



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1231

DATA: 27/10/2014

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Greppi

MATERIA: Scienza delle Costruzioni

Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Scienza  
delle

Costruzioni

- Teoria -

consideriamo uno spostamento infinitesimo:

$$\{dn_p\} = \{dn_0\} + \{d\varphi\} \wedge \{P-0\}$$

$$\{d\varphi\} \wedge \{P-0\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ x_p - x_0 & y_p - y_0 & z_p - z_0 \end{vmatrix}$$

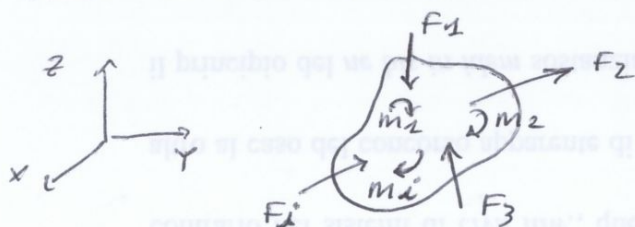
$$= [\varphi_y (z_p - z_0) - \varphi_z (y_p - y_0)] \vec{i} \\ + [-\varphi_x (z_p - z_0) + \varphi_z (x_p - x_0)] \vec{j} \\ + [\varphi_x (y_p - y_0) - \varphi_y (x_p - x_0)] \vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ \varphi_y & \varphi_x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_p - x_0 \\ y_p - y_0 \\ z_p - z_0 \end{vmatrix}$$

MATRICE DI  
ROTAZIONE  $[\varphi]$   
antisimmetrica

### EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

dato un corpo rigido con forze concentrate e momenti concentrati applicati:



$\{R\} = \{0\}$  Risultante delle forze nulla

$\{M\} = \{0\}$  Momento risultante nulla

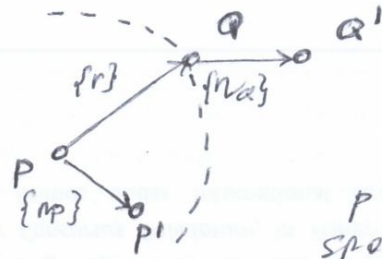
$$\{R\} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ F_{z_i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix}$$

$$\{M(0)\} = \sum_{i=1}^n \{M_i(0)\} + \sum_{i=1}^n (\{r_i\} \wedge \{F_i\}) = \{0\}$$

# TENSORE DI DEFORMAZIONE



corpo.  
Considero l' intorno  
del punto P.



P e Q si  
spostano in  
seguito a  
deformazione

sviluppo {r} in serie di Taylor:

$$PQ = \{r\} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P dz$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P dy + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_P dz \right] + \dots$$

trascurabile  
abbiamo  
piccole  
deformaz.

$$v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_P dz$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P dz$$

$$\begin{Bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\{r_Q\} = \{r_P\} + [J_P] \{dr\}$$

(spostam.  
totale)      (traslazione)      (deformazione  
più rotazione)

$$[J_P] = [\epsilon_P] + [\varphi_P]$$

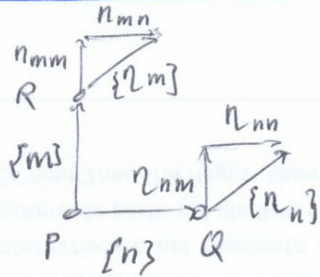
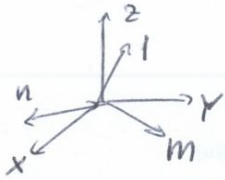
noi conosciamo la matrice di rotazione  $[\varphi]$ :

$$[\varphi_P] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$$

da qu' ricavato  
la matrice di  
deformazione

# TRASFORMAZIONE DEL TENSORE di deformaz.

per notazione del sistema di riferimento



nell'incorno del punto P

$$\begin{cases} \{\eta_n\} = [\epsilon_P] \{n\} \\ \{\eta_m\} = [\epsilon_P] \{m\} \end{cases}$$

spostamento lungo n e' dato dal vettore {n} mosso rigidamente e deformato (quindi moltiplicato per [epsilon]).

$\eta_{nn} =$  lungo  $\{n\}^T$  spostamento  $\{\eta_n\}$

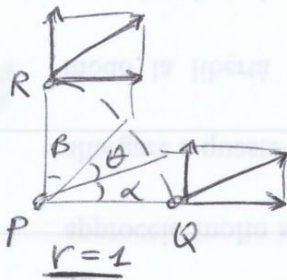
$$\eta_{nn} = \{n\}^T \{\eta_n\} = \{n\}^T [\epsilon_P] \{n\}$$

$$\eta_{mn} = \{n\}^T \{\eta_m\} = \{n\}^T [\epsilon_P] \{m\}$$

$$\eta_{nm} = \{m\}^T \{\eta_n\} = \{m\}^T [\epsilon_P] \{n\}$$

$$\eta_{mm} = \{m\}^T \{\eta_m\} = \{m\}^T [\epsilon_P] \{m\}$$

$\eta_{nm} = \eta_{mn}$   
per simmetria della matrice [epsilon]



$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{(1 + \eta_{nn}) - 1}{1} = \eta_{nn} \\ &= \{n\}^T [\epsilon_P] \{n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{(1 + \eta_{mm}) - 1}{1} = \eta_{mm} \\ &= \{m\}^T [\epsilon_P] \{m\} \end{aligned}$$

$$\eta_{nm} = 1 \cdot \tan \alpha = \alpha$$

$$\eta_{mn} = 1 \cdot \tan \beta = \beta$$

$$\gamma_{nm} = \frac{\pi}{2} - \theta = \alpha + \beta = 2\eta_{nm}$$

$$[\epsilon_P]_{nml} = \begin{bmatrix} \epsilon_n & \frac{1}{2} \gamma_{nm} & \frac{1}{2} \gamma_{nl} \\ \frac{1}{2} \gamma_{mn} & \epsilon_m & \frac{1}{2} \gamma_{ml} \\ \frac{1}{2} \gamma_{ln} & \frac{1}{2} \gamma_{lm} & \epsilon_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{n\}^T [\epsilon_P] \{n\} & \{n\}^T [\epsilon_P] \{m\} & \{n\}^T [\epsilon_P] \{l\} \\ \{m\}^T [\epsilon_P] \{n\} & \{m\}^T [\epsilon_P] \{m\} & \{m\}^T [\epsilon_P] \{l\} \\ \{l\}^T [\epsilon_P] \{n\} & \{l\}^T [\epsilon_P] \{m\} & \{l\}^T [\epsilon_P] \{l\} \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon_P^*]_{nml} = [N] [\epsilon_P]_{xyz} [N]^T \quad \text{con} \quad [N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_n^3 - J_1 \epsilon_n^2 - J_2 \epsilon_n - J_3 = 0$$

Invarianti della  
DEFORMAZIONE

-  $J_1$  INVARIANTE LINEARE

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

-  $J_2$  INVARIANTE QUADRATICO

$$-\left[ \begin{array}{cc} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \epsilon_z \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{array} \right]$$

-  $J_3$  INVARIANTE CUBICO

$$\det [\epsilon_P]$$

gli invarianti non dipendono dal sistema di riferimento

■  $\det [A] = 0$

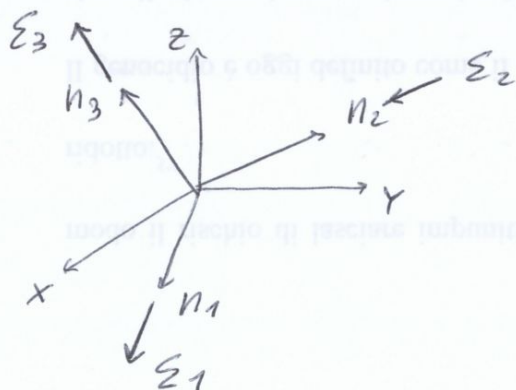


■ Trovo autovalori  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$



■ sostituendo gli autovalori uno alla volta nella matrice A, tramite il sistema lineare, ottengo  $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$  autovettori

(con  $\epsilon_1$  ottengo  $\{n_1\}$ , con  $\epsilon_2$  ottengo  $\{n_2\}$   
con  $\epsilon_3$  ottengo  $\{n_3\}$ )



$n_1, n_2, n_3$   
saranno ortogonali'



DA DIMOSTRARE

# INVARIANTI NEL SISTEMA PRINCIPALE

$$[\epsilon_p] = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

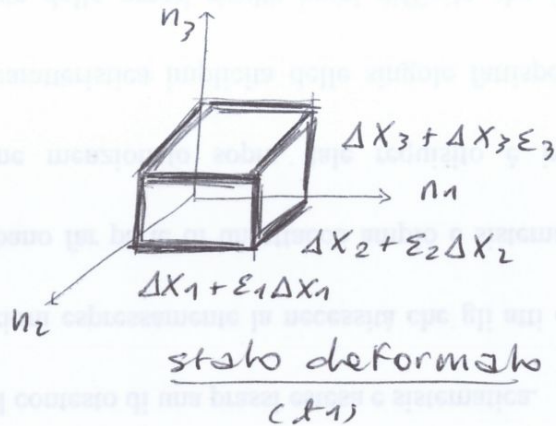
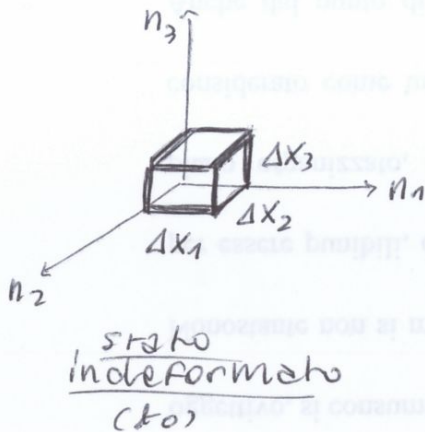
$n_1, n_2, n_3$

$$J_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \rightarrow \text{variazione di volume}$$

$$J_2 = -\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_2 \epsilon_3 \rightarrow \text{parametri di distorsione}$$

$$J_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \rightarrow J_3 = 0 \text{ stato piano o monodirezionale}$$

## DIMOSTRAZIONE SIGNIFICATO FISICO DI $J_1$



ipotesi di un allungamento = meno

$$V_0 = \Delta X_1 \cdot \Delta X_2 \cdot \Delta X_3$$

$$V_1 = \Delta X_1 (1 + \epsilon_1) \cdot \Delta X_2 (1 + \epsilon_2) \cdot \Delta X_3 (1 + \epsilon_3)$$

$$V_1 = V_0 (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3)$$

$$= V_0 (1 + \epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_1 \epsilon_2)(1 + \epsilon_3)$$

$$= V_0 (1 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3)$$

TEORIA INFINITESIMA

$$V_1 \cong V_0 (1 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$$

posso trascurare i termini sono moltiplicati = zero tra infinitesimi

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{V_0 (1 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1 - 1)}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

invariante  $J_1$   
rappresenta una  
distorsione cubica



# VEETTORE TENSIONE $\{t\}$

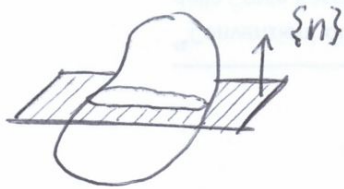
condizioni di equilibrio  
Equazioni cardinali della statica

Risultante forze di volume e di superficie = 0

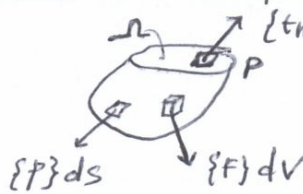
$$\int_V \{F\} dV + \int_S \{P\} dS = 0$$

$$\int_V \{r\} \wedge \{F\} dV + \int_S \{r\} \wedge \{P\} dS = 0$$

Momento risultante nullo



considerando solo una porzione



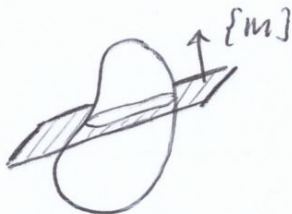
Avremo equilibrio:

$$0 = \int_V \{F\} dV + \int_S \{P\} dS + \int_{\Omega} \{tn\} d\Omega$$

$$0 = \int_V \{r\} \wedge \{F\} dV + \int_S \{r\} \wedge \{P\} dS$$

$$+ \int_{\Omega} \{r\} \wedge \{tn\} d\Omega$$

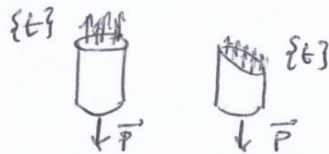
cambiando il piano di sezione:



$$\{tm\} \neq \{tn\}$$

se aumenta  $\Omega$  diminuisce  $\{tn\}$

DIPENDENZA DALLA GIACITURA DEL PIANO DI TAGLIO



abbiamo vettori su tutta la superficie  $\Omega$

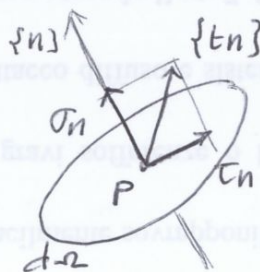
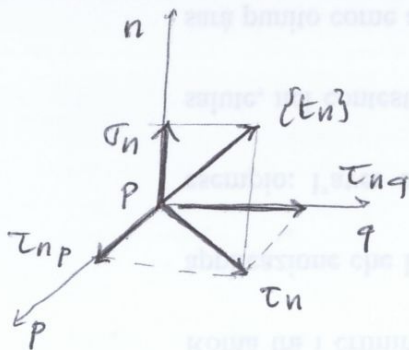
$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\{\Delta R\}}{\Delta\Omega} = \{tn\}$$

$\{\Delta R\}$  risultante sull'area  $\Omega$

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\{\Delta M\}}{\Delta\Omega} = \{0\}$$

$\{\Delta M\}$  microcoppia risultante sull'area  $\Omega$

Analizziamo la tensione nel punto in assenza di microcoppie.



$\sigma_n$  componente normale al piano

$\tau_n$  componente tangente al piano (tangenziale)

$$\{tn\} = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_{np} \cdot \vec{p} + \tau_{nq} \cdot \vec{q}$$

$$\text{con } \tau_n = \sqrt{(\tau_{np})^2 + (\tau_{nq})^2}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix}$$

RELAZIONE DI CAUCHY

MATRICE DELLE TENSIONI  $[\sigma]$

COSENI DIRETTORI

$$\{t_n\} = \{\tau_x\} n_x + \{\tau_y\} n_y + \{\tau_z\} n_z$$

analogia con il tensore di deformazione

$$\{t_n(p)\} = [\sigma_p] \{n\}$$

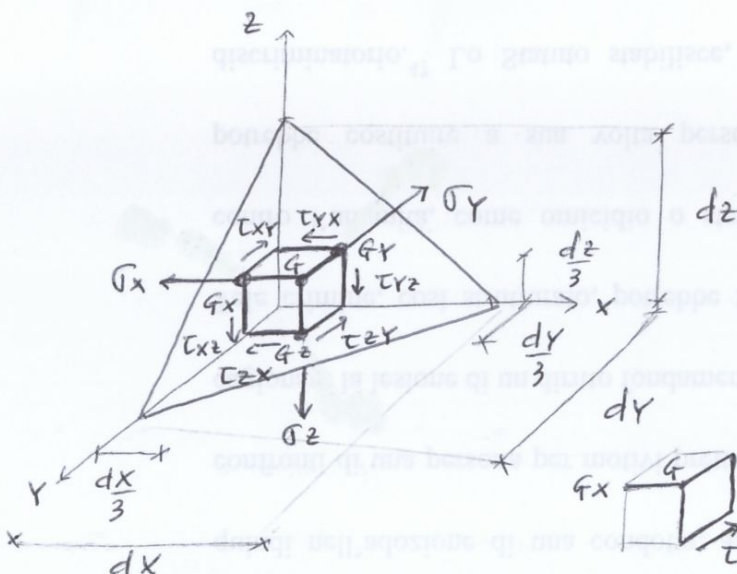
TENSORE DEL II ORDINE che trasforma il vettore  $\{n\}$  nel vettore tensione  $\{t_n\}$

$$\{\eta_n(p)\} = [\epsilon_p] \{n\}$$

TENSORE DEL II ORDINE che trasforma il vettore  $\{n\}$  nel vettore spostamento  $\{\eta_n\}$

$\sigma$  e  $\epsilon$  sono grandezze puntuali, sono prescelti in ogni punto del solido - e definite per questo si parla di campo.

DIMOSTRAZIONE DELLA SIMMETRIA della matrice



Baricentro triangolo si trova ad un terzo,  $\frac{1}{3}$  del lato

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE: attorno agli assi  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

Esempio attorno a  $\sigma_x$ :

$\tau_{zx}, \tau_{xz}$  sono //

$\tau_{xy}, \tau_{yz}$  braccio nullo

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  braccio nullo

$\tau_{yz}, \tau_{zy}$  contribuiscono al momento

$$-\tau_{yz} d\Omega_y \cdot \frac{dy}{3} + \tau_{zy} d\Omega_z \frac{dz}{3} = 0$$

così la rendo una forza

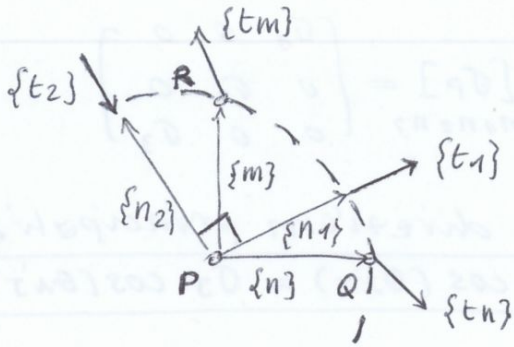
essendo:

$$\frac{1}{3} dy d\Omega_y = \frac{1}{3} dz d\Omega_z$$

avremo

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

# DIREZIONI PRINCIPALI



sistema principale, dove si annullano le tensioni tangenziali

$$[\sigma_P] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

vogliamo che  $\{t_n\} \parallel \{n\}$

Equazione tensoriale:  $\{t_n\} = [\sigma_P] \{n\}$  — trasforma il vettore normale nel vettore tensione  
 Equazione vettoriale:  $\{t_n\} = \sigma_n \{n\}$  — imponiamo parallelismo (solo componente normale)

sottraendo:

$$[\sigma_P] \{n\} - \sigma_n \{n\} = 0$$

$$([\sigma_P] - [I] \sigma_n) \{n\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

non può essere uguale a zero  
 $(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1)$

Ricerca autovalori:

$$\det([\sigma_P] - [I] \sigma_n) = 0$$

da cui ottengo:

$$\sigma_n^3 - T_1 \sigma_n^2 - T_2 \sigma_n - T_3 = 0$$

con:

■  $T_1$  INVARIANTE LINEARE

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

■  $T_2$  INVARIANTE QUADRATICO

$$-\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

■  $T_3$  INVARIANTE CUBICO

$$\det[\sigma_P]$$

Tre minori estratti dalla matrice

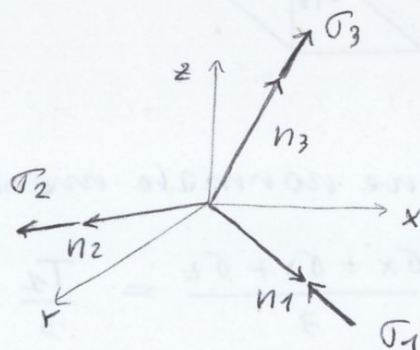
quindi trovo

$$\det[A]$$

Equazione di 3° grado

Ricavo  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Li inserisco nella matrice (A), risolvo il sistema lineare e trovo  $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$



$$[\sigma_i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

Mi individua le variazioni di volume. E' responsabile delle variazioni di volume

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

responsabile delle distorsioni, dei cambiamenti di forma.

## TEORIA DEI CERCHI DI MOHR (1882)

stato di sforzo all'interno di un punto in maniera grafica. Nel piano  $(\sigma, \tau)$ , « piano delle tensioni ».

E' Applicabile a qualsiasi sensore del secondo ordine, anche a quello della deformazione.

STATO TENSIONIALE  $\rightarrow$  CERCHI DI MOHR  $\rightarrow$  posso calcolare le tensioni principali e le direzioni principali in un punto.

$$\{\epsilon_n\} = [\sigma_p] \{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

nel sistema di riferimento principale  $n_1, n_2, n_3$

$$\sigma_n = \epsilon_{nn} = \{n\}^T \{\epsilon_n\} = \{n\}^T [\sigma_p] \{n\}$$

$$= [n_1 \ n_2 \ n_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Ⓐ

$$\|\epsilon_n\|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

uguale a zero nel sistema principale

Ⓑ

ma sappiamo che  $\sigma_n = \{n\}^T [\sigma_p] \{n\} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$

Ⓒ

condizioni di ortogonalità  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

sistema in incognite  $n_1^2, n_2^2, n_3^2$

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 - \sigma_3 n_1^2 - \sigma_3 n_2^2$$

$$\sigma_n - \sigma_1 n_1^2 - \sigma_3 + \sigma_3 n_1^2 = n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 \left( \frac{\sigma_n - \sigma_1 n_1^2 - \sigma_3 + \sigma_3 n_1^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)} \right)^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$\tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} \right)^2$$

Dominio  
Esterno

$$\tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \right)^2 \leq \left( \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \right)^2$$

Dominio  
Interno

$$\tau_n^2 + \left( \sigma_n - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \right)^2 \geq \left( \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \right)^2$$

Dominio  
Esterno

sono circonferenze sotto forma:

$$Y^2 + (X - X_c)^2 = R^2$$

abbiamo 3 circonferenze:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

CIRCONFERENZA 1

$$C_1 \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$$

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

raggio tensione massima

CIRCONFERENZA 2

$$C_2 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$$

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

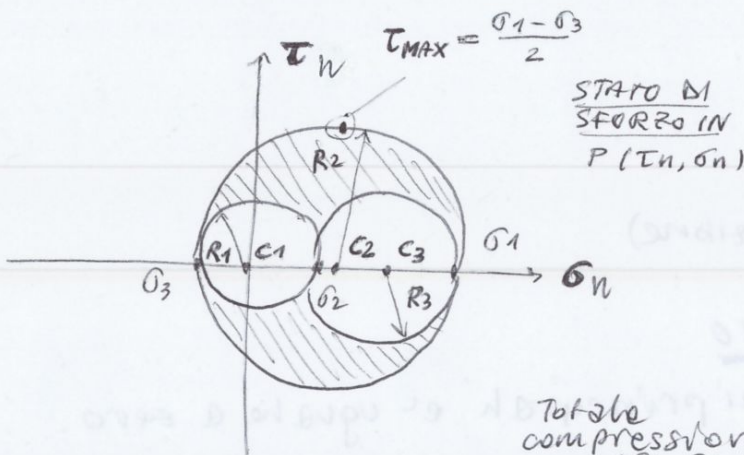
tensione minima

CIRCONFERENZA 3

$$C_3 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$$

$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

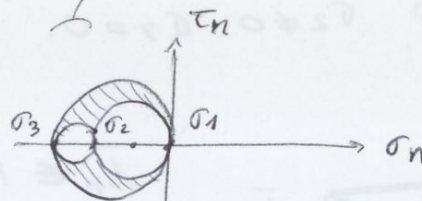
Et per questo  
che R2 e'  
il maggiore



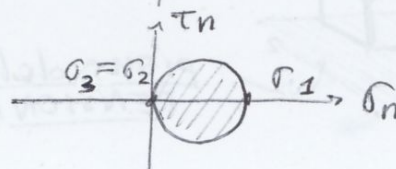
STATO DI  
SFORZO IN  
P ( $\tau_n, \sigma_n$ )

CASI PARTICOLARI

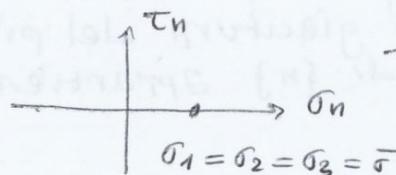
STATO BIASSIALE  
( $\sigma_1 = 0$ ) ( $\sigma_2 \neq 0$ )



STATO MONOASSIALE  
( $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$ )



STATO IDROSTATICO  
( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \bar{\sigma}$ )



Solido di  
SAINT VENANT

Et uno stato  
contorno dalla  
crisi.

cerchi di Mohr piccoli garantiscono un buon funzionamento del materiale

$$\{t_n\} = [\sigma_P] \{n\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 & \sigma_2 n_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_3 = 0$

In un sistema di riferimento generico:

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{quindi:}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\sigma_P]$$

Ricerca autovalori

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(-\sigma_n) \\ & - \tau_{xy}(\tau_{yx})(-\sigma_n) = 0 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}^2 (\sigma_n) + (\sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_n - \sigma_n \sigma_y + \sigma_n^2) (-\sigma_n) = 0$$

$$-\sigma_n^2 + (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y = 0$$

$$\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

$$T_1 = \text{traccia} [\sigma]$$

$$T_2 = \sum \det(\text{minori} [\sigma])$$

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x \sigma_y - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2}$$

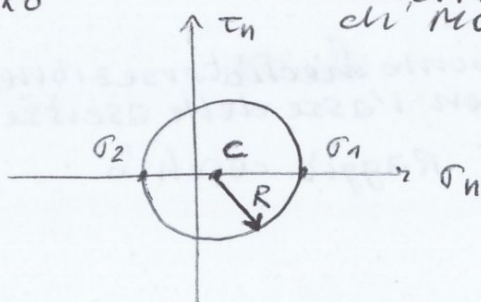
$-2\sigma_x \sigma_y$

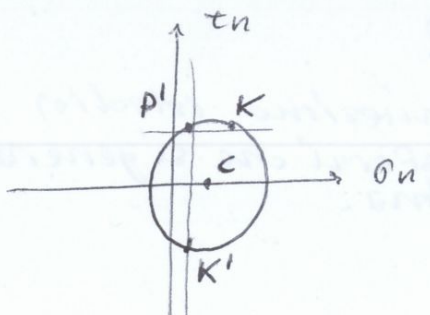
$$= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

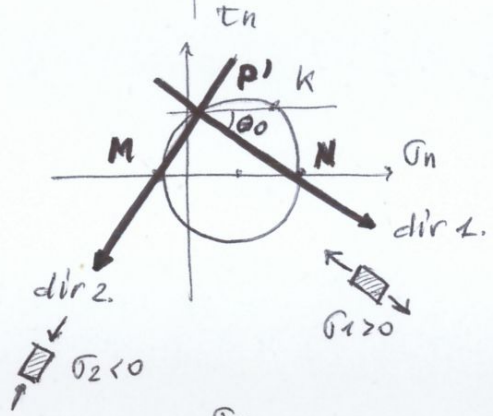
ascissa  
CENTRO

diametro cerchio  
di MOHR



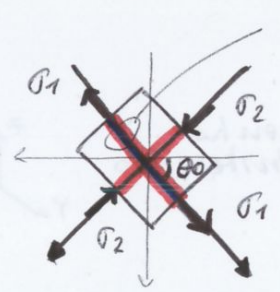
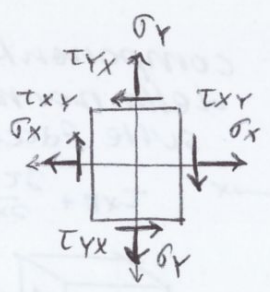


disegnando  
retta // all'asse  $\tau_n$   
e retta // all'asse  $\sigma_n$



da P' rette  
passanti per  
M e N.  
queste sono  
le direzioni  
principali

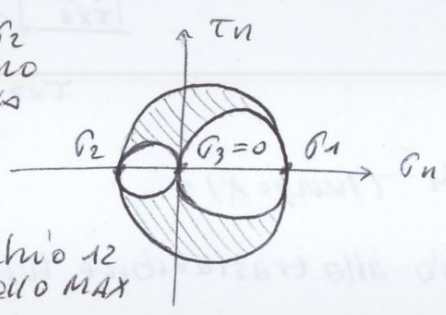
in N  $\rightarrow \sigma_1$   
in M  $\rightarrow \sigma_2$   
  
 $\sigma_x > \sigma_y$   
quindi  
 $\sigma_1 > \sigma_2$



linee isostatiche  
di compressione  
e trazione

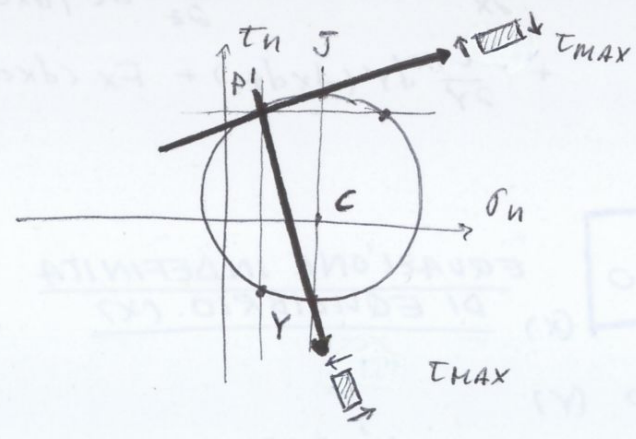
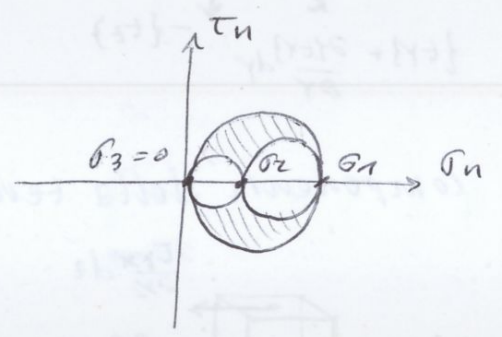
Ricordando che  $\sigma_3 = 0$ , Mohr diventa:

$\sigma_1, \sigma_2$   
di segno  
opposto



Il cerchio 12  
e' quello MAX

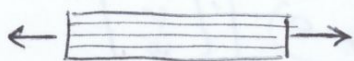
$\sigma_1, \sigma_2$   
di segno  
concorde



$$\text{div} [\sigma] = -\{F\}$$

sistema staticamente indeterminato  $\rightarrow$  3 equazioni in 6 incognite.  
3 GRADI DI IPERSTATICITA'

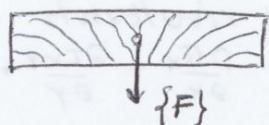
- se  $\{F\} = 0 \rightarrow$  non abbiamo tensioni interne



$$\text{div} [\sigma] = \{0\}$$

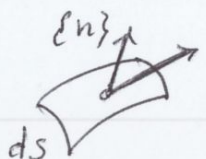
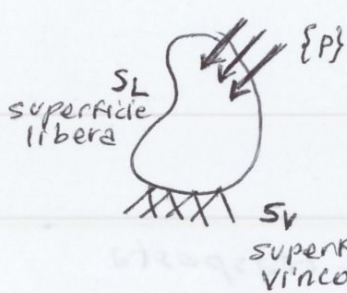
linee di flusso del campo di tensione sono continue

- se  $\{F\} \neq 0 \rightarrow$  vi sono tensioni interne



abbiamo delle discontinuita' nelle linee di flusso del campo

### EQUAZIONI DI EQUIVALENZA SULLA FRONTIERA:



$$\{t_n\} = \{P\} \quad \{t_n\} = [\sigma] \{n\} = \{P\}$$

$$\begin{cases} t_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = P_x \\ t_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = P_y \\ t_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = P_z \end{cases}$$

$$\forall P \in S_L$$

Meccanica dei corpi deformabili



### DUALITA' STATICO-CINEMATICA (corpi deformabili)

campi di tensione e di deformazione dipendono dal punto P e dalla geometria  $\{n\}$

$$[\sigma(P)] \text{ e } [\epsilon(P)]$$

I tensori si possono scrivere come vettori:

$$[\sigma(P)] \rightarrow \{\sigma(P)\}$$

$$[\epsilon(P)] \rightarrow \{\epsilon(P)\}$$

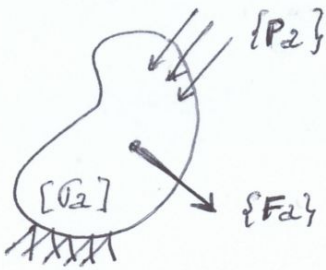
$$\{\sigma(P)\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad \{\epsilon(P)\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

$\epsilon$  dilatazioni assiali  
 $\gamma$  scorrimenti angolari  
 $\sigma$  tensioni normali  
 $\tau$  tensioni tangenziali



TEOREMA DI GREEN → alle derivate parziali corrispondono i coseni direttori

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI → corpo deformabile



sistema di forze-tensioni  $\{a\}$

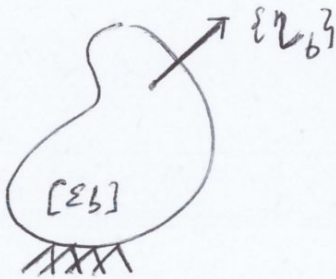
sistema equilibrato staticamente ammissibile:

devono essere soddisfatte perché si stabi. ammissibile.

$$[Q]^T \{Q_2\} = -\{F_2\} \quad \forall P \in V \quad \text{EQUAZIONI INDEFINITE}$$

$$[N]^T \{Q_2\} = \{P_2\} \quad \forall P \in S_L \quad \text{EQUIVALENZA AL LONTORNO}$$

corpo deformabile, abbiamo lavoro esterno (compiuto dalle forze esterne) e un lavoro interno (spostamento dei punti interni; forze di volume).



sistema di spostamenti, deformazioni  $\{b\}$

virtuale

sistema congruente e cinematicamente ammissibile:

$$[Q] \{\eta_b\} = \{E_b\}$$

$$\{\eta_b\} = \{\eta_v\} \quad \forall P \in S_V \quad \text{superficie vincolata}$$

$\{a\}$  e  $\{b\}$  sono indipendenti l'uno dall'altro.

PLV: dati due sistemi,  $\{a\}$  equilibrato e  $\{b\}$  congruente, il lavoro virtuale esterno deve essere uguale a quello interno.

$$L_e^* = L_i^*$$

forze per relativi spostamenti

tensioni per relative deformazioni

DIMOSTRAZIONE TRAMITE GAUSS-GREEN (240/420 del pdf)

si considerino due funzioni  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$   
deriva parzialmente il prodotto:

$$\frac{\partial}{\partial x} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial g}{\partial x} f$$

applicando le equazioni indefinite:

$$L_F = - \int_V ([\partial]^T \{\sigma_2\})^T \cdot \{\eta_b\} dV$$

$$L_F = - \int_V [\partial] \{\sigma_2\}^T \{\eta_b\} dV$$

usando l'estensione di Green ricavata prima:

$$\int_S F n_x g dS = \int_V \frac{\partial F}{\partial x} g dV + \int_V F \frac{\partial g}{\partial x} dV$$

in questo caso:  $f = \{\sigma_2\}^T$   
 $g = \{\eta_b\}$

$$- \int_V \frac{\partial F}{\partial x} g dV = \int_V F \frac{\partial g}{\partial x} dV - \int_S F n_x g dS$$

quindi:

$$- \int_V [\partial] \{\sigma_2\}^T \{\eta_b\} dV = \int_V \{\sigma_2\}^T [\partial] \{\eta_b\} dV - \int_S \{\sigma_2\}^T [N] \{\eta_b\} dS$$

sostituendo ottengo:

$$L_F = \int_V \{\sigma_2\}^T [\partial] \{\eta_b\} dV - \int_S \{\sigma_2\}^T [N] \{\eta_b\} dS$$

sapendo che  $\begin{cases} [N]^T \{\sigma_2\} = \{P_2\} \\ [\partial] \{\eta_b\} = \{\epsilon_b\} \end{cases}$  quindi  $\{\sigma_2\}^T [N] = \{P_2\}^T$

sostituisco:

$$L_F = \int_V \{\sigma_2\}^T \{\epsilon_b\} dV - \int_S \{P_2\}^T \{\eta_b\} dS$$

come visto all'inizio  $L_F = \int_V \{F_2\}^T \{\eta_b\} dV$ , sostituisco:

$$\int_V \{F_2\}^T \{\eta_b\} dV = \int_V \{\sigma_2\}^T \{\epsilon_b\} dV - \int_S \{P_2\}^T \{\eta_b\} dS$$

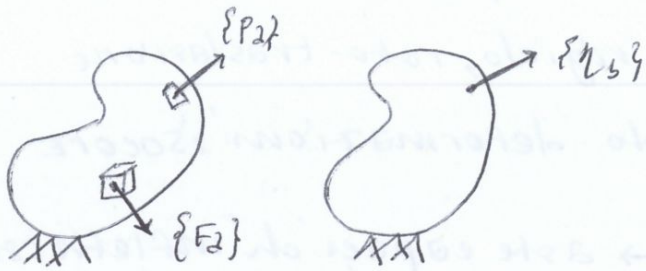
quindi:  $\rightarrow L_{\sigma} = L_{\epsilon}$   $\rightarrow$  PLV per corpi deformabili

$$\int_V \{\sigma_2\}^T \{\epsilon_b\} dV = \int_V \{F_2\}^T \{\eta_b\} dV + \int_S \{P_2\}^T \{\eta_b\} dS$$

MATRICE DEI  
COSENI DIRETTORI

ESSENDO UNA  
FORZA DI  
SUPERFICIE LA  
INSERISCO  
NELL'INTEGRALE  
IN dS

Lavoro virtuale esterno:



$$\int_V \{F_2\}^T \{u_b\} dV + \int_{S_L} \{P_2\}^T \{u_b\} dS_L$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV):

$$L_{ve} = L_{vi}$$

$$\int_V \{F_2\}^T \{u_b\} dV + \int_{S_L} \{P_2\}^T \{u_b\} dS_L = \int_V \{\sigma_2\}^T \{\epsilon_b\} dV$$

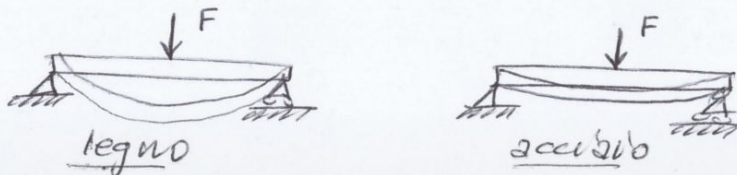
È INDIPENDENTE dal tipo di materiale (ossia dal legame costitutivo tra tensioni e deformazioni).

⚠ ↓ Questo è ciò che dimostra GAUSS-GREEN

### LEGAMI COSTITUTIVI

Sono leggi fisiche che legano le deformazioni alle tensioni.

A corpi aventi la stessa geometria, ma di differente natura corrispondono deformazioni differenti sotto l'azione di uno stesso sistema di forze.



Bisogna introdurre ipotesi sulla natura dei continui, che specifichino la diversità del loro comportamento.

■ Legame tra stato di tensione e deformazione:

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \epsilon', t)$$

#### COMPORIAMENTO VISCOSO

Le deformazione continua a crescere a sollecitazione costante.

COMPORIAMENTO ELASTICO  
deformazioni si annullano all'annullarsi dello stato tensionale.

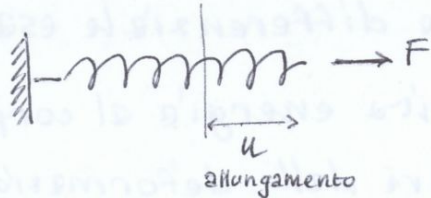
COMPORIAMENTO PLASTICO  
al cessare della sollecitazione rimane una deformazione permanente.

# TEORIA DELL'ELASTICITA'

Legame costitutivo elastico:  $\{\sigma\} = \sigma(\{\epsilon\})$

campo tensionale  
funzione diretta  
del campo di  
deformazione

## LEGGI DI HOOKE:



Proporzionalità tra forza ed elongazione della molla:

$$F = k u$$

k costante elastica, più è elevata, più è difficile allungare la molla

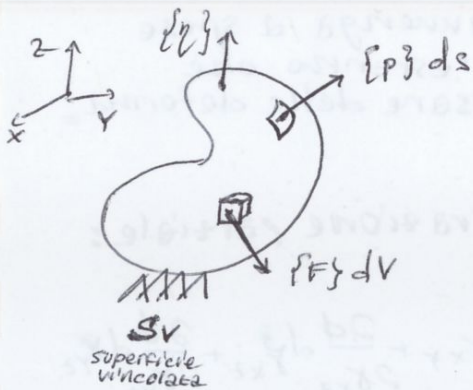
BERNOULLI:  $\sigma = E \epsilon$

E = COSTANTE ELASTICA o MODULO DI YOUNG

classe di materiali elastici: IPERELASTICITA'

corpo deformabile IPERELASTICO, quando la sua energia di deformazione, cioè il lavoro necessario per portarlo ad uno stato deformativo  $\{\epsilon\}$ , non dipende dal processo di carico, ma solo dallo stato finale

consideriamo un corpo sotto l'azione di forze di superficie  $\{P\}$  e di volume  $\{F\}$ :



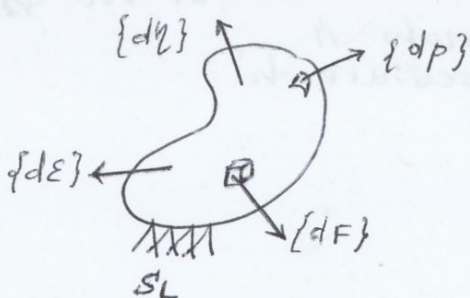
aumentiamo le quantità di un infinitesimo:

$$\{dP\}, \{d\eta\}, \{dF\}, \{d\epsilon\}$$

campo incrementale di spostamenti

campo incrementale di deformazioni

Applico PLV:



Il lavoro degli infinitesimi delle forze esterne è trascurabile  $\{dF\}^T \{d\eta\}, \{dP\}^T \{d\eta\} \approx 0$

staticamente ammissibile  $\Rightarrow \{F\}, \{P\} \rightarrow \{\sigma\}$

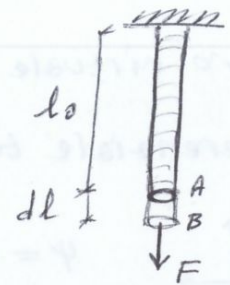
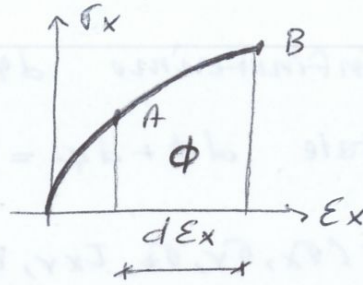
cinematicamente ammissibile  $\Rightarrow \{d\eta\} \rightarrow \{d\epsilon\}$

CASO MONOASSIALE :

$\phi = \phi(\epsilon_x)$

$\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$

processo di carico



percorsi di carico e scarico coincidono

$\sigma_x = \frac{F}{A}$   
 $\epsilon_x = \frac{dl}{l_0}$

Lavoro di deformazione pari all'area sottesa dalla curva

$\sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x)$

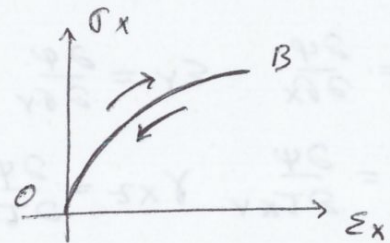
ENERGIA DI DEFORMAZIONE:  
 (per passare da A a B)

$dL_{A \rightarrow B} = \phi_A - \phi_B$

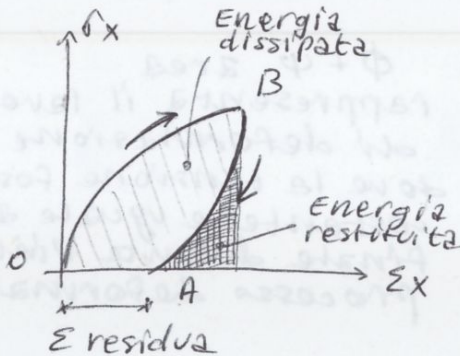
LAVORO DI DEFORMAZIONE

$L = \oint d\phi = 0$  nullo in un cammino chiuso

$L_{0 \rightarrow B \rightarrow 0} = 0$



MATERIALE ANELASTICO (PLASTICO)

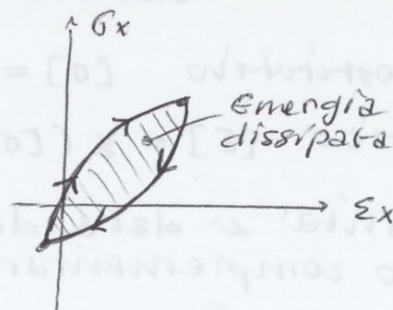


Rimane della deformazione residua

$L_{0 \rightarrow B \rightarrow A} \neq 0$

Le energie non si conservano

con cicli di carico e scarico:

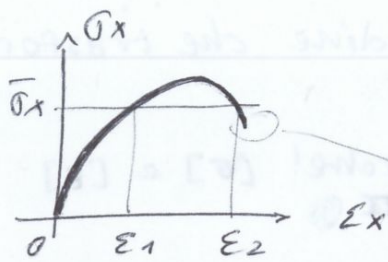


Esempio: cavo d'acciaio con carichi alternati.

Avremo una dissipazione per ISTERESI

↓  
 caratteristica di un materiale di reagire in ritardo alle sollecitazioni applicate

Infatti quando non posso definire  $\psi$ :



$\nexists \psi$  non esiste  
 $\nexists \epsilon = \epsilon(\sigma)$  di conseguenza

tensione scende, ma deformazione continua ad aumentare

L'invertibilità del legame costitutivo (quindi l'esistenza di  $\psi$ , e' assicurata se  $\phi(\epsilon_{i,j})$  e' una funzione strettamente convessa e definita positiva.

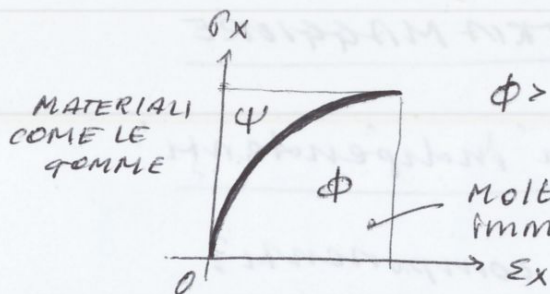
convessità dell'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_{i,j} \partial \epsilon_{k,l}} \right) \epsilon_{i,j} \epsilon_{k,l} > 0$$

$$\phi(\epsilon_{i,j}) > 0 \quad \forall \epsilon_{i,j} \neq 0$$

derivate seconde  $> 0$  mi garantiscono che non cambia mai la convessità.

## ELASTICITÀ NON LINEARE

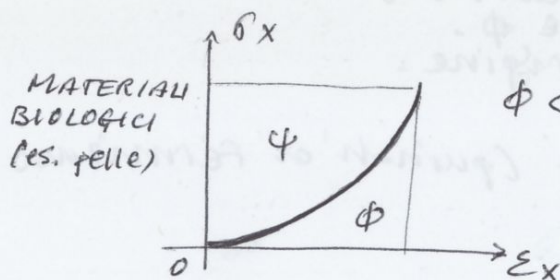


$$\phi > \psi$$

CASO 1  
 concavità verso il basso.

Molta energia immagazzinata

prima parte della curva: materiale più rigido, serve tanta energia per deformare, poi nella seconda viceversa.



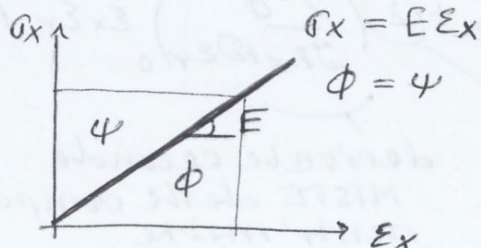
$$\phi < \psi$$

CASO 2  
 concavità verso l'alto

poca energia immagazzinata, non propaga l'eventuale fessura.

↳ VANTAGGIO

## ELASTICITÀ LINEARE



$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\phi = \psi$$

$E =$  MODULO DI YOUNG rappresenta la pendenza

$\uparrow E \uparrow$  rigidità del materiale

assumiamo nullo di potenziale nell'origine, poiché il valore nell'origine è arbitrario.

$$\phi(0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{materiale nell'origine} \\ \text{non ha energia accumulata} \end{array} \right\}$$

Ricordando che (visto prima):

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x} \right)_0 = \sigma_x(0) = 0$$

nulle per definizione, sono le tensioni nello stato inelaborato.

$$\dots$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}} \right)_0 = \tau_{yz}(0) = 0$$

### MATRICE HESSIANA DEL POTENZIALE ELASTICO [H]

Matrice delle derivate seconde. È simmetrica.

$$[H]_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}} \right)_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_x} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz}^2} \right)_0 \end{pmatrix}$$

21 costanti indipendenti  
(6 sulla diagonale e 15 fuori dalla diagonale)

diagonale → COSTANTI ELASTICHE

fueri dalla diagonale → COSTANTI ELASTICHE DERIVATE.

da HOOKE  
 $\sigma = E \epsilon$

Termine 1.1  $\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2} \right)_0 = \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon_x} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x} \right)_0 = \left( \frac{\partial}{\partial \epsilon_x} \sigma_x \right)_0 = E_x$

mi dà la pendenza nell'origine, ma essendo l'andamento lineare, questa non cambia.

La DISTORSIONE DELLE FIBRE è descritta dalla diagonale

### POTENZIALE ELASTICO LINEARE

Abbiamo visto che nello sviluppo di McLaurin scritto prima  $\phi(0) = 0$ , le derivate prime si annullano, rimane solo:

$$\phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\}$$

Forma matriciale compatta

## PROBLEMA ELASTICO LINEARE

Le 3 equazioni indefinite non bastano per definire le 6 componenti di tensione (3 equazioni con 6 incognite).

Aggiungendo le 6 eq. costitutive elastiche lineari, otteniamo un sistema 9 eq in 9 incognite:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w)$$

Assumiamo come incognite il vettore spostamento  $\{\eta\}$

$$\text{Eq. equilibrio: } [\sigma]^T \{\sigma\} = -\{F\}$$

$$\text{Eq. costitutive: } \{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\}$$

$$\text{Eq. congruenza: } \{\varepsilon\} = [\sigma] \{\eta\}$$

$$[\sigma]^T \{\sigma\} = -\{F\}$$

$$[\sigma]^T [H] \{\varepsilon\} = -\{F\}$$

usando le equazioni sopra

$$[\sigma]^T [H] [\sigma] \{\eta\} = -\{F\}$$

EQUAZIONE OPERATORIALE DI LAME:

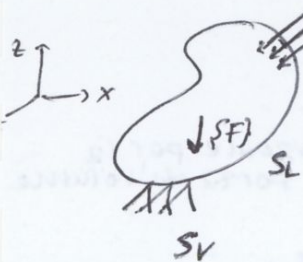
$$[L] = [\sigma]^T [H] [\sigma]$$

$3 \times 3$

operatore differenziale di Lamé

$$[L] \{\eta\} = -\{F\}$$

## PROBLEMA ELASTICO



$$\{P\} = [N]^T \{\sigma\}$$

$$[L] \{\eta\} = -\{F\} \quad \forall P \in V$$

$$[N]^T \{\sigma\} = \{P\}$$

$$[N]^T [H] \{\varepsilon\} = \{P\}$$

$$([N]^T [H] [\sigma]) \{\eta\} = \{P\} \quad \forall P \in S_L$$

$$\{\eta\} = \{\eta_0\} \quad \forall P \in S_V$$



sapendo che  $\phi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$ , il secondo membro:

$$2 \int_V \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\epsilon\} dV$$

$$= 2 \int_V \phi(\Delta\epsilon_x, \dots, \Delta\gamma_{yz}) dV$$

perché sia nullo:

sappiamo che  $\phi$  è una forma quadratica definita positiva, per cui l'integrale si annulla solo quando è nullo in ogni punto del corpo elastico

$$2 \int_V \phi(\Delta\epsilon_x, \dots, \Delta\gamma_{yz}) dV = 0 \quad \text{— gli altri integrali sono nulli}$$

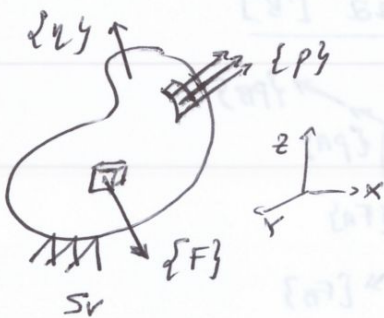
$$\Delta\epsilon_x = \Delta\epsilon_y = \dots = \Delta\gamma_{yz} = 0$$

Questa condizione si verifica solo quando

A e B COINCIDONO  $\rightarrow$  UNICITA' della soluzione

### TEOREMA DI CLAPEYRON

↳ serve per il calcolo dell'energia interna di un corpo



Abbiamo un corpo soggetto a forze:  $\{F\} dV$   
 $\{P\} dS$

Al termine del processo di carico si genera un campo di spostamenti  $\{u\}$

Applicando PLV: IPOTESI: processo di carico lento, QUASI-STATICO

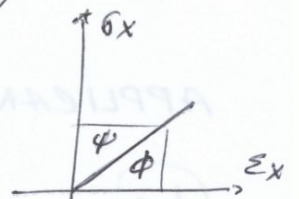
$$\int_V \{F\}^T \{u\} dV + \int_{S_L} \{P\}^T \{u\} dS = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

Moltiplichiamo per  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{P\}^T \{u\} dS = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

$\frac{1}{2}$  Forze finali \* spost. finale

$$\int_V \phi dV = \frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{P\}^T \{u\} dS$$



↳ lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne per portare il corpo allo stato deformato e pari alla metà del lavoro che tali forze compirebbero se agissero con il loro valore finale durante tutto il processo di carico.

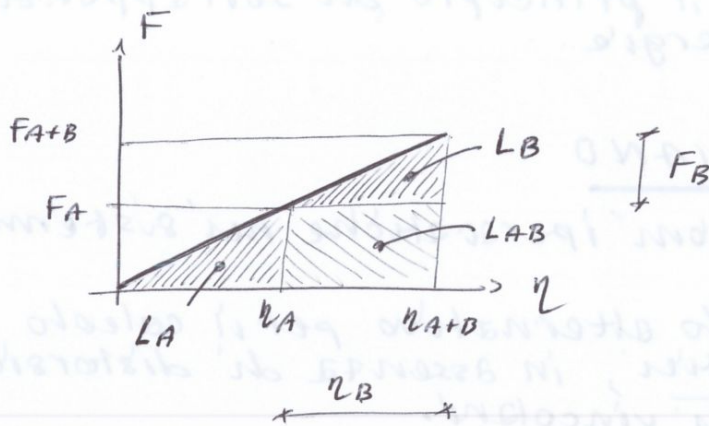
$$L_B = \frac{1}{2} \int_V \{F_B\}^T \{\eta_B\} dV + \frac{1}{2} \int_{S_L} \{P_B\}^T \{\eta_B\} dS$$

ricordando che  $L_{A+B} \neq L_A + L_B$

Applicando il sistema [B] in aggiunta al sistema [A] produrremo un LAVORO DI TRASCINAMENTO (LAVORO MUTUO)  $L_{AB}$ , delle forze [A] per gli spostamenti indotti da [B].

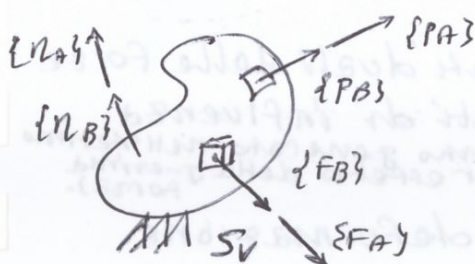
$$L_{AB} = \int_V \{F_A\}^T \{\eta_B\} dV + \int_{S_L} \{P_A\}^T \{\eta_B\} dS$$

Avremo che  $L_{A+B} = L_A + L_B + L_{AB}$



### INVERTENDO

invertendo il processo di carico



$$L_{BA} = \int_V \{F_B\}^T \{\eta_A\} dV + \int_{S_L} \{P_B\}^T \{\eta_A\} dS$$

$$\text{con } L_{B+A} = L_B + L_A + L_{BA}$$

dato che il lavoro di deformazione non dipende dal processo di carico, cioè dall'ordine con cui vengono applicate le forze:

$$L_{A+B} = L_{B+A}$$

cioè dipendenza solo dallo stato INIZIALE e FINALE.

$$L_{A+B} = L_{B+A}$$

$$\cancel{L_A + L_B + L_{AB}} = \cancel{L_B + L_A + L_{BA}}$$

$$L_{AB} = L_{BA}$$

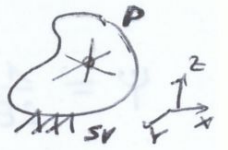
TEOREMA DI BETTI  
(dimostrato)

## ISOTROPIA: COSTANTI ELASTICHE

MATERIALI ISOTROPI  
■ CLS  
■ ACCIAIO

Le proprietà elastiche sono le stesse in qualunque direzione della stessa di centro P. Non vi sono direzioni privilegiate.

Anche le proprietà meccaniche sono le stesse.



No direzioni preferenziali  $\rightarrow$   $\psi$  (potenziale elastico complementare), dipende dai valori dei tre invarianti della tensione  $\sigma$  e delle 3 tensioni principali:

$$\psi = \psi(T_1, T_2, T_3) = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Ma noi sappiamo che  $\psi$  è una forma quadratica, mentre  $T_3$  è cubica.  $\psi$  non può dipendere da  $T_3$ .

$$\psi = \psi(T_1, T_2, T_3) = \psi(T_1, T_2)$$

rendo una forma quadratica in primo invariante.

possiamo scriverla come:

$$\psi = \frac{1}{2E} \{ T_1^2 + 2(1+\nu)T_2 \}$$

con  $E$  = Modulo di Young  
 $\nu$  = coeff. di Poisson

Espresso  $T_1$  e  $T_2$  nel sistema principale:

$$\psi = \frac{1}{2E} \{ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

$$= \frac{1}{2E} \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

$$\psi = \frac{1}{2E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \}$$

Nell'isotropia le 21 costanti diventano due:  $E$  e  $\nu$ , bastano queste due per descrivere il comportamento del materiale.

se andiamo ad esprimere gli invarianti nelle generiche componenti di  $\sigma_{ij}$ :

$$T_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$T_2 = -\sigma_x\sigma_y + \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_z + \tau_{xz}^2 - \sigma_y\sigma_z + \tau_{yz}^2$$

cioè che abbiamo scritto è:

$$\{\varepsilon\} = [H]^{-1} \{0\}$$

la matrice Hessiana deve essere definita positiva, quindi anche la sua inversa.

$$\det [H]^{-1} > 0$$

per esserlo i minori principali devono avere determinante  $> 0$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{vmatrix} > 0$$

viene:

$$\frac{1}{E^3} > 0 \quad \text{quindi } \underline{E > 0}$$

$$\left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2}\right] + \left(\frac{\nu}{E}\right) \left[-\frac{\nu}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2}\right] - \left(\frac{\nu}{E}\right) \left[+\frac{\nu^2}{E^2} + \frac{\nu}{E^2}\right] > 0$$

$$\underline{E > 0}$$

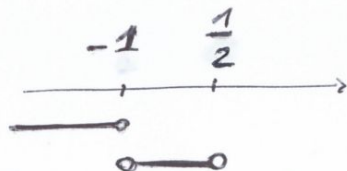
$$1 - \nu^2 - \nu^2 - \nu^3 - \nu^3 - \nu^2 > 0$$

$$2\nu^3 + 3\nu^2 - 1 < 0$$

$$(\nu + 1)(2\nu^2 + \nu - 1) < 0$$

$$\underline{\nu < -1}$$

$$\underline{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$



$$\begin{vmatrix} 2 & +3 & 0 & -1 \\ -1 & & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & // \end{vmatrix}$$

$$-1 \quad \frac{1}{2}$$

$$-1 \pm \frac{\sqrt{1+4(2)}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

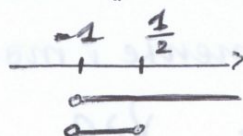
unendo le due disuguaglianze otteniamo:

$$\nu < +\frac{1}{2} \quad \text{con } \nu \neq -1$$

ma abbiamo che  $E > 0$ , quindi:

$$\boxed{E > 0}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \quad \begin{cases} E > 0 \\ \nu > -1 \end{cases}$$



$$\boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}}$$

## VARIAZIONE DI VOLUME

L'invertibilità della matrice Hessiana implica che la dilatazione volumetrica sia concorde con la tensione normale:

es:



si allunghera' lungo x  
(concorde a  $\sigma_x$ ).

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} + \left(-\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_x\right)$$

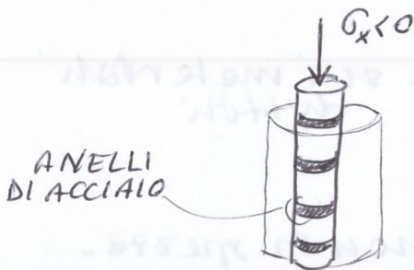
$$= \frac{\sigma_x}{E} [1 - 2\nu]$$

questo e' > 0  
dato che  $\nu < \frac{1}{2}$

quindi  $\frac{\Delta V}{V}$  e  $\sigma_x$  sono CONCORDI.

Avremo che con trazione  $\rightarrow$  aumento di volume  
compressione  $\rightarrow$  riduzione di volume

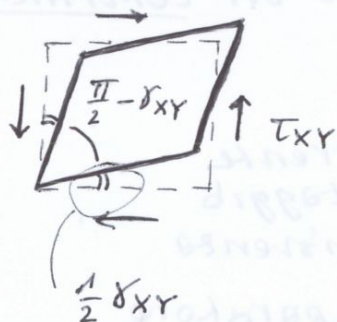
Esempio: CONSOLIDAMENTO DELLE COLONNE



Il peso della struttura tende a schiacciare la colonna rischiando così di comprometterne la stabilità! Allora si interviene installando degli anelli d'acciaio.

## SIGNIFICATO FISICO DI G

considero un parallelepipedo elementare soggetto alla sola componente tangenziale  $\tau_{xy}$

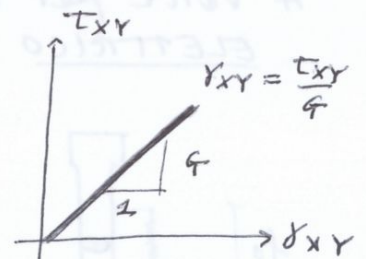


$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

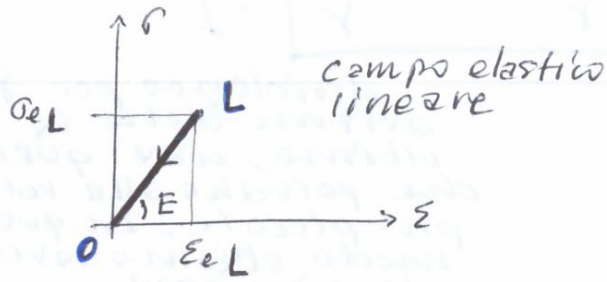
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



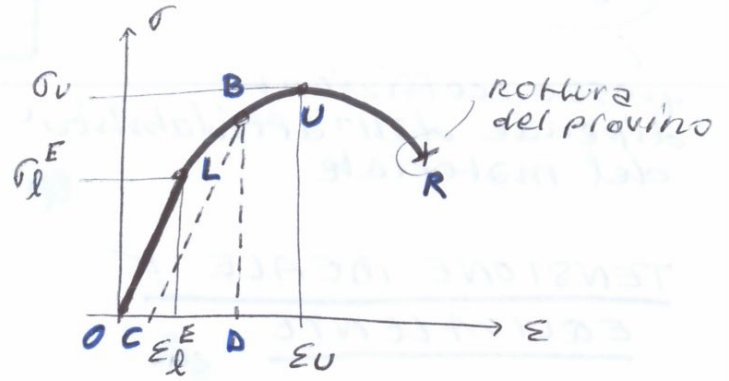
# DIAGRAMMA STRESS - STRAIN



Il macchinari controlla:  
La forza  
La deformazione

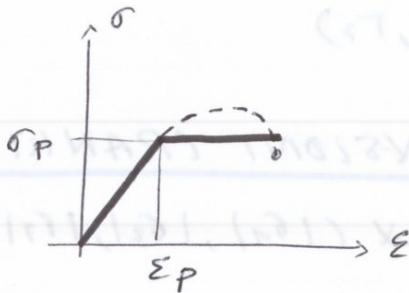
$L$  = limite elastico

Da  $LU$  per avere un aumento di  $\epsilon$  devo aumentare il carico



- $LU$ , Fase plastica, snervamento
- $UR$ , strizione
- $OBC$ , dissipazione plastica (Area) (tramite calore)
- $BCD$ , Energia elastica restituita
- $OC$ , deformazione RESIDUA, scaricando il provino dal punto B.

## COMPORIAMENTO ELASTO-PLASTICO PERFETTO



Andamento rettilineo

$$\sigma_p > \sigma_L$$

$\sigma_p$  = tensione di snervamento

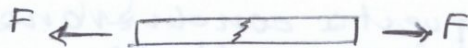
Dopo  $\sigma_p$  non posso incrementare il carico.

Avremo quindi che:

nei materiali DUTTI vi è una fase plastica che precede la rottura, mentre nei materiali FRAGILI, non è presente, quindi si ha una rottura improvvisa del materiale → è un problema ingegneristico.

$$\sigma_c \approx \sigma_u \quad \sigma_{limite} \equiv \sigma_{ultima}$$

## CASO MONOASSIALE (es: Funne)



$$-\sigma_c < \sigma < \sigma_t$$

$\sigma_c$  e  $\sigma_t$  sono  $\sigma$  ultime ricavate in laboratorio  
( $c$ , compressione;  $t$ , trazione)

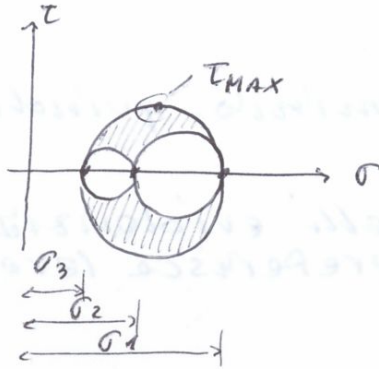
Introduciamo un coeff. di sicurezza  $\gamma$ :

# CRITERIO DI TRESCA $\sigma$ della massima tensione tangenziale

va a confrontare la  $\tau$  con la  $\sigma_p$ .

SNERVAMENTO: massime tensioni tangenziali

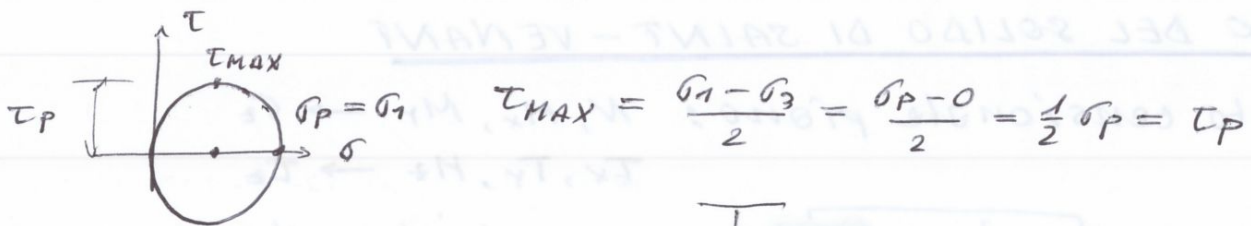
$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2} \text{MAX} \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$



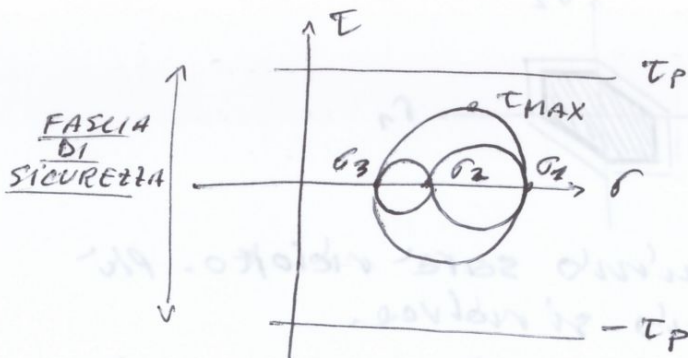
Lo stato più pericoloso è quello generato dal cerchio di Mohr più grande, poiché è lì che abbiamo le  $\tau_{MAX}$ .

- quando  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$   $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
- quando  $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$   $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$
- quando  $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$   $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

facendo la prova monoassiale, poiché in laboratorio ottengo  $\sigma_p$  da prove monoassiali;



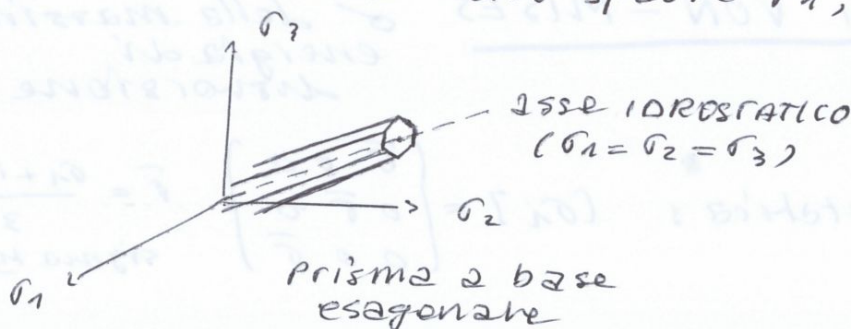
Nel piano di Mohr:



con tresca vado a confrontare i diametri dei cerchi di Mohr:

$$\text{MAX} \{ |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} < \sigma_p$$

Rappresentazione nello spazio  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :



DOMINIO TRIDIMENSIONALE:

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &< \sigma_p \\ |\sigma_1 - \sigma_3| &< \sigma_p \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &< \sigma_p \end{aligned}$$

componente deviatorica:  $(\sigma^d) = \begin{pmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{pmatrix}$

RESPONSABILE DELLA CRISI

È un confronto tra l'energia associata alla componente deviatorica e l'energia associata alla componente monoassiale.

CRISI del materiale  $\rightarrow$  è dovuta all'energia di deformazione associata al tensore deviatorico

$\rightarrow$  CRITERIO ENERGETICO

$$\phi = \phi^a + \phi^d$$

$$\phi = \frac{1}{2E} \{ T_1^2 + 2(1+\nu) T_2 \} \quad \text{ENERGIA TOTALE}$$

$$\phi^d = \frac{1+\nu}{3E} \{ T_1^2 + 3 T_2 \} \quad \text{ENERGIA DEVIATORICA}$$

$$T_1^d = \sigma_x - \bar{\sigma} + \sigma_y - \bar{\sigma} + \sigma_z - \bar{\sigma}$$

$$T_2^d = -(\sigma_x - \bar{\sigma})(\sigma_y - \bar{\sigma}) + \tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \bar{\sigma})(\sigma_z - \bar{\sigma}) + \tau_{xz}^2 - (\sigma_y - \bar{\sigma})(\sigma_z - \bar{\sigma}) + \tau_{yz}^2$$

Cerchiamo di scrivere  $\phi^d$  in funzione del solo tensore deviatorico.

$$T_1^d = 0 \quad \text{per definizione}$$

$$T_2^d = -(\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma}) - (\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma}) - (\sigma_3 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma})$$

sostituendo si ottiene che:

$$\phi^d = \frac{1+\nu}{3E} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \}$$

ora andiamo a confrontare il risultato con il valore limite monoassiale, quindi:

$$\phi_{\text{MONOASSIALE}}^d = \frac{1+\nu}{3E} \{ \sigma_1^2 \} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_p^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{al punto di} \\ \text{CRISI } \sigma_1 = \sigma_p \end{array} \right\}$$

$$(\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$$

$$\boxed{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)} < \sigma_p^2$$

TENSIONE IDEALE DI VON-MISES



# CRITERIO COULOMB - MOHR → PER MATERIALI FRAGILI

Abbiamo due parametri caratteristici:

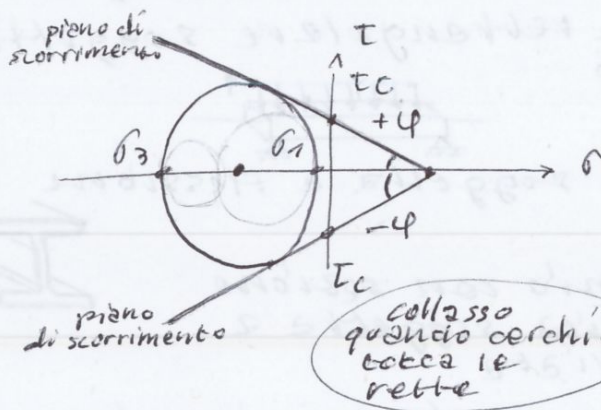
- ATTRITO INTERNO, capacità di opporsi agli sforzi crescenti in presenza di compressione
- COESIONE, capacità di resistere agli sforzi di trazione senza avere uno strato coattivo.

Resistenza a trazione MINORE.

Attrito interno → resistenza a compressione  
 coesione → resistenza a trazione.

Parte come TRESCA: la rottura avviene per raggiungimento della  $\tau_{MAX}$ .

Plano di Mohr:

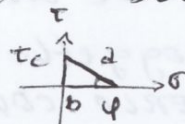


$\tau_{MAX}$  non è costante

$$\tau_{MAX} = \tau_c - \sigma \tan(\varphi)$$

$\tau_c$  = di coesione.  
 $\varphi$  = angolo di attrito interno.

$\tau_{MAX}$  si trova sulle rette limite, sui piani di scorrimento.



$$b = \frac{\tau_c}{\sin \varphi}$$

retta passa per  $(0, \tau_c)$  e  $(b, 0)$

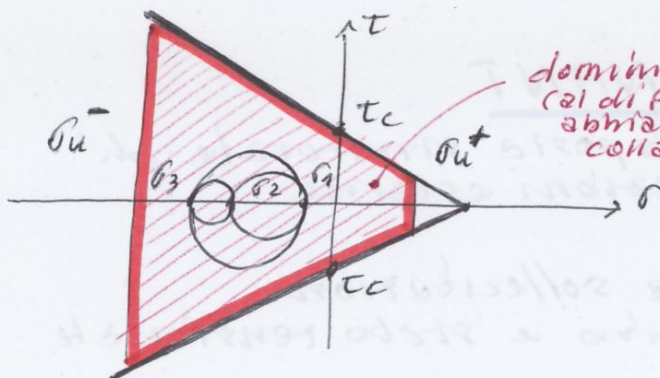
$$y = mx + q$$

$$q = \tau_c$$

$$m = -\tan \varphi$$

$$\tau_{MAX} = \tau_c - \sigma \tan \varphi$$

## DOMINIO AMMISSIBILE



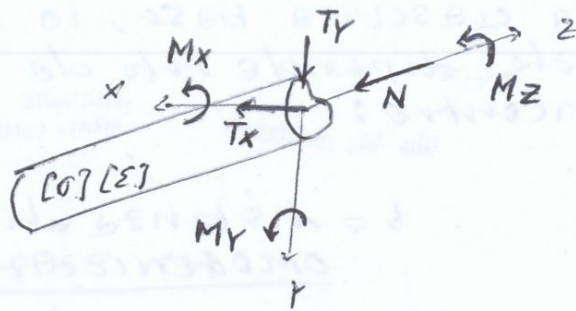
dominio (al di fuori abbiamo il collasso)

dominio piccolo dove abbiamo trazioni ( $\sigma > 0$ ) e maggiore ( $\sigma < 0$ , compressione).

si impone un CUTOFF per limitare il dominio, che altrimenti dalle compressioni sarebbe illimitato.

dal valore di  $\sigma$  ultima a trazione ( $\sigma_u^+$ ) e a compressione ( $\sigma_u^-$ )

caratteristiche della sollecitazione:



## IPOTESI DI DE SAINT VENANT

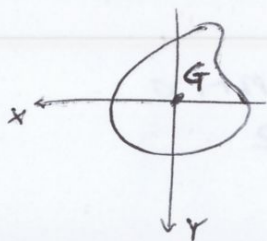
Equazioni governanti:

$$\left. \begin{aligned} [\partial]^T \{C\} &= -\{F\} \\ [N]^T [C] &= \{P\} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{statiche} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \{E\} &= [\partial] \{\eta\} \\ \{\eta\} &= \{\eta_0\} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{cinematiche} \end{array}$$

$$\{C\} = [H] \{E\} \quad \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{costitutive} \end{array}$$

## GEOMETRIA



ASSE Z, luogo dei baricentri delle successive sezioni!

ASSE X e Y, sono baricentriche e centrali di inerzia.

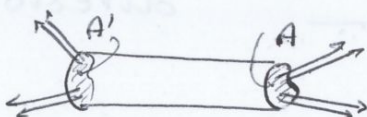
$$I_{XY} = 0$$

## IPOTESI SUL MATERIALE:

- elastico Modulo E
- lineare coeff. di Poisson  $\nu$
- omogeneo Modulo di rigidità al taglio  $G = f(E, \nu)$
- isotropo

## IPOTESI SULLE FORZE:

- Forze di volume nulle  $\{F\} = \{0\} \quad \forall P \in V$
- Forze su  $S_L$  nulle  $\{P\} = \{0\} \quad \forall P \in S_L$
- cilindro caricato solo alle estremità:



Forze di Pressione solo sull'area A e A', in equilibrio

# METODO SEMI-INVERSO $\rightarrow$ si parte con delle ipotesi

Ipotesi statica: si ipotizza una soluzione tensionale

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = c \end{cases} \quad \forall p \in V$$

Poi inseriamo queste quantità nelle equazioni statiche.

$$N = \int_{A_1} \sigma_z dA = c \cdot A \quad \text{quindi } c = \frac{N}{A}$$

otteniamo  $\sigma_z = \frac{N}{A}$   $\leftarrow$   $\sigma_z$  costante in tutti i punti del solido

$\hookrightarrow$  stato tensionale MONOASSIALE ( $\sigma_x = \sigma_y = 0; \sigma_z \neq 0$ )

usiamo le leggi costitutive elastiche per ricavare lo stato deformativo:

$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

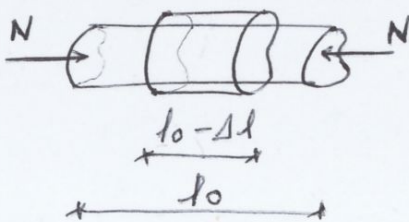
abbiamo che:

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{AE} \\ \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \epsilon_z \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

RIGIDEZZA ESTENSIONALE DELLA SEZIONE

deformazioni trasversali (garantiscono dilatazioni o contrazioni a seconda che ho trazione o compressione)

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$



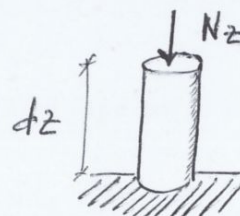
COMPRESSIONE:

$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$$

$\frac{EA}{l}$  RIGIDEZZA ESTENSIONALE dell'asta

DEFORMAZIONI TRASVERSALI:



# FLESSIONE RETTA

Flessione  $\rightarrow$  associata al momento flettente, tipica di strutture orizzontali.

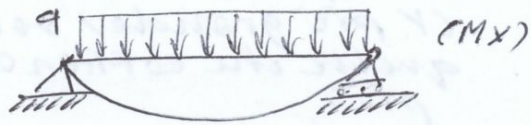
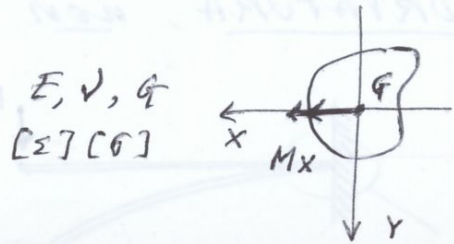
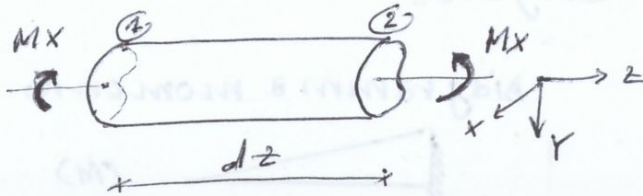


diagramma del momento



FLESSIONE RETTA: applicazione di una componente di momento attorno ad un asse centrale (x, y)

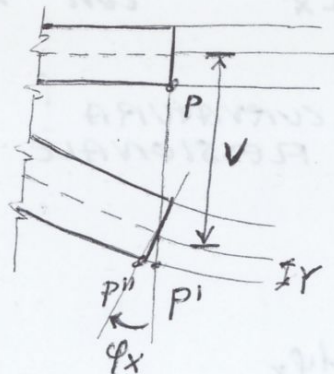
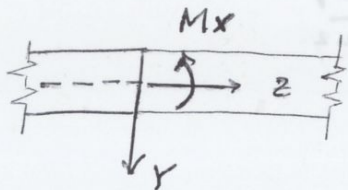
METODO SEMI-INVERSO:

Ipotesi: esistenza soluzione cinematicamente ammissibile.

Ricerca soluzione che soddisfi le equazioni elastiche del problema elastico  
STATICHE

## IPOSTESI DI BERNOULLI - EULERO

conservazione delle sezioni piane:



v distanza linee medie.

$\phi_x > 0$  se antiorario

Rotazione:

$$\phi_x = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

spostamento assiale:

$$w_p = \phi_x \cdot y$$

dato dalla rotazione del cratino y

$$\frac{y}{\phi_x}$$

Deformazione assiale:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \phi_x}{\partial z} y$$

dato che  $\{\epsilon\} = [C] \{\epsilon\}$

$$\epsilon_z = -\chi_x \cdot Y = \frac{M_x}{EI_x} \cdot Y$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot Y$$

FORMULA  
DI NAVIER

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} \cdot X$$

### STATO TENSIONALE:

È MONOASSIALE

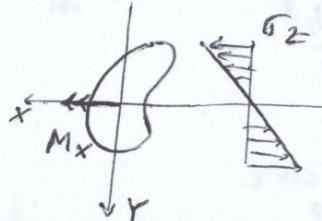
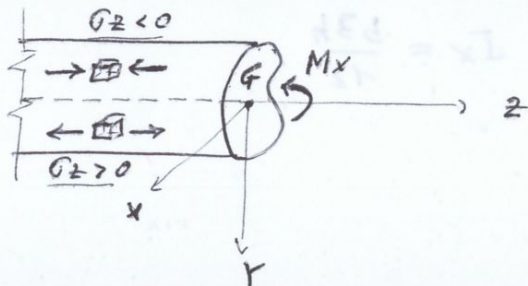
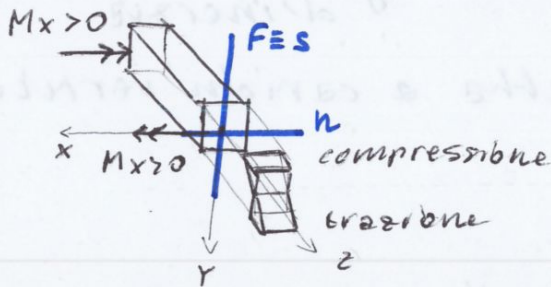


diagramma  
tensionale

asse X, asse  
neutro della  
sezione

### STATO DEFORMATIVO:



**n** ASSE NEUTRO:

dove non agiscono né  
compressioni, né  
trazioni ( $\sigma_z = 0$ )

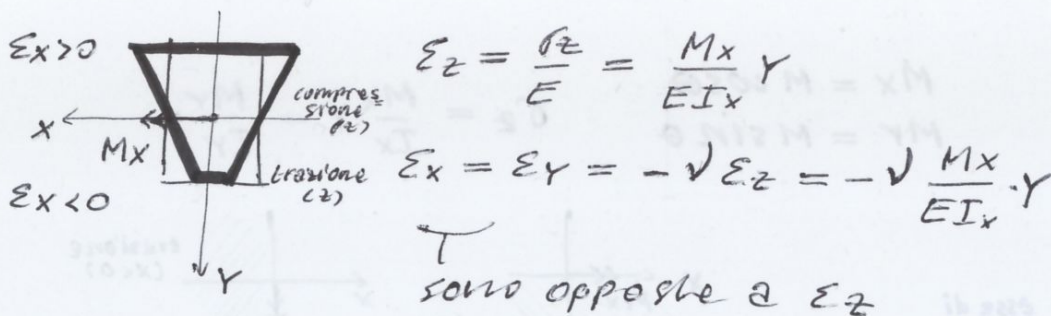
**S** ASSE DI SOLLECITAZIONE:

( $\perp M$ ) direzione lungo la quale  
sono applicati i carichi

**F** ASSE DI FLESSIONE:

( $\perp n$ ) direzione di flessione

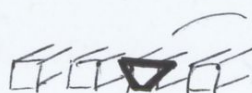
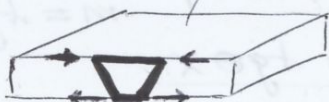
Lo stato deformativo di flessione è pluriaassiale:



sono opposte a  $\epsilon_z$

es: lastra piana

diminuiscono le  
deformazioni  
rispetto a n-travi  
adiacenti.



libertà di contrarsi  
e dilatarsi  
trasversalmente

## ASSE NEUTRO:

$$\sigma_z = 0$$

$$\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0 \quad \text{dato che} \quad \begin{aligned} M_x &= M \cos \theta \\ M_y &= M \sin \theta \end{aligned}$$

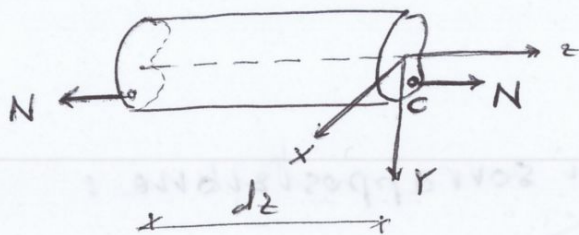
$$y = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x = \tan \theta \frac{I_x}{I_y} x \quad \text{non \u00e9 ortogonale all'asse di sollecitazione}$$

• se  $I_x = I_y$  allora  $n \perp s \rightarrow$  SEZIONI GIROSCOPICHE

ARMATURE nel materiale si dispongono in corrispondenza delle fibre tese. (CLS non reagisce bene alla trazione).

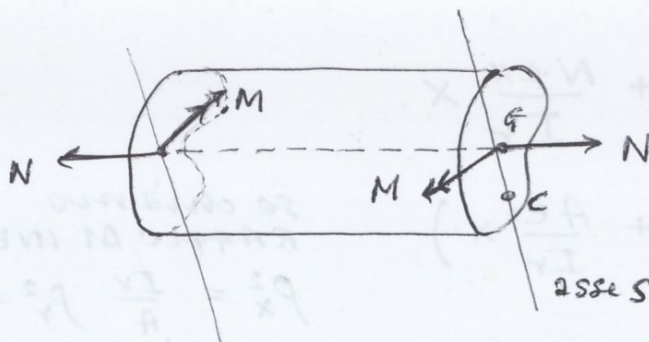
## SFORZO NORMALE ECCENTRICO

si ha quando  $N \parallel$  ma non coincidente con asse  $z$ .



C centro di pressione

ci\u00f2 si pu\u00f2 vedere come uno sforzo normale centrato pi\u00f9 una flessione  $M$  avente come asse  $S$  la retta passante per  $CG$



$M$  ha funzione di trasporto

$$M = N d$$

forza per braccio

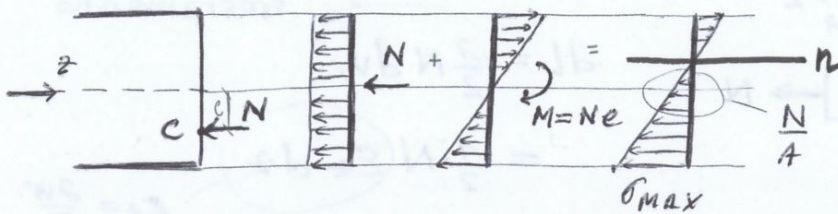
$$d = \overline{GC}$$

$C(z)$  luogo dei centri di pressione delle successive sezioni rappresenta la curva delle pressioni!

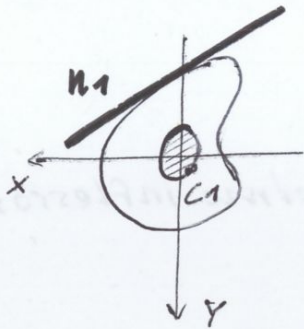
- $N > 0 \rightarrow$  tenso flessione
- $N < 0 \rightarrow$  presso flessione
- $M$  lungo assi  $\rightarrow$  presso flessione RETTA
- $M$  non lungo assi  $\rightarrow$  presso flessione DEVIATA

# DIAGRAMMA TENSIONI:

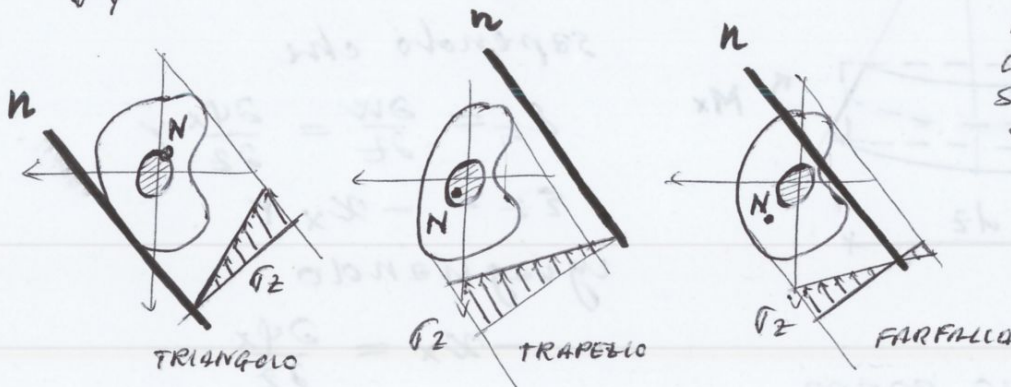
$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$



## Nocciolo CENTRALE DI INERZIA



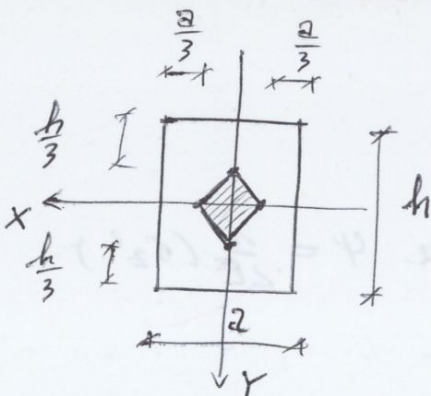
luogo dei centri di pressione che mi generano assi neutri tangenti (radenti) alla sezione



Nocciolo contiene sempre  $G$  all'interno

con  $e$  all'interno del nocciolo, abbiamo asse  $n$  esterno, al massimo tangente alla sezione.

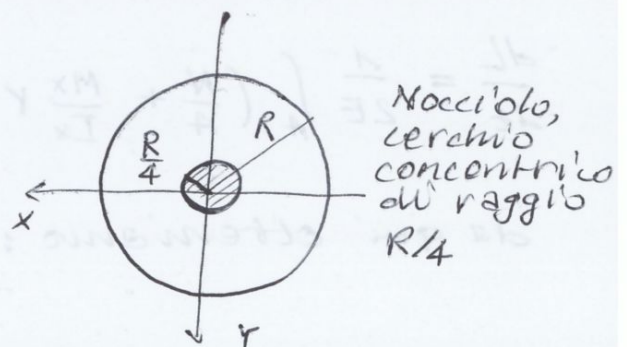
## Nocciolo di sezione rettangolare:



ogni punto del contorno del nocciolo soddisfa:

$$\frac{6ex}{b} + \frac{6ey}{h} = 1$$

## Nocciolo sezione circolare:



Nocciolo, cerchio concentrico di raggio  $R/4$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \left[ \frac{N^2}{A} + \frac{M_x^2}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} \right] + \frac{1}{E} \left[ \frac{NM_x}{AI_x} S_x - \frac{NM_y}{AI_y} S_y - \frac{M_x M_y}{I_x I_y} I_{xy} \right]$$

noi siamo in X, Y assi centrali di inerzia, quindi  $S_x = 0$   $S_y = 0$  e  $I_{xy} = 0$

Rimane:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right]$$

RIGIDENZE  
ESTENSIONALI

$N, M_x, M_y$   
SONO ENERGETICAMENTE ORTOGONALI,  
NON ABBIAMO  
LAVORO MUTUO, quindi  
vale il principio di  
sovrapposizione  
anche per le energie

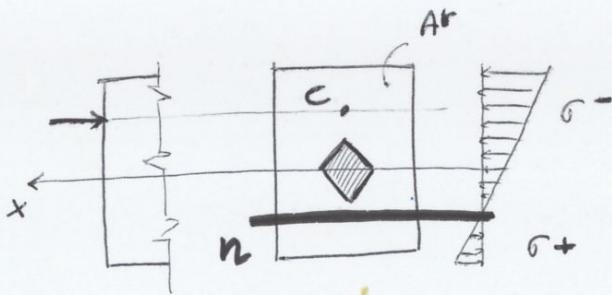
### MATERIALI NON REAGENTI A TRAZIONE

Materiali come rocce, cls, resistono bene a compressione, ma sopportano poco la trazione.

Abbiamo fessurizzazione e paralizzazione della sezione.

### CONDIZIONE DI PARALIZZAZIONE:

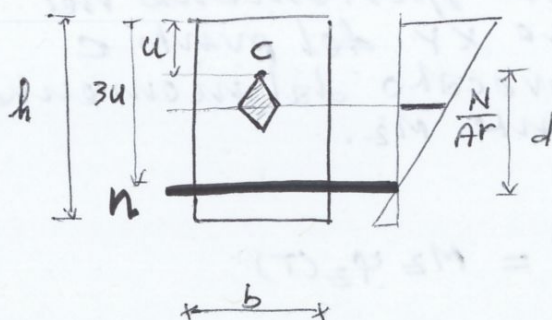
esempio: sezione rettangolare soggetta a sforzo Normale Eccentrico.



Determinazione della  
posizione della retta  
separatrice:

$$d = \frac{I_n(Ar)}{S_n(Ar)}$$

distanza  $c$  da  $n$



$c$  diventa il vertice  
del nocciolo della  
sezione reagente.



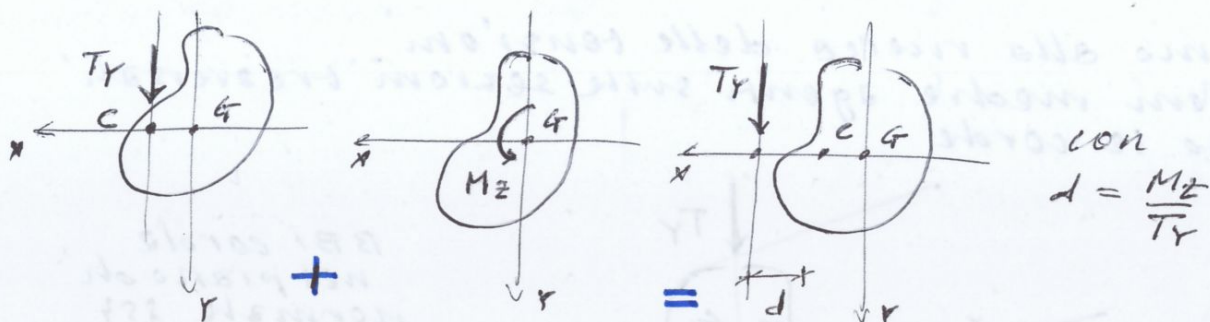
Abbiamo per definizione che  $\eta_c(M_z)$  nel centro di torsione è nullo:

$$M_z \varphi_z(T) = 0 \quad \text{ma } M_z \neq 0$$

quindi:  $\varphi_z(T) = 0$

Abbiamo ottenuto che:

$$\eta_c(M_z) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_z(T) = 0$$

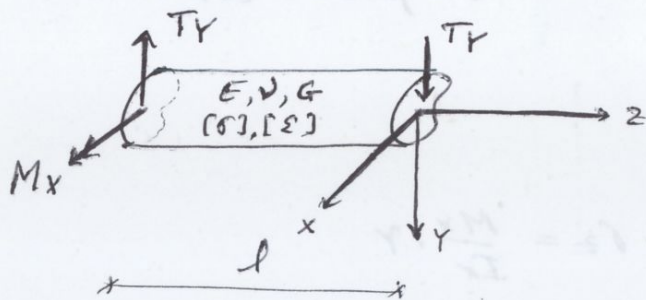


### SOLLECITAZIONE DI TAGLIO

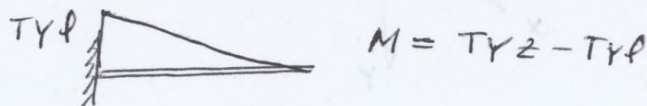
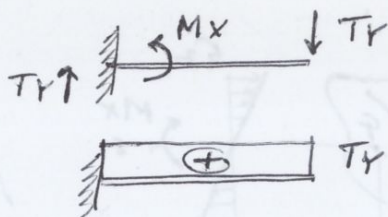
$$T_y = \frac{dM_z}{dz}$$

dove il taglio si annulla  
avremo il massimo del momento.

si parla di TAGLIO RETTO, quando agisce lungo un'asse centrale.



$$M_x = -T_y l$$



$$M = T_y z - T_y l$$

$N, M_x, M_y \rightarrow$  stato tensionale monoassiale, solo  $\sigma_z$

$T_x, T_y, M_z \rightarrow$  stato tensionale biassiale,  $\tau_z$  e  $\sigma_z$

Equivalenza sulle basi:

Equilibrio alla trazione lungo l'asse z del cono:

$$\int_B \left[ \int_{B'} \tau_{sz}(\xi) d\xi \right] dz = \int_{A'} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz dA$$

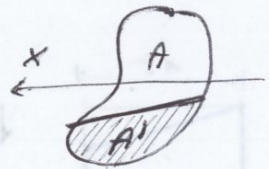
$$\int_{A'} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz dA = \int_{A'} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_x}{I_x} \cdot Y \right) dz dA$$

$$\left[ \int_B \tau_{sz}(\xi) d\xi \right] dz = \int_{A'} \frac{Y}{I_x} \frac{\partial M_x}{\partial z} dz dA \quad \left. \begin{array}{l} \text{solo } M_x \\ \text{dipende} \\ \text{da } z \end{array} \right\}$$

$$= \int_{A'} \frac{Y}{I_x} \tau_y dz dA$$

$$= \frac{\tau_y}{I_x} \int_{A'} Y dA \cdot dz$$

$S_x^{A'}$



$$\left[ \int_B \tau_{sz}(\xi) d\xi \right] dz = \frac{\tau_y}{I_x} S_x^{A'} dz$$

Dato che non è possibile conoscere la distribuzione puntuale delle tensioni tangenziali:

$$\left[ \int_B \tau_{sz} d\xi \right] = \bar{\tau}_{sz} \cdot b = \frac{\tau_y S_x^{(A')}}{I_x}$$

valore medio sulla corda di lunghezza b

$$\boxed{\bar{\tau}_{sz} = \frac{\tau_y S_x^{(A')}}{I_x \cdot b}}$$

FORMULA  
DI JOURAWSKY

$$(\bar{\tau}_{sz} = \bar{\tau}_{zs})$$

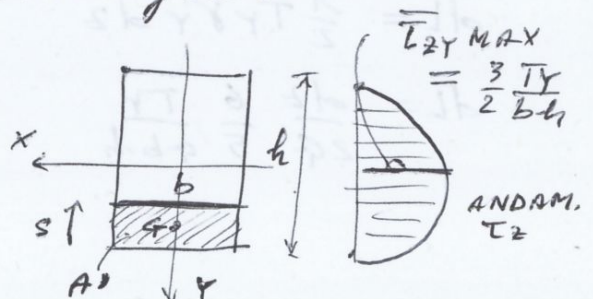
con corde // al taglio  $\rightarrow$  tensioni piccole ( $S_x^{(A')} \approx 0$ )  
con corde  $\perp$  al taglio  $\rightarrow$  tensioni grandi

DISTRIBUZIONE TENSIONI:

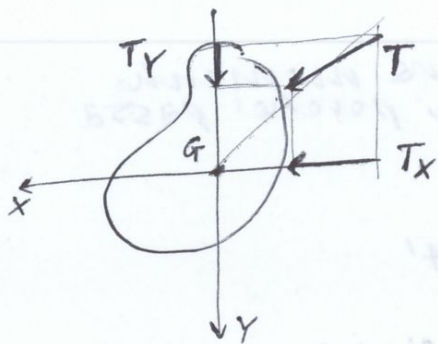
sezione rettangolare

$$S_x^{(A')} = \left( \frac{h}{2} - s_1 \right) (sb) = \frac{h^2 b}{8}$$

con  $s_1 = \frac{h}{2}$   $I_x = \frac{h^3 b}{12}$



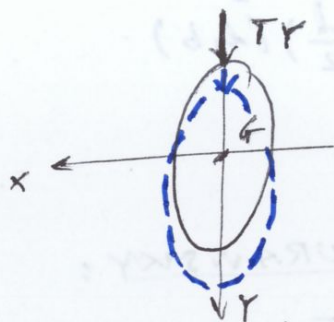
# TAGLIO DEVIATO



Deviato se non e' negli assi centrali di inerzia.

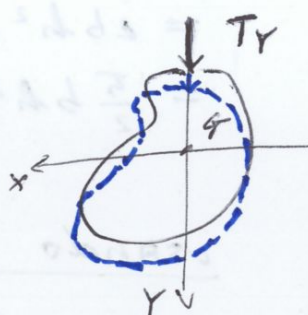
Taglio deviato genera FLESSIONE DEVIATA.

se Y non e' asse di simmetria, Ty causa scorrimento  $\gamma_y$ , ma anche  $\gamma_x$ . Avremo quindi traslazione lungo X e lungo Y



Y asse di simm.

$$\begin{aligned} \gamma_x &= 0 & u &= 0 \\ \gamma_y &\neq 0 & v &\neq 0 \end{aligned}$$

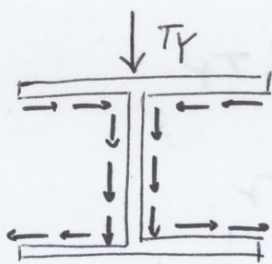


Y non e' asse di simmetria

$$\begin{aligned} \gamma_x &\neq 0 & u &\neq 0 \\ \gamma_y &\neq 0 & v &\neq 0 \end{aligned}$$

## TAGLIO NELLE SEZIONI SOTTILI

Flusso delle tensioni tangenziali:

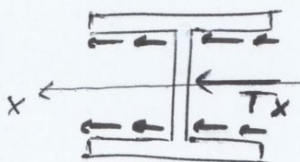


$S_x^{(A)} < 0$  avremo  $\tau_{zs}$  uscente dalla sezione A!

$S_x^{(A)} > 0$  avremo  $\tau_{zs}$  entrante

andamento delle  $\tau_{zs}$

Taglio retto  $T_x$ :

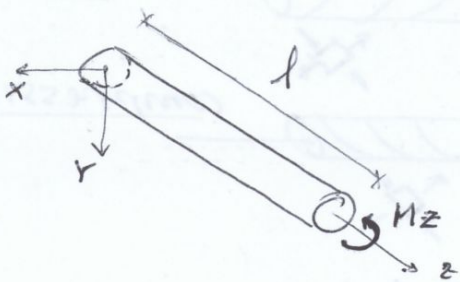


$$\tau_{zs} = \frac{T_x S_r^{(A)}}{I_y b}$$

andamento delle  $\tau_{zs}$

# TORSIONE NEL SOLIDO DI SAINT VENANT:

Travi sezione circolare:



## IPOTESI DI PARTENZA

$$\begin{aligned} u &= -\varphi z \cdot y \\ v &= \varphi z \cdot x \\ w &= 0 \end{aligned}$$

ogni sezione ruota rigidamente attorno all'asse z

$\varphi z > 0$  se antiorario.

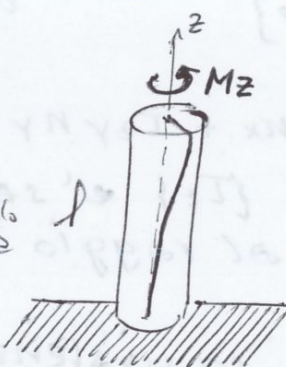
## ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE

di unitario

$$\Theta = \frac{d\varphi z}{dz} \quad [\text{rad/m}]$$

$$\varphi z = \Theta z$$

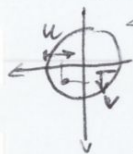
angolo unitario per lunghezza



avremo una deformazione elicoidale delle fibre // all'asse z.

## Stato di deformazione:

verso opposto



$$\begin{aligned} u &= -\Theta z y \\ v &= \Theta z x \\ w &= 0 \end{aligned}$$

dalle eq. cinematiche

$$\{\epsilon\} = [\epsilon] \{\eta\}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \Theta x$$

$$\gamma_{zx} = -\Theta y$$

derivando lo spost. lungo z

## Stato di tensione:

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} \quad \text{dalle eq. costitutive}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = -G \Theta y$$

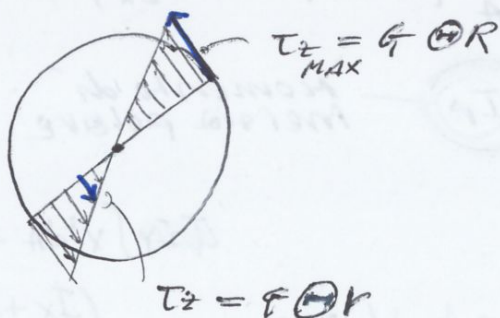
$$\tau_{zx} = G \Theta x$$

$$\rightarrow \tau_z(r) = G \Theta r$$

Stato tensio-

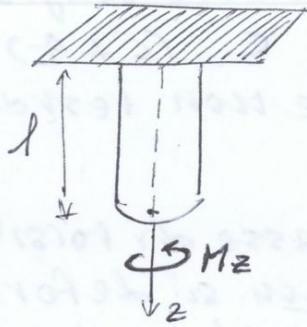
nale

BIASSIALE



Andamento lineare delle tensioni tangenziali

Rotazione di estremità:



$$\varphi_z(l) = \frac{M_z l}{G IP}$$

$\frac{G IP}{l}$  rigidità torsionale

sapendo che  $\tau_z = G \theta r$

$$\theta = \frac{M_z}{G IP}$$

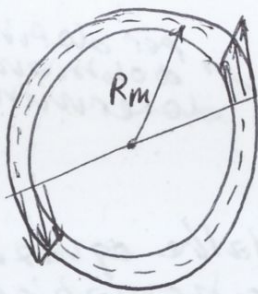
otteniamo  $\tau_z = \frac{M_z}{IP} r$  con  $\tau_{z \text{ MAX}} = \frac{M_z R}{IP}$

dato che  $IP = \frac{\pi R^4}{2}$

$$\tau_{z \text{ MAX}} = \frac{2 M_z}{\pi R^3}$$

PER SEZIONI CIRCOLARI PIENE

CORONE CIRCOLARI



$$IP = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$$

$$\tau_z(r) = \frac{M_z}{IP} r = \frac{2 M_z}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} r$$

$$\tau_{z \text{ MAX}} = \frac{2 M_z R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)}$$

se e' sottile:

spessore  $\delta \ll R_m$

avremo  $\tau_{z \text{ MAX}} = \frac{M_z}{2 (\pi R_m^2) \delta}$

$IP = \delta (2 R_m) (2 R_m^2) \frac{\pi}{2}$  ↗

perché:

$$\begin{aligned} (R_e^4 - R_i^4) &= (R_e^2 - R_i^2) \cdot (R_e^2 + R_i^2) \\ &= (R_e - R_i) \cdot \underbrace{(R_e + R_i)}_{2 R_m} \cdot (R_e^2 + R_i^2) \\ &= \underbrace{(R_e - R_i)}_{\delta} \cdot (R_e^2 + R_i^2) \end{aligned}$$

verifica delle equazioni statiche:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \nabla^2 w = 0 \quad \text{nel dominio } A$$

dalla terza equazione, indefinito di equilibrio

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] n_x + \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] n_y = 0$$

sul contorno C

derivate parziali imposte sul contorno

derivate parziali imposte sul contorno

### PROBLEMA DI NEUMANN

$$\nabla^2 w = 0 \quad \text{funzione armonica}$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] n_x + \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] n_y = 0$$

La soluzione esiste ed è unica a meno di una costante.

### COORDINATE del centro di torsione:

$$T_x = \int_A T_{zx} dA = G \Theta \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_c) \right] dA = 0$$

$$T_y = \int_A T_{zy} dA = G \Theta \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_c) \right] dA = 0$$

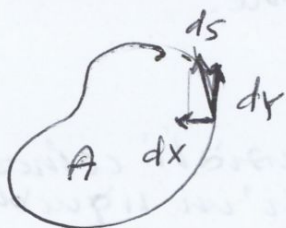
$$x_c = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial y} dA = -\frac{1}{A} \oint_C w dx$$

annullamento dei tagli sulle basi

$$y_c = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\partial w}{\partial x} dA = -\frac{1}{A} \oint_C w dy$$

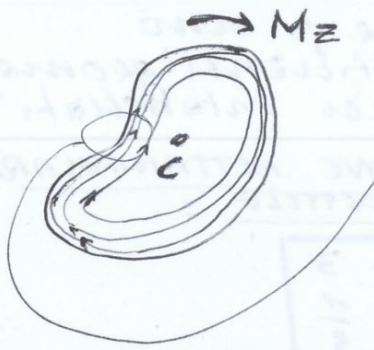
sul contorno

TRAMITE GREEN



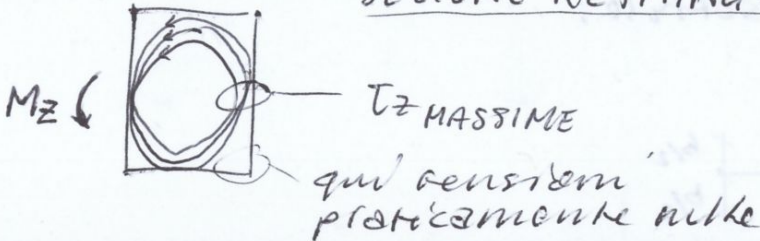
$$dx = -n_y ds$$

$$dy = n_x ds$$

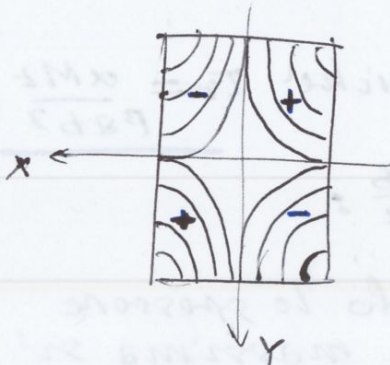


addensamento delle linee di flusso, avremo un aumento delle tensioni tangenziali

SEZIONE RETTANGOLARE



Deformazione da ingobbamento, sezione rettangolare:

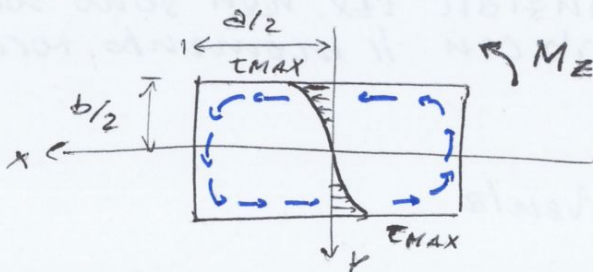


Massimo sollevamento/abbassamento in corrispondenza degli spigoli

- se l'ingobbamento non è impedito il materiale lo assorbe tranquillamente
- se è impedito (per esempio da vincoli) fa aumentare la rigidità e fa nascere nuove tensioni normali per assiale  $\rightarrow$  la trave si irrigidisce a torsione.

TORSIONE NELLE SEZIONI SOTTILI

sezione sottile aperta:



$T_{MAX}$  si ha sui punti medi dei lati lunghi  
 $\tau$  nulla sugli spigoli

$$M_z = - \int_A Y \tau_{zx} dA$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r} & \vec{r}' \\ X & Y \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{pmatrix}$$

essendo  $\tau_{zx} = - \frac{6M_z}{ab^3} Y$  avremo:

$$M_z = \frac{6M_z}{ab^3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} Y^2 dY$$

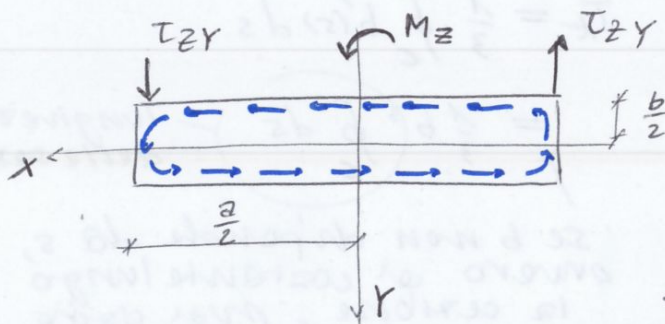
$$= \frac{6M_z}{ab^3} \left[ X \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{Y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{6M_z}{ab^3} \left[ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right] \left[ \frac{b^3}{12} \right] = \frac{M_z}{2}$$

$-Y\tau_{zx} + X\tau_{zy}$   
 ma  $\tau_{zy} \approx 0$  e' come  
 se non ci fossero  
 siamo in una sezione  
 sottile.

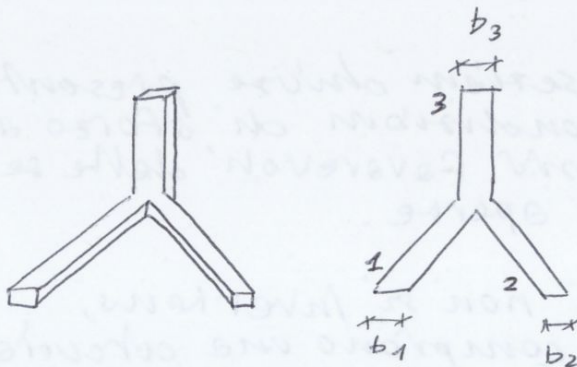
abbiamo ottenuto:

$M_z (\tau_{zx}) = \frac{M_z}{2}$  le  $\tau_{zx}$  equilibrano solo  
 metà del momento torcente



le tensioni tangenziali  $\tau_{zx}$  per quanto piccole in modulo, presentano un braccio elevato,  $a \gg b$ , quindi equilibrano l'altra metà di  $M_z$ .

### SEZIONE SOTTILE COMPOSTA APERTA



ogni ramo sopporta una determinata % del momento torcente  $M_z$ .  $I_x$  in 'da' questa percentuale.

$M_z$  in 'da' un angolo unitario di torsione @ (in generale)

$$I_x' = \frac{1}{3} a_i b_i^3 \quad \text{con } i=1, \dots, 3 \quad \text{sezioni rettangolari}$$



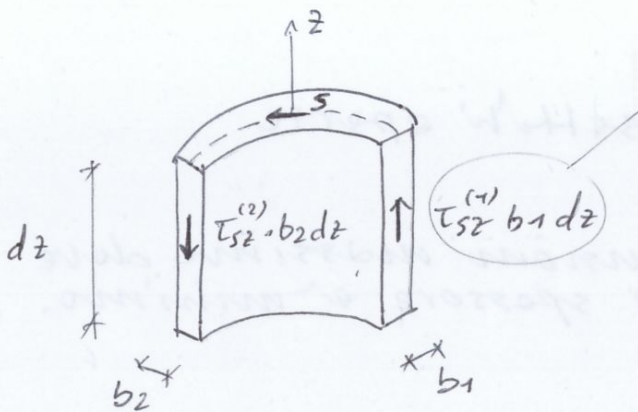
ALTRA IPOTESI:  $\tau_{zs}$  costante sullo spessore  $b(s)$   
 (ipotesi tanto più valida tanto più è piccolo  $b$ )

dell'analogia idrodinamica:  $\tau_{zs} \cdot b(s) = \text{cost}$   $\rightarrow$  è come dire che la portata all'interno di un tubo è cost.

continuità del flusso:

dimostriamo la reciprocità delle tensioni tangenziali.

consideriamo una sezione del solido di Saint Venant e facciamo l'equilibrio.



rendiamo i vettori delle forze, cioè vettore per area.

EQUILIBRIO LUNGO z:

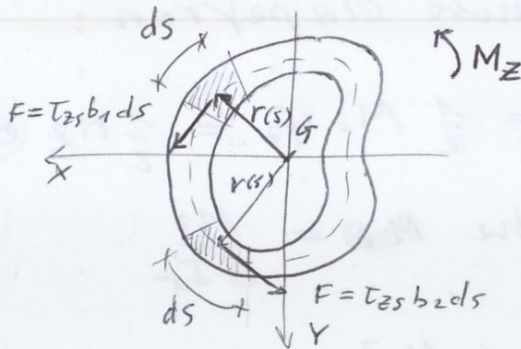
$$\tau_{sz}^{(2)} b_2 dz = \tau_{sz}^{(1)} b_1 dz$$

$$\tau_{zs}(s) \cdot b(s) = \text{cost}$$

Tensione tangenziale: FORMULA DI BREDT

si va ad equilibrare il momento torcente interno con quello esterno.

consideriamo la forza risultante in un'area  $b(s) ds$ :



$$F = \tau_{zs} b(s) ds \quad F = \text{cost} \text{ (analogia con idrodinamica)}$$

Il momento di tutte le forze rispetto a qualunque punto del piano, risulta:

$$dM_z = \vec{F} \wedge \vec{r}(s)$$

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE: attorno a z

$$M_z = \oint_C F \wedge r(s) ds$$

$$\oint_C \tau_{zs} b(s) r(s) ds$$

Invenendo Bredt :

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2G} \oint_C \frac{M_z^2}{b(s) 4\Omega^2} ds$$

confrontando con l'altra equazione:

$$\frac{1}{2G} \frac{M_z^2}{I_t} = \frac{1}{2G} \frac{M_z^2}{4\Omega^2} \oint_C \frac{1}{b(s)} ds$$

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_C \frac{1}{b(s)} ds}$$

Fattore di rigidità  
torsionale delle sezioni  
chiuse

quando abbiamo uno spessore costante, cioè  
 $b$  non dipende da  $s$  :

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\frac{1}{b} \oint_C ds} = \frac{4\Omega^2 b}{L} \quad \text{con } L = \text{lunghezza linea media}$$

confrontando con le sezioni aperte:

$$I_t = \frac{1}{3} b^3 L$$

notiamo che a parità di materiale  
impiegato, le sezioni chiuse presenta-  
no rigidità molto maggiore.