,y \in \mathbb{R}$

  SI VERIFICA QUANDO UN NUMERO È POSITIVO E L'ALTRO È NEGATIVO!

- $|x-y| = d(x,y)$

ESEMPIO

$|x-2| = 3$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$$

1. $x \geq 2 \quad x - 2 = 3 \longrightarrow \underline{x_1 = 5}$

(1.1) $x \geq 2$ per $x \geq 0$

(1.2) $-x \geq 2$ per $x < 0$

(2) $-|x| + 2 < 3$ per $|x| < 2$

DI QUI I CONSEGUENTI 2 CASI

$\boxed{\text{OPERAZIONI SUI GRAFICI}}$ = OPERAZIONI CHE CI PERMETTONO DI TRASFORMARE DOMINIO O CODOMINIO IN MODO DA TRARNE VANTAGGIO

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1}, \quad x \neq 1$$

IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2$ TALE

$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ CARTESIANO $\mathbb{R}$

CHE $x \in$ DOMINIO DI f e $y = f(x) \in$ IMMAGINE DI f.

$$\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{DOMINIO } f,\ y = f(x) \in \text{IMMAG. } f\}$$

LETTERA CON CUI SI INDICA IL GRAFICO DI FUNZIONE

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$$\begin{array}{r|l} x-3 & x-1 \\ \hline x-1 & 1 \\ \hline / \quad -2 & \end{array}$$

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

QUINDI $f(x) = 1 + \dfrac{-2}{x-1} = 1 - \dfrac{2}{x-1}$

$\longrightarrow g_1(x) = f(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$

FACENDO $+k$ TRASLO IL GRAFICO! È COME SE SPOSTASSI L'ASSE x IN SU/GIÙ

SE PRENDO $k = -1$, TROVO CHE $g_1(x) = -\dfrac{2}{x-1}$

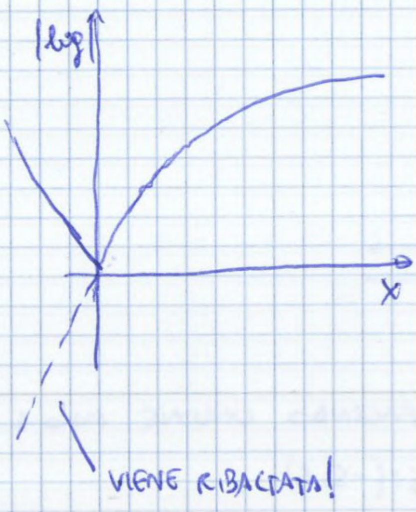
$\longrightarrow g_2(x) = c\, g_1(x), \quad c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

TRANNE LO ZERO

IL PEDICE ENUMERA LE OPERAZIONI CHE STO COMPIENDO

$$g_2(x) = \frac{-1}{x-1}$$

$$(\text{Abs} \circ f)(x) = |\log(x)|$$



ESERCITAZIONE ANALISI 1 - $\boxed{08/10/2013}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ - VALORI ASSOLUTI

$K = \{x \in \mathbb{R} : |6-7x| \leq 5\}$

~~a)~~ $K = \left[\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right]$

b) $K = \left(\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$ ← DEVONO ESSERE COMPRESI! C'È $\leq$

c) $K = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$

d) $K = \left(\frac{1}{7}, +\infty\right)$

RENDEREBBE L'ARGOMENTO DEL VALORE ASSOLUTO ENORME (∞) E QUINDI NON ≤ 5

e) $K = \begin{cases} 6-7x \leq 5, & x \geq 0 \\ 7x-6 \leq 5, & x < 0 \end{cases}$

NON HA SENSO! DOVEVA ESSERE $6-7x \geq 0$

$6-7x < 0$

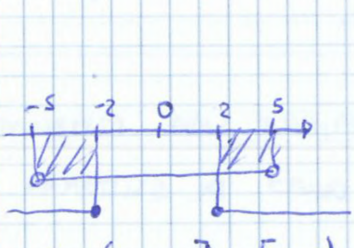
$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ - VALORI ASSOLUTI

$||x|-2| < 3$

① $|x|-2 \geq 0 \longrightarrow |x| \geq 2 \longrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$

$|x| - 2 < 3$

$|x| < 5 \rightarrow -5 < x < 5$



$S : (-5, -2] \cup [2, 5)$

$|f(x)| \Rightarrow 4$ leggi

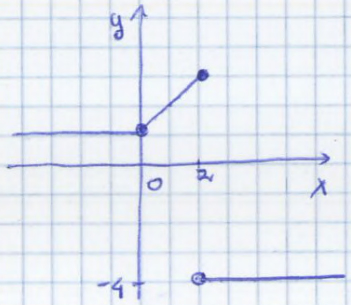
SCEGLIERE $|f(x)|$ È COME ESPLICITARE 4 LEGGI AL FINE DI COSTITUIRE IL GRAFICO (IN QUESTO CASO!)

ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ \forall x \leq 0 \\ x+1, \ \forall x \in (0,2] \\ -4, \ \forall x > 2 \end{cases}$$

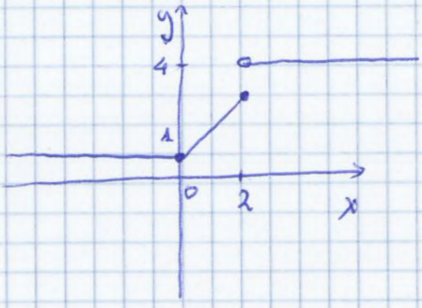
TRE LEGGI



SE METTO IL VALORE ASSOLUTO...

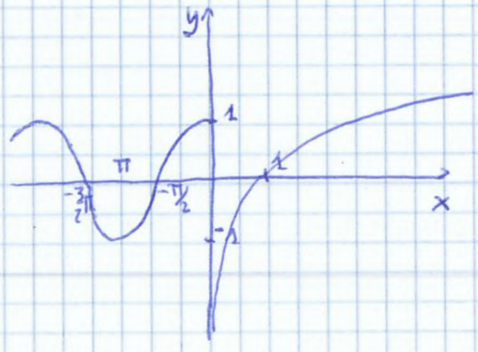
$$|f(x)| = \begin{cases} 1, \ \forall x \leq 0 \\ x+1, \ \forall x \in (0,2] \\ 4, \ \forall x > 2 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO, SEMPRE 3 LEGGI



ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), \ x \in [-2\pi, 0] \\ \log(x), \ x \in (0, +\infty) \end{cases}$$



ESERCITAZIONE ANALISI 1 - $\boxed{14-10-2013}$

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ - (DOMINI, IMMAGINE, SEGNO)

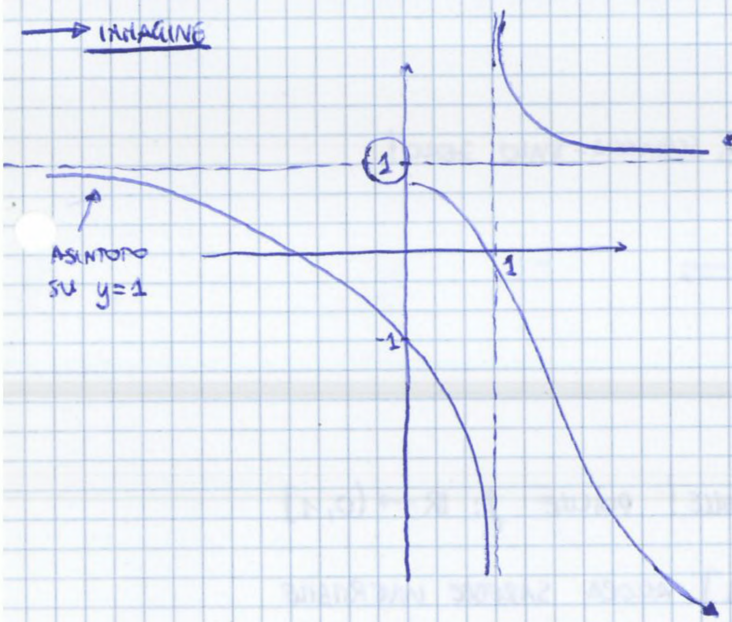
$\boxed{\text{DOMINIO / IMMAGINE / INVERSA}}$ ①

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

→ $C.d.E = x - 1 \neq 0 \quad x \neq 1 \rightarrow C.d.E = \mathbb{R} - \{1\}$

$= Dom(f)$

→ IMMAGINE



$f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$

se $x > 1 \quad \frac{+}{+} = \oplus \rightarrow \frac{n}{0^+}$

se $x < 1 \quad \frac{+}{-} = \ominus \rightarrow \frac{n}{0^-}$

QUINDI, IMMAGINE $(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

→ INVERSA

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ è INVERTIBILE! POICHÉ È BIUNIVOCA

INVERSA: $\mathbb{R} - \{1\} \leftarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$x \leftarrow y$

$\frac{x+1}{x-1} \neq 0 \rightarrow x+1 = yx - y \qquad (x-1 \neq 0)$

$x - yx = -y - 1$

$x(1-y) = -y-1$

$x(y-1) = y+1 \qquad (y-1 \neq 0)$

$x = \frac{y+1}{y-1} = g(y)$

FUNZIONE INVERSA

$f: \mathbb{R} \to [2, +\infty)$ NON INVERTIBILE

$f: \mathbb{R}^+ \to [2, +\infty)$ INVERTIBILE!

$y = 1 + \sqrt{x^2+1}$

$\sqrt{x^2+1} = y - 1$

$x^2 + 1 = (y-1)^2$

$x^2 = (y-1)^2 - 1$

$\underline{x = \sqrt{(y-1)^2 - 1}}$

INVERSA RELATIVA A $f: \mathbb{R}^+ \to [2, +\infty)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 4

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x+1}}$$

$\text{DOM}(f) = \mathbb{R} - \begin{cases} x - \sqrt{x+1} = 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$

TOLGO I VALORI PER CUI SI ANNULLA IL DENOMINATORE E I VALORI PER CUI LA RADICE NON ESISTE

$\to \quad x = \sqrt{x+1}$

$x^2 = x + 1 \to x + 1 > 0 \to \underline{x > -1 \ \ \& \ \ x \geq 0} \to x \geq 0$

$x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \cancel{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

LA ESCLUDO PERCHÉ NON È MAGGIORE/UGUALE A ZERO

$x + 1 < 0 \qquad x < -1$

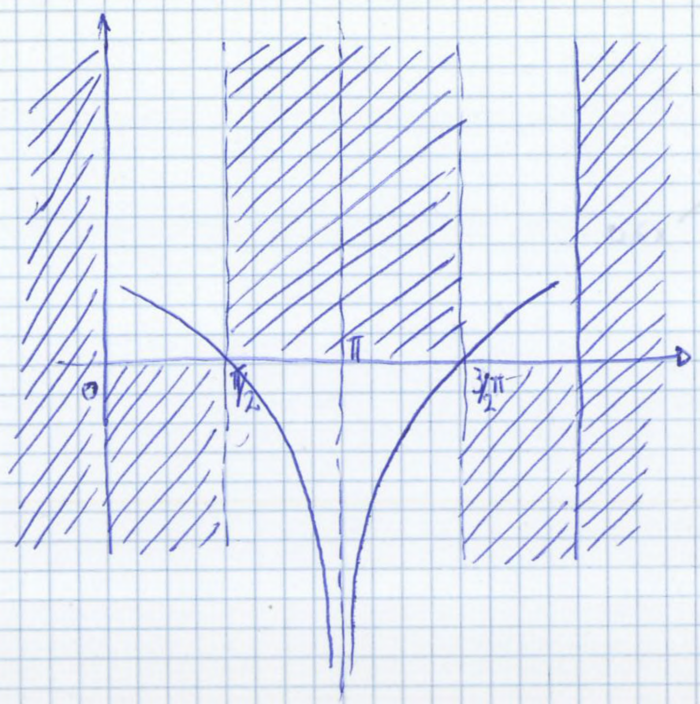
$$\text{DOM}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} - (-\infty, -1) = \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

$\text{IMMAGINE}(f) = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 5

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \qquad \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ \text{SEMPRE, } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\text{DOM}(f) = [0, +\infty)$



$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 8

$$f(x) = \ln\left(\underbrace{e^x}_{+} + \underbrace{\sqrt{1+e^{3x}}}_{+}\right)$$

→ $\underline{\text{DOM}}(f) = \mathbb{R}$

→ $\underline{\text{SEGNO}(f)}$ $\quad f(x) \geq 0$

$$\ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{3x}}\right) \geq \ln 1$$

$$\underbrace{e^x + \sqrt{1+e^{3x}}}_{} \geq 1$$ → LA FUNZIONE È SEMPRE POSITIVA!

QUESTA È UNA QUANTITÀ SICURAMENTE PIÙ GRANDE DI 1! QUINDI TALE DISUGUAGLIANZA È SEMPRE VERA!

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 9

$$f(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

→ $\underline{\text{DOM}(f)} = \forall x : e^x + e^{-x} \neq 0 = \underline{\mathbb{R}}$

→ $\underline{\text{SEGNO}}$ $\quad \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \geq 0 \qquad \dfrac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}$ $\quad t = e^x$

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} \geq 0$$

+ − +

−1 +1

ESERCITAZIONE ANALISI I - $\boxed{15/10/2013}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 1

$$\frac{\log_3(10-x)}{\log_3(4-x)} = 2$$

$\log_3(4-x) \neq 0$
$\qquad\qquad \neq \log_3 1$

$4-x \neq 1 \longrightarrow x \neq 3$

$\log_3(10-x) = 2\log_3(4-x)$

$\log_3(10-x) = \log_3(4-x)^2$

$$\begin{cases} 10-x>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \longrightarrow x<4 \ \vee \ x\neq 3$$

$10-x = (4-x)^2$

$10-x = 16-8x+x^2$

$x^2-7x+6=0$

$$x_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} x_1 = 6 & \text{NON ACCETTABILE PER LE CONDIZIONI} \\ \underline{x_2 = 1} \end{cases}$$

SOLUZIONE: $x = 1$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 2

$$\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^{2x}-1} \geq 0$$

CE $\quad e^{2x}-1 \neq 0 \qquad e^{2x} \neq 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x \neq 0$

$N \rightarrow e^{2x}+e^x-2 \geq 0$

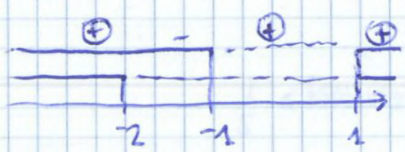
$e^x = t$

$t^2+t-2 \geq 0 \qquad (t+2)(t-1) \geq 0$

$t = -2 \vee t = 1$

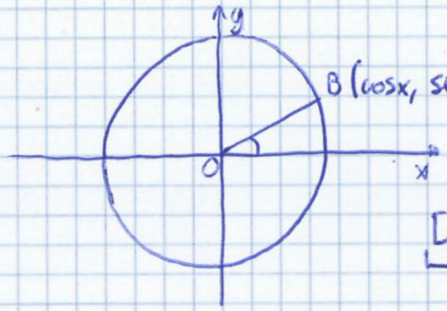
$e^x \leq -2 \vee e^x \geq 1$

$D \rightarrow t^2-1 \geq 0 \qquad e^x < -1 \ \vee e^x > 1$

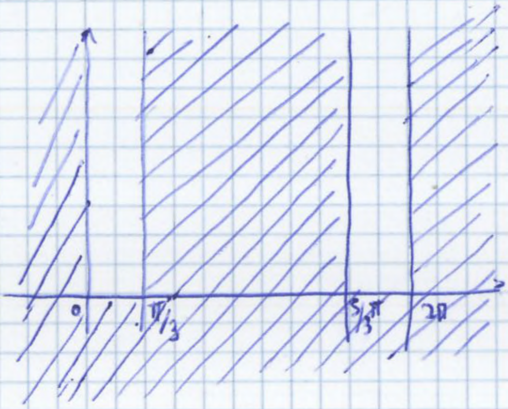


SOLUZIONE PER e^x

SOLUZIONE: $x \leq -2 \ \vee \ x > -1 \qquad (-\infty,-2] \vee (-1,+\infty)$



$[0, \pi/3] \cup [\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$ — DOMINIO



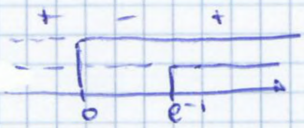
$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 6

$f(x) = \ln\left(e - \frac{1}{x}\right)$

CdE + SEGNO

$e - \frac{1}{x} > 0$

$\frac{ex-1}{x} > 0 \rightarrow \begin{array}{l} x > e^{-1} \\ x > 0 \end{array}$



CdE $= (-\infty, 0) \cup (e^{-1}, +\infty)$

CdE $= \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

→ segno

$\ln\left(e - \frac{1}{x}\right) \geq 0$

$\ln\left(e - \frac{1}{x}\right) \geq \ln 1$

$e - \frac{1}{x} \geq 1$

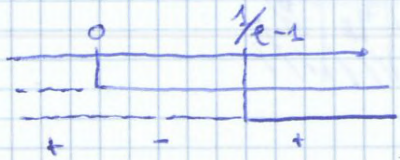
$e - 1 \geq \frac{1}{x}$

$\frac{xe - 1 - x}{x} \geq 0$

↓

$x > 0$

$x \geq \frac{1}{(e-1)}$



$P = (-\infty, 0) \cup [\,1/e-1, \infty)$

$f(x) \geq 0 = ?$

$\arccos(\operatorname{tg} x) \geq 0$ sempre positiva, ovviamente dove esiste

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 8

$4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 1 = 0$

Uso $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$

$2 \operatorname{sen} 2x + 1 = 0$

$\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}$

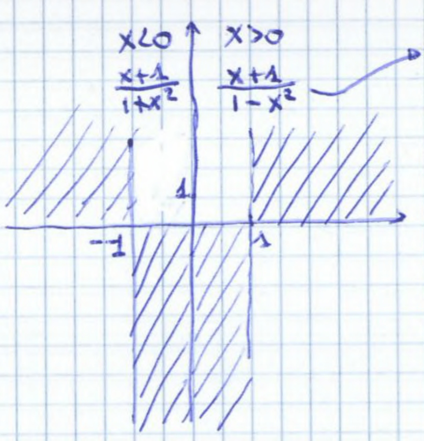
$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 9

$\cos x + \operatorname{sen} x = 1$

USO FORMULE PARAMETRICHE

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 10

$f(x) = \dfrac{x+1}{1-x|x|}$



$\forall x : x \neq 1 \implies CdE = \mathbb{R} - \{1\}$

PERCHÉ $1-x^2 = (1-x)(1+x)$

CON $x=1$ SI ANNULLA

ESERCITAZIONE DI ANALISI - $\boxed{21/10/2013}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 : \forall x \in (7 - K < x < 7) \cap \text{Dominio } f, \quad f(x) < -\varepsilon$

RISPOSTA ESATTA:

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = -\infty$$

SPIEGAZIONE:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

$I(x_0)$

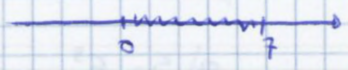
$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

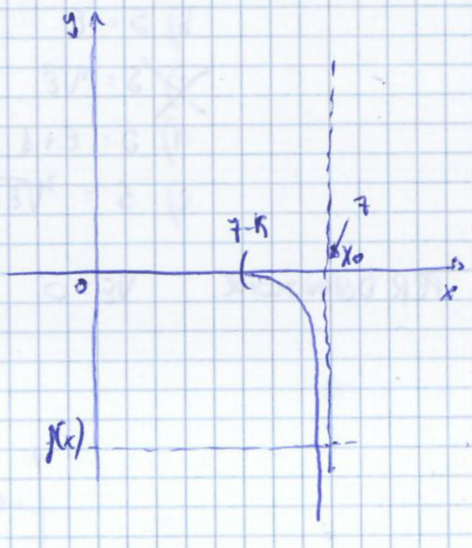
$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon : \forall x \in \text{DOM } f \cap I_{x_0}(\delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

$\downarrow$

$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

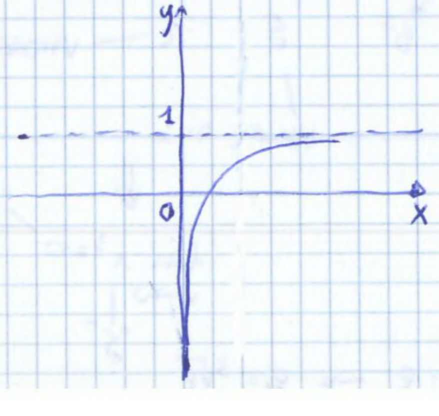
$\lim_{x \to 7^-} f(x) = -\infty$





$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^-$



IL TUTTO PERCHÉ:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

VALORE DEL LIMITE

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\underbrace{f(\delta) = l + \varepsilon}$$

SCRITTO UN PÒ DA AGRICOLO, MA RENDE L'IDEA

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ NO

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) < 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (SE ESISTE), ALLORA $l < 0$ — SBAGLIATO PERCHÉ NEGA LO ZERO

~~d)~~ SE ESISTE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, ALLORA $l \leq 0$

BASTA CHE LA FUNZIONE SIA ASINTOTICA SU ZERO $\to$ IN QUESTO MODO È GIUSTO CHE l SIA PARI A ZERO

$\boxed{\text{RISOLUZIONE PRATICA LIMITI}}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x - 3^{-x}}{2^{-x} - 3^x}$ $\to$ DEVO "SBLOCCARE LA FORMA INDETERMINATA"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x - \frac{1}{3^x}}{\frac{1}{2^x} - 3^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6^x - 1}{3^x}}{\frac{1 - 6^x}{2^x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{6^x - 1}}{3^x} \cdot \frac{-2^x}{\cancel{6^x - 1}} = \lim_{x \to \infty} -\frac{2^x}{3^x} =$$

$$= \lim -\left(\frac{2}{3}\right)^x = -1$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1} + 3x}$ FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

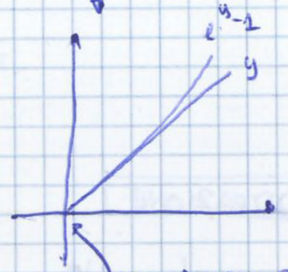
IL GRADO DI NUMERATORE E DENOMINATORE È UGUALE, POICHÉ $\sqrt{x^2+1}$ DA x, QUINDI IL RISULTATO DEL LIMITE SARÀ UN NUMERO QUANDO $x \to \infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} + 3\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \overset{\to 0}{\frac{2}{x}}}{\sqrt{1 + \underset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}} + 3} = \frac{1}{4}$$

QUESTO PERCHÉ LA FORMA

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = \boxed{1}$$ PERCHÉ $e^y - 1 \sim y$

$e^y - 1$ "VA" COME y



PER ESEMPIO PER $y=0$ DANNO ENTRAMBI $x=0$

PERCIÒ SICCOME e^y-1 È ASSIMILABILE A y, È COME SE LO SCRIVESSI $\frac{y}{y}$, IL QUALE FA 1!

$\boxed{\text{N.B.}}$ $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3) \cdot \frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9} = 6$$

$x \to 3$ È LO ZERO DEL POLINOMIO x^2-9, COME LO È $\alpha \to 0$ NELLA FORMA $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$

ESERCIZIO

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n - (-1)^n}{3^{2n} + 4^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4^n - (-1)^n}{9^n + 4^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{9^n \left(\frac{4}{9}\right)^n - \left(-\frac{1}{9}\right)^n}{9^n \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n}^{\text{TENDE A 0}} - \overbrace{\left(-\frac{1}{9}\right)^n}^{\text{TENDE A ZERO}}}{1 + \underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n}_{\text{TENDE A ZERO}}} = 0$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[4]{x^3 + x^4} + 2x\right)$$ QUI DOBBIAMO CAPIRE COME QUESTO LIMITE VA A INFINITO

LA FUNZIONE DIVERGE PER $3x$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[\sqrt[4]{\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0} + 1} + 2\right] = \lim_{x \to +\infty} 3x$$

LA FUNZIONE HA ORDINE DI INFINITO 1 (L'ESPONENTE DI X DEL POLI) IL POLINOMIO D'ORIGINE HA ORDINE 1. CONSEGUENTEMEN

ESERCITAZIONE ANALISI 1 - 22/10/2013

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\operatorname{senh}(5x)]^2}{1-\cos 3x}$$

$$\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{\alpha}+1-1-e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{\alpha}-1}{2} - \frac{e^{-\alpha}-1}{2}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{senh}\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right)}_{\to 1} + \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\underbrace{\left(\frac{e^{-\alpha}-1}{-\alpha}\right)}_{\to 1} = 1$$

$$\longrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \longrightarrow 2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 = 1-\cos(\alpha)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(5x)^2}{2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\right]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2}{2\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{10x}{3x}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{9} = \frac{50}{9}$$

QUANDO IL LIMITE È $x\to 0$, IL VALORE DEL SENO È ASSIMILABILE ALL'ARGOMENTO DEL SENO STESSO, POICHÉ ESSO ASSUME VALORI MOLTO PICCOLI.

$\downarrow$

CON $x\to$ NON È PIÙ POSSIBILE DISTINGUERE $\operatorname{sen}x$ DA x!

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi^x + x^2\cdot e^x}{3^x - x^4\cdot 2^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x\log\pi}+x^2\cdot e^x}{e^{x\log 3}-x^4\cdot e^{x\log 2}}$$

ORA DIVIDO TUTTO PER $e^{x\log\pi}$:

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1+\underbrace{x^2\cdot e^{x\log\left(\frac{e}{\pi}\right)}}_{\to 0}}{\underbrace{e^{x\log\left(\frac{3}{\pi}\right)}}_{\to 0} - \underbrace{x^4 e^{x\log\left(\frac{2}{\pi}\right)}}_{\to 0}}$$

POICHÉ $\frac{e}{\pi}<1$ E QUINDI $\log\frac{e}{\pi}<0$!

$= +\infty$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

QUESTO SIGNIFICA CHE QUANDO $x\to 0$ NON RIESCO PIÙ A DISTINGUERE $\log(1+x)$ DA x!

VALE LO STESSO DISCORSO PER $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \to$ NON DISTINGUO e^x-1 DA x.

ESERCITAZIONE ANALISI - $\boxed{29/10/2013}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\cos x}-1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \frac{\sqrt{1+3x^2}-\cos x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \frac{(\cancel{1}+\frac{3}{2}x^2+o(x^2))-(\cancel{1}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{\cos x \to 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x^2} + \overbrace{o(x^2)x^{-2}}^{0}}{\cancel{x^2}\cos(x)} = 2$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\log(3-\sqrt{x+1})}{3-x} \qquad y = 3-x,\ x = 3-y$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(3-\sqrt{4-y})}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\log\left[2+1-2\sqrt{1-\frac{y}{4}}\right]}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\log\left[1-2\left(\sqrt{1-y/4}-1\right)\right]}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{4} \underbrace{\frac{\log\left[1+y/4\right]}{\frac{1}{4}y}}_{\to 1} = \frac{1}{4}$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER $1/4$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} \frac{(e^x-1)-x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)-x^2}{x^\alpha(1+x^2)} =$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{x^{1-\alpha}}_{\to 1} - \underbrace{x^{2-\alpha}}_{\to 0} + \underbrace{x^{-\alpha}o(x)}_{\to 0}}{1+\underbrace{x^2}_{\to 0}} = 1 \;\to\; l = 1$$

FISSO $\alpha = 1$

QUINDI, $p(x) = l[\varphi(x)]^\alpha = x$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ ORDINE INFINITESIMO + PARTE PRINCIPALE

$$f(x) = e^{\cos(x)} - e^{\sqrt{x^3+1}}$$

$x \to 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

PRENDO $\varphi(x) = x$

ESERCITAZIONE ANALISI 1 - $\boxed{30/10/2013}$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{\operatorname{sen}x}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

PER $x\to+\infty$, sen APPROSSIMABILE CON IL SUO ARGOMENTO

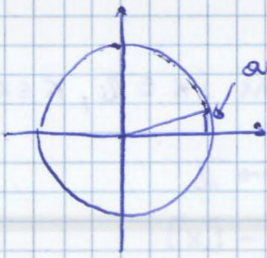
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\operatorname{sen}x}\Bigg] \to \nexists$$

È UNA FUNZIONE WILD!

→ ANCHE SE NON C'ENTRA NULLA, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\sin x \sim x,\ x\to 0$



QUANDO L'ARCO È MOLTO PICCOLO IL SENO (IL SEGMENTINO) NON È PIÙ DISTINGUIBILE DA X (L'ARCHETTO)

ESERCIZIO

$a_n = (2+\operatorname{sen}(n))n$

$\to +\infty$

→ USO LA FUNZIONE DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = m = 1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

ESERCIZIO

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)^{-\arctan(n)}$$

$$a_n = \frac{1}{\left[\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right]^{\arctan(n)}}$$ → COMPRESO TRA $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$

per $n\to+\infty$, SOSTITUISCO OTTENENDO

$$a_n = \frac{1}{1^{\pi/2}} = 1^{-\pi/2} = \boxed{1}$$

ESERCIZIO

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n =$$

$n+1$	$n-1$
$n-1$	1
$/\ 2$	

$$= \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$$

FACCIO IL LIMITE DI $n\to+\infty$

$$\to \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2$$

IL COEFFICIENTE DI $\frac{1}{x}$ CONTENUTO IN $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ DIVENTA L'ESPONENTE DELLA e.

ESERCIZIO

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n}\right)^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n^2 \ln(\sqrt{n})} = 1$$

LO IGNORO

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{7x+20x^4} = \lim_{x\to0}\frac{1/3\ 3x}{7x} = \frac{1}{7}$$

ESERCIZIO

$f(x) = o(x^2)$, $x\to0$ ALLORA NECESSARIAMENTE $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 0$

$$0 = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\overbrace{\frac{f(x)}{x^2}}^{\to0}\,\frac{x^2}{x} = 0$$

ESERCITAZIONE ANALISI - $\boxed{09/11/2013}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$f(x) = \frac{2e^x - x^2}{1-x^2} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{(D(x))^2} = \frac{(2e^x - 2x)(1-x^2) - (2e^x - x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2e^x - 2e^x x^2 - 2x + \cancel{2x^3} + 4e^x x - \cancel{2x^3}}{1 + x^4 - 2x^2} = \frac{2e^x - 2x - 2e^x x^2 + 4e^x x}{(1-x^2)^2} =$$

$$= 2\,\frac{e^x - x - e^x x^2 + 2e^x x}{(1-x^2)^2} = 2\,\frac{e^x(1+2x-x^2) - x}{(x^2-1)^2}$$

POSSO SCRIVERE $(x^2-1)^2$ ANZICHÉ $(1-x^2)^2$! TANTO È UGUALE! SAREBBE PERÒ SBAGLIATO FARLO A PRIORI, POICHÉ LA DERIVATA DI $(x^2-1)^2$ E DI $(1-x)^2$ SONO DIVERSE!

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2+x^2)^3} = \frac{1}{3}(2+x^2)^{3/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(2+x^2)^{\frac{3}{2}-1} \cdot \cancel{2}x = (2+x^2)^{1/2}x = x\sqrt{2+x^2}$$

DERIVATA DI $2+x^2$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$f(x) = \ln(e^{5x}\cos x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{e^{5x}}\cos x}\left[\cancel{e^{5x}}\,5\cos x + \cancel{e^{5x}}(-\operatorname{sen} x)\right] = \frac{5\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 5 - \operatorname{tg} x$$

AVREI POTUTO ESCLUDERE A PRIORI e^{5x} PERCHÉ $\ln e^{5x} = 5x$! QUINDI MI BASTA INSERIRE UN 5 COME FATTORE POICHÉ $f'(5x) = 5$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$f(x) = (2-x^4)^{x^2} = e^{x^2\ln(2-x^4)}$$

$$f'(x) = e^{x^2\ln(2-x^4)} \cdot \left[2x\ln(2-x^4) + x^2\frac{1}{2-x^4}(-4x^3)\right] =$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + \cancel{(1+x^2)} \dfrac{1}{\cancel{1+x^2}} =$

$= 2x \operatorname{arctg} x + 1$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = |\operatorname{tg}(1+x)|$ IN $\underline{x=2}$

DIRE CHE $\operatorname{tg}(1+x) = 0$, VUOLE DIRE CHE $1+x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \operatorname{tg}(1+x), & \operatorname{tg}(1+x) \geq 0 \\ f_2(x) = -\operatorname{tg}(1+x), & \operatorname{tg}(1+x) < 0 \end{cases}$$

$\operatorname{tg}(1+x) \geq 0$, QUANDO $1+x \in [0, \pi/2)$

$0 \leq 1+x < \pi/2$

$x \geq -1$

$x < \pi/2 - 1$

$\operatorname{tg}(1+x) < 0$, QUANDO

$\frac{\pi}{2} < 1+x \leq \pi$

$x \leq \pi - 1$

$x > \frac{\pi}{2} - 1$

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{1}{[\cos(1+x)]^2} \\ f_2'(x) = -\dfrac{1}{[\cos(1+x)]^2} \end{cases}$$

$\leftarrow$ LA DERIVATA IN $x=2$ È QUESTA POICHÉ L'ARGOMENTO $(1+x)$ DIVENTA 3 E DI CONSEGUENZA SIAMO NEL SECONDO QUADRANTE

$\longrightarrow$ <u>NOTA BENE!</u>

$f(x) \longmapsto f(y)$

$y = \alpha x + \beta$

$f(\alpha x + \beta)$

$f'(x) = \dfrac{D[f]}{D[y]} \alpha$

PARENTESI - TEOREMA ROLL

$f: [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(0) \cdot f(4) < 0 \quad \exists c \in (0,4)$

$\longrightarrow f(c) = 0$

ESERCIZIO

$f(x) = 2x + \log x$

$g = f^{-1} \quad \circ \quad g(f(x)) = x$

$g'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$y = f(x)$

$\longrightarrow$ DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (y \to y_0)}} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$f(x) = 2x + \log x$ DEVO CALCOLARE LA DERIVATA g' IN $y = 2$

$2 = 2x + \log x \longrightarrow x = 1$

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

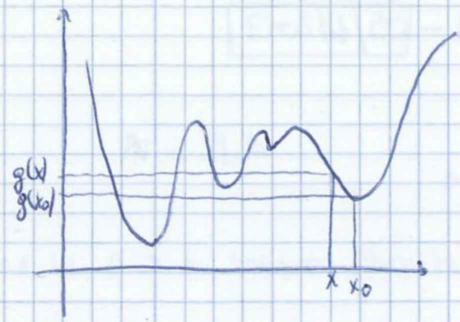
$g'(y) = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \dfrac{1}{3}$

IN $y = 2$

ESERCIZIO

$f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x \qquad g = f^{-1}$



$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$g(x) = f(\cos 2x)$

$g'(x) = f'(\cos 2x)\,[(-\sin 2x)\,2]$

$= -2\sin 2x \cdot f'(\cos 2x)$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA PER SOSTITUZIONE $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha - 4\beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 3/4\,\alpha \\ 2\alpha - \frac{3}{4}\alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = \frac{3}{4}\alpha \\ 5/4\,\alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = \frac{3}{5} \\ \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$

RISOLUZIONE ALTERNATIVA $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha - 4\beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{4}{3}\beta = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\beta + \frac{4}{3}\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

DEVO CERCARE DI AVERE α CON UGUALE COEFFICIENTE!
IN QUESTO CASO DIVIDO PER 2 DI SOPRA E PER 3 DI SOTTO

$\rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6}\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3}\beta = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = \frac{3}{5} \\ \alpha - \frac{3}{10} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 3/5 \\ \alpha = \cancel{\frac{8}{10}}\,\frac{4}{5} \end{cases}$

$\rightarrow$ RISOLUZIONE CON METODO DI KRAMER

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha - 4\beta = 0 \end{cases}$$

RISOLUZIONE: $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\quad \det(A) = -8+3 = -5 \neq 0$

DETERMINANTE DI A

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3}{5}$$

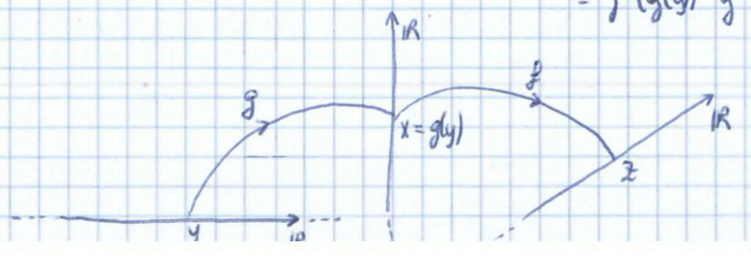
$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = x^2 + 3x$

$g(y) = y^3 - 2y$

$x = g(y) \longrightarrow$ NASCE DUNQUE UNA FUNZIONE $h = f \circ g$, $h(y) = f(g(y))$

$$h'(y) = f'(x)\, g'(y)$$
$$= f'(g(y))\, g'(y)$$



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

ESERCITAZIONE ANALISI 1 - $\boxed{11/11/2013}$

SCALETTA PER STUDIO DI FUNZIONI

1) CAMPO DI ESISTENZA DOM f
2) LIMITI NEI PUNTI NOTEVOLI (EVENTUALMENTE A $\pm\infty$) $\longrightarrow$ ASINTOTI

   SE È DEFINITA DA $\pm\infty$

3) CARATTERIZZARE LA CONTINUITÀ
4) DERIVABILITÀ DI f
5) CALCOLO DI f'
6) RICERCA DEGLI ZERI DI f' $\longrightarrow$ PUNTI CRITICI

   INIZIALMENTE, TRA IL PRIMO E IL SECONDO PUNTO, CALCOLO GLI ZERI DI f
7) DERIVABILITÀ DI f'
8) CALCOLO DI f''
9) RICERCA DEGLI ZERI DI f'' $\longrightarrow$ FLESSI

   E CHIARAMENTE $f''(x) > 0$ E $f''(x) < 0$

ESERCIZIO

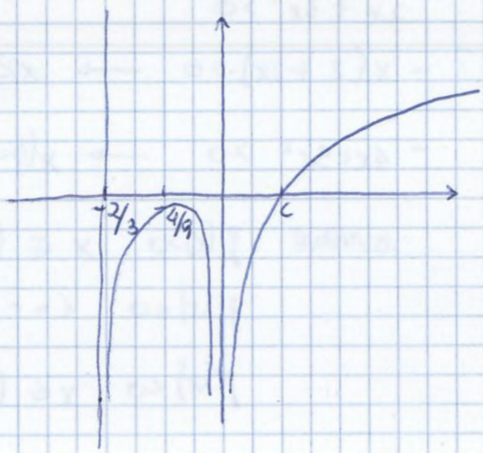
$f(x) = \ln(2x^2 + 3x^3)$

DOM f $\longrightarrow$ $2x^2 + 3x^3 > 0$

$x^2(2+3x) > 0$

$x > -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x \neq 0$

DOM f: $\left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$



LIMITI $\longrightarrow$ $\lim_{x \to -\frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ZERI DI $f(x)$ $\longrightarrow$ $\ln(2x^2 + 3x^3) = 0$ L'ARGOMENTO DEVE ESSERE UGUALE A 1!

$2x^2 + 3x^3 = 1$ $\quad \exists c \in (0, +\infty) \longrightarrow f(c) = 0$

LO ZERO DELLA FUNZIONE SARÀ IN $(0, +\infty)$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = e^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+1}\right)}$

STUDIO LA FUNZIONE SEPARATAMENTE $(-\infty, 0]$
$[0, +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

DERIVATA PRIMA $\longrightarrow$ $f'(x) = e^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1+x}\right)} \cos\left(\frac{1}{1+x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)$

COSENO SI ANNULLA QUANDO ARGOMENTO È $\frac{\pi}{2} + k\pi$

QUINDI $\frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{\pi + 2k\pi}{2}$

$x + 1 = \frac{2}{\pi + 2k\pi}$

$x = \frac{2}{\pi + 2k\pi} - 1$

$= \frac{2 - \pi - 2k\pi}{\pi + 2k\pi}$

$x_0 = \frac{2}{\pi} - 1 = \frac{2 - \pi}{\pi}$

CHE DERIVA DA $x_k = \frac{2}{\pi + 2k\pi} - 1$!

PER LO STUDIO DI FUNZIONI DI QUESTO TIPO DI FUNZIONI DEVO STUDIARE IL COMPORTAMENTO DELLE SUCCESSIONI!

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$

$f(2) = -2$

$f'(2) \nexists$ $\longrightarrow$ TROVIAMO UNA CUSPIDE! QUEL PUNTO È UN ESTREMO $\longrightarrow$ È UN MINIMO DELLA FUNZIONE

$\sqrt{4-x^2} > x$

$4-x^2 > x^2 \longrightarrow 4 > 2x^2$

$x^2 < 2 \rightarrow x^2-2<0 \qquad x \in (0, \sqrt{2})$

b) $\underline{x>2} \longrightarrow x^2-4>0$

$f(x) = \sqrt{x^2-4} - x$

$f(x) > 0$

$x^2-4 > x^2$

$\longrightarrow f(x) = \sqrt{|x^2-4|} - x$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} - x & \text{PER } x<-2 \vee x>2 \\ \sqrt{4-x^2} - x & \text{PER } x \in (-2,2) \end{cases}$$

$$\underbrace{(-\infty, -2]}_{\sqrt{x^2-4}-x} \cup \underbrace{(-2,0) \cup (0,2)}_{\sqrt{4-x^2}-x} \cup \underbrace{[2,+\infty)}_{\sqrt{x^2-4}-x}$$

$\downarrow$

QUINDI,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} - x & \text{PER } x \in (-\infty, 2] \\ \sqrt{4-x^2} - x & \text{PER } x \in (-2,2) \\ \sqrt{x^2-4} - x & \text{PER } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

PER $x \in (-\infty,-2)$ $f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}} \cancel{2}x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1$

PER $x \in (-2,+2)$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x) - 1 = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 & \text{PER } x \in (-\infty,-2) \\ -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 & \text{PER } x \in (-2,2) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 & \text{PER } x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ STUDIO DOVE SI ANNULLANO STE DERIVATE

$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0$

$\frac{x - \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \longrightarrow x^2 = x^2-4 \quad \nexists x \in \mathbb{R}!$

ESERCITAZIONE ANALISI 1 - $\boxed{18/11/2013}$

ESERCIZIO

$f(x) = \ln(2+\sin(x^6))$ → DI QUESTO VOGLIO IL POLINOMIO DI MAC LAURIN

$f(0) = \ln 2$

$y = x^6 \longrightarrow h(y) = \ln(2+\sin y)$

$$h'(y) = \frac{1}{2+\sin y}\cdot \cos y = \frac{\cos y}{2+\sin y}$$

$$h'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$h(y) = h(0) + h'(0)y + o(y)$$

QUINDI, $f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$

ESERCIZIO

$f(x) = \alpha x^3\,[\sin(x-x^2)]^4$

$h(x) = x^3$

PER QUALE $\alpha \in \mathbb{R}$ $h(x)$ È IL POLINOMIO DI MACLAURIN DI $f(x)$?

$$g(x) = (\sin(x-x^2))^4$$

$f(0) = 0$

$$f'(x) = 3\alpha x^2 g(x) + \underbrace{\alpha x^2 g'(x)}_{g_1(x)}$$

QUESTO IN 0 FARÀ SEMPRE ZERO!
QUINDI NON MI SERVE A NULLA CALCOLARE SUA DERIVATA

$$f''(x) = 6\alpha x\, g(x) + \underbrace{3\alpha x^2 g'(x) + g_1'(x)}_{g_2(x)}$$

$$f'''(x) = 6\alpha\, g(x) + \underbrace{6\alpha x\, g'(x) + g_2'(x)}_{g_3(x)}$$

$$g_3(0) = 0$$

$f'''(0) = 0 \longrightarrow$ DUNQUE $\nexists\, \alpha \in \mathbb{R}$ TALE PER CUI x^3 È POLINOMIO DI MACLAURIN PER $f(x)$.

c) $h(x)$ è POLINOMIO DI MACLAURIN DI $f(x)$ PER $a=1$ NO

d) $h(x)$ PUÒ ESSERE IL POLINOMIO DI MACLAURIN DI $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

NON LO SVILUPPO!

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow$ FUNZIONE DI CLASSE C^{∞} SU $\mathbb{R}$, SONO DETTE FUNZIONI ANALITICHE

VUOL DIRE CHE POSSO DERIVARLA INFINITE VOLTE

$Tf_{n=4,x=0}(x) = 3 - 2x^2 + 3x^3$

OPZIONI:

a) $f^{(4)}(1) = 0$ è QUESTA LA RISPOSTA FALSA!

b) $x = 0$ è PUNTO DI MAX LOCALE è VERA!

c) IN $x=0$ LA FUNZIONE è CONCAVA è VERA!

d) $f^{(3)}(0) = 18$ è VERA!

e) $f^{(4)}(0) = 0$ è VERA!

$d \longrightarrow \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) = 3$

$f^{(3)}(0) = 18$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f(x) = -12 - 4(x-6) + (x-6)^4 + o((x-6)^4), \quad x \to 6$

OPZIONI:

a) $f(x) = -6 - 2(x-6)$ è RETTA TANGENTE IN $x = 6$ NO! PERCHÉ PER ESSERE VERA, PARTENDO DALLA FUNZIONE $-12 - 4(x-6) + (x-6) + o((x-6)^4)$,

QUESTO DOVREBBE ESSERE ESPRIMIBILE COME

$f(x) = -6 - 2(x-6)$

b) HA UN PUNTO DI MAX RELATIVO IN $x=6$ NO! PERCHÉ DERIVATA IN ZERO è DIVERSA DA 6.

ESERCITAZIONE ANALISI 1 - $\boxed{19/11/2013}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = [\operatorname{sen}(2x-x^2)]^2 + 4x^3$

$\varphi(x) = 2x - x^2 \longrightarrow \varphi'(x) = 2-2x \longrightarrow \varphi''(x) = -2$

$g(x) = [\operatorname{sen}(\varphi(x))]^2$

$f'(x) = g'(x) + 12x^2 \qquad g'(x) = 2\operatorname{sen}\varphi(x)\cdot\cos\varphi(x)\,\varphi'(x) = \operatorname{sen}(2\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

$f'(0) = 0$

$f''(x) = g''(x) + 24x = \cos(2\varphi(x))\,2\,\varphi'(x)\,\varphi'(x) + \operatorname{sen}(2\varphi(x))\,\varphi''(x) + 24x$

$f''(0) = 1\cdot2\cdot2\cdot2 = 8$

$f'''(x) = -\operatorname{sen}(2\varphi(x))\cdot 2[\varphi'(x)]^3 + \cos(2\varphi(x))\cdot 4\,\varphi'(x)\cdot\varphi''(x) + \cos(2\varphi(x))\cdot 2\,\varphi'(x)\,\varphi''(x) + \operatorname{sen}(2\varphi(x))\cdot$

$\cdot\,\varphi'''(x) + 24$

$f'''(x) = 1\cdot4\cdot2\cdot(-2) + 1\cdot2\cdot2\cdot(-2) + 24 = 0$

METODO ALTERNATIVO

PER $x \to 0 \qquad \tilde{f}(x) = (2x-x^2)^2 + 4x^3$

$= 4x^2 \cancel{-4x^3} + x^4 \cancel{+4x^3} = 4x^2 + x^4$

NON VA BENE PERCHÉ TROPPO APPROSSIMATO
DI SEGUITO APPROSSIMIAMO FINO AL 4° ORDINE

QUINDI, FACCIO COSÌ: $g(x) = \operatorname{sen}x = x - \frac{1}{3!}x^3$

$g(0) = 0$

$g'(x) = \cos x \qquad g'(0) = 1$

$g''(x) = -\operatorname{sen}x \qquad g''(0) = 0$

$g'''(x) = -\cos x \qquad g'''(0) = -1$

$\tilde{f}(x) = \left[(2x-x^2) - \frac{1}{3!}(2x-x^2)^3\right]^2 + 4x^3 =$

$= \left[(2x-x^2)\left(1 - \frac{(2x-x^2)^2}{3!}\right)\right]^2 + 4x^3 =$

$= \left[(2x-x^2)\,\frac{3! - 4x^2 + 4x^3 - x^4}{3!}\right]^2 + 4x^3 =$

TUTTO CIÒ CHE HA POTENZA MAGGIORE DI 2 NON MI INTERESSA

$= \left[\frac{2\cdot3!\,x - 3!\,x^2 - 8x^3 + 4x^4 + 8x^4 - 4x^5 - 2x^5 + x^6}{3!}\right]^2 + 4x^3 =$

$\sim (2x-x^2)^2 + 4x^3$

ESERCITAZIONE ANALISI - $\boxed{25/11/13}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ - LIMITI CON TAYLOR

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(e^{3/x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$y = \frac{1}{x} \longrightarrow \lim_{y \to 0} \frac{1}{y^2}\left(e^{3y} - \cos y\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{y^2}\Big(\underbrace{\cancel{1} + 3y + \frac{1}{2}(3y)^2 + o(y^2)}_{\text{SVILUPPO DI TAYLOR}} \underbrace{- \cancel{1} + \frac{1}{2}y^2 + o(y^3)}_{\text{SVILUPPO DI COSY CAMBIATO DI SEGNO}}\Big) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3y + \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right)y^2 + \cancel{o(y^2)} + \cancel{o(y^3)}}{y^2} =$$

NON CONTRIBUISCONO AL $\lim$ POICHÉ SONO DI GRADO MAGGIORE AL SECONDO.

$$= +\infty$$

QUANDO HO RAPPORTO TRA INFINITESIMI POSSO TOGLIERE TERMINI DI GRADO MAGGIORE

$$\lim_{y \to 0} \frac{3y + \cancel{5y^2} + \cancel{o(y^2)} + \cancel{o(y^3)}}{y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{3}{y} = +\infty$$

QUANDO HO UN RAPPORTO TRA INFINITI INVECE TOLGO TERMINI DI GRADO MINORE.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\lim_{x \to 4/5} \frac{1 - \cos(5x-4)}{(x - 4/5)^2} = 25 \lim_{x \to 4/5} \frac{1 - \cos(5x-4)}{(5x-4)^2}$$

$$y = 5x - 4$$

$$= 25 \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = 25 \lim_{y \to 0} \frac{1 - \left[1 - \frac{1}{2}y^2\right]}{y^2} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2}\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{[\sinh(2x)]^2}{1 - \cos(5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(2x)^2}{1/2 \, 25x^2} = \frac{8}{25}$$

$$f_c(x) = F(c,x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\,dx = \int \frac{dy}{y^2} = \frac{y^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x^2+x} + c$$

ORA DEVO TROVARE $F(c,1) = -\frac{1}{2}$

$$F(c,1) = -\frac{1}{2} + c = -\frac{1}{2} \rightarrow c = 0$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= x + 2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c = x + 2\ln(x) - \frac{1}{x} + c$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$f(x) = [\operatorname{sen} x]^2 \cos x$

$$\int (\operatorname{sen} x)^2 \cos x \; dx = \int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + c = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} + c$$

$y = \operatorname{sen} x \longrightarrow dy = \cos x\,dx$

ORA DEVO TROVARE C TALE CHE LA FUNZIONE PASSI PER IL PUNTO $(\pi/6, 1)$

$$F(c, \pi/6) = 1 = \frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^3}{3} + c = 1$$

$$= \frac{1}{24} + c = 1 \longrightarrow c = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$$

$$F\left(\frac{23}{24}, x\right) = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} + \frac{23}{24}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+(\operatorname{sen} x)^2}\,dx =$$

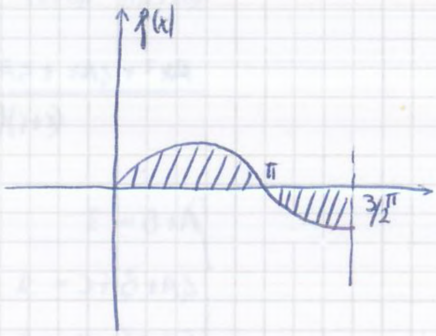
ESERCIZIO

$f(x) = \operatorname{sen} x\,, \quad x \in [0, \tfrac{3}{2}\pi]$

a) $\text{AREA} = \int_0^{3\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$

NO! PERCHÉ SAREBBE DOVUTO ESSERE

$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x \, dx\,!$



b) $\mu = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x \, dx$ $\underline{\text{VERO!}}$

MEDIA INTEGRALE

VALORE DELL'INTEGRALE: $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \left| -\cos x \right|_0^{\frac{3}{2}\pi} = 0 - (-1) = 1$

$$\frac{1+t^2-t^2}{t^2(1+t^2)} \longrightarrow 2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2\int -\frac{1}{t}dt - \arctan t + c$$

$$= \int -\frac{2}{t}\,dt - 2\arctan t + c$$

$$= -\frac{2}{tg\frac{x}{2}} - 2\arctan tg\frac{x}{2} + c = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}} - x + c$$

$\boxed{\text{NB}}$

$t = tg\frac{x}{2}$

$\operatorname{sen}x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$

SE IL VALORE DI t È $tg\frac{x}{2}$, ALLORA $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ ASSUMONO QUESTI VALORI.

$tg(0) = 0$

$tg(\infty) = \frac{\pi}{2}$ (lim)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\,dx$$

SOSTITUISCO CON $\operatorname{sen}x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{2}{1+t} + c = \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + c$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \ln|1+t^2| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + c$$

$$= \int \frac{1}{1+t}dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \ln|1+t| + (-t\ln|1+t^2|) + c =$$

$$= \ln|1+t| - t\ln|1+t^2| + c$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx$$

ABBIAMO

$$(\cosh t)^2 - (\operatorname{senh} t)^2 = 1$$

$$(\cosh t)^2 = (\operatorname{senh} t)^2 + 1$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad \cos t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

IMPONGO $x = \operatorname{senh} t$

$dx = \cosh t \, dt$

DUNQUE,

$$\int \cosh t \cosh t \, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int (e^t - e^{-t})^2\,dt = \frac{1}{4}\int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}\left(\operatorname{senh}(2t) + 2t\right) + c =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cosh(2t) + 2 \cdot 2\right) + c = \frac{1}{2}\cosh(2t) + 1 + c$$

$$= \frac{\cosh 2t + 1}{2} + c$$

ESERCIZIO

$$\int_0^{\pi} \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

DOVREBBE ESSERE SCRITTO

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$$

POICHÉ IN $\pi/2$ CI ROMPE IL CAZZO!

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\overbrace{y}^{\to 1}}{\operatorname{sen} y\sqrt{\cos y}} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{\cos y}} = -1$$

$y = x - \pi/2$

$x \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow y \to 0^-$

$x = y + \frac{\pi}{2} \to \operatorname{sen} x = \cos y$

$\cos x = -\operatorname{sen} y$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx = -1$$

QUINDI LA FUNZIONE È PURE CONTINUA!

ORA POSSIAMO CALCOLARE L'INTEGRALE IMPROPRIO:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x-\pi/2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)x^{\alpha}}{\cos x\sqrt{x}} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{CONVERGE!}$$

SE $\alpha = 1/2$

$x \to 0^+,\ p(x) = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

ESERCIZIO

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}\ln(x+1)$

$g(x) = \ln(x+1)$

$g(0) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{1+x} \to g'(0) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}\left(x + o(x)\right) = x^{1-\frac{2}{3}} + o(x)x^{-2/3}$$

QUESTO VALE PER LO ZERO

SVILUPPO DI TAYLOR DI $\ln(x+1)$

ESERCITAZIONE ANALISI - $\boxed{17/12/2013}$

$z = (-1-i\sqrt{\ })^8 = \omega^8$

$\omega = 1 - i\sqrt{3}$

$= \rho e^{i\theta}$

$\downarrow$

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = Arg(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$

QUINDI $\rho \cdot e^{i\theta} = 2^{i\frac{4}{3}\pi}$

$z = \omega^8 = \left(2e^{i\frac{4}{3}\pi}\right)^8 = 2^8 e^{i\frac{32}{3}\pi} = 2e^{i\frac{2}{3}\pi\cdot 16}$

IL 16 POSSO TOGLIERLO PER LA PERIODICITÀ!

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$Im\left(z\bar{z} + \frac{1}{z} + \bar{z} + z\right) = 0$

$I\left(z\bar{z} + \frac{1}{z} + (\bar{z}+z)\right) = Im(\rho^2) + Im\left(\frac{1}{z}\right) + Im\left(2Re(z)\right)$

0 0

QUINDI L'EQUAZIONE AVRÀ LA FORMA

$Im\left(\frac{1}{z}\right) = 0$

$\frac{1}{z\bar{z}} Im(\bar{z}) = 0$

QUESTA EQUAZIONE HA INFINITE SOLUZIONI

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$p(z) = 3(z+2)^2(z^2+4)$

LE RADICI DI $p(z)$ HANNO TUTTE LO STESSO MODULO.

$\underbrace{z_1 = z_2}$ $= -2$

ARRIVANO DA $(z+2)^{2}$ (HA MOLTEPLICITÀ 2)

$z_3 = i2$

$z_4 = -i2$

ESERCIZIO

$|z| = |z+1|$

$z \in \mathbb{C}$?

se $z = a + ib$

$z+1 = (a+1) + ib$

$a^2 + \cancel{b^2} = (a+1)^2 + \cancel{b^2}$ → OGNI b SI ELIMINA QUINDI RIMANE SOLO LA PARTE REALE CHE È UNA RETTA.

$\cancel{a^2} = \cancel{a^2} + 2a + 1$

$a = -\frac{1}{2}$

ESERCIZIO

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) - 6 \\ y(-5) = 3 \end{cases}$$

$$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\text{SOLUZIONE OMOGENEA}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{SOLUZIONE PARTICOLARE}}$$

$= ce^{2x} + 3$

$y(-5) = ce^{-10} + 3 = 3$

$\rightarrow c = 0$

$y(x) = 3$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$y'' + 9y = \cos 2x$$

eq. CARATTERISTICA $y^2 + 9 = 0$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -i3 \\ \lambda_2 &= +i3\end{aligned} \longrightarrow y_h(x) = c_1 e^{-i3x} + c_2 e^{i3x}$$

$$y_p(t) = p_1(x) + f_1(x) + p_2(x) + f_2(x)$$

$$p_1(x) = -\frac{1}{i3+i3} \int_0^x \cos 2x \, e^{i3u} \, du =$$

$$= -\frac{1}{i6} \int_0^x \frac{e^{i2u} + e^{-i2u}}{2} e^{i3u} du =$$

$$= -\frac{1}{i12} \left\{ \int_0^x e^{i3u} du + \int_0^x e^{i2u} du \right\} =$$

$$= -\frac{1}{i12} \left\{ \frac{e^{i5x} - 1}{5} + \frac{2^x - 1}{1} \right\}$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ \frac{e^{i5x}}{5} - \frac{1}{5} + e^{ix} - 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ \frac{e^{i5x}}{5} + e^{ix} - \frac{6}{5} \right\}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{i6} \int_0^x \cos 2x \, e^{-iu3} du$$

$$= \frac{1}{i12} \int_0^x (e^{i2u} + e^{-i2u}) e^{-i2u} du$$

$$= \frac{1}{i12} \left\{ \int_0^x e^{-iu} du + \int_0^x e^{-i3u} du \right\}$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ e^{-ix} - 1 + \frac{e^{-i3x} - 1}{5} \right\}$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ e^{-ix} + \frac{e^{-i5x}}{5} - \frac{6}{5} \right\}$$

ANALISI 1 - $\boxed{08/01/2014}$

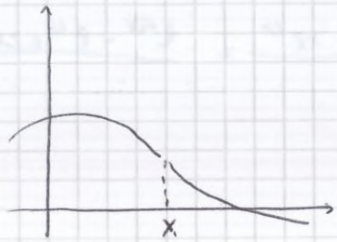
ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{x e^{2x}}{e^{2x}-1}$$

<u>DOMINIO</u>

$e^{2x}-1 \neq 0$

$e^{2x} \neq 1 \longrightarrow x \neq 0 \longrightarrow D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



$\longrightarrow$ PROLUNGAMENTO DELLA FUNZIONE

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = l$$

$$f(0) = l \,!$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x e^{2x}}{e^{2x}-1} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) \sim \frac{x\left(1+2x+\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right)}{1+2x+\frac{4x^2}{2}+o(x^2)-1} = \frac{x+\cancel{2x^2}+\cancel{2x^3}+\cancel{o(x^3)}}{\cancel{1}+2x+\cancel{2x^2}+\cancel{o(x^2)}-\cancel{1}}$$

QUANDO È UN INFINITESIMO LE x DI GRADO MASSIMO SI SEMPLIFICANO

$$\downarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

<u>SEGNO</u>

SEMPRE $f(x) \geq 0$

<u>ASINTOTI</u>

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

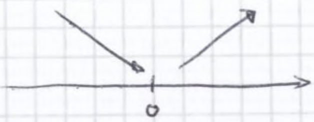
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m$ $\qquad q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1\right)$

METODO SERIO!

$h(x) = e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$

$h'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$



h HA UN MINIMO IN $x=0$

$h(0) = 0$

QUI CAPISCO SUBITO CHE LA DERIVATA È SEMPRE MAGGIORE DI ZERO! QUESTO PERCHÈ SE ESSA ASSUME UN MINIMO IN ZERO, ALLORA NON POTRÀ MAI ANDARE SOTTO TALE VALORE.

ESERCIZIO

$\int e^{-2x} \ln(e^{2x}+1)\, dx$

LO FACCIO PER PARTI

$e^{-2x} \longrightarrow -2e^{-2x}$

$\ln(e^{2x}+1) \longrightarrow \frac{1}{e^{2x}+1} \cdot 2e^{2x}$

$$\int e^{-2x} \ln(e^{2x}+1) = -2e^{-2x} \cdot (\ln(e^{2x}+1)) - \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \cdot -2e^{-2x}\, dx$$

$$= -2e^{-2x} \cdot (\ln(e^{2x}+1)) - \int \frac{-4}{e^{2x}+1}\, dx$$

$$= -2e^{-2x} \ln(e^{2x}+1) + \int \frac{4}{e^{2x}+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(e^{2x}+1)}{e^{2x}} - \ln(e^{2x}+1) + 2x\right) + c$$

QUESITO 1

a) ENUNCIARE IL TEOREMA DI DE L'HOPITAL NELLA FORMA $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

se $\exists\ f'(x), g'(x)$ IN $I(x_0) - \{x_0\}$, se $g'(x) \neq 0$

ORA DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE a_n È ILLIMITATA SUPERIORMENTE.

CIOÈ CHE $\lim_{\to\infty} a_n = +\infty$

FISSO $M \rightarrow \exists a_n : a_n > M$?

ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{x+1}{1-x|x|}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+1} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

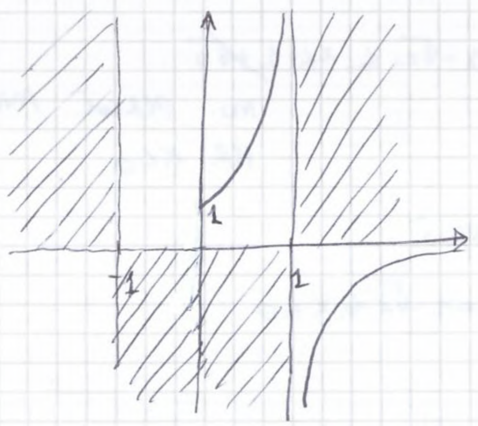
DOMINIO

$D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

SEGNO

$x \geq 0 \rightarrow$ se $x < 1$

$x < 0 \rightarrow$ se $x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$



ASINTOTI

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim f(x) = 0$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$y'' - 9y = e^{3x}$

$y^2 - 9 = 0$

$y_{1,2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{0+36}}{2} \implies y_1 = -3 \vee y_2 = +3$

INT. GENERALE $\rightarrow$ $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{+3x}$

INT. PARTICOLARE

$P_0 = 1$

a_1 PERCHÈ e^{3x} È SOLUZIONE

$\bar{y}(x) = a_1 x e^{3x} + a_0$

$y'(x) = a_1 e^{3x} + 3a_1 x e^{3x}$

$y''(x) = 3a_1 e^{3x} + 3a_1 e^{3x} + 9a_1 x e^{3x} = 6a_1 e^{3x} + 9a_1 x e^{3x}$

SOSTITUISCO

$6a_1 e^{3x} + 9a_1 x e^{3x} - 9a_1 x e^{3x} = e^{3x}$

$6a_1 e^{3x} = e^{3x}$

$a = \dfrac{1}{6}$

$\bar{y}(x) = \dfrac{1}{6} x e^{3x}$

INTEGRALE GENERALE NON OMOGENEA: $\dfrac{1}{6} x e^{3x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$

CI SONO SOLUZIONI PER CUI $\bar{y}$ VA A ZERO PER $x \to \infty$? NO POICHÈ POSSIAMO PORRE c_1 E $c_2 = 0$ MA RIMANE COMUNQUE $\dfrac{1}{6} x e^{3x}$!

QUESITO

a) CONTINUITÀ?

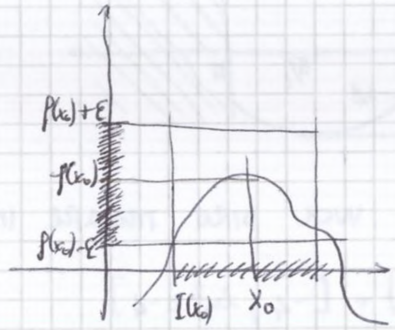
COSA VUOL DIRE CHE UNA FUNZIONE È CONTINUA IN UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$?

RISPOSTA: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

b) SIA f CONTINUA IN x_0, $f(x_0) > 0$

ALLORA $\exists I(x_0) : f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_0)$

DIMOSTRARE QUESTO! CHE ALTRO NON È CHE IL TEOREMA DEL SEGNO.



CON $\varepsilon < |f(x_0) - 0|$

ESERCIZIO

$f(x) = \ln^2(2 - \sqrt{\sin x}) - 4$

SOLO IN $[0, 2\pi]$

DOMINIO

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \rightarrow x \in [0, \pi] \\ 2 - \sqrt{\sin x} > 0 \rightarrow \text{sempre!} \end{cases}$$

DOMINIO $= [0, \pi]$

DERIVATA

$$f'(x) = \underbrace{2\ln(2 - \sqrt{\sin x})}_{+} \cdot \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{\sin x}}}_{+} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\right)}_{-} \cos x$$

SEGNO DERIVATA

$f'(x) \geq 0$

IL SEGNO DIPENDE SOLO DA $\cos x$! PERCHÉ TUTTI GLI ALTRI FATTORI HANNO SEGNO DEFINITO

$-\cos x \geq 0 \longrightarrow \cos x \leq 0$

$\alpha \neq 0$ PARTE PRINCIPALE $= -\frac{e\alpha^2}{2} x^2$

$\alpha = 0$ PARTE PRINCIPALE $= x^3$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\int_{-3}^{1} \frac{2}{x^2+6x+10}\,dx$$

$$\int \frac{2}{x^2+6x+10}\,dx = 2\int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx = 2\,\text{arctg}(x+3) + K$$

$$2\left|\text{arctg}(x+3)\right|_{-3}^{1} = 2\,\text{arctg}\,4 - \underbrace{2\,\text{arctg}\,0}_{=0} = 2\,\text{arctg}\,4$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$z = 2 \cdot e^{i\pi/8}$

CALCOLARE MODULO E ARGOMENTO DI $\left(\frac{\overline{1+i}}{z}\right)^5$

$$\overline{1+i} = 1-i = \sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4}$$

$$\left(\frac{\overline{1+i}}{z}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{2}\,e^{-\pi/4\, i}}{2e^{\pi/8\, i}}\right)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-3/8\pi i}\right)^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 \cdot e^{15/8\pi i}$$

TEST DI PROVA — GENNAIO 2013

1. Sia $f(x)$ una funzione crescente su $[-1,2]$. È vero che:

   A. f non è necessariamente limitata su $[-1,2]$
   B. Esiste almeno un $x \in [-1,2]$ tale che $f(x) < f(-1)$
   C. Esiste almeno un $x \in [-1,2]$ tale che $f(x) > f(2)$
   D. $f([-1,2]) \subseteq [f(-1), f(2)]$
   E. $f([-1,2]) = [f(-1), f(2)]$

---

2. Il polinomio di MacLaurin di grado 4 di $f(x) = \sin^2 3x + x^3$ è

   [A] $9x^2 + x^3 - 27x^4$ [B] $9x^2 + x^3 + 27x^4$
   [C] $3x^2 + x^3 - 27x^4$ [D] $3x^2 + x^3 - x^4$
   [E] $9x^2 - 27x^4$

---

3. Sia data la funzione $f(x) = \cos^2(\tan x)$. È FALSO che:

   [A] f ha periodo minimo π [B] f e' dispari
   [C] f e' limitata [D] $Im\ f \subseteq [0,1]$
   [E] f e' continua nel suo dominio

---

4. Una primitiva di $f(x) = \dfrac{2x^3}{(2+x^4)^2+1}$ è

   [A] $\arctan[(2+x^4)^2+1]$ [B] $\frac{1}{2}\arctan(2+x^4)$
   [C] $\frac{1}{2}\log[(2+x^4)^2+1]$ [D] $\arctan(2+x^4)$
   [E] $\frac{1}{2}\log(2+x^4)^2$

---

5. Sia $f(x) = \log(x+1) - 2e^{3x}$. Osservando che $f(0) = -2$, possiamo dedurre che:

   [A] $f^{-1})'(-2) = -5$ [B] $(f^{-1})'(0) = -5$
   [C] $f^{-1})'(0) = 1/5$ [D] $(f^{-1})'(-2) = -1/5$
   [E] $(f^{-1})'(-2) = 1/5$

---

6. Data una funzione f, dire quali fra le seguenti proposizioni è corretta:

   A. Sia f derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x) = m \in \mathbf{R}$, allora $f'(x_0) = m$
   B. Sia f derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$ e continua in $\{x_0\}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, allora f è derivabile in x_0
   C. Sia f derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty$, allora f ha un punto di flesso a tangente verticale in x_0
   D. Sia f derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$ e continua in $\{x_0\}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x) = m \in \mathbf{R}$, allora $f'(x_0) = m$
   E. Sia f derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{x_0\}$. Se esiste $\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = \pm\infty$, allora f ha una cuspide in x_0

---

7. Sia $z = 4 + 2i$. È vero che:

   NO [A] $Re(i^5 z) = Re(i^5 \bar{z})$ [B] $Im(i^5 z) = Im(i^5 \bar{z})$
   [C] $i^5 z = i^5 \bar{z}$ [D] $i^5 z = i\bar{z}$
   [E] $z = i^2 \bar{z}$

---

8. Sia $f(x) \sim e^{x^2} - 1$ e $g(x) \sim \log(1-x^3)$ per $x \to 0$. È vero che:

   [A] $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$ [B] $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
   [C] $[f(x)]^2 = o(g(x))$ per $x \to 0$ [D] $g(x) = o([f(x)]^2)$ per $x \to 0$
   [E] $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

---

9. Sia dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{t+2}\,(x^2 - x - 2) \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

È vero che:

   A. il problema dato non ha soluzioni
   B. $x(t) = -1$ è soluzione del problema su $\mathbf{R}$
   C. $x(t) = 1$ è soluzione del problema su $(-2, +\infty)$
   D. esiste una soluzione del problema, ma non è costante
   E. $x(t) = -1$ è soluzione del problema su $(-2, +\infty)$

---

10. La funzione $f(x) = 2x - \cos\frac{1}{x} + 2e^{-x}$

   A. ha asintoto obliquo $y = 2x - 1$ per $x \to +\infty$
   B. ha asintoto obliquo $y = 2x$ per $x \to +\infty$
   C. ha asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to +\infty$
   D. non ha limite per $x \to +\infty$
   E. è un infinito di ordine superiore a 1 rispetto a x, per $x \to +\infty$

---

11. Sia $f(x) = \sqrt{x+1}\,[\sin\log(x+1)]$.

È vero che:

   A. $f'(x) = \dfrac{2\cos\log(x+1) + \sin\log(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$
   B. $f'(x) = \dfrac{\cos\log(x+1)}{x+1} \cdot \sqrt{x+1} + \dfrac{2\sin\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}$
   C. $f'(x) = \dfrac{\cos\log(x+1) + \sin\log(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$
   D. $f'(x) = \dfrac{-2\cos\log(x+1) + \sin\log(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$
   E. $f'(x) = \dfrac{-\cos\log(x+1)}{x+1} \cdot \sqrt{x+1} + \dfrac{2\sin\log(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$

SIMULAZIONE QUIZ (15 domande)

1. Sia f una funzione definita su $[0,1]$. Una condizione necessaria affinché f abbia un minimo locale in $x_0 = 0.5$ é

(a) Esistono $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \le 0$

(b) $f(x) \ge f(x_0)\ \forall x \in [0,1]$.

SI ~~(c)~~ Esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $f(x) \ge f(x_0)\ \forall x \in I(x_0)$

(d) Esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $f(x) \le f(x_0)\ \forall x \in I(x_0)$

(e) Esistono $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$

2. Dire quale tra i seguenti enunciati è corretto.

SONO UGUALI! $b-a=1$

NON LO SCRIVO NEMMENO TANTO È 1.

SI ~~(a)~~ se f è continua in $[4,5]$, allora $\exists c \in [4,5]$ tale che $f(c) = \int_4^5 f(x)dx$

~~(b)~~ se f è integrabile in $[a,b]$, allora $\exists c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ NO! DOVREBBE ESSERE CONTINUA OLTRE CHE INTEGRABILE!

(c) se f è derivabile in $[0,2]$, allora $\exists c \in [0,2]$ tale che $f'(c) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$

(d) se f è continua in $[a,b]$, allora $\exists c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \int_a^b f(x)dx$

(e) se f è integrabile in $[a,b]$, allora $\exists c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \int_a^b f(x)dx$

3. Sia f definita su $[1,+\infty)$ tale che $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. É falso che

(a) f puó essere crescente e convessa su $[1,+\infty)$

(b) se f continua su $[1,+\infty)$ allora esiste almeno un $x_0 \in [1,+\infty)$ tale che $f(x_0) = 1$

~~(c)~~ se f continua su $[1,+\infty)$ allora $[0,+\infty) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ NO! LO ZERO È COMPRESO $\rightarrow f(1)=0$

(d) Puó esistere $x_0 \in [1,+\infty)$ tale che $f(x_0) = 0$

SI ~~(e)~~ se f crescente su $[1,+\infty)$ allora $1 \in \mathrm{Im}(f)$ $\longrightarrow$ PERCHÉ NON È SPECIFICATO CHE f È CONTINUA

4. L'integrale improprio $\int_\pi^\infty (x\sin x + \cos x)e^{-3x}dx$

(a) diverge a $-\infty$

(b) nessuna delle altre risposte é corretta

~~(c)~~ converge

(d) diverge a $+\infty$

(e) é indeterminato

5. L'area della parte di piano compresa fra l'asse delle x e il grafico della funzione $f(x) = xe^x$ per $-1 \le x \le 1$ è uguale a:

~~(a)~~ $2(1-e^{-1})$; (b) 0; (c) $-2(1-e^{-1})$, ~~(d)~~ $2e^{-1}$, (e) $-2e^{-1}$

SI

6. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

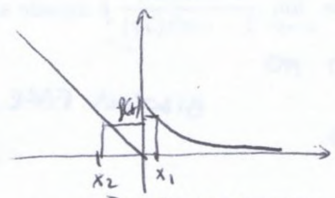
~~(a)~~ f é decrescente su $\mathbf{R}^+$

(b) f é continua su $\mathbf{R}$

(c) il punto $x = 0$ é un massimo assoluto per f

(d) f é decrescente su $\mathbf{R} - \{0\}$

(e) il punto $x = 0$ é un minimo assoluto per f



NON È DECRESCENTE SU TUTTO IL DOMINIO PERCHÉ $f(x)_1 < f(x)_2$ PER $x_2 < x_1$

7. Sia $f(x) = x\,(x-1)\,(x-2)e^{-x}$. Allora in $(0,2)$

(a) la f'' mantiene segno costante

SI ~~(b)~~ la f'' si annulla almeno una volta

(c) la f' si annulla esattamente una volta

~~(d)~~ la f'' non si annulla mai NO

(e) la f' mantiene segno costante

PERCHÉ $f''(1)=0$!

CIOÈ SE GUARDA IL GRAFICO, IN 1 C'È UN FLESSO