NUMERO: 1229 DATA: 27/10/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Greco C.

MATERIA: Geometria

Prof. Spreafico

# MATRICI

LUN 03/03

**DEF**: e' un'insieme di numeri (in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$) disposti ordinatamente su "n" righe ad "n" colonne

ESEMPIO $A)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2 righe
4 colonne

A) e' una $2 \times 4$ (righe × colonne)

6 e' l'elemento di posto 2,3 cioe' sta sulla riga 2 e colonna 3

Siccome le entrate di A sono tutti numeri reali $A \in \mathbb{R}^{2,4}$ ($\mathbb{R}^{2\times 4}$)

$A = (a_{ij})$  $1 \leq i \leq 2$ INDICE DI RIGA
$1 \leq j \leq 4$ INDICE DI COLONNA

$a_{13} = 0 \quad a_{24} = 1 \quad a_{11} = 1$

## ES: FORME PARTICOLARI DI MATRICI

1) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ MATRICI QUADRATE DI ORDINE $n$

2) $(0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -4) \in \mathbb{R}^{1,5}$

$A \in \mathbb{R}^{1,n}$ MATRICI RIGA

3) $B \in \mathbb{R}^{n,1}$ MATRICI COLONNA

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ MATRICE NULLA $\in \mathbb{R}^{2,4}$ $O_{2\times 4}$

$O_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad O_n$ (MATRICE NULLA QUADRATA)

5) $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$\boxed{-A \ (\text{OPPOSTA DI } A)}$ → CAMBIO IL SEGNO A TUTTI GLI ELEMENTI DI A

SE $A_{ij} = -A$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

## 2) SOMMA DI MATRICI

PRENDO DUE MATRICI DELLO STESSO TIPO E FACCIO LA SOMMA ELEMENTO PER ELEMENTO

$$A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \longrightarrow (A+B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

ESEMPIO
$$\underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} + \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}} = \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}$$

**PROPRIETÀ** $A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$

(i) COMMUTATIVA $\rightarrow A+B = B+A$ (LA SOMMA SI SCARICA SUI REALI)

(ii) ASSOCIATIVA $\rightarrow (A+B)+C = A+(B+C)$

(iii) $A + 0_M = A$ $(0_M \in \mathbb{R}^{m,n})$

$0_M$ E' L'ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA

(iv) $A + (-A) = 0_M$ A SOMMATO ALL'ELEMENTO OPPOSTO DÀ A

ESEMPIO

- CALCOLARE $A - {}^tB$ DOVE $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- $$\underset{3\times3}{T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} + \underset{3\times3}{T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}} = \overset{T_1 + T_2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}} \; 3\times3$$

NON TRIANGOLARE

31 32

PARTE DELLA MATRICE NULLA SOTTO LA DIAGONALE

**TRIANGOLARE SUPERIORE** { ELEMENTI NON NULLI SOPRA LA DIAGONALE

$T_1 = (t_{ij})$ E' TRIANGONALE SUPERIORE SE $t_{ij} = 0$ PER $i > j$

SONO NULLI GLI ELEMENTI SOTTO LA DIAGONALE

**TRIANGOLARE INFERIORE** { ELEMENTI NON NULLI SOTTO LA DIAGONALE

$T_2(t_{ij})$ E' TRIANGONALE INFERIORE SE $t_{ij} = 0$ PER $i < j$

SONO NULLI GLI ELEMENTI SOPRA LA DIAGONALE

**MATRICI DIAGONALI** $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ $d_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$

ANCHE $0_M$ E' DIAGONALE SE $\in \mathbb{R}^{n,n}$

ESEMPIO $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO: DET. UNA MATRICE $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ EQ. DOVE L'INCOGNITA E' UNA MATRICE:

$\boxed{\text{t.c. } 3X + 2(A+B) - 3\,{}^tC = 0}$ → $\boxed{\text{EQUAZIONE MATRICIALE}}$

DOVE:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

SI ISOLA LA X E SI PORTA IL RESTO DALL'ALTRA PARTE

$$\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}X = \left(-2(A+B) + 3\,{}^tC\right)\cdot\frac{1}{3} \rightarrow X = \frac{1}{3}\cdot\left(-2(A+B) + 3\,{}^tC\right)$$

$$X = \frac{1}{3}\left[-2\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) + 3\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -10/3 \\ 8/3 & -2 \end{pmatrix} = X$$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ → TUTTO QUELLO CHE ABBIAMO DETTO $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, SI PUO' RIFARE $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

NON C'E' ALCUNA DIFFERENZA.

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ i \end{pmatrix} - 3i\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12i \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-12i \\ i+15 \end{pmatrix}$$

## 4) PRODOTTO DI MATRICI

$\boxed{\text{PASSO 1}}$ $R \in \mathbb{R}^{1,n}$ $\quad R = (r_{11}, \dots\dots r_{1,n})$

$C \in \mathbb{R}^{n,1}$ $\quad C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1,n} \end{pmatrix}$

$\underset{1\times n \quad n\times 1}{R \cdot C}$ [PRODOTTO RIGA PER COLONNA]

$= \in \mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$ IN QUANTO HA UN SOLO NUMERO

$$= \sum_{j=1}^{n}(r_{1j})\cdot(c_{j1}) = (r_{11} \dots r_{1n})\cdot\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{\dots} \end{pmatrix} = r_{11}\cdot c_{11} + r_{12}\cdot c_{12} \dots + r_{1n}\cdot c_{1\dots}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 226

- SUPPONIAMO $\exists(A\cdot B), \exists(B\cdot A)$ SE $\underset{A}{(m\times n)}\cdot\underset{B}{(n\times m)} \Rightarrow \underset{B}{(n\times m)}\underset{A}{(m\times n)}$

SE $\boxed{n\neq m,\ AB\neq BA}$ [NON SONO UGUALI IN QUANTO AVREMO IN USCITA]

PER $A\cdot B \rightarrow m\times m$

PER $B\cdot A \rightarrow n\times n$

ESEMPIO

$\underset{1\times 3}{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad \underset{3\times 1}{B} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$A\cdot B = (32)\ 1\cdot 1$

$B\cdot A \rightarrow 3\times 3$ $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\5 & 10 & 15\\6 & 12 & 18\end{pmatrix}$

$B\cdot A \neq A\cdot B$

- SUPPONIAMO $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\exists A\cdot B, \exists B\cdot A$

[NON VALE LA PROPRIETA' COMMUTATIVA NEL PRODOTTO]

$\underbrace{n\times n\ \ n\times n}_{n\times n}$ $\underbrace{n\times n\ \ n\times n}_{n\times n}$ $\Rightarrow AB = BA$ ? [NO!]

1) ESEMPIO $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 4\end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -3\end{pmatrix}$

$A\cdot B = \begin{pmatrix}-2 & -4\\7 & -12\end{pmatrix}$ $\quad B\cdot A = \begin{pmatrix}0 & 8\\-3 & -12\end{pmatrix}$ $\quad BA\neq AB$

2) ESEMPIO $E_{11}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ $E_{12}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

MATRICI ELEMENTARI

DOVE IL DOPPIO INDICE INDICA LA POSIZIONE DELL'UNICO "1" PRESENTE

$E_{11}\cdot E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = E_{12}$

$E_{12}\cdot E_{11} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = O_M$ MATRICE NULLA $\neq E_{11}\cdot E_{12}$

**PROPRIETA'**

SOTTINTESO CHE IL PRODOTTO ESISTA: CHE LE MATRICI SIANO COMPATIBILI

(i) NON E' COMMUTATIVO!

(ii) E' ASSOCIATIVO $\rightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

(iii) $(A+C)\cdot B^{*} = AC + BC$

$D(A+B) = DA + DB$ } LEGAME CON LA SOMMA

$\boxed{B \cdot A\ ?} \rightarrow$

2) CI SONO ANCHE MATRICI NON INVERTIBILI

ESEMPIO

$E_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{E_{12} \cdot E_{12} = (E_{12})^2}$ QUADRATO DI UNA MATRICE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_H \Rightarrow E_{12} \text{ NO INVERTIBILE}$$

DIM PER ASSURDO

SE LO FOSSE DOVREBBE $\exists B : E_{12} \cdot B = I_2$

MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER $E_{12}$

$$(E_{12} \cdot E_{12}) \cdot B = E_{12} \cdot I_2$$

$$O_H \cdot B = E_{12}$$

$$O_H = E_{12}$$ NO!! E' ASSURDO $\Rightarrow$ $E_{12}$ NO INVERTIBI[LE]

ESERCIZIO $\boxed{\text{DIM}}$ $\rightarrow$ SIA D UNA MATRICE TALE CHE $D^p = (\underbrace{D \cdot D \cdot \ldots \cdot D}_{p \text{ VOLTE}}) = O_H$
OSSIA CHE D NON E' INVERTIBILE

NILPOTENTI

PROPOSIZIONE

1) SE $A \cdot B = I \Rightarrow B \cdot A = I$

2) $\left.\begin{matrix} A \cdot B = I \\ A \cdot C = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = C$ E' UNICA $\Rightarrow$ UNICITA'

SE A E' INVERTIBILE, L'UNICA MATRICE $B : A \cdot B = I$
VIENE DETTA INVERSA DI A $\rightarrow \boxed{B = A^{-1}}$

[NELLE MATRICI NON VALE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 226

5) $A, B$ SO CHE $\exists (A \cdot B)^{-1}$

$\boxed{\exists A^{-1} \text{ E } B^{-1} \text{ ?}}$

- UNA SOLUZIONE DI $S$ E' UNA N-UPLA CHE SODDISFA TUTTE LE EQ. LINEARI DI $S$

ESEMPI

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases}$ 3 EQ., 2 INCOGNITE

$(-3, 1)$ E' SOLUZ.?

DEVE VERIFICARE TUTTE LE EQ. DEL SISTEMA

SOSTITUISCO $\begin{cases} -3+3=0 \ \checkmark \\ 3+1=4 \ \checkmark \\ -3+7=4 \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow$ OK

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ 2 EQ., 2 INCOGNITE $\Rightarrow$ NON HA SOLUZIONI

**SISTEMA**
- COMPATIBILE (RISOLUBILE) SE $\exists$ SOLUZIONE
- INCOMPATIBILE (IMPOSSIBILE) SE $\nexists$ SOLUZIONI

OSS: UN SISTEMA OMOGENEO E' SEMPRE COMPATIBILE INFATTI LA N-UPLA $(0, 0, \dots, 0)$ E' SEMPRE SOLUZIONE (SOLUZIONE BANALE)

## SCRITTURA MATRICIALE DI $S$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (x_1) & (x_2) & & (x_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}}_{A \ m\times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X \ n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B \ m\times 1}$$

$S: A\cdot X = B$

$$A\cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

MA $S = \overline{S} \Rightarrow$ I DUE SISTEMI SONO EQUIVALENTI

$3x_1 = 7$ DERIVA DA $(x_1 + 6x_2 + 2x_3) + 2(x_1 - 3x_2 - x_3) = 7$

[SOSTITUIRE ALLA PRIMA EQ. LEI STESSA + n VOLTE UN'ALTRA]

$\Downarrow$

**OSS**: SE SOSTITUISCO AD UNA EQ. DI $S$ LEI STESSA SOMMATA AD n-VOLTE UN'ALTRA OTTENGO UN SISTEMA EQUIVALENTE

ELENCO DI OPERAZIONI CHE NON MODIFICANO IL MIO SISTEMA $S$ PASSANDO, CIOE', AD UNO AD ESSO EQUIVALENTE

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- POSSO SCAMBIARE DI POSTO A DUE EQUAZIONI (O PIU' DI DUE)

$$R_i \longleftrightarrow R_J \quad \text{(SCAMBIO 2 RIGHE)}$$

- POSSO MOLTIPLICARE UNA EQ. PER UN NUMERO DIVERSO DA ZERO

$$R_i \longrightarrow \alpha R_i, \ \alpha \neq 0$$

- SOSTITUIRE AD UNA EQ. LEI STESSA SOMMATA AD UN MULTIPLO DI UN'ALTRA EQ. DEL SISTEMA

$$R_i \longrightarrow R_i + \beta R_J \quad J \neq i$$

$\boxed{\text{OPERAZIONI ELEMENTARI}}$

**PROPOSIZIONE** $S: AX = B$ E SIA $S': A'X = B'$ DOVE $(A'|B')$ E' STATA OTTENUTA DA $(A|B)$ USANDO OPERAZIONI ELEMENTARI $\Rightarrow S$ E $S'$ EQUIV.

SCOPO: CAPIRE COME USARE LE OPERAZ. ELEMENTARI PER ARRIVARE $(A'|B')$ + FACILE

ESEMPIO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 = 0 \\ X_2 + X_3 = -1 \\ -X_3 + 4X_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2X_1}{2} = -\frac{2X_2}{2} \\ X_2 = -1 - X_3 \\ \frac{4X_4}{4} = \frac{1 + X_3}{4} \end{cases}$$

SOSTITUISCO

$$\begin{cases} X_1 = -(-1 - X_3) \\ X_2 = -1 - X_3 \\ X_4 = \frac{1}{4} + \frac{X_3}{4} \end{cases}$$

$X_3 = K$ SOLUZ: $\left(1+K, -1-K, K, \frac{1}{4} + \frac{K}{4}\right)$

**DEF:** $A = (a_{ij})$ RIDOTTA SE

1) SE $R_{i_0} \neq (00\dots0) \Rightarrow \exists\, a_{i_0 j_0} \neq 0$ TALE CHE $a_{i j_0} = 0 \;\; i > i_0$

2) SE $R_{i_0} = (00\dots0) \Rightarrow R_i = (0\dots0) \;\; \forall i > i_0$

**DEF** SE A E' RIDOTTA (O FORTEMENTE RIDOTTA) GLI ELEMENTI $a_{i_0 j_0} \neq 0$ ($a_{i_0 j_0} = 1$) SI DICONO PIVOT DELLA MATRICE

ELEMENTI SPECIALI

**TEO:** SE A E' UNA MATRICE $\mathbb{R}^{m,n}$ $\Rightarrow$ E' SEMPRE POSSIBILE USARE LE OPERAZ ELEMENTARI PER PASSARE DA A AD A' RIDOTTA O, ADDIRITTURA, FORTEMENTE RIDOTTA.

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_5} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1 = R_3^*} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4^* = R_4 + (-R_1)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_2]{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\text{MATRICE RIDOTTA}}$$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right)$

IMPOSSIBILE

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ $r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$

3) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $r(A) = 3$, $r(A|B) = 3$ $\quad r(A) = r(A|B)$

# RICHIAMI:

- $S: AX = B$ $\quad [A|B] \xrightarrow{\text{OPERAZIONI ELEMENTARI}} [A'|B']$ $\quad S': AX' = B'$ EQUIVALENTE AD ESSO

POSSO FARE IN MODO CHE A' SIA (FORTEMENTE) RIDOTTA

## TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

CONSIDERIAMO:

(1) $S: AX = B$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad X \in \mathbb{R}^{n,1} \quad B \in \mathbb{R}^{m,1}$

(2) $\bar{S}: AX = O_M$

ALLORA: $\qquad$ UN SISTEMA OMOGENEO E' SEMPRE COMPATIBILE

(i) IL SISTEMA (1) E' COMPATIBILE $\Longleftrightarrow r(A) = r(A|B)$

(ii) SE (1) E' COMPATIBILE, ALLORA LE SOLUZIONI DIPENDONO DA $n - r(A)$ PARAMETRI LIBERI

(LE SOLUZIONI SONO $\infty^{n-r(A)}$)

(iii) SE (1) E' COMPATIBILE E $X_0$ E' UNA SUA SOLUZ. (SOLUZ. PARTICOLARE), ALLORA $A \cdot X_0 = B$
$X$ E' SOLUZ. $\Longleftrightarrow X = X_0 + Y$ ($Y$ E' SOLUZ. DI (2) CIOE' DELL' OMOG. ASSOCIATO)

ESEMPI

1) RISOLVERE IL SISTEMA E DISCUTERE

DIRE SE ESISTONO SOLUZIONI E DISCUTERLE

$$\overline{S}: \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y \quad +w=0 \\ y+z \quad =0 \end{cases}$$

SISTEMA OMOGENEO ($\exists$ SOLUZ. BANALE)

[3 EQ. 4 INCOGNITE]

NEL SISTEMA OMOGENEO LA COLONNA DI ZERI NON VIENE MODIFICATA

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cancel{0} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = A'$$

$A'$ E' RIDOTTA $\Rightarrow r(A') = 3 (= r(A|B)) = r(A)$

LE SOLUZ. $\exists$ (OVVIO)

$\infty^{4-3} = \infty^{1} \Rightarrow$ C'E' UN PARAMETRO LIBERO ($z$ LIBERA)

COMPLETIAMO LA RIDUZIONE : (SOLO SE CI CHIEDE DI RISOLVERE)

$$\xrightarrow[R_1 - R_3]{R_2 + 2R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

FORTEMENTE RIDOTTA

$$\begin{cases} x-3z=0 \\ 4z+w=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3a \\ y=-a \\ z=a \\ w=-4a \end{cases}$$

1.1) DATO :

$$S: \begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y \quad +w=0 \\ y+z \quad =2 \end{cases}$$

VERIFICARE CHE (1 2 0 1) E' SOLUZIONE E CALCOLARE TUTTE LE SOLUZIONI

SOSTITUISCO :

$$\begin{cases} 1+2-2\cdot 0=3 \ \checkmark \\ 1-2 \quad +1=0 \ \checkmark \\ 2+0=2 \ \checkmark \end{cases}$$

SISTEMA COMPATIBILE (HA ALMENO UNA SOLUZIONE)

USO (iii) DEL TEO. E DICO CHE LE SOLUZ. DI **S** SONO :

$X_0$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3a \\ y &= 2 - a \\ z &= 0 + a \\ w &= 1 - 4a \end{aligned}$$

ESEMPIO

DISCUTERE E RISOLVERE IL SISTEMA MATRICIALE

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{[2\times 3]} \cdot X \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{pmatrix}_{[3\times 2]} = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{[2\times 2]}$$

$\exists$ SOLUZ. $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$r(A) = 2 = r(A|B)$ $\Downarrow$ $\exists$ SOLUZIONI

RISOLVO

$$\xrightarrow[\text{(FORTEMENTE RIDOTTA)}]{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

PER RISOLVERLO LE INCOGNITE LE VEDO RAGGRUPPATE PER RIGHE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1 & 0) \\ (2 & 1) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} X = (X_{11} \ \ X_{12}) \\ Y = (X_{21} \ \ X_{22}) \\ Z = (X_{31} \ \ X_{32}) \end{cases}$$

LE SOLUZIONI DIPENDONO DA $(3-2=)$ 1 RIGA DI INCOGNITE LIBERE

PER NOI $Z = (X_{31} \ \ X_{32})$

$$\begin{cases} Y - 3Z = (0 \ -1) \\ X + 2Z = (1 \ \ 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = (1 \ \ 1) - 2Z = (1 \ \ 1) - 2(X_{31} \ \ X_{32}) \\ \quad = (1 - 2X_{31} \quad 1 - 2X_{32}) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} Y = (0 \ \ 1) + 3Z \\ \quad = (0 \ -1) + 3(X_{31} \ \ X_{32}) \\ \quad = (3X_{31} \quad -1 + 3X_{32}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2X_{31} & 1 - 2X_{32} \\ 3X_{31} & -1 + 3X_{32} \\ X_{31} & X_{32} \end{pmatrix}$$

$A$ $n \times n$ (QUADRATE)

ALLE MATRICI QUADRATE VOGLIO ASSOCIARE 2 NUMERI:

**DEF** ASSOCIO ALLA MATRICE A, LA TRACCIA DI A $(A(a_{ij}))$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots a_{nn}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1+5+0 = 6$$

**NOTAZIONE**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & \dots & a_{ij} & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

SE TOLGO LA RIGA $i$-ESIMA E LA COLONNA $j$-ESIMA

$\Downarrow$

OTTENGO $B_{ij}$: UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE $n-1$

ESEMPIO

$$\begin{array}{cc} & \\ 2 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \quad\quad\quad\ 3 \end{array} \qquad 4 = a_{23} \qquad B_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**DEF**: DETERMINANTE DI A $(D(A), \det(A), |A|)$

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$

1. $n = 1$, $A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$
2. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \det(B_{11}) + a_{12} \cdot \det(B_{12}) + a_{13} \cdot \det(B_{13})$

L'ELEMENTO E' DI POSTO PARI, SE LA SOMMA DEGLI INDICI PARI

I DETERMINANTI GLI PRENDO COL SEGNO DEL LORO POSTO $(-1)^{\text{SEGNO}}$

$(-1)^{i+j} \cdot \det(B_{ij}) = A_{ij}$ : COMPLEMENTO ALGEBRICO DI $a_{ij}$

# FATTI UTILI

## PROP. 1

SI PUO' UTILIZZARE LA RIGA CHE SI VUOLE PER CALCOLARE IL DET.
(USO QUELLA CON + ZERI)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 4} \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = \cancel{0 \cdot A_{21}} + \cancel{0_{22}} + 4 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = +4$$

## PROP. 2

(COMPORTAMENTO CON LE OPERAZ. ELEMENTARI) $(A \to A')$

① $R_i \leftrightarrow R_j \Rightarrow \det(A') = -\det(A)$

② $R_i \to kR_i$, $k \neq 0 \Rightarrow \det(A') = k \det(A)$

③ $R_i \to R_i + kR_j \Rightarrow \det(A') = \det(A)$

### CONSEGUENZE

① $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

IN PARTICOLARE: $\det(-A) = (-1)^n \det(A$

② SE A HA 2 RIGHE UGUALI, O PROPORZIONALI $\Rightarrow \det(A) = 0$

## PROP. 3

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

### CONSEGUENZA

IL DETERMINANTE SI PUO' CALCOLARE A PARTIRE, ANCHE, DA UNA COLONNA

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

HA UN SOLO ELEMENTO DIVERSO DA ZERO

$$\det(A) = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-45)$$

$$C_{12} = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix} = 0$$

QUINDI, LA MATRICE $C \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**TEO**: $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I_n$

**COROLLARIO**

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ E IN QUESTO CASO $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$

**DIM**

$\Rightarrow$ SE $\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I$

APPLICO IL TEOREMA DI BINET:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

$\Leftarrow$ SE $\det(A) \neq 0$

DA $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I$

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot \tilde{A} = I$$

$$A \cdot \left( \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \right) = I \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ GIA' CALCOLATA

$r(A) = 3 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\det(A) = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

PER IL TEO $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

VERIFICARE CHE $A \cdot A^{-1} = I$

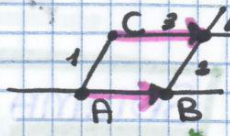
# VETTORI GEOMETRICI (IN RETE APPUNTI SUI VETTORI SOTTO MATERIALE)

SI LAVORA IN $S_3$ = SPAZIO EUCLIDEO (DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA)
(= TRIDIMENSIONALE)

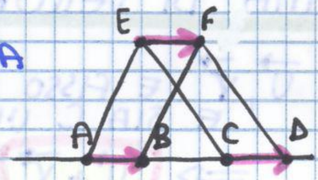
A, B, C • PUNTI NELLO SPAZIO

$S_3 \times S_3 = \{(A,B) \mid A,B \text{ PUNTI DI } S_3\}$

**DEF**: $(A,B)\ R_v\ (C,D)$ SE: (QUANDO RITENGO DUE COPPIE UGUALI)




① $A \neq B$ E C NON E' ALLINEATO CON A E B
ALLORA:
ABDC E' UN PARALLELOGRAMMA




② SE $A \neq B$ MA C E' ALLINEATO
ALLORA:
$\exists (E,F)$ TALE CHE ABFE E CDFE SONO PARALLELOGRAMMI

③ $A = B$ E $C = D$

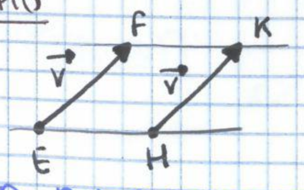
SI DIMOSTRA CHE $R_v$ E' UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA:

DICO CHE SONO UGUALI TUTTE LE COPPIE CHE SONO IN RELAZIONE FRA LORO $\Rightarrow$ $S_3 \times S_3 = \{[(A,B)] \mid (A,B) \in S_3 \times S_3\}$

$[(A,B)]$ → CLASSE DI EQUIVALENZA DI (A,B)

INDICO CON $\vec{v} = [(A,B)]$ (VETTORE)
" " $\vec{0} = [(A,A)]$ (VETTORE NULLO)

ESEMPIO

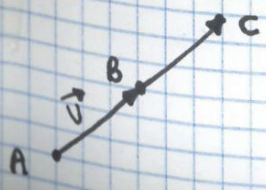



$[(E,F)] = [(H,K)] = \vec{v}$

SIAMO AUTORIZZATI A "SPOSTARE" I VETTORI IN MODO PARALLELO (PER L'UNICITA' DELLA RETTA PARALLELA)

AVENDO UN PUNTO P. SE $P \in S_3$ $\exists$ UNICO Q T.C. $(P,Q)\ R_v\ (E,F)$

**DEF**: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ SE:
$\exists (A,B) \in \vec{u}$, $(A,C) \in \vec{v}$ T.C. A, B E C SONO ALLINEATI



## PROPRIETÀ

(1) $x, y \in \mathbb{R}$ $(x, y)\vec{v} = x(y\vec{v})$

(2) VALGONO LE PROPRIETÀ DISTRIBUTIVE $\Rightarrow (x+y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$

$\Rightarrow x(\vec{v}+\vec{u}) = x\vec{v} + x\vec{u}$

(3) $x \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$

## CONDIZIONI DI PARALLELISMO E COMPLANARITÀ

**PROP. 1** $\vec{u}, \vec{v}$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = x \cdot \vec{u}$

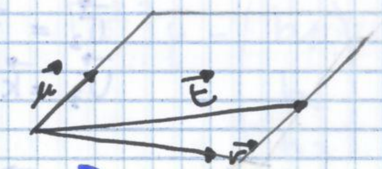
DIM:

$\Rightarrow$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$ PER DEFINIZIONE $(A, B) \parallel (A, C)$

C CADE SU DI UN X REALE DELLA RETTA $\Rightarrow \vec{v} = x \cdot u$

$\Leftarrow$ OVVIO.

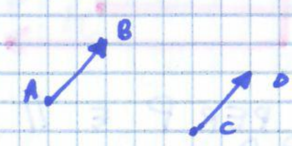
**PROP. 2** $\vec{u}, \vec{v}$ NON $\parallel$ E $\vec{t}$




$\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ COMPLANARI $\Leftrightarrow \vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

## RICHIAMI

- $S_3 \Rightarrow$ SPAZIO EUCLIDEO
- $\vec{v} = [(A, B)]$




- $\vec{u} + \vec{v}$
- $a\vec{u}$
- $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = a\vec{u}$ $\quad (\vec{0}$ È $\parallel \forall \vec{u}$ $\quad \vec{0} = 0 \cdot \vec{u})$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$

  $\vec{t}$ COMPLANARE $\Leftrightarrow \vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v}$
- $V(S_3) = \{\vec{v}\}$ SPAZIO VETTORIALE

$\vec{OR}$ E' COMPLANARE CON $\vec{i}$ E $\vec{j}$
$\exists\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OR} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

DEF: FISSATA $\mathscr{B}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$\vec{v} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, CHIAMO

$[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ COMPONENTI DI $\vec{v}$ RISPETTO A $\mathscr{B}$

SI DIM. CHE:

(1) $[\vec{u}+\vec{v}]_{\mathscr{B}} = [\vec{u}]_{\mathscr{B}} + [\vec{v}]_{\mathscr{B}}$

ESEMPIO: $[\vec{u}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$[\vec{u}+\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

(2) $[h\vec{v}]_{\mathscr{B}} = h[\vec{v}]_{\mathscr{B}}$

PROP 1 $[\vec{u}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $[\vec{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \leq 1$$

DIM: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - hR_1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PROP 2 $\vec{u}, \vec{v}$ (NON $\parallel$), $\vec{t}$ COMP. $\vec{u}$ E $\vec{v}$ $\iff (\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v})$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

A

$$r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix} \leq 2 \iff \det(A) = 0 \quad (r(A) \text{ NON MAX})$$

DEF : $\forall \vec{u}$ DEFINISCO :

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (u \text{ SCALARE } u)$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

MODULO = LUNGHEZZA DEL VETTORE $\vec{u}$

OSS : $|\vec{u}| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

TEO : $\vec{u}, \vec{v} \in V(S_3)$ VALE CHE :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \quad (*)$$

CONSEGUENZA

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ POSSO DIVIDERE PER ENTRAMBI MEMBRI DELLA $(*)$, E OTTENGO:

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \leq 1 \implies \boxed{-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \leq 1}$$

$\exists!\ \alpha$ (TRA $\vec{u}$ E $\vec{v}$), $0 \leq \alpha \leq \pi$, t.c.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \implies \alpha \text{ E' L'ANGOLO TRA } \vec{u} \text{ E } \vec{v}$$

OSS :

(i) $\alpha = \pi/2 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

IL PRODOTTO SCALARE NULLO CI DA' LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA' TRA VETTORI.

(ii) $\alpha$ E' ACUTO $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ (PRODOTTO SCALARE POSITIVO)

$\alpha$ E' OTTUSO $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

ESEMPIO :

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) STABILIRE QUANTO VALGONO I MODULI DEI VETTORI

(2) STABILIRE SE L'ANGOLO FRA I DUE VETTORI E' ACUTO O OTTUSO

(3) CALCOLARE L'ANGOLO

(4) COSTRUIRE $\vec{t} \perp \vec{u}$

(1) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2+4^2+0^2} = 4$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0\ 4\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 > 0$

ANGOLO ACUTO

OSSERVO CHE, QUELLO OTTENUTO E' ESATTAMENTE IL DET DELLA SEGUENTE MATRICE:

$$M = \begin{array}{c} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{array} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = \vec{u} \times \vec{v}$$

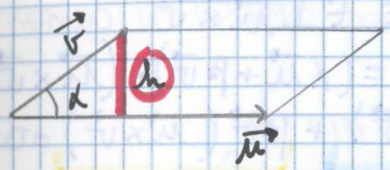
$$= \underbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)}_{A_{11}}\vec{i} - \underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)}_{A_{12}}\vec{j} + \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{A_{13}}\vec{k}$$

COMPONENTI DEL VETTORE

## MODULO $\vec{u} \times \vec{v}$

PROP: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$ $[\alpha = \vec{u} \wedge \vec{v}]$

## INTERPRETAZIONE GEOMETRICA




$|\vec{u}| \cdot \underbrace{|\vec{v}| \cdot \sin\alpha}_{h}$ = AREA DEL PARALLELOGRAMMA

## DIREZIONE E VERSO

PROP:
(1) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

(2) SE $\vec{u}$ NON $\parallel \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$
$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

DIM: (1) $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \det(M) = 0$
$\Leftrightarrow$ $R_2$ PROP $R_3$
$\Leftrightarrow$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$

(2) DIMOSTRO CHE $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ $(\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v})$
(VALE L'ORTOGONALITA')

$\exists$ L'ORTOGONALITA' $\Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$

LO SCRIVO PER COMPONENTI $\Rightarrow (A_{11}, A_{12}, A_{13}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$

$= a_1 A_{11} + a_2 A_{12} + a_3 A_{13}$

**COROLLARIO**: $\vec{u}, \vec{v}$ E $\vec{t}$ COMPLANARI $\Longleftrightarrow$

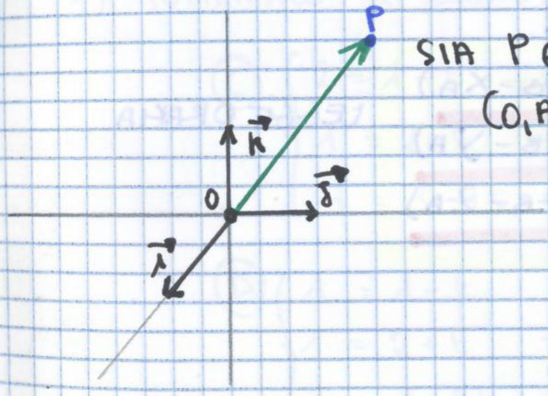
$$\det\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

**DEF**: DATI 3 VETTORI: $\vec{t}, \vec{u}, \vec{v}$ DEFINISCO: PRODOTTO MISTO IL PRODOTTO: $\boxed{\vec{t} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})}$ (= NUMERO)

CON FACILI CONTI SI DIMOSTRA CHE:

$$\boxed{\vec{t} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}$$

PRENDO LO SPAZIO $S_3$, $V(S_3)$ $\quad \mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$




SIA $P \in S_3$

$(0, P) \ni \vec{v}$

DATO IL VETTORE $\vec{OP}$, C'È UNA UNICA TERNA $a_1, a_2, a_3$ T.C.

$$\vec{OP} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$\Downarrow$

CHIAMO $(a_1, a_2, a_3)$ COORDINATE DI P

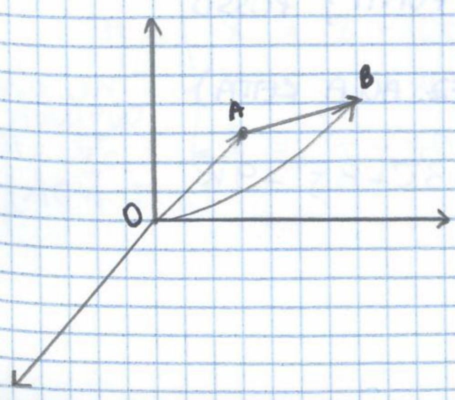
$0(0,0,0)$

$P(a_1, a_2, a_3)$

$$d(P,0) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\vec{OP}|$$

LUNGHEZZA DI $\vec{OP}$ (CALCOLATA CON IL TEO. DI PITAGORA)

PRENDO ORA UN PUNTO $A(x_A, y_A, z_A)$ E $B(x_B, y_B, z_B)$ COME FACCIO A CALCOLARE IL VETTORE $\vec{AB}$




$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

FACCIO LA SOTTRAZIONE DELLE COMPONENTI NEI PUNTI

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

ESERCIZIO

DATA UNA RETTA $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ VETTORE DIREZIONALE

(1) DARE 2 PUNTI DI r
(2) SCRIVERE VETTORE DIREZIONALE DI r
(3) STABILIRE SE I PUNTI $\boxed{C(2,1,7)}$ E $D(1,1,3)$ APPARTENGONO A r
(4) TROVARE UN'ALTRA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA PER r

1) SE SCELGO $t = 0$ (UN VALORE DI t A CASO PER TROVARE UN PUNTO)

$\downarrow$

$A(1,2,3)$

$t = 10 \Rightarrow F(-9, 12, -37)$

2) $\boxed{\vec{v}_r = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}}$

3) SOSTITUISCO LE COORDINATE DEI PUNTI NELL'EQUAZIONE

$$C \begin{cases} 2 = 1 - t \Rightarrow t = -1 \\ 1 = 2 + t \Rightarrow t = -1 \\ 7 = 3 - 4t \Rightarrow \text{VERA PER } t = -1 \end{cases} \Rightarrow C \in r$$

$$D \begin{cases} 1 = 1 - t \Rightarrow t = 0 \\ 1 = 2 + t \Rightarrow 1 = 2 \ \underline{\underline{\text{NO}}}! \Rightarrow D \notin r \\ 3 = 3 - 4t \end{cases}$$

4) L'EQ. PARAMETRICHE DI UNA RETTA NON SONO UNICHE!

USO C COME PRIMO PUNTO

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 7 - 4t \end{cases}$$

(1) USO UN ALTRO PUNTO DELLA RETTA
(2) UTILIZZO UN MULTIPLO DEL VETTORE (CHE NON VIENE, COSÌ, MODIFICATO)

USO UN MULTIPLO DEL $\vec{v}_r$ $(10\vec{v}_r)$

$$r: \begin{cases} x = 2 - 10t \\ y = 1 + 10t \\ z = 7 - 40t \end{cases}$$

VEDIAMO, ORA, SE SONO DISTINTE O COINCIDENTI.

$r // s_1 \quad r = s_1 = ?$

PER VEDERE SE DUE RETTE SONO COINCIDENTI (UGUALI) BASTA SOSTITUIRE IL PUNTO DI UNA NELL'ALTRA.

$\Downarrow$

2 RETTE COINCIDONO $\Longleftrightarrow$ HANNO 1 PUNTO IN COMUNE

SCELGO $A \in s_1 \quad A(-1,2,2)$ E VEDO SE $A \in r$

$$\begin{cases} -1 = 1+2t \\ 2 = -t \\ 2 = -1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \neq 1-4 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow r, s_1 // \text{ MA NON COINCIDENTI } \quad r \neq s_1$$

$r // s_2 \quad r = s_2 = ?$

$C(3,-1,0) \in s_2 \quad C \in r ?$

$$\begin{cases} 3 = 1+2t \\ -1 = -t \\ 0 = -1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ VERIFICATA} \qquad r // s_2 \text{ E } r = s_2$$

NOTA CHE: $C(3,-1,0) < \begin{matrix} \in s_2, \; h = 0 \\ \in r, \; t = 1 \end{matrix}$

---

ES

2) $r, s$ NON //

$$r: \begin{cases} x = -1+k \\ y = 1+k \\ z = -2+k \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -1+t \end{cases}$$

$$\vec{v_r}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_s}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{NON // LORO} \quad \text{NON // LE RETTE} \qquad \vec{v_r} \neq h\vec{v_s}$$

VEDIAMO, QUINDI, COME E' $r \cap s$ $\left( < \begin{matrix} \neq \emptyset & \text{INCIDENTI} \\ = \emptyset & \text{SGHEMBE} \end{matrix} \right)$

$$r \cap s \begin{cases} -1+k = 1+2t \\ 1+k = -t \\ -2+k = -1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-t-1 = 1+2t \\ k = -t-1 \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{cases} \begin{cases} -3 = 3t \\ k = 1-1 = 0 \\ -2+0 = -1-1 \text{ VERA} \end{cases}$$

NELLA INTERSEZIONE DI DUE RETTE, PER LA VERIFICA DELLA LORO INCIDENZA PRENDO LE PRIME DUE E POI SOSTITUISCO NELLA TERZA

$$\boxed{\vec{AP}} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$\boxed{(x_P - x_A)\vec{i} + (y_P - y_A)\vec{j} + (z_P - z_A)\vec{k}}$$

$$\begin{cases} x_P - x_A = \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_C - x_A) \\ y_P - y_A = \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_C - y_A) \\ z_P - z_A = \alpha(z_B - z_A) + \beta(z_C - z_A) \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI $\pi$

($\alpha, \beta$ PARAMETRI)

ESEMPIO

SCRIVERE L'EQ. PARAMETRICA NEL PIANO

$A(1,1,-1) \quad B(2,3,0) \quad C(3,4,1)$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EQ. SARÀ
$$\begin{cases} x - 1 = 1 \cdot \alpha + 2\beta \\ y - 1 = 2 \cdot \alpha + 3\beta \\ z + 1 = 1 \cdot \alpha + 2\beta \end{cases}$$

OSS: COME FACCIO A VEDERE SE UN PUNTO:

$Q = (x_Q, y_Q, z_Q) \in \pi \iff \vec{AQ} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{BC}$

DOVREI SOSTITUIRE, PERCIÒ:

$Q \in \pi \iff \exists\, \alpha, \beta$ T.C.

$$\begin{cases} x_Q - x_A = \alpha(x_Q - x_A) + \beta(x_C - x_A) \\ y_Q - y_A = \alpha(y_Q - y_A) + \beta(y_C - y_A) \\ z_Q - z_A = \alpha(z_Q - z_A) + \beta(z_C - z_A) \end{cases}$$

$$\exists\, \alpha, \beta \iff \det \begin{array}{c} \\ \vec{AB} \Rightarrow \\ \vec{AC} \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} x_Q - x_A & y_Q - y_A & z_Q - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0$$

ESEMPIO

DIRE SE $A(1,0,-1) \quad B(0,0,1) \quad C(-1,0,4) \quad D(1,2,5)$

SONO COMPLANARI

$$\det \begin{pmatrix} \vec{AD} \\ \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ \dots \end{pmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

PUNTI NON SONO COMPLANARI

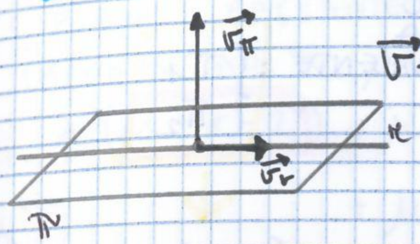
**2° MODO**: CI OCCORRE UN PUNTO P ED UN VETT. DIREZIONALE
TROVO PERCIÒ UNA SOLUZ. PARTICOLARE DEL SISTEMA:
(PER UN PUNTO BASTA TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE DEL SISTEMA)

PER ESEMPIO SCELGO $z=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

$$4x = 4$$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$

$\boxed{P(1,2,0)} \in r$




$\vec{v}_\pi \perp r$ SE $r \subseteq \pi$

NEL NOSTRO CASO ABBIAMO $r \perp \vec{v}_{\pi_1} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$\perp \vec{v}_{\pi_2} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2}$

PRODOTTO VETT.:

$$\det \begin{array}{c} \\ \vec{v}_{\pi_1} \\ \vec{v}_{\pi_2} \end{array} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{0\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}}$$

ALLORA: $r \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 2 + 4t \\ z = 0 + 4t \end{cases}$

PUNTO PER CUI PASSA LA RETTA

2° MODO + GEOMETRICO IN QUANTO INDIVIDUA I VETT. NELLO SPAZIO

PROBLEMA: COSA SUCCEDE SE SI INTERSECANO TRE PIANI?

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$$

$\boxed{2^{\circ} \text{ MODO}}$: USO I FASCI

COMINCIO A SCRIVERE TUTTI I PIANI CHE CONTENGONO LA RETTA E IMPONGO TRA TUTTI QUELLO CHE PASSA PER IL PUNTO A.

SCRIVO IL FASCIO PER r

$$\lambda(x+y-2z)+\mu(x+3y+z-1)=0$$

SCEGLIAMO VALORI PER $\lambda$ E $\mu$ E OTTENGO IL PIANO PASSANTE PER LA RETTA

IMPONGO $A \in \pi_{\lambda,\mu}$ E SOSTITUISCO

$$\lambda\left(\boxed{1+1-2}\right)+\mu\left(\boxed{1+3+1-1}\right)=0$$

$$+\mu(4)=0 \Rightarrow \mu=0$$

IL PIANO CERCATO E' $\lambda(x+y-2z=0$

DIVIDO TUTTO PER $\lambda \Rightarrow \frac{\cancel{\lambda}}{\lambda}(x+y-2z)=0$

RIPETERE IL TUTTO CON $B(1,0,1)$

$$\lambda(1+0-2)+\mu(1+1-1)=0$$

$$-\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=\lambda$$

DIVIDO PER: $\frac{\lambda}{\lambda}\left[(x+y-2z)+(x+3y+z-1)\right]=0$

$$\boxed{2x+4y-z-1=0}$$

## $r \cap s$

CASO 1) r PARAMETRICA, s CARTESIANA

ESEMPIO $r \begin{cases} x=2-t \\ y=3 \\ z=4+t \end{cases}$ $s \begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x+y=4 \end{cases}$

$\boxed{1^{\circ} \text{ MODO}}$ SCRIVO s PARAMETRICA E POI CALCOLO $r \cap s$ (ENTRAMBE PARAMETRICA

ESEMPIO: DISCUTERE LA POSIZIONE RECIPROCA:

$$r\begin{cases} x-y+z=2 \\ y+2z=0 \end{cases} \qquad s\begin{cases} tx+3z=2 \\ x-2y-z=5 \end{cases}$$

AL VARIARE DI $t \in \mathbb{R}$

CAMBIA A SECONDA DI COME SCELGO $t$

SCRIVIAMO LA MATRICE DEI COEFF. COME SE INTERSECASSIMO LE 2 RETTE

$$\longrightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ t & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-tR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & t & 3-t & 2-3t \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4+R_2]{R_3-tR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3t & 2-2t \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$r(A)$
- $3$ SE $t \neq 1$ $(3-3t \neq 0) \Rightarrow r(A|B)=4$ (SGHEMBE)
- $2$ SE $t=1 \Rightarrow r(A|B)=3$ (PARALLELE)

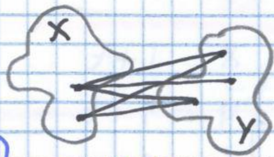
[DALL'ULTIMA RIGA POTEVAMO SUBITO CAPIRE CHE NON VI ERANO SOLUZ. MA NON SAPEVAMO SE ESSE FOSSERO SGHEMBE O PARALLELE $(0=3\,!!)$]

## DEFINIZIONE DI DISTANZA

$$\begin{cases} S_3 \\ A(x_A, y_A, z_A) \quad B(x_B, y_B, z_B) \\ d(A,B) = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} \end{cases}$$

SE HO X SOTTOINSIEME $S_3$

DEFINISCO TUTTE LE DISTANZE:




$$D_{X,Y} = \{ d(x,y) \mid x,y \,(\in X, \in Y) \} \subseteq \mathbb{R}^+$$

$D_{X,Y} \subseteq [0,+\infty)$ E' LIMITATO INFERIORMENTE $\Rightarrow$ AMMETTE INF.

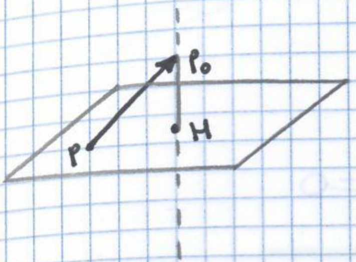
$\inf(D_{X,Y})$ = LA DISTANZA TRA X E Y $= d(X,Y)$

2° MODO

$\pi : \boxed{ax + by + cz + d} = 0 \qquad \vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$

E POI PRENDIAMO UN PUNTO $P(x, y, z) \in \pi$




$d(P_0, \pi) = d(P_0, H) = |\vec{P_0H}|$

PER OTTENERE $|\vec{P_0H}|$ PROIETTO IL VETTORE $\vec{PP_0}$ LUNGO $\vec{P_0H}$

LA PROIEZIONE LA CALCOLIAMO $\Rightarrow$ $|\vec{P_0H}| = \left| \dfrac{\vec{PP_0} \bullet \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w} \right|$

RICORDO CHE: $|\alpha \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$ ALLORA SCRIVIAMO:

DIM:

$$= \left| \frac{\vec{PP_0} \bullet \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right| \cdot |\vec{w}| = \frac{\boxed{|\vec{PP_0} \bullet \vec{w}|}}{|\vec{w}|^2} \cdot |\vec{w}| =$$

$$= \frac{\boxed{|\vec{PP_0}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha} \cdot |\vec{w}|}{|\vec{w}|^2}$$

AVENDO QUINDI: $\dfrac{|\vec{PP_0} \bullet \vec{w}| \cdot |\vec{w}|}{|\vec{w}|^2}$ SCRIVO PER COMPONENTI IL PRODOTTO SCALARE

$$= \frac{\left| (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 \underbrace{- ax - by - cz}_{d}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

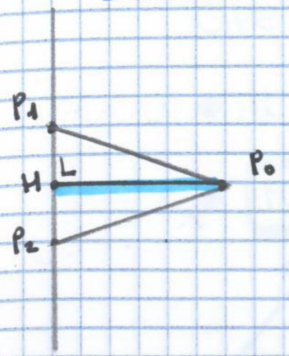
GENERALIZZAZIONE DISTANZA PUNTO - RETTA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 226

## 2° MODO

SCELGO 2 PUNTI QUALSIASI SULLA RETTA

$P_1, P_2 \in r$




$$d(P_0, r) = \underbrace{|\overrightarrow{P_0H}|}_{h} = \frac{2 A_{P_0P_1P_2}}{|P_1P_2|} =$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot |\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot \cancel{2}}$$

$$\boxed{d|\overrightarrow{P_0H}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}}$$

SEMPLIFICO ULTERIORMENTE LA FORMULA

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \alpha t \\ y = y_1 + \beta t \\ z = z_1 + \gamma t \end{cases} \qquad r \parallel \vec{w} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

SCELGO $P_2 = P_1 + \vec{w}$

$\Downarrow$

LA FORMULA DIVENTA : $\boxed{d(P_0, r) = \dfrac{|\vec{w} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{w}|}}$

ESEMPIO :

$$r: \begin{cases} x = \boxed{1} \boxed{+ t} \\ y = -1 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

P1

$P_0(3, 3, 3)$

$\boxed{P_1(1, -1, 4)}$

$\boxed{\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}}$

$\vec{w} \times \overrightarrow{P_1P_0}$

$\vec{w}$

$\overrightarrow{P_1P_0}$

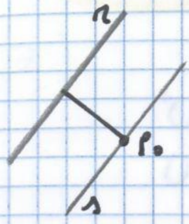
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & +3 \\ (3-1) & (3+1) & (3-4) \end{vmatrix} = \boxed{-10\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}}$$

$$d(P_0, r) = \frac{\sqrt{10^2 + 7^2 + 8^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}$$

# (6) DISTANZA RETTA - RETTA ($r, s$ DISTINTE)

CHE POSSONO ESSERE:

- $r \cap s = P$ (INCIDENTI) $\Rightarrow d(r,s) = 0$
- $\boxed{r \parallel s}$



$\boxed{1° \text{ MODO}}$

SCELGO $P_0 \in s$ E CALCOLO $d(P_0, r)$

$\boxed{2° \text{ MODO}}$

COSTRUIRE $\pi \perp r, s$

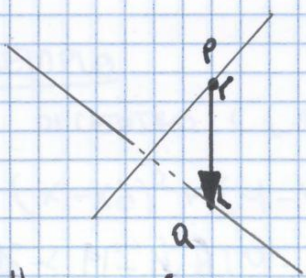
$$\left.\begin{array}{l}\pi \cap r = P \\ \pi \cap s = Q\end{array}\right\} \Rightarrow d(P,Q)$$

- $\boxed{r, s \text{ SGHEMBE}}$

SI PUO' DIM. CHE:

(i) $\exists!\, P \in r,\ Q \in s$ T.C. $\overrightarrow{PQ} \perp r, s$

(ii) $|\overrightarrow{PQ}|$ E' LA DISTANZA MINIMA TRA LE DUE RETTE $r$ ED $s$



ESEMPIO

DATE $r \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $s \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 2 + h \\ z = 3 + 2h \end{cases}$

$r \parallel \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $s \parallel \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(1) VERIFICARE CHE $r, s$ SGHEMBE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 226

# SFERE E CIRCONFERENZE

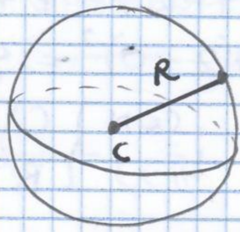
**SFERA** $\rightarrow S = \{ P \in S_3 \mid d(P, C) = R \}$

CENTRO FISSATO

RAGGIO $\in \mathbb{R}^+$ (FISSATO)

$C(x_0, y_0, z_0)$

$P(x, y, z)$




$d(P, C) = R$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \geq 0$$

$$\left[ x^2+y^2+z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0 \right]$$

OSS:
1) EQ 2° GRADO IN $x, y, z$
2) COEFF DI $x^2, y^2, z^2$ SONO UGUALI
3) MANCANO I TERMINI MISTI : $xy, xz, yz$ ...

ESEMPIO

S DI CENTRO $C(1, 0, -2)$ $R = 5$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$
$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 + 4 - 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 20 = 0 \Longrightarrow \text{EQ. SFERA}$$

EQ. SFERA: $\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}$

[ OGNI EQ. DEL TIPO: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ RAPPRESENTA UNA SFERA? ]

NO!!!

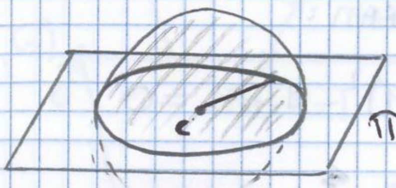
# CIRCONFERENZA

$$\Gamma = \{ P \in \pi \mid d(P,C) = R \ , \ R \geq 0 \}$$

ESEMPIO

DET. L'EQ. DELLA CIRCONFERENZA $\Gamma \subseteq \pi : x - y + 2z = 3$

CON $\begin{cases} C\ (1,0,1) \\ R = 4 \end{cases}$




$\pi \quad C \in \pi$

INTERSECO LA SFERA S DI CENTRO C E RAGGIO 4 CON IL PIANO $\pi$

$$\begin{matrix} S \\ \pi \end{matrix} \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \longrightarrow \text{EQ. CARTESIANE}$$

OGNI VOLTA CHE METTO A SISTEMA UNA SFERA S CON UN PIANO $\pi$ HO UNA CIRCONFERENZA?

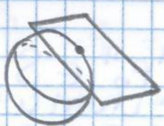
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

NO!!!! PERCHE':

CASO 1

$S \cap \pi = \emptyset$ (TROPPO LONTANI)

CASO 2



$\boxed{S \cap \pi = P}$ CIRCONFERENZA DEGENERE

(CONDIZIONE DI TANGENZA)

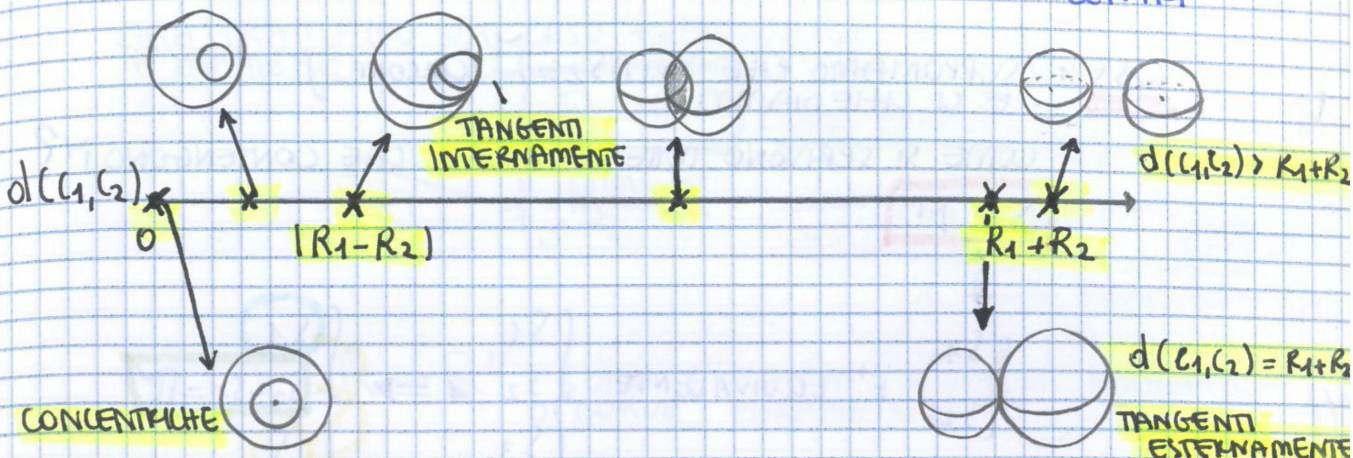
QUANDO $S \cap \pi$ E' VERA CIRCONFERENZA ??

$d(C, \pi)$:
- $> R$ $\quad S \cap \pi = \emptyset$
- $= R$ $\quad S \cap \pi = P$ (DEGENERE)
- $< R$ $\quad$ HO CIRCONFERENZA

# POSIZIONE RECIPROCA DI DUE SFERE

$S_1, C_1, R_1$ ; $S_2, C_2, R_2$

OGNI PUNTO (x) RAPPRESENTA LA DISTANZA FRA I CENTRI




ESEMPIO

STABILIRE LA POSIZIONE RECIPROCA DI $\begin{cases} S_1: x^2+y^2+z^2-9=0 \\ S_2: (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \end{cases}$

$S_1: \; C_1(0,0,0)$

$R_1 = 3$

$d(C_1,C_2) = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

$S_2: \; C_2(1,0,-1)$

$R_2 = 2$

$R_1+R_2 = 5 \qquad R_1-R_2 = 1$

$1 = R_1-R_2 < \sqrt{2} < R_1+R_2 = 5$

$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \end{array}\begin{cases} x^2+y^2+z^2-9=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0 \end{cases}$$

IL SISTEMA E' EQUIVALENTE:

$$\begin{array}{l} S_1 \\ S_2-S_1 \end{array}\begin{cases} x^2+y^2+z^2-9=0 \\ \boxed{-2x+2z+7=0} \end{cases} \Rightarrow \text{INTERSEZ. SFERA-PIANO}$$

$\Downarrow$

CIRCONFERENZA

$\Downarrow$

PIANO RADICALE DELLE SFERE: CONTIENE LA CIRCONFERENZA INTERSEZIONE DELLE SFERE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 226

# CURVE

SE NELL'ANALISI ABBIAMO TRATTATO FUNZIONI DEL TIPO:

$$f : (I \subseteq)\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{(CASO PARTICOLARISSIMO)}$$

ORA TRATTIAMO UN CASO + GENERALE OPERANDO IN + MANIERE:

$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n}$ CURVE PARAMETRIZZATE

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ —— $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\left(\begin{array}{l} m = 2 \\ n = 3 \end{array}\right.$ SUPERFICI PARAMETRICHE$\Big)$

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ SONO FUNZIONI A VALORI VETTORIALI O CURVE PARAMETRIZZATE

$$f(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$$

$$f_i(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{SOLITE DELL'ANALISI I})$$

ESEMPIO $\quad f_1(t) \quad f_2(t) \quad f_3(t)$

$$f(t) = (\cos t, e^t, t^2)$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{l} f = (f_1, \ldots, f_n) \\ g = (g_1, \ldots, g_n) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} (i)\ f+g = (f_1+g_1, \ldots, f_n+g_n) \\ (ii)\ \alpha f = (\alpha f_1, \ldots, \alpha f_n) \\ \quad [\alpha \in \mathbb{R}] \end{cases}$$

DEF:
- $\lim\limits_{t \to t_0} f = \left(\lim\limits_{x \to t_0} f_1(t), \ldots, \lim\limits_{t \to t_0} f_n(t)\right)$
- $f$ CONTINUA IN $t_0 \iff f_i$ CONTINUA IN $t_0$ $\forall i = 1, \ldots, n$
- $f$ DERIVABILE IN $t_0 \iff f_i$ DERIVABILI IN $t_0$ $\forall i = 1, \ldots, n$

  IN QUESTO CASO: $f'(t) = (f_1', f_2', \ldots, f_n')$

NELL' ESEMPIO PRECEDENTE:

$$f'(t) = (-\sin t, e^t, 2t)$$

- $f \in C^n \iff f_i \in C^n \ \forall i = 1, \ldots, n$

## ESEMPI

1) $\boxed{f(t) = (t, t^2, t^3)} \longrightarrow$ CUBICA GOBBA (SGHEMBA, PERCHE' NON CONTENUTA IN UN PIANO)

(i) E' INIETTIVA ?

SI, IN QUANTO SONO PUNTI DIVERSI NELLO SPAZIO

OSS: SE ALMENO UNA $f_i$ E' INIETTIVA ALLORA ANCHE $f$ E' INIETTIVA

$$\boxed{\exists f_i \text{ INIETTIVA} \Longrightarrow f \text{ INIETTIVA} \quad (\not\Leftarrow)}$$

(ii) E' DI CLASSE $C^1$ ?

$f$ E' DI CLASSE $C^1$ PERCHE' $\left.\begin{array}{l} f_1(t) = t \\ f_2(t) = t^2 \\ f_3(t) = t^3 \end{array}\right\}$ SONO DI CLASSE ALMENO $C^1$ (ANCHE $C^\infty$)

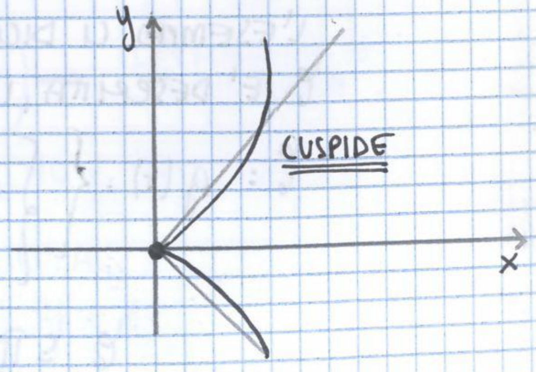
(iii) $f'(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq (0,0,0) \ \forall t$

$\Downarrow$

$f$ E' REGOLARE $\Longleftrightarrow$ (i) + (ii) + (iii)

2) $f(t) = (t^2, t^3)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$




(i) E' INIETTIVA ?

SI PERCHE $f_2(t) = t^3$ LO E'

(ii) $\in C^1$ ?

SI PERCHE' $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$

(iii) $f'(t) = (2t, 3t^2)$

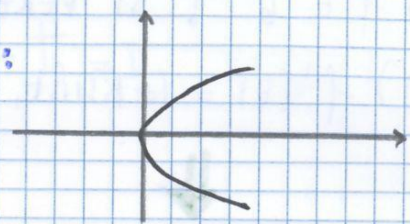
$f'(0) = (0,0) \Longrightarrow$ NON VALE (iii) $\Longrightarrow f$ NON REGOLARE

- $f$ INIETTIVA $\forall y$
- $f \in \mathscr{C}^1$
- $f \; f'(t) = (1, \varphi'(t)) \neq (0,0)$

$\Rightarrow \Gamma$ E' REGOLARE

$\Gamma$ E' OVVIAMENTE PIANA, IN QUANTO $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$

3) $\boxed{x = ay^2} \longrightarrow$ PARABOLA:



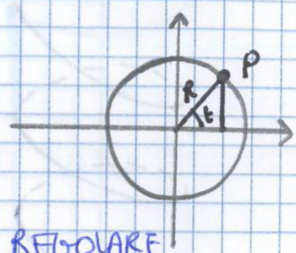
$f(t) = (at^2, t)$

E' REGOLARE

$\Downarrow$

$\boxed{\text{LE PARABOLE SONO CURVE PIANE REGOLARI}}$

4) $x^2 + y^2 = R^2$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$




LA PARAMETRIZZIANO CON SIN E COS $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $\qquad f(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$f$ E' UNA RAPPRESENTAZIONE REGOLARE

SE $t \in (-\infty, +\infty)$ $f$ E' REGOLARE?

$\left( \begin{array}{l} \bullet\ f'(-R\sin t, R\cos t) \neq (0,0) \\ \bullet\ f \in \mathscr{C}^1 \end{array} \right) \to$ IL PROBLEMA E' L'INIETTIVITA'

DA $(-\infty)$ A $(+\infty)$ NO!!!, NON INIETTIVA

SE, INVECE, $f \in [0, 2\pi]$ E' INIETTIVA

$\Downarrow$ $\quad f \in \mathscr{C}^1$, $f' \neq (0,0)$

E' REGOLARE

OSS: $\begin{cases} x = R\cos(-t) \\ y = R\sin(-t) \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi) \Longrightarrow$ PERCORRO LA CIRCONFERENZA DALL'ALTRA PARTE

PRENDIAMO UN PUNTO DELL'ELICA E CALCOLIAMO LA RETTA TANG.

ESEMPIO

$$f(t)=(R\cos t,\ R\sin t,\ ht)$$
$$f'(t)=(-R\sin t,\ R\cos t,\ h)$$

CALCOLIAMO $T_{P_0}(\mathscr{C})$ $\quad P_0 \longleftrightarrow t_0=\frac{\pi}{2}$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\boxed{\left(0,\ R,\ h\tfrac{\pi}{2}\right)}$$
$$f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=(-R,\ 0,\ h)$$

$$\begin{cases} x = 0 - R\lambda \\ y = R + 0\lambda \\ z = h\frac{\pi}{2} + h\lambda \end{cases}$$

EQ. DELLA RETTA TAN.

**TEO:** LA RETTA TANGENTE NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE SCELTA.

## COME VERIFICARE SE UNA CURVA $\mathscr{C}$ E' PIANA

### 1° MODO

SCRIVO UN GENERICO $\pi: ax+by+cz+d=0$ E VEDO SE $\exists\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ T.C. (CON ALMENO $a,b,c,d \neq 0$)

$$a\cdot x(t)+b\,y(t)+c\,z(t)+d=0 \quad \forall t\in I$$

ESEMPIO 1

$f(t)=(t,t^2,t^3)$ $\qquad \pi: ax+by+cz+d=0$

$$at+bt^2+ct^3+d=0 \quad \forall t$$

APPLICO IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \nexists\,\pi \Rightarrow$$ CUBICA GOBBA NON PIANA

VERIFICO SE $\mathscr{C} \subseteq \pi$:

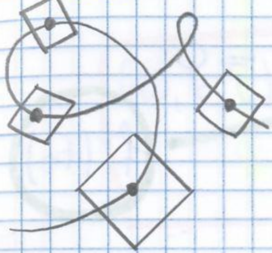
$4t - 6t^2 + 2t^3 = 0 \quad \forall t$ ? NO!!!

INFATTI SE $t = 100$:

$400 - 6\,100^2 + 2\,100^3 \neq 0$ QUINDI BASTA TROVARE UN PUNTO PER CUI NON E' VERIFICATA LA COND.

$\boxed{3^o \text{ MODO}}$

TROVARE $\forall P_0 \in \mathscr{C}$ UN PIANO CHE, LOCALMENTE CONTENGA $\mathscr{C}$:



LA CURVA RISULTA PIANA SE, TUTTI QUESTI PIANI, AL VARIARE DI $P_0$, SONO LO STESSO PIANO.

QUESTI PIANI CHE ANDREMO A COSTRUIRE SI CHIAMANO: PIANI OSCULATORI

MOLTO IMPORTANTI IN FISICA NEI MOTI CIRCOLARI

PREMESSA: $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$g(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$$

CON 2 FUNZIONI LI CONSIDERO DUE VETT. PER FORMARNE UN TERZO CON IL PRODOTTO VETTORIALE:

$$f \times g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ \bar{x}(t) & \bar{y}(t) & \bar{z}(t) \end{vmatrix}$$

DEF: UNA CURVA $\mathscr{C}$ E' "BIREGOLARE" SE $\exists$ UNA SUA PARAMETRIZZAZIONE:

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

REGOLARE, E:

$$f \in \mathscr{C}^2(I)$$

DEF: $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ BIREGOLARE,

DICO CHE $P_0 \in \mathscr{C}$ E' UN PUNTO DI FLESSO SE:

$\exists f$ (REGOLARE A $\mathscr{C}^2$) T.C.

$f'(t_0) \times f''(t_0) = 0$ DOVE: $P_0 = f(t_0)$

**OSS:** (1) $P_0 \ni \Pi_{oscu} \parallel f'(t_0), f''(t_0)$

(2) SUPPONETE CHE $\mathcal{C}$ SIA PIANA, CONTENUTA:

$$ax+by+cz+d=0$$

QUINDI:

$$ax(t)+by(t)+cz(t)\ d=0 \quad \forall t$$

DERIVANDO

$$ax'(t)+by'(t)+cz'(t)=0 \quad \forall t$$

$$ax''(t)+by''(t)+cz''(t)=0$$

$$\boxed{(a,b,c)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=0}$$

INTERPRETIAMO LE 2 EQ. COME PRODOTTI VETTORIALI

(3) PERCHE' DI FLESSO?

SUPPONIAMO DI AVERE LA FUNZ $\boxed{\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ FUNZ. DI ANALISI I

QUINDI: $f(t)=(t, \varphi(t))$

CALCOLO IL PIANO OSCULATORE IN $P_0 \leftrightarrow t_0$

$$\begin{cases} f(t)=(t,\varphi(t),0) & \text{SUPPOSTO } z=0 \\ f'(t)=(1,\varphi'(t),0) \\ f''(t)=(0,\varphi''(t),0) \end{cases}$$

$\Pi_{oscu}$ IN $P_0$

$$\begin{vmatrix} x-t_0 & y-\varphi(t_0) & z-0 \\ 1 & \varphi'(t_0) & 0 \\ 0 & \varphi''(t_0) & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$0(x-t_0)+0(y-\varphi(t_0))+\varphi''(t_0)z=0$$

SE $\varphi''(t_0)\neq 0 \Rightarrow z=0$

SE $\varphi''(t_0)=0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{FLESSO}}$ $\rightarrow$ HA UN PROBL. IN QUANTO E' CONTENUTO DA TROPPI PIANI

**TEO:** $f \in \mathcal{C}^1([a,b]) \Rightarrow f$ E' RETTIFICABILE

$$\ell(f;a,b) = \int_a^b \underbrace{|f'(t)|}_{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,dt$$

**CENNO (DIM):**

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta t \to 0)}} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{|f(t_{i+1}) - f(t_i)|}{\Delta t}}_{|f'(t)| \text{ QUANDO } \Delta t \to 0} \Delta t = \int |f'(t)|\,dt$$

**ESEMPIO**

$f(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4t) \rightarrow$ ELICA CILINDRICA

$\ell(f;0,2\pi)$

$f'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 4)$

$$|f'(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 4^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 4^2} =$$

$$= \sqrt{4(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}) + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{20}\,dt = \left[\sqrt{20}\,t\right]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{20}$$

**OSS:** DEFINISCO $s(t)$: ASCISSA CURVILINEA T.C.

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} |f'(\tau)|\,d\tau}$$

PUNTO PER PUNTO MI DICE LA LUNGHEZZA DELLA CURVA DAL PUNTO $P_0 = f(t_0)$ AL PUNTO $P = f(t)$

MISURA DI UNA PORZIONE INFINITESIMA DELLA CURVA $\leftarrow ds = |f'(t)|\,dt$

**PROPRIETA'**

ESSENDO $s' = |f'| > 0$, TALE DERIVATE HA SEGNO POSITIVO ED E' QUINDI UNA FUNZ. MONOTONA CRESCENTE: INIETTIVA.

$\boxed{s' = |f'| > 0 \Rightarrow \text{E' INVERTIBILE}}$

$s = s(t) \Rightarrow t = t(s)$

$f(t) \Rightarrow f(t(s)) = f(s)$

TEORICAMENTE POSSO SEMPRE PENSARE $\mathcal{C}$ PARAMETRIZZATA CON S

# SPAZI VETTORIALI su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$)

**DEF**: UN INSIEME V E' UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$ SE $V \neq \emptyset$ ED $\exists$ 2 OPERAZIONI:

(1) SOMMA $\longrightarrow$ $\boxed{S_V : V \times V \to V}$ $(\underline{v_1}, \underline{v_2} \mapsto \underline{v_1} + \underline{v_2})$

CON LE PROPRIETA':

8 ASSIOMI

(i) COMMUTATIVA $(\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v_2} + \underline{v_1})$

(ii) ASSOCIATIVA $(\underline{v_1} + \underline{v_2}) + \underline{v_3} = \underline{v_1} + (\underline{v_2} + \underline{v_3})$

(iii) $\exists$ ELEM. NEUTRO $\underline{0}$ T.C. $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$

(iv) $\forall \underline{v} \in V, \exists$ OPPOSTO, $-\underline{v}$ T.C. $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

(2) PRODOTTO $\longrightarrow$ $\boxed{P_V : \mathbb{K} \times V \to V}$ $(h, \underline{v} \mapsto h \cdot \underline{v})$

CON LE PROPRIETA'

(i) $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

(ii) $(\alpha \cdot \beta)\underline{v} = \alpha(\beta \underline{v}) \quad \beta, \alpha \in \mathbb{K}$

(iii) DISTRIBUTIVE:

$$\begin{cases} \alpha(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = \alpha \underline{v_1} + \alpha \underline{v_2} \\ (\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{v} \end{cases}$$

**OSS**: (1) L'ELEMENTO NEUTRO E' UNICO E SI CHIAMA: VETTORE NULLO

$\boxed{\text{DIM}}$: (PER ASSURDO) $\longrightarrow$ $\underline{0} \neq \underline{0}'$

$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'$

(2) $\left.\begin{matrix} \alpha \in \mathbb{K} \\ \underline{v} \in V \end{matrix}\right\} \alpha \cdot \underline{v} = \underline{0} \iff \left\langle \begin{matrix} \alpha = 0 \in \mathbb{K} \\ \underline{v} = \underline{0} \end{matrix}\right.$

(3) L'ELEMENTO OPPOSTO DI $\underline{v}$ E' UNICO E VALE $(-1) \cdot \underline{v}$

$\boxed{\text{DIM}}$: $(-1) \cdot \underline{v}$

$\underline{0} = (1-1)\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + (-1) \cdot \underline{v} = \underline{v} + (-1)\underline{v} = -\underline{v}$

$\boxed{\text{ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI}}$

- MATRICI, $\mathbb{R}^{m,n}$
- SPAZIO $V(S_3)$ VETTORI GEOMETRICI
- $\begin{cases} F = \{ f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \} \text{ SPAZIO VETTORIALE} \\ (f+g)(x) = f(x) + g(x);\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x);\ f(x) = 0;\ -f(x \end{cases}$
- $\mathbb{K}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \}$

SPAZIO CHE IDENTIFICHEREMO CON $\mathbb{K}^{1,n}$ T.C.:

$\mathbb{K}^{1,n} : \{ (x_1\ x_2 \dots x_n) \}$

OSS: (1) W E' SOTTOSPAZIO $\Rightarrow W \neq \emptyset$ $(\underline{0} \in W)$

(2) SE W E' SOTTOSPAZIO, $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \in W$

- $\underline{v} + \underline{v} \in W \Rightarrow 2\underline{v} \in W$
- $\alpha \underline{v} \in W \quad \forall \alpha$

QUINDI HO DUE CASI:

- $W = \{\underline{0}\}$
- W HA INFINITI VETT.

$\nexists$ W SOTTOSP. CON UN NUMERO FINITO DI VETT.

## OPERAZIONI CON I SOTTOSPAZI

$W_1, W_2 \subseteq V$ SOTTOSPAZI

PROP $W_1 \cap W_2$ E' SEMPRE UN SOTTOSPAZIO

DIM: $W_1 \cap W_2$

1) $\underline{0} \in W_1 \cap W_2$ PERCHE' $\begin{cases} \underline{0} \in W_1 \\ \underline{0} \in W_2 \end{cases}$

2) $\underline{t_1}, \underline{t_2} \in W_1 \cap W_2$ $\quad \begin{cases} \underline{t_1} + \underline{t_2} \in W_1 \\ \underline{t_1} + \underline{t_2} \in W_2 \end{cases} \rightarrow t_1 + t_2 \in \cap$

3) $\underline{t} \in W_1 \cap W_2$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot \underline{t} \begin{cases} \in W_1 \ (W_1 \text{ SSP}) \\ \in W_2 \ (W_2 \text{ SSP}) \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \underline{t} \in W_1 \cap W_2$

ESEMPIO

$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0\}$ $\rightarrow$ GEOMETRICAMENTE E' UN PIANO PER L'ORIGINE

$W_1$ E' SOTTOSPAZIO

$= \{(x, y, 3x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 19z = 0\}$ ANCHE $W_2$ SSP

$W_1 \cap W_2 \rightarrow$ SISTEMA DELLE DUE EQ.

$\boxed{\text{DIM}}$: (1) • SCEGLIENDO $\underline{w_1} = \underline{w_2} = \underline{0} \Rightarrow \underline{w_1} + \underline{w_2} = \underline{0} \in W_1 + W_2$

$\underline{t_1}, \underline{t_2} \in W_1 + W_2 \Rightarrow \underline{t_1} + \underline{t_2} \in W_1 + W_2$

$\underline{t_1} + \underline{t_2} = (\underline{w_1} + \underline{w_2}) + (\underline{w_1}' + \underline{w_2}') =$

• UTILIZZO LA PROP. COMMUTATIVA DIVIDENDO I SSP. DI $W_1$ E $W_2$:

$$= (\underbrace{\underline{w_1} + \underline{w_1}'}_{\in W_1}) + (\underbrace{\underline{w_2} + \underline{w_2}'}_{\in W_2}) \in W_1 + W_2$$

• $\alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{t} \in W_1 + W_2 \Rightarrow \alpha \cdot \underline{t} \in W_1 + W_2$

$$\alpha \cdot \underline{t} = \alpha(\underbrace{\underline{w_1}}_{\in W_1} + \underbrace{\underline{w_2}}_{\in W_2}) = \alpha \underbrace{\underline{w_1}}_{\in W_1} + \alpha \underbrace{\underline{w_2}}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

(2) IL PIU' PICCOLO (OVVIO)

IN GENERALE SE HO SSP. $W_1, \dots, W_r \subseteq V$ ALLORA:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_r = \{ \underline{w_1} + \underline{w_2} + \dots + \underline{w_r} \mid \underline{w_i} \in W_i \ \ i = 1, \dots, r \}$$

$V$ SP. SU $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$

**DEF**: COMBINAZIONE LINEARE DI $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ OGNI $\underline{v}$ CHE SI SCRIVE COME:

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \alpha_3 \underline{v_3} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$

E CHIAMO

$$\mathcal{L}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$ INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI

**PROP**: $\mathcal{L}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ E' SSP. DI $V$

(2) $\mathcal{L}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = \mathcal{L}(\underline{v_1}) + \dots + \mathcal{L}(\underline{v_n})$

$\boxed{\text{DIM}}$ 1) • $\underline{0} \in (?)\ \mathcal{L}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$

BASTA SCEGLIERE $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$$\underbrace{0\underline{v_1}}_{=\underline{0}} + \underbrace{0\underline{v_2}}_{=\underline{0}} + \dots \underbrace{0\underline{v_n}}_{=\underline{0}} = \underline{0}$$

ESEMPIO

$W = \mathcal{L}((1,2,-1),(2,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^3 = \{a(1,2,-1) + b(2,0,1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

STABILIRE SE $(0,4,-3) \in W$ ?

$(4,0,-3) \in W$ ?

$(0,4,-3) \in W \iff \exists\, a,b$ T.C. $(0,4,-3) = a(1,2,-1) + b(2,0,1)$

$(0,4,-3) = (a+2b, 2a + 0 \cdot b, -a+b)$

$$\begin{cases} 0 = a + 2b \\ \cancel{4}^{2} = \cancel{2}a \\ -3 = -a + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{2}b = -\cancel{2} \Rightarrow b = -1 \\ a = 2 \\ -3 = -2 - 1 \ \underline{\underline{\text{OK}}} \end{cases} \quad a = 2 \quad b = -1$$

$(0,4,-3) \in W$

$(4,0,-3) = a(1,2,-1) + b(2,0,1)$

$$\begin{cases} 4 = a + 2b \\ 0 = 2a \\ -3 = -a + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \\ -3 = 2 \ \underline{\underline{\text{NO}}} \end{cases} \quad (4,0,-3) \notin W$$

IN PARTICOLARE $W \subsetneq \mathbb{R}^3$

ESEMPIO

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (1,0,0) \\ \underline{a}_2 &= (0,1,0) \\ \underline{a}_3 &= (0,0,1) \end{aligned}}$$

TROVATI QUESTI GENERATORI POSSIAMO DIRE CHE $\mathbb{R}^3$ E' f.g.

E' EVIDENTE CHE :

$\forall (V_x, V_y, V_z) \in \mathbb{R}^3$

$(V_x, V_y, V_z) = V_x \underline{a}_1 + V_y \underline{a}_2 + V_z \underline{a}_3$

IN GENERALE :

$\mathbb{R}^n = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$

$\underline{a}_1 = (1,0,\dots,0)$

$\underline{a}_2 = (0,1,\dots,0)$

$\vdots$

$\underline{a}_n = (0,0,\dots,1)$

2) VERIFICARE SE SONO INDIPENDENTI

$\underline{V_1} = (1,1,1)$
$\underline{V_2} = (-2,1,0)$
$\underline{V_3} = (1,4,3)$

$\alpha_1 \underline{V_1} + \alpha_2 \underline{V_2} + \alpha_3 \underline{V_3} = \underline{0}$ ? $\alpha_i$

$\alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (-2,1,0) + \alpha_3 (1,4,3) = \underline{0}$

$(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3,\ \alpha_1 + 3\alpha_3) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}\right] \rightarrow \text{SISTEMA LINEARE OMOGENEO} \Rightarrow \exists \text{ SOLUZ.}$$

VERIFICO QUANTE SOL. HA IL SISTEMA

$$\text{DET} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-8-1) + 3(1+2) = 0$$

$r(A) < 3 \quad (=2)$

OVVIO $r(A) = r(A|B)$ SOLUZ $\Rightarrow \infty^{3-2} = \infty^1$ VETT. DIPENDENTI

3) MOSTRARE CHE ALMENO 1 DEI $\underline{V_i}$ SI SCRIVE COME COMB. LIN. DEGLI ALTRI 2

$$\underline{V_3} = 3\underline{V_1} + \underline{V_2}$$

$$(1,4,3) = 3(1,1,1) + (-2,1,0)$$
$$= (3,3,3) + (-2,1,0) = (1,4,3)$$

**PROP:** $\underline{v}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

DICO CHE $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ SONO $\boxed{\text{LIN\_DIP\_}}$

$\Updownarrow$

$\exists\ \underline{v}_i$ T.C. $\underline{v}_i$ E' COMBINAZIONE LINEARE DI TUTTI GLI ALTRI

$$\underline{v}_i = b_1\underline{v}_1 + \dots b_{i-1}\underline{v}_{i-1} + b_{i+1}\underline{v}_{i+1} + \dots + b_n\underline{v}_n$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{v}_i \in W &= \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots \underline{v}_n) \\ &= \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i, \underline{v}_{i+1}, \dots \underline{v}_n)\end{aligned}}$$

ESEMPIO

↳ CASO $\boxed{n=3}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \qquad \underline{v}_1 = b_2\underline{v}_2 + b_3\underline{v}_3 \Rightarrow \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \mathcal{L}(\underline{v}_2, \underline{v}_3)$

CIO' VUOL DIRE CHE: $\underline{v}_1$ E' SUPERFLUO (SI PUO' BUTTAR VIA)

INFATTI:

$\mathcal{L}(\underline{v}_2, \underline{v}_3) \subset \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ OVVIO

$\supseteq$ PRENDO $\underline{w} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$

$$\underline{w} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3$$

MA PER Hp SO CHE:

$\underline{v}_1 = b_2\underline{v}_2 + b_3\underline{v}_3$ QUINDI

$$\underline{w} = (\alpha_1 b_2\underline{v}_2 + \alpha_1 b_3\underline{v}_3) + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3$$

$$\underline{w} = (\alpha_1 b_2 + \alpha_2)\underline{v}_2 + (\alpha_1 b_3 + \alpha_3)\underline{v}_3$$

UNO COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

QUINDI, QUANDO SCOPRO CHE UNO E' COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI, QUELLO CHE DIPENDE POSSO "BUTTARLO VIA", IN QUANTO SUPERFLUO

ESEMPIO

SIA DATO $W = \mathcal{L}(\underset{V_1}{(1,0,1,1)}, \underset{0}{(0,0,0,0)}, \underset{V_2}{(1,2,0,0)}, \underset{V_3}{(4,2,3,3)}, \underset{V_4}{(0,0,0,1)}) \subseteq \mathbb{R}^4$

TROVARE I GENERATORI INDIPENDENTI DI $\underline{W}$

1) BUTTO LO $\underline{0}$

2) $\underline{V_1} \neq 0$, LO TENGO

$\underline{V_2} = (1,2,0,0) = \alpha\, \underline{V_1} = \alpha(1,0,1,1)$ ? NO!!

QUINDI $\underline{V_2}$ NON PROP. A $\underline{V_1}$

QUINDI $\boxed{\underline{V_1}, \underline{V_2} \text{ LIN. INDIP.}}$

$\underline{V_3} = \alpha \underline{V_1} + \beta \underline{V_2}$ ?

SE $\exists\, \alpha, \beta \Rightarrow \underline{V_3}$ E' LIN. DIP. $\Rightarrow$ LO BUTTO

SE $\nexists\, \alpha, \beta \Rightarrow \underline{V_1}, \underline{V_2}, \underline{V_3}$ INDIP.

$(4,2,3,3) = \alpha(1,0,1,1) + \beta(1,2,0,0)$

$$\begin{cases} 4 = \alpha + \beta \Rightarrow 4 = 4 \ \underline{\underline{OK}} \\ 2 = 2\beta \Rightarrow \beta = 1 \\ 3 = \alpha \\ 3 = \alpha \end{cases}$$

$\exists\, \alpha, \beta\ (3,1) \Rightarrow \underline{V_3} = 3\underline{V_1} + \underline{V_2} \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{LO BUTTO}}}$

$\underline{V_4} = (0,0,0,1) = \alpha \underline{V_1} + \beta \underline{V_2}$

$= \alpha(1,0,1,1) + \beta(1,2,0,0)$

$$\left.\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 0 = 2\beta \\ \left.\begin{matrix} 0 = \alpha \\ 1 = \alpha \end{matrix}\right] \Rightarrow \underline{\underline{NO}} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{V_4} \neq \alpha \underline{V_1} + \beta \underline{V_2}$$

$\nexists\, \alpha, \beta$ $\underline{V_4}$ LIN. INDIP.

$\Downarrow$

$\underline{\underline{\text{LO TENGO}}}$

$W = \mathcal{L}(\underline{V_1}, \underline{V_2}, \underline{V_4})$

**PROP.**: AVENDO UNO SPAZIO VETT. $V$

$\underbrace{\beta = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \text{ BASE}}$

$\Downarrow$

$\forall \underline{v} \in V \ \exists!$ n-UPLA $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

T.C. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

**DIM**: $\underbrace{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \text{ BASE}}$

$\Downarrow$

IN PARTICOLARE ESSI SONO GENERATORI E QUINDI:

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ T.C. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

$\exists (\beta_1, \dots, \beta_n)$ T.C. $\underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n$

SOTTRAGGO I DUE VETT.:

$\underline{0} = \underline{v} - \underline{v} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\underline{v}_n$

MA $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ SONO LIN. INDIP. $\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases}$

CIOE' $\alpha_i = \beta_i \ \forall i = 1, \dots, n$

**DEF**: $\beta (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ BASE DI $V$

$\forall \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

CHIAMO COMPONENTI DI $\underline{v}$ RISPETTO A $\beta$ $\Rightarrow [\underline{v}]_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

**OSS**: LE OPERAZ. TRA VETT. SI FANNO USANDO LE COMPONENTI, CIOE':

(1) $[\underline{v} + \underline{w}]_\beta = [\underline{v}]_\beta + [\underline{w}]_\beta$

(2) $[h \underline{v}]_\beta = h [\underline{v}]_\beta$