NUMERO: 1228 DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Greco C.

MATERIA: Fisica I

Prof. Ghigo

CINEMATICA

PARTE DELLA MECCANICA CHE SI OCCUPA DELLA DESCRIZIONE DEL MOTO, SENZA OCCUPARSI DELLE CAUSE CHE LO GENERANO (INDIPENDENTEMENTE DA ESSO)

⇓

ESPLICA, PERCIO' IL MOTO DEL PUNTO MATERIALE : UN OGGETTO PRIVO DI STRUTTURA O DI DIMENSIONE

SI BASA SULLA PURA TRASLAZIONE, IN QUANTO UN PUNTO NON PUO' RUOTARE SU SE' STESSO

IN QUANTO GLI VIENE ASSEGNATA UNA CERTA MASSA

PER CALCOLARLO ABBIAMO BISOGNO DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO (PER DEFINIRE UNA SERIE DI GRANDEZZE PER LA TRATTAZIONE DI SISTEMI + COMPLESSI)

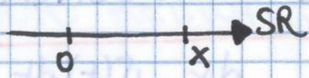
INOLTRE IMPORTANTE PER IL MOTO E' DESCRIVERLO

CI CONSENTE DI MAPPARE LO SPAZIO IN RIFERIMENTO ALLA VARIABILE INDIPENDENTE DEL TEMPO

DESCRIVERE IL MOTO = DESCRIVERNE LA TRAIETTORIA → LA CURVA CHE DESCRIVE L'INSIEME DEI PUNTI CHE OCCUPA IL NOSTRO INSIEME MATERIALE

I MOTI RETTILINEI (1 SOLA DIMENSIONE LUNGO LA RETTA)

HANNO COME SISTEMA DI (SR) RIFERIMENTO UNA RETTA ORIENTATA IN CUI E' DATA L'ORIGINE



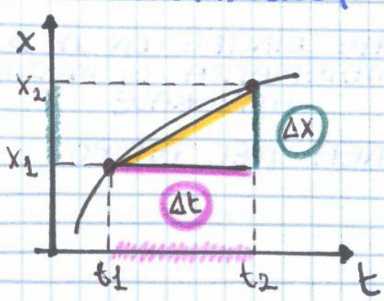
HANNO UNA LEGGE ORARIA : $x(t)$ → IL TEMPO E' INDIPENDENTE E RISPETTO AD ESSO DEFINIAMO LE ALTRI VARIABILI (ES: SPAZIO)

OSSIA COME VARIA LA POSIZIONE IN RIFERIMENTO AL TEMPO

DA ESSO SEGUE, QUINDI, UN DIAGRAMMA ORARIO (DIPENDENTE DAL TEMPO)

MA, [CON CHE RAPIDITA' CAMBIA LA POSIZIONE NEL TEMPO?]

IN BASE A CIO' DEFINIAMO LA VELOCITA' COME LA RAPIDITA' DI VARIAZIONE, NEL TEMPO, DALLA POSIZIONE



DEFINIAMO: Δx (DIFFERENZA FINITA) ⇒ $\Delta x = x_2 - x_1$

→ SPOSTAMENTO (DI QUANTO SI E' SPOSTATO)

$\Delta t = t_2 - t_1$ ⇒ INTERVALLO DI TEMPO DA CONSIDERARE

v_m (VELOCITA' MEDIA) ⇒ $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

INFORMAZIONE COMPLESSIVA SULLO SPOSTAMENTO COMPLESSIVO RISPETTO IL TEMPO IMPIEGATO

RIDOTTO ANCHE ALL'INFINITESIMO $\Delta t \rightarrow dt$

CI DA' L'INFORMAZIONE COMPLESSIVA : LA PENDENZA (NON CI DA INFO SU COME AVVIENE LO SPOSTAMENTO)

MOTO RETTILINEO UNIFORME (A VELOCITA' COSTANTE)

SE, COME IN QUESTO CASO, $v(t)$ E' COSTANTE POSSO PORTARLA FUORI DALL'INTEGRALE:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt = x_0 + v \boxed{\int_{t_0}^{t} dt} = x_0 + v\boxed{(t-t_0)} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v(t-t_0)}$$

LEGGE ORARIA (EQUAZIONE DEL MOTO RETTILINEO UNIFORME)

SE PONGO $t_0 = 0$, ALLORA: $\boxed{x(t) = x_0 + vt}$

IN TAL CASO, IN TEMPI UGUALI SONO PERCORSI SPAZI UGUALI

LA VEL. ISTANTANEA COINCIDE CON LA VEL. MEDIA

DIM: $$v_m = \frac{1}{t-t_0} \cdot \int_{t_0}^{t} v\, dt = \frac{1}{t-t_0} \cdot v \boxed{\int_{t_0}^{t} dt}$$

$$v_m = \frac{\cancel{1}}{\cancel{(t-t_0)}} \cdot v \cdot \boxed{\cancel{(t-t_0)}} \Rightarrow v_m = v$$

QUESTO ERA OVVIO IN QUANTO QUI LA VEL. ISTANTANEA HA SEMPRE LO STESSO VALORE.

ACCELERAZIONE NEL MOTO RETTILINEO

L'$\boxed{\text{ACCELERAZIONE}}$ E' LA RAPIDITA' DELLA VARIAZIONE DI VELOCITA'

L'ACCELERAZIONE MEDIA: $\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$ → DA' L'INFO. GLOBALE

L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA: $\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$ → INDICA LA VARIAZIONE DELLA VELOCITA' PUNTO PER PUNTO

$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2}}$ OPERAZIONE DI DERIVAZ. PER CONOSCERE $a(t)$ (1)

IN QUESTO CASO IL SEGNO NON CI DA' IL VERSO DEL MOTO MA L'AUMENTO, O LA DIMINUZIONE, DELLA VELOCITA' IN ESSO

→ (−) INDICA LA DIMINUZIONE DELLA VEL. NEL MOTO: DECELERAZIONE

→ (+) INDICA L'AUMENTO DELLA VELOCITA' NEL MOTO: ACCELERAZIONE

(2) SE CONOSCIAMO $a(t)$ E VOGLIAMO CONOSCERE $v(t)$ POSSIAMO INTEGRARE L'EQ. DIFFERENZIALE:

$\boxed{\text{DIM}}$ → $$dv = at \Rightarrow \Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt}$$

DUNQUE, NEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO LA VEL. E' UNA FUNZ. LINEARE DEL TEMPO, MENTRE LO SPAZIO E' UNA FUNZ. QUADRATICA NEL TEMPO!

MA SE a E' COSTANTE LO E' SIA NEL TEMPO CHE NELLO SPAZIO

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a\int_{x_0}^{x} dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0)$$

$$v^2 - v_0 = 2a(x - x_0)$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

(MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO)

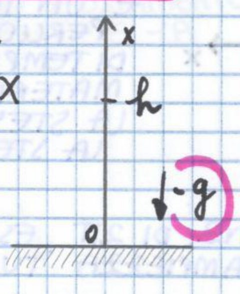
ESEMPIO: CADUTA DEI GRAVI

TRASCURANDO L'ATTRITO DELL'ARIA UN CORPO LASCIATO LIBERO DI CADERE SULLA SUPERFICIE TERRESTRE, SI MUOVE VERSO IL BASSO (CADE) CON UNA ACCELERAZIONE COSTANTE

↓

ACCELERAZIONE DI GRAVITA' = (IN MODULO) = $\boxed{9{,}8\ ms^{-2}}$

PRENDIAMO IN ESAME IL SEGUENTE SISTEMA DI RIFERIMENTO CON L'ASSE X RIVOLTO VERSO L'ALTO



ESAMINIAMO ALCUNE SITUAZIONI:

$\longrightarrow a = -g = -9.8\ ms^{-2}$

IL SEGNO DIPENDE DALLA SCELTA DEL VERSO DELL'ASSE X

(1) CADUTA DA UNA ALTEZZA h CON VEL. INIZIALE NULLA

$$\boxed{v(t) = -gt} \qquad \boxed{x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2}$$

CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x_0 = h \\ v_0 = 0 \\ t = t_0 = 0 \end{cases}$ CONSIDERANDO $a = -g$ AVREMO LE SEGUENTI FORMULE $\Longrightarrow \begin{cases} v^2(x) = -2g(x-h) \\ v(x) = \pm\sqrt{+2g(h-x)} \end{cases}$

⇓

DA QUESTE FORMULE RICAVIAMO IL TEMPO DI CADUTA DEL GRAVE E LA VELOCITA' CON CUI QUESTO CADE AL SUOLO.

$$t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$$

$\longrightarrow$ TEMPO DI CADUTA : $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ $(x=0)$

$\longrightarrow$ VELOCITA' D'IMPATTO AL SUOLO : $\boxed{v_c = \mp\sqrt{2gh}}$ $(x=0)$

SI DEFINISCE "FREQUENZA (ν)" L'INVERSO DEL PERIODO

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

[UNITA' DI MISURA: $Hz = s^{-1}$]

N.B.: [IL PERIODO (E LA FREQUENZA) SONO INDIPENDENTI DALL'AMPIEZZA DEL MOTO]

ORA, NOTA LA LEGGE ORARIA ($x(t)$), RICAVIAMO LA VELOCITA':

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)}$$

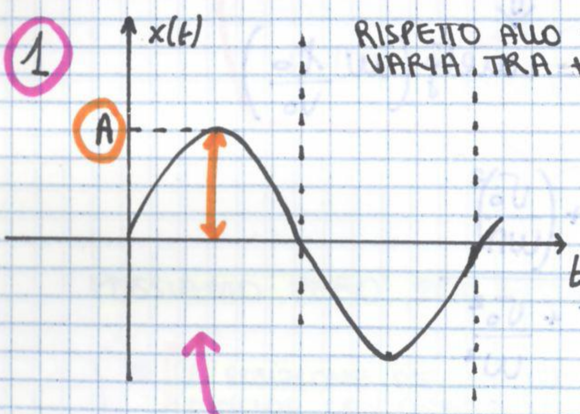
(TRAMITE DERIVAZIONE DI $x(t)$)

E, IN SIMIL MODO, L'ACCELERAZIONE:

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x}$$

L'ACCELERAZIONE E' PROPORZIONALE ALLA PULSAZIONE E LA COSTANTE DI PROP. E' $-\omega^2$

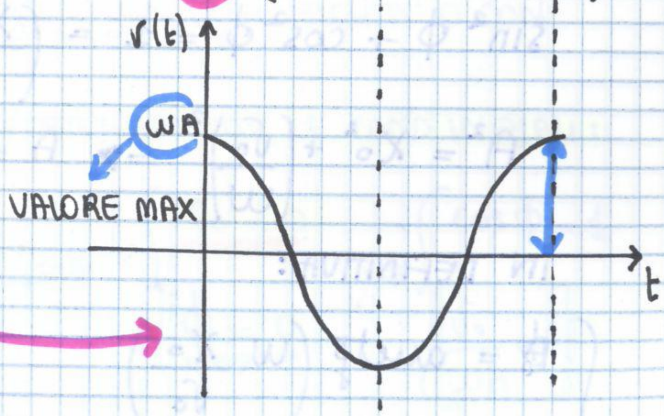
GRAFICI DI POSIZIONE, VELOCITA' ED ACCELERAZIONE

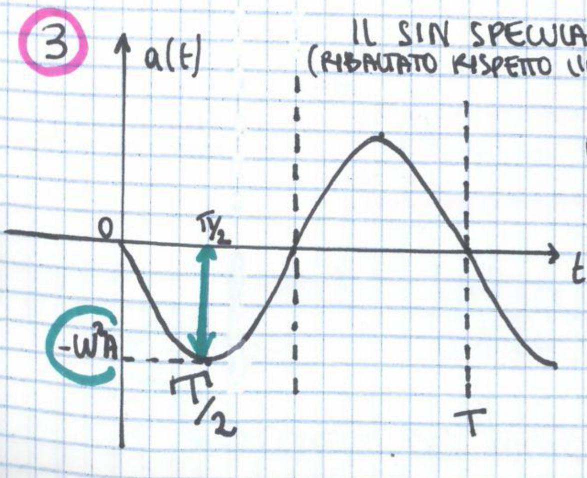


RISPETTO ALLO SPOSTAMENTO VARIA TRA +A E −A

1 E 2 INVERTONO A VICENDA IL LORO PUNTI DI MIN (MAX) CON I LORO ZERI

LA VELOCITA' E' IN "QUADRATURA DI FASE" (SFASAMENTO DI $\pi/2$)





IL SIN SPECULARE (RIBALTATO RISPETTO L'ASSE X)

L'ACCELERAZIONE E' IN "OPPOSIZIONE DI FASE" (SFASAMENTO DI π)

$$\boxed{a_{max} = A\omega^2}$$

PER SCRIVERE, IN ALTRI TERMINI L'ACCELERAZIONE

$$(1)\ a(x) = -\omega^2 x$$

$$(2)\ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx$$

QUINDI ... INTEGRANDO LA (1), SI OTTIENE:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} (-\omega^2 x)\, dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\, dx = -\omega^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right)$$

$$= -\frac{\omega^2}{2} (x^2 - x_0^2)$$

SOSTITUENDO, ADESSO, L'INTEGRALE DALLA (2), SI OTTIENE:

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 - x_0^2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} v^2(x) &= v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2) \\ v(x) &= \pm\sqrt{v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)} \end{aligned}}$$

O PASSA CON UNA VELOCITA' O CON QUELLA OPPOSTA.

POSSIAMO PERO', POI, FISSARE OPPORTUNAMENTE LE COND. INIZIALI:

- LA POSIZIONE DEL NOSTRO ASSE COINCIDE CON QUELLA INIZIALE AL TEMPO $t = 0$
- FASE INIZIALE NULLA

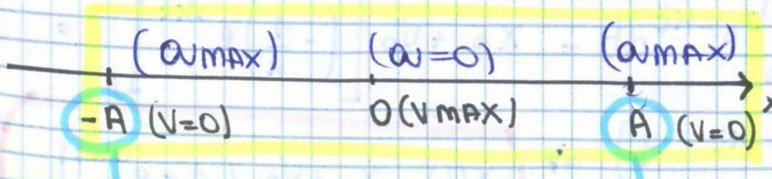
$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi = 1 \\ \dfrac{v_0}{\omega A} = 1 \end{cases}$$

QUINDI, AVREMO:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = \omega A \end{cases} \Rightarrow v^2(x) = \omega^2 A^2 + \omega^2 (0 - x^2)$$

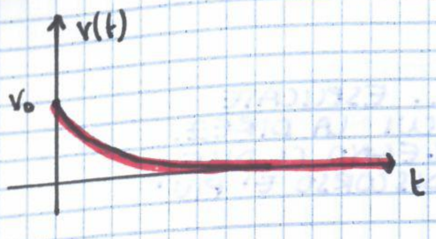
$$\boxed{v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)}$$

- SE $x = \pm A \Rightarrow v = 0$ (GLI ESTREMI SONO I PUNTI IN CUI LA VEL. SI ANNULLA)
- SE $x = 0 \Rightarrow v^2 = \omega^2 A^2$
  $\Rightarrow v = \omega A$
  $\Rightarrow v_{MAX}$ AL CENTRO



CONFINI DEL MOTO

IL PUNTO TENDE ASINTOTICAMENTE ALLA POSIZIONE $\frac{V_0}{K}$



⇓

DAL PUNTO DI VISTA PRATICO PASSATO UN TEMPO (INFINITO) VI SARA' UN PUNTO IN CUI LA VEL. ASSOMIGLIERA' A ZERO.

⇓

QUESTO AVVERRA' QUANDO $t = \tau$

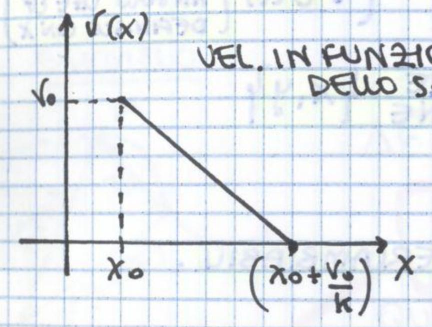
POSTO $\tau = \frac{1}{k}$ ⟹ $V = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

QUANDO $t = \tau$ ⟹ $\boxed{V = \frac{V_0}{e}}$ CON: $\frac{1}{e} \simeq 0,4$

QUINDI PRATICAMENTE, LA VEL. SI ANNULLA QUANDO DIVIENE L'1% DELLA VEL. INIZIALE

$$V = V_0 e^{-kt} = 0,01 = V_0 \cdot e^{-4} \Rightarrow t = 4\tau$$

TEORICAMENTE, INVECE, SI ANNULLA SOLO ALL'INFINITO



VEL. IN FUNZIONE DELLO SPAZIO

SE = 0

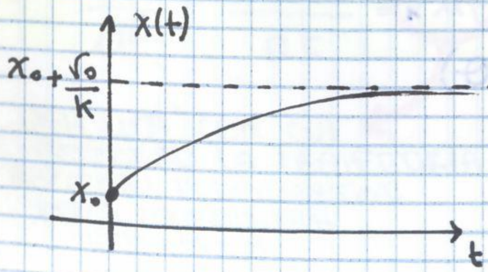
$V = V_0 - k(x - x_0)$ ⟹ $V_0 = k(x - x_0)$

$x = x_0 + \frac{V_0}{k}$

LA VEL. DECRESCE LINEARMENTE DOPO AVER PERCORSO:

$x_0 + \frac{V_0}{k} - x_0 = \frac{V_0}{k}$ COME SPAZIO

PERCIO', ANCHE SE SI IMPIEGA UN TEMPO INFINITO PERCHE' $V=0$ LA POSIZIONE ULTIMA, E' BEN DETERMINATA.

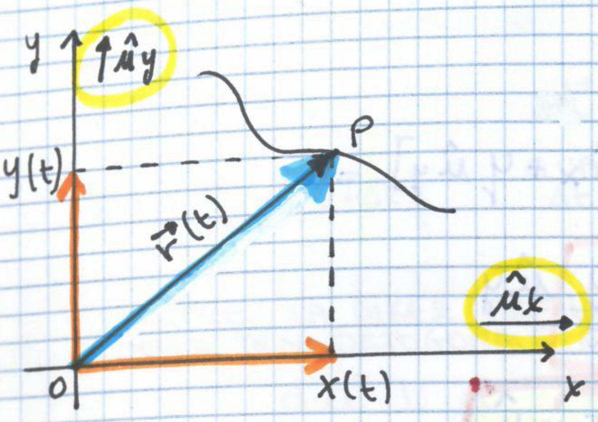


$$x(t) = x_0 + \frac{V_0}{k}\left(1 - e^{kt}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 234

DEFINIAMO COME RAGGIO VETTORE $\vec{r}(t) = \vec{OP}$ AVENTE:

$$\begin{cases} \text{MODULO} = \overline{OP} \\ \text{DIREZIONE} = \text{LA CONGIUNGENTE DA "O" A "P"} \\ \text{VERSO} = \text{DA "O" A "P"} \end{cases}$$



$\vec{r}(t)$ E' LA SOMMA DI ALTRI DUE VETTORI (ASSI)

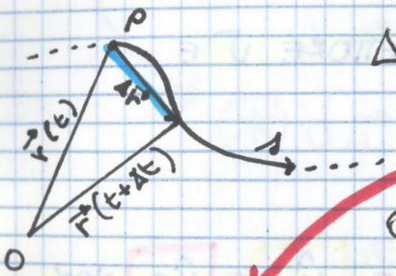
IL VERSO DI ESSI CI VIEN DATO DA DUE ALTRI VETTORI:

$\vec{u}_x$ E $\vec{u}_y$: VERSORI

VETTORI CON MODULO UNITARIO

$$\vec{OP} = \vec{r}(t) = (x(t)\,\hat{u}_x) + (y(t) \cdot \hat{u}_y)$$

ESEMPIO



$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ (DIFFERENZA TRA 2 VETTORI)

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$ (DERIVATA VETTORIALE)

QUANDO $\Delta\vec{r} \to O \to P$

AL TENDERE DI $\Delta t \to 0 \implies \Delta\vec{r} \to d\vec{r}$

(UNISCO LE PUNTE DEI RAGGI VETTORE)

LA CORDA PIAN PIANO DIVIENE TAN. ALLA TRAIETTORIA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds\,\hat{u}_T}{dt} = v\hat{u}_T$$

QUINDI POSSO SCOMPORRE IL SUO MODULO CON UN VERSORE = VERSORE TANGENTE

$\Delta\vec{r} \to d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T$

$dr \simeq ds$

$\Downarrow$

LA CORDA $\simeq$ L'ARCO

VELOCITA' CON CUI PERCORRO LA TRAIETTORIA: RAPIDITA' DI VARIAZIONE DELLA COORDINATA RETTILINEA

QUESTO NON E' UN VERSORE FISSO

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{u}_T}$$

VETTORE VELOCITA = MODULO · VERSORE

SEMPRE TAN. ALLA TRAIETTORIA

(AL CONTRARIO DELL'ACC. CHE IN GENERALE NON E' TAN.)

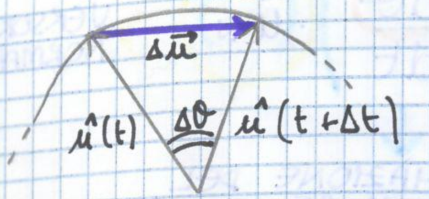
MI DA' IL VERSO DELLA TRAIETTORIA

EQUAZIONE INVARIANTE

DERIVATA DI UN VERSORE

$\hat{u}(t)$ HA UN MODULO UNITARIO, CHE, PERCIÒ, NON VARIA NEL TEMPO.

I VERSORI IN GENERALE QUINDI DESCRIVONO UN ARCO DI CIRCONFERENZA CONSIDERANDO SOLO IL VARIARE DELLA LORO DIREZIONE.



$$\Delta\vec{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$$

QUANDO $\Delta t \to 0$ $\}$ $\Delta\vec{u} \to d\vec{u}$ E $\Delta\theta \to d\theta$

(LA CORDA VA A CONFONDERSI CON L'ARCO)

INOLTRE LA DIREZ. PRENDE LA DIREZ. DELLA TAN, ORTOGONALE AL RAGGIO (OSSIA LA DIREZ. DI PARTENZA)

$$d\vec{u} \perp \hat{u}$$

$$(*)\ du \simeq d\theta$$

ARCO DI CIRCONFERENZA = RAGGIO · ANGOLO SOTTESO

NEL NOSTRO CASO R = 1 (IN QUANTO VERSORE) QUINDI:

$$d\vec{u} = du \cdot \hat{u}_\perp$$

→ VERSORE ORTOGONALE A QUELLO DI PARTENZA

$$(*)\ d\vec{u} = d\theta\ \hat{u}_\perp$$

$$\Downarrow$$

IN GENERALE:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{u}_\perp}$$

PERCIÒ ORA, DERIVANDO, OTTERREMO:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = v_r\hat{u}_r + v_\theta\hat{u}_\theta}$$

v_r: VEL. RADIALE

CON CUI VEL. VARIA IL MODULO DI R

SE MI AVVICINO ALL'ORIGINE $(-)$

SE MI ALLONTANO $(+)$

v_θ: VEL. TRASVERSA (COME STA VARIANDO θ)

RELAZIONE VETTORIALE INVARIANTE RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\,dt}$$

QUI SONO ESPLICITATE PIÙ RELAZIONI SCALARI IN QUANTO OGNI VETTORE PUÒ ESSERE SCRITTO CON LE RISPETTIVE COMPONENTI SCALARI.

MODULO DELLA ACCELERAZIONE : $\boxed{a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

IN CONCLUSIONE :

(1) TUTTE LE VOLTE CHE IN UN MOTO $a_T \neq 0 \Rightarrow$ **MOTO VARIO**
(NON UNIFORME, IL MODULO DI V VARIA NEL TEMPO)

(2) AL CONTRARIO, QUANDO $a_T = 0 \Rightarrow$ **MOTO UNIFORME**

(3) TUTTE LE VOLTE CHE, INVECE, $a_N \neq 0 \Rightarrow$ **MOTO CURVILINEO**
(VARIA LA DIREZ. DEL VETT. VEL. NEL TEMPO)

(4) AL CONTRARIO, QUANDO $a_N = 0 \Rightarrow$ **MOTO RETTILINEO**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt$$

VALGONO LE STESSE FORMULE USATE NELL'ANALISI UNIDIMENSIONALE

SCRIVIAMO, ORA, L'ACC. IN COMPONENTI

(1) IN COMPONENTI CARTESIANE ($\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ FISSI)

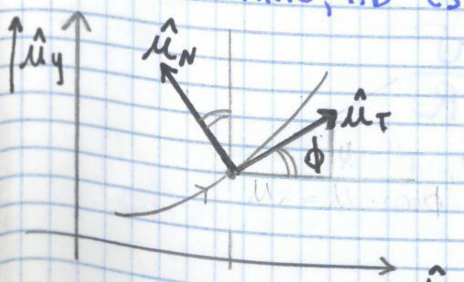
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y\right] =$$

$$= \left(\frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x\right) + \left(\frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y =$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y}$$

$\begin{cases} a_x \\ a_y \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a_T \\ a_N \end{cases}$ PASSARE DALLA UNA ALL'ALTRA

RICAVIAMO, AD ESEMPIO a_x A PARTIRE DA a_T ED a_N



COMPONENTE $a_x = \vec{a} \cdot \hat{u}_x$ (PROIETTANDO IL VETT. ACC. SUL VERSORE $\hat{u}_x$)

IN GENERALE :

COMPONENTE DI UN VETTORE = VETTORE • VERSORE CORRISPONDENTE

$$a_x = \left(\frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N\right)\hat{u}_x =$$

PER LA PROP. DISTRIBUTIVA

$$= \frac{dv}{dt}\underbrace{\hat{u}_T \cdot \hat{u}_x}_{\cos\phi} + \frac{v^2}{R}\underbrace{\hat{u}_N \cdot \hat{u}_x}_{\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\phi} \Longrightarrow \boxed{a_x = \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\sin\phi}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$v = cost$ (COSTANTE IN MODULO, MA $\vec{v}$ CAMBIA CONTINUAMENTE LA SUA DIREZIONE)

$\Downarrow$

$\omega = cost$

$\Downarrow$

CASO UNIDIMENSIONALE EQUIVALENTE AL RETT. UNIFORME:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\, dt$$

E, PERCIO' LA LEGGE ORARIA DEL MOTO SARA':

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega t}$$

$$(s(t) = s_0 + vt)$$

INOLTRE:

$v = \omega R$

$v^2 = \omega^2 R^2$

$a = \frac{\omega^2 R^2}{R}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \left(\text{IN QUANTO LA VEL. E' COST.}\right) \neq a_N = a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME E' UN $\boxed{\text{MOTO PERIODICO}}$

IL PERIODO (IL TEMPO NECESSARIO A TORNARE AL PUNTO DI PARTENZA) $\Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{2\pi R}{v}}$

ESSENDO $\frac{R}{v} = \frac{1}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

ORA, SCRIVIAMO I "MOTI PROIEZIONE" SUGLI ASSI:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta \\ y(t) = R\sin\theta \end{cases} \quad \text{MA } \theta = \theta_0 + \omega t \Rightarrow \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME HA COME PROIEZIONI 2 MOTI ARMONICI SEMPLICI (SFASATI L'UNO DALL'ALTRO DI $\frac{\pi}{2}$) DI PULSAZIONE = VEL. ANGOLARE.

MA, IL MOTO CIRCOLARE PUO' ANCHE NON ESSERE UNIFORME...

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

[α COST]

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha \int_{t_0}^{t} dt$$

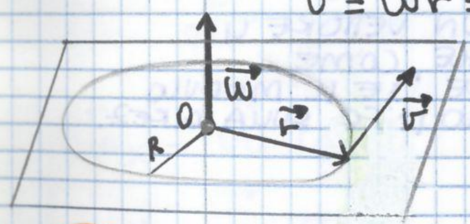
$$= \omega_0 + \alpha(t-t_0) \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t-t_0)}$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2}$$

$$\begin{cases} a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha(t-t_0)^2)R \\ a_T = \alpha R = COST \end{cases}$$

$\boxed{\vec{a}_T = \alpha R \hat{u}_T}$ (VARIA NEL PIANO) $\boxed{\vec{a}_N = \omega^2 R \hat{u}_N}$

$v = \omega r = \omega R$



IL VETTORE ω PUO' ESSERE APPLICATO IN QUALSIASI PUNTO DI UNO STESSO ASSE $\Rightarrow$ $d\vec{\omega}$ E' E' LA DERIVATA DI UN VETT. CON DIREZ. FISSA (PUO' VARIARE SOLO IL SUO MODULO)

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ [$\vec{\alpha} // \vec{\omega}$]

$\to$ VETTORE CHE PUO' ESSERE PARALLELO, O ANTIPARALLELO

$$\begin{cases} \text{VERSO } \alpha = \text{VERSO } \omega \text{ SE } \omega \text{ AUMENTA} \\ \text{VERSO } \alpha \text{ OPPOSTO AL VERSO } \omega \text{ SE } \omega \text{ DIMINUISCE} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{PRODOTTO SCALARE}} = \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_N}}$$

DIM:

$(\vec{a}_T) = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ $\begin{cases} \vec{\alpha} // \vec{\omega} \\ \vec{\alpha} \perp \vec{r} \end{cases}$

$\vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha R \cdot \hat{u}_T = a_T \cdot \hat{u}_T = \vec{a}_T$

$(\vec{a}_N) = \vec{\omega} \times \vec{v} = \omega v(-\hat{u}_r)$ [NEGATIVO PERCHE' DIRETTO VERSO "O"] $(-\hat{u}_r = \hat{u}_N)$

$= \omega v(\hat{u}_N) = $ (PERCHE' $\omega = \frac{v}{R}$) $= \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \vec{a}_N$

MOTO PARABOLICO DEI CORPI

CONSIDERIAMO LE SEGUENTI RELAZIONI:

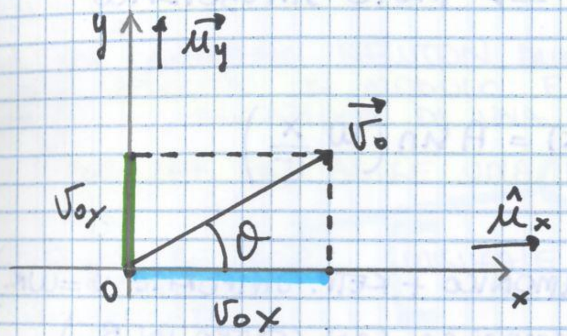
$$\vec{v} = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

$$(t=0) \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

ED ORA LE EVIDENZIAMO NEL MOTO DI CADUTA DI UN GRAVE:

DOVE,
$$\begin{cases} \vec{a} = \text{COST} = \vec{g} & (1) \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t & (2) \end{cases}$$

SCOMPONIAMO, DALLA (2), L'EQ. VETTORIALE NELLE SUE COMPONENTI:



$$\boxed{\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y}$$ VEL. SCOMPOSTA NELLE COORDINATE CARTESIANE

$$\downarrow \vec{g} = -g\hat{u}_y$$

$$\begin{cases} v_{0x} = \vec{v}_0 \cdot \cos\theta \\ v_{0y} = \vec{v}_0 \cdot \sin\theta \end{cases}$$

SOSTITUENDO NELLA (2) OTTERREMO:

$$v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y = v_{0x}\hat{u}_x + v_{0y}\hat{u}_y - g\hat{u}_y$$

$$\Downarrow$$

$$v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y = (v_0\cos\theta)\hat{u}_x + (v_0\sin\theta + g t)\hat{u}_y$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - g t \end{cases}$$ COMPOSIZIONE DI DUE MOTI LUNGO GLI ASSI ORTOGONALI

$h_{MAX} = \dfrac{dy}{dx} = 0$

GITTATA MAX $\downarrow$ $y(x) = 0$

ABBIAMO:
- UN MOTO RETT. UNIFORME
- UN MOTO UNIF. ACCELERATO

2 LEGGI ORARIE:

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta \cdot t \\ y = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ORA, RICAVANDO IL TEMPO DA UNA E SOSTITUENDOLO NELL'ALTRA, OTTENIAMO:

$y(x)$ = TRAIETTORIA PARABOLICA

$$y(x) = x\,tg\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

DINAMICA ... INIZIANDO DA QUELLA DEL PUNTO MATERIALE

SE LA CINEMATICA DESCRIVE IL MOTO, LA DINAMICA NE DETERMINA LE CAUSE STUDIANDO LE INTERAZIONI CHE VI SONO TRA IL PUNTO MATERIALE E L'AMBIENTE CIRCOSTANTE

QUESTE INTERAZIONI SONO DOVUTE AL FATTO CHE IL PUNTO MATERIALE MODIFICA IL SUO STATO DI MOTO CIOE' DALLO STATO IN QUIETE (FERMO) INIZIA AD AVERE UN MOTO (VEL.)

IL CONCETTO DI QUIETE VIENE ESPLICITATO CON:

LA 1ª LEGGE DI NEWTON (PRINCIPIO DI INERZIA FORMULATO DA GALILEO)

INSIEME DI FORZE IN EQUILIBRIO NON PRODUCONO UN MOTO (CONCETTO DI EQUILIBRIO)

UN CORPO NON SOGGETTO A FORZE NON SUBISCE CAMBIAMENTI DI VELOCITA' (IL SUO STATO DI MOTO RIMANE INALTERATO) $[\vec{v} = \text{COST}]$

CAPIBILE CON LO SCAMBIO DI FORZE DEI CORPI CELESTI A DISTANZA

AL CONTRARIO NEWTON DIMOSTRO' CHE LE VARIAZIONI DI VELOCITA' IN MODULO E/O IN DIREZIONE SONO DOVUTE ALL'AZIONE DI UNA FORZA

"MA PER FAR AGIRE UNA FORZA NON E' NECESSARIO IL CONTATTO"

DEVE ESSERE PROP. ALLA VARIAZIONE DELLA VELOCITA'

[MISURALE INTERAZIONI FRA GLI ENTI FISICI]

HA UNA NATURA VETTORIALE ⟹ HA EFFETTI DIVERSI A SECONDA DI COME E' DIRETTA (IMPORTANTE DIREZIONALITA')

LEGAME TRA DINAMICA E CINEMATICA: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$ $\{ m = \text{MASSA INERZIALE} \}$

2ª LEGGE DI NEWTON

LEGGE SPERIMENTALE

RESISTENZA DEL PUNTO MATERIALE ALLA VARIAZIONE DELLO STATO DI MOTO

MAGGIORE E' LA MASSA ⟹ MAGGIORE LA DIFFICOLTA' CHE LO STATO HA DI CAMBIARE

ANCH'ESSA CONTENENTE NECESSARIAMENTE IL PRINCIPIO DI INERZIA:

SE $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow$ (MOTO RETT. UNIF.)

$$\Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{COST}$$

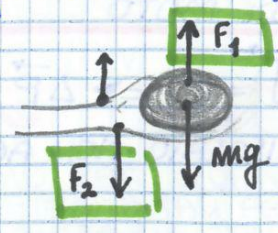
SCOMPONGO LA FORZA E OTTENGO: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

LA SECONDA LEGGE DI NEWTON SCRITTA COSI' E' VALIDA SOLO PER I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI. IN ALTRO MODO HA BISOGNO DEI TERMINI CORRETTIVI. INOLTRE E' VALIDA NEI LIMITI DI VELOCITA' CHE DEV'ESSERE DI MOLTO MINORE DELLA LUCE.

LE COPPIE DI FORZE AZIONE-REAZIONE, AGISCONO SEMPRE SU CORPI DIVERSI

ESEMPIO:

CORPO SU DI UNA MANO



SONO F_1 ED F_2 LE COPPIE DI AZIONE-REAZIONE (LE ALTRE DUE POSSONO ANCHE ESSERE DIVERSE) PERCHÉ LE UNICHE CHE RIMANGONO UGUALI.

INTRODUCIAMO NUOVE GRANDEZZE

LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN PUNTO MATERIALE È DEFINITA DAL VETTORE:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$ QUANTITÀ DI MOTO (MASSA X VEL.)

SE m È COSTANTE:

SAPENDO CHE $\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \left(= \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

POSSIAMO, PERCIÒ, RISCRIVERE LA SECONDA LEGGE DI NEWTON:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

ESPRESSIONE PIÙ GENERALE VALIDA ANCHE PER MASSE NON COSTANTI

IN FORMA INTEGRALE, DIVERRÀ: $\int d\vec{p} = \int \vec{F}\,dt \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \int_0^t F(t)\,dt}$

TEOREMA DELL'IMPULSO

(INTEGRALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO) IMPULSO: VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\boxed{\vec{J} = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}}$$

DA CUI RICAVIAMO DEI CASI PARTICOLARI:

(1) SE $m = \text{COST} \Rightarrow \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \Rightarrow \vec{J} = m\Delta\vec{v}$

(2) SE $\vec{F} = \text{COST} \Rightarrow \vec{J} = \vec{F}\cdot\Delta t = \left(\text{PER IL TEO. DELL'IMPULSO}\right) = m\Delta\vec{v} \Rightarrow \Delta\vec{v} = \frac{\vec{F}\Delta t}{m}$

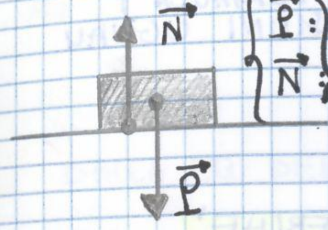
(3) IL VALOR MEDIO DELLA FUNZ. DELLA FORZA SI DEFINISCE COME MEDIA MATE. FRA LE FORZE $\Big\}$ $\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t} = \boxed{\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)\,dt} = (t_0 = 0)\ \frac{1}{t}\boxed{\vec{J}} \Rightarrow \vec{F}_m = \boxed{\frac{\Delta\vec{p}}{t}}$

(4) LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

A PROPOSITO DELL' EQUILIBRIO INTRODUCIAMO:
LE FORZE DI REAZIONI VINCOLARI

SE UN CORPO SOGGETTO AD UNA FORZA, O AD UN INSIEME DI FORZE, RIMANE FERMO PER QUANTO DETTO SIGNIFICA CHE INSIEME A TALI FORZE VIAGGIANO DELLE ALTRE UGUALI E CONTRARIE TALI DA LASCIARE IL CORPO IN QUIETE (VINCOLATO).

PRENDIAMO AD ESEMPIO UN CORPO POSATO SU DI UN TAVOLO, CON IL PIANO D'APPOGGIO ORIZZONTALE



$\left\{\begin{array}{l}\vec{P}: \text{FORZA PESO} \\ \vec{N}\end{array}\right\}$ DUE FORZE CHE HANNO COME PUNTO DI APPLICAZIONE IL PUNTO MATERIALE

$$\vec{P} = -\vec{N} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = 0$$

IN GENERALE QUINDI NON POSSIAMO DETERMINARE A PRIORI LA REAZIONE VINCOLARE MA BISOGNA ESAMINARE CASO PER CASO, IN BASE ALLE CONDIZIONI FISICHE.

CLASSIFICAZIONE DELLE FORZE

NECESSARIA PER INDIVIDUARE DELLE FORZE FONDAMENTALI DA CUI FAR DISCENDERE TUTTE LE ALTRE. TALI FORZE SONO INDIVIDUATE IN 4 PRINCIPALI INTERAZIONI:

- NUCLEARE FORTE
- NUCLEARE DEBOLE
- ELETTRO-MAGNETICA
- GRAVITAZIONALE

NUCLEARE FORTE, NUCLEARE DEBOLE → FORZE A CORTO RAGGIO (A LIVELLI DI NUCLEI ATOMICI)

ELETTRO-MAGNETICA, GRAVITAZIONALE → AGISCONO FINO ALL'INFINITO

NUCLEARE DEBOLE, ELETTRO-MAGNETICA → UNIFICATE NEGLI '80 IN: INTERAZIONE ELETTRODEBOLE

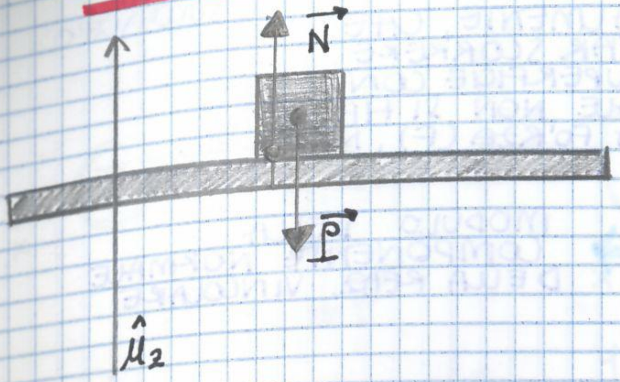
AZIONE DINAMICA DELLE FORZE

SU OGNI MOTO AGISCE UN PARTICOLARE TIPO DI FORZA CHE NEL CASO DEL MOTO RETTILINEO UNIFORME E', OVVIA, NULLA. SITUAZIONE CHE PERO' SI PUO', COME DETTO, OTTENERE ANCHE QUANDO AGISCONO VARIE FORZE IN MODO DA OTTENERE RISULTANTE NULLA.

QUANDO SI HA UN MOTO VARIO, COME NEL CASO DEL MOTO PIANO CURVILINEO, L'ACCELERAZIONE HA DUE COMPONENTI a_T E a_N ED ANCHE LA FORZA E' VARIABILE.
SCOMPONIAMO IL VETTORE FORZA PARTENDO DALLA RELAZIONE: $\vec{F} = m\vec{a}$
SAPENDO CHE:

$$\left.\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N\right\} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N = m\boxed{\frac{dv}{dt}}\hat{u}_T + m\boxed{\frac{v^2}{R}}\hat{u}_N$$

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO (O DIAGRAMMA DELLE FORZE)



$\vec{N}$: REAZIONE VINCOLARE AL PIANO (NORMALE, ORTOGONALE ALLA SUP.)

SCRIVENDO LA 2ª LEGGE DI NEWTON:

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

QUINDI: $\boxed{\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})}$

DALLA EQ. DELLA NORMALE, DERIVANO DEI "CASI PARTICOLARI":

(1) ACCELERAZIONE VERSO L'ALTO: $(\vec{a} = a\hat{u}_z\ ;\ \vec{g} = -g\hat{u}_z)$

$$\vec{N} = m \cdot [a\hat{u}_z - (-g\hat{u}_z)]$$

CIOE' $\vec{N} = m(a+g)\hat{u}_z$ (PROIEZIONE DELLA RELAZ. SULL'ASSE z)

$$N > mg \quad (\text{SENSO DI "PESANTEZZA"})$$

(2) ACCELERAZIONE VERSO IL BASSO $(\vec{a} = -a\hat{u}_z)$

$$\vec{N} = m[-a\hat{u}_z - (-g\hat{u}_z)] = m(g-a)\hat{u}_z$$

$$N < mg \quad (\text{SENSO DI "LEGGEREZZA"})$$

(3) ENTRAMBI GLI OGGETTI IN CADUTA LIBERA

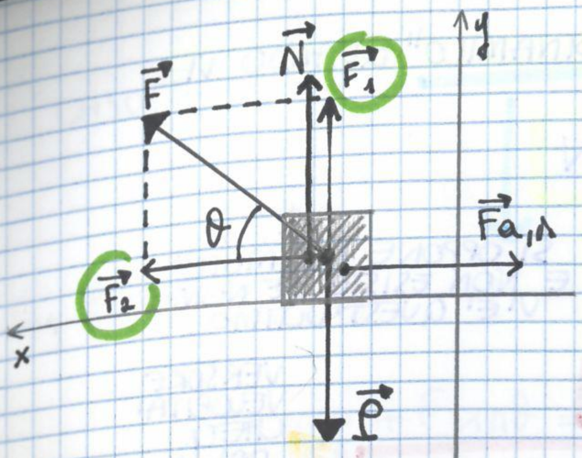
$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow N = 0$$

(4) ENTRAMBI IN CADUTA LIBERA + SPINTA INIZIALE

$$\vec{a} > \vec{g} \Rightarrow \cancel{N < 0} \rightarrow$$ CASO DA RIGETTARE: UNA REAZ. VINCOLARE NON HA SENSO ATTRATTIVA.

$\underbrace{\text{QUINDI } N<0 \text{ SIGNIFICA SOLO CHE VI E' IL DISTACCO DEI DUE OGGETTI}}$

"N" INDICA CHE RAPPORTO (DISTANZA) C'E' TRA DUE OGGETTI CONSIDERATI



REAZIONE VINCOLARE : $\vec{R_V} = \vec{N} + \vec{F_{a,s}}$

RISULTANTE : $\vec{R} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R_V} = 0$

$\boxed{\vec{F_2} \text{ ED } \vec{F_1} \text{ SONO LE COMPONENTI DI } \vec{F}}$

$$\begin{cases} x: & F_2 + \boxed{F_{a,s}} \\ y: & N - P + F_1 = 0 \end{cases}$$

→ A SECONDA DEL SEGNO DELL'EQ. SO COME E' ORIENTATA

PERCIO' OTTERREMO :

$$\begin{cases} x: & F_{a,s} = -F_2 = \boxed{-F\cos\theta} \\ y: & N = P - F_1 = \boxed{P - F\sin\theta} \end{cases}$$

<0 PERCIO' DIVERRATTI VERSO LE x CRESCENTI

LA CONDIZIONE EFFETTIVA DI APPOGGIO

$\boxed{N > 0}$ PERCHE' N E' LA FORZA PREMENTE TRA LE 2 SUPERFICI

$\Downarrow$

$\boxed{P > \boxed{F\sin\theta}}$ → COMPONENTE VERTICALE

→ SOLO IN TAL MODO L'OGGETTO PESA SUL TAVOLO

QUINDI IL SISTEMA E' IN QUIETE QUANDO $F_2 \leq \mu_s N$.
ESSENDO POI :

$$\{N = P - F\sin\theta \text{ E } F_2 = F\cos\theta\} \Rightarrow F\cos\theta \leq \mu_s (\underbrace{P - F\sin\theta})$$

QUINDI : $F(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) \leq \mu_s \boxed{P}$

ED IN DEFINITIVA : $\boxed{F \leq \dfrac{\mu_s \boxed{mg}}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}}$ (CON $P = mg$)

VALORE LIMITE DEL MODULO DELLA FORZA F, FINCHE' ESSA E' AL DI SOTTO DI TALE VALORE L'OGGETTO RIMANE FERMO.

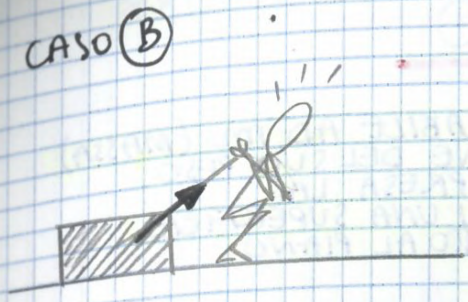
ESSENDOCI POI, LE FUNZIONI SIN E COS VI E', OVVIAMENTE, UNA DIPENDENZA DALL'ANGOLO.

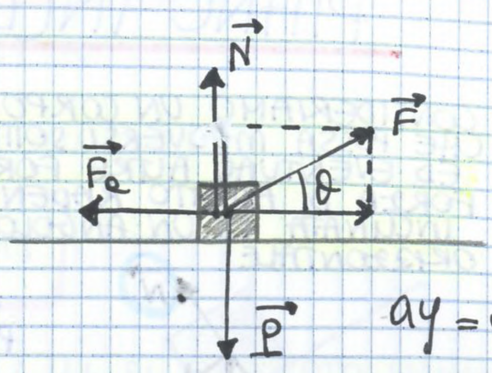
SE $\theta = 0 \Longrightarrow F \leq \mu_s mg$

$\boxed{\vec{F_{a,s}} = -\vec{F_2}}$ (FINCHE' $F_2 \leq \mu_s N$)

FINCHE' NON VIENE SUPERATA LA CONDIZIONE DI ATTRITO STATICO LA FORZA DI ATTRITO STATICO E' SEMPRE UGUALE E CONTRARIA ALLA COMPONENTE PARALLELA AL PIANO, DELLA FORZA $\vec{F}$ ($\vec{F_2}$)

CASO (B)





$a_y = 0$

$N - mg + F\sin\theta = 0$

$N = mg - F\sin\theta = 2.3\,N$

$\mu_s N = 1.2\,N \implies F\cos\theta\,(=10N) > \mu_s N\,(=1.2N)$

SAPPIAMO CHE' C'E MOTO $(a \neq 0)$: PERCIO' V'E' ACCELERAZIONE CHE VALE:

$\mu_d N = 0.7\,N \qquad a = \dfrac{F\cos\theta - \mu_d N}{m} = 4.7\,ms^{-2}$

QUINDI IL MODULO DELLA REAZ. VINCOLARE E'

$R = \sqrt{2.3^2 + 0.7^2} = 2.4\,N$

QUINDI SE VOGLIAMO SPOSTARE UNA CASSA NON CONVIENE SPINGERLA (CASO A) MA TIRAR'LA (CASO B)

A PARITA' DI PARAMETRI, FA DIFFERENZA L'ANGOLO CON CUI SI APPLICA UN'A FORZA.

PERCIO' IL MOTO NON SI AVRA' FINCHE':

$$mg\sin\theta < \mu_s N \qquad (N = mg\cos\theta)$$

$$\cancel{mg}\sin\theta < \mu_s \cancel{mg}\cos\theta$$

$$\boxed{tg\theta \leq \mu_s}$$

SE, AL CONTRARIO $tg\theta > \mu_s$ SI HA MOTO LUNGO X

PROIEZIONE DELLA LEGGE DI NEWTON $\boxed{\sum_i F_{xi} = ma_x}$

QUINDI: $mg\sin\theta - \mu_d N = ma$

$$\cancel{m}g\sin\theta - \mu_d \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}a$$

PERCIO' $a = (\sin\theta - \mu_d\cos\theta)g$

SI HA MOTO FINCHE' $a \geq 0$ OSSIA:

$$\sin\theta - \mu_d\cos\theta \geq 0 \qquad \boxed{tg\theta \geq \mu_d}$$

SE OTTENIAMO L'UGUAGLIANZA, OSSIA:

$$tg\theta = \mu_d$$

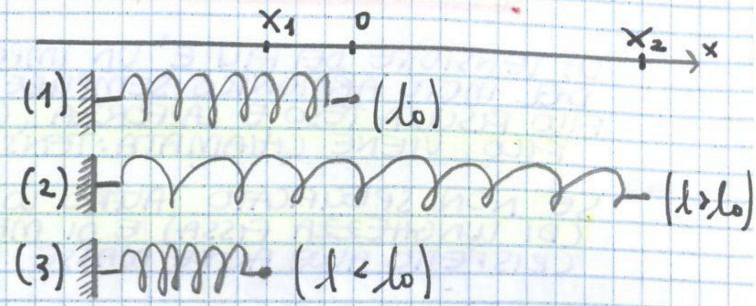
$$\Downarrow$$

$$a = 0$$

VUOL DIRE CHE L'OGGETTO SI MUOVE CON V COST.

UNA FORZA ELASTICA VIENE PRATICAMENTE APPLICATA TRAMITE UNA MOLLA

(1) QUESTA IN GENERE PRESENTA UNA LUNGHEZZA A RIPOSO, CIOE' QUANDO SI TROVA IN UNA CONDIZIONE NORMALE, NE' DI ESTENSIONE, NE' DI COMPRESSIONE, DI VALORE FINITO l_0



(2) SE LA MOLLA VIENE ESTESA ESSA POSSIEDE UNA FORZA CHE TENDE A RIPORTARLA NELLA CONDIZIONE DI RIPOSO : $F = -K(l - l_0) = -Kx$

DOVE "x", MAGGIORE DI "0", E' LA DEFORMAZIONE

(3) SE LA MOLLA VIENE COMPRESSA ESSA POSSIEDE LA STESSA FORZA : $F = -K(-(l - l_0)) = Kx$

E LA "x" QUINDI SARA' MINORE DI "0"

IN OGNI CASO PERCIO' SCRIVIAMO LA FORZA, COME GIA' DETTO:

$$F = -Kx\, u_x$$

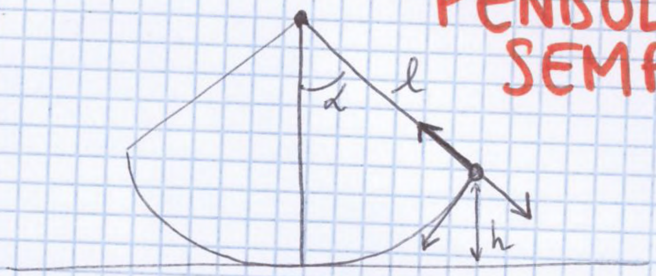
{ IL MODULO DI QUESTA FORZA E' PROP. ALLA DEFORMAZIONE FINCHE' NON SI SUPERA IL LIMITE DI ELASTICITA'

PERCIO' LA FORZA ELASTICA E' LA REAZIONE DELLA MOLLA ALLA FORZA CHE LO DEFORMA

$\boxed{\begin{array}{l} X > 0 \text{ ESTENSIONE} \\ X < 0 \text{ COMPRESSIONE} \end{array}}$

DUE MOLLE IN PARALLELO RISULTANO ESSERE EQUIVALENTI AD UNA UNICA MOLLA CON COST = SOMMA DELLE LORO COSTANTI ELASTICHE

PENDOLO SEMPLICE



$$mgl(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}}$$ PENDOLO RIGIDO

$$\cancel{m}g = \cancel{m}\omega^2 l \qquad \alpha \simeq 0$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

LA VEL. IN TAL CASO SARÀ MAX SULLA VERTICALE:

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega \cdot L\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

QUANDO UN CORPO SI MUOVE ALL'INTERNO DI UN FLUIDO

LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO, IN CERTE CONDIZIONI SI PUÒ ESPRIMERE COME PROPORZIONALE ALLA VEL.

"b" È IL COEFF. DI PROPORZIONALITÀ TRA Fav E v E DIPENDE DA DUE FATTORI

$$\boxed{\vec{F}_{av} = -b\vec{v}} \qquad \boxed{F_v = 6\pi\eta R v}$$

È SEMPRE CONTRARIA AL MOTO COME OGNI TIPO D'ATTRITO, E L'ACCELERAZIONE CHE NE CONSEGUE, SECONDO LA LEGGE DI NEWTON È:

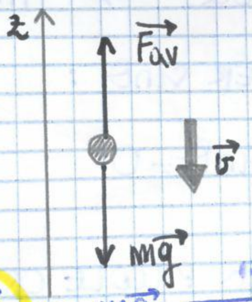
$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_{av}}{m} = -\frac{b}{m}\vec{v}}$$

AL CONTRARIO DELL'ATTRITO RADENTE QUI NON SI PUÒ ARRIVARE AD UN ATTRITO STATICO IN QUANTO ESSENDO LA FORZA PROP. ALLA VEL. SE LA VEL È NULLA, ANCHE F È NULLA.

UNO DEI CASI CHE, AD ESEMPIO, SI PUÒ TRATTARE È QUELLO DI UN OGGETTO, IN MOTO, NELL'ARIA (FLUIDO) PER BASSE VEL.

INIZIAMO, INFATTI, CON LO STUDIARE IL MOTO DI UN GRAVE IN UN FLUIDO:

IN OGNI CASO COMUNQUE, DISTINGUEREMO IL MOTO NEL DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO, CON TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL CORPO



TRADUCIAMO SEMPRE LA LEGGE DI NEWTON

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_{av} = m\vec{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a} \Longrightarrow -m\vec{g} + b\vec{v} = -m\vec{a}$$

RIVOLTI AL CONTRARIO DI Z

SAPENDO CHE $b = mK$ (LEGHIAMO LA MASSA AD UNA COST.)

$$\Downarrow$$

$$-mg + mKv = -ma \Longrightarrow \boxed{g - Kv = a}$$

RICORDANDO, INOLTRE, CHE:

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = g - Kv}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k'}} \tanh\left(\sqrt{\frac{k'g}{m}}\, t\right)$$

$$v_{lim} = v(t \to \infty) = \sqrt{\frac{mg}{k'}} = \boxed{\sqrt{\frac{2mg}{c s \rho}}}$$

- C → COEFF. DI RESISTENZA AEREODINAMICA
- s → SUPERF. DEL CORPO $\perp$ ALLA DIREZ. DEL MOTO
- ρ → DENSITA' DEL FLUIDO

FORZA CENTRIPETA

SEMPRE DIRETTA VERSO IL CENTRO DI CURVATURA

NON REALMENTE FORZA

ES: LA FORZA CHE L'ASFALTO ESERCITA SULLA MACCHINA

FORZA DI ATTRITO RADENTE STATICO

(ANCHE SE LA MACCHINA E' IN MOVIMENTO)

⇓

CIOE' L'ADERENZA TRA L'OGGETTO ED IL PIANO

$\neq$

ATTRITO DINAMICO OSSIA 2 SUPERFICI CHE SLITTANO UNA SULL'ALTRA

⇓

E' INFATTI L'ATTRITO STATICO CHE GENERA LA FORZA CENTRIPETA

INOLTRE ESSA NON HA UN VALORE PREFISSATO E QUINDI CRESCE AL CRESCERE DELLA VEL.

E VI E' UNA VEL. LIMITE IN QUANTO L'ATTRITO STATICO HA UN VALORE LIMITE

⇓

VEL. LIMITE : $F_N = F_{a,s(MAX)} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot mg$

RICORDANDO, INOLTRE CHE L'ACC. VA COME $\frac{v^2}{R}$ $\Rightarrow$ $F_N = m\frac{v^2}{R}$

TRATTAZIONE ENERGETICA DELLA DINAMICA

SE LA FORZA ESPRIME L'INTERAZIONE TRA IL CORPO E L'AMBIENTE CIRCOSTANTE IMMAGINIAMO, ORA DI DISEGNARE UNA TRAIETTORIA TRA A E B DOVE ABBIAMO IL NOSTRO PUNTO MATERIALE CHE SI MUOVE CON UNA TRAIETTORIA.
CONSIDERANDO, POI, UN CERTO PUNTO, TRACCIAMO IL VETTORE $d\vec{s}$ (INCREMENTO INFINITESIMO DELLA COORDINATA CURVILINEA $\vec{s}$) CHE CI FA PASSARE DA A A B LUNGO LA TRAIETTORIA.
D'ALTRA PARTE QUEL DATO PUNTO E' SOGGETTO AD UNA FORZA $\vec{F}$ (DIFFERENTE, OPPURE NO, IN BASE AL PUNTO IN CUI VIENE APPLICATA)
PER DEFINIRE CIO' INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI LAVORO

1) IL LAVORO ELEMENTARE E' OTTENUTO TRA LA FORZA F E LO SPOSTAMENTO ds

LAVORO ELEMENTARE (INFINITESIMO) → $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

UN PUNTO E' QUINDI SOGGETTO AD UNA FORZA F E SUBISCE UNO SPOSTAMENTO $d\vec{s}$

DOVE $d\vec{s} = ds\,\hat{u}_T$

2) LAVORO (SPOSTAMENTO MACROSCOPICO) → $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$

SOMMA ALGEBRICA DI TUTTI I LAVORI ELEMENTARI

IL LAVORO, DI FATTO, E' L'INTEGRALE DI LINEA DELLA FORZA

→ $$W_{AB} = \int_A^B \boxed{F\,ds}\,\boxed{\cos\theta}$$

PROIEZIONE TANGENZIALE DI F

→ $$W_{AB} = \int_A^B \boxed{F_T}\,ds$$

COMPONENTE TANGENZIALE DELLA FORZA

[θ OVVIAMENTE A SECONDA DEL VALORE DELL'ANGOLO POSSIAMO AVERE UN RISULTATO POSITIVO, NEGATIVO O NULLO.]

DISTINGUIAMO 3 CASI PRINCIPALI DEL VALORE DI θ:

CASI IN CUI IL LAVORO PUO' ESSERE NULLO

(1) CI SONO DELLE FORZE MA NON C'E' SPOSTAMENTO

$$\boxed{d\vec{s} = 0}$$

(2) C'E' SPOSTAMENTO MA LA FORZA E' PURAMENTE CENTRIPETA

(3) C'E' EQ. STATICO MA NON DINAMICO: LA RISULTANTE DELLE FORZE E' NULLA

$$\boxed{\text{LAVORO RESISTENTE} = -\text{LAVORO MOTORE}}$$

UN'ALTRA GRANDEZZA, ORA, DA DEFINIRE E' LA **POTENZA**

(DEF. TEMPORALE DEL LAVORO) OSSIA IL LAVORO PER UNITA' DI TEMPO

POTENZA → $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$ ESSA INDICA CON CHE RAPIDITA' IL LAVORO VIENE FORNITO O GENERATO

ESSENDO, POI, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ AVREMO:

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}$$

ED INOLTRE $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$ PERCIO':

POTENZA ISTANTANEA $\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} = F_T v$ PRODOTTO SCALARE TRA LA FORZA E LA VELOCITA'

IN GENERALE VARIABILE DURANTE IL MOTO
ESPLICA LA RAPIDITA' DI EROGAZIONE DI ESSO

QUINDI, ESSENDOCI UNA POTENZA ISTANTANEA POTREMO ANCHE DEFINIRE UNA POTENZA MEDIA

$$\boxed{P = \frac{W_{AB}}{\Delta t_{AB}}}$$

OSSIA IL LAVORO TOTALE DIVISO PER IL TEMPO DURANTE CUI ESSO E' STATO SVOLTO.

A PARITA' DI LAVORO SVOLTO HA UNA MAGGIORE POTENZA LA MACCHINA CHE LO EROGA IN MINOR TEMPO.

LAVORO

$\boxed{W_{AB} = \Delta E_k}$

E' UNA RELAZIONE, VALIDA IN GENERALE, FRUTTO DELL' INTEGRALE DI LINEA CHE CORRE SU TUTTA LA TRAIETTORIA SEBBENE L'EFFETTO RIGUARDA SOLO IL PUNTO INIZIALE E FINALE INDIPENDENTEMENTE DALLA TRAIETTORIA_

ANCHE QUI POSSO AVERE DIVERSI EFFETTI A SECONDA DEL TIPO DI LAVORO APPLICATO:

- $\boxed{W > 0} \Longrightarrow \underbrace{E_{kB} > E_{kA}}$ (LAVORO MOTORE)

  EFFETTO NETTO DELLA ACC_ IN DIREZ_ DELLA VEL_

  INCREMENTO DI ENERGIA CINETICA $\rightarrow \Delta E_k > 0$

- $\boxed{W < 0} \Longrightarrow \underbrace{E_{kB} < E_{kA}}$ (LAVORO RESISTENTE)

  DIMINUIZIONE DELLA ENERGIA CINETICA (DOVUTA ALLA DIMINUIZIONE DELLA VELOCITA') $\rightarrow \Delta E_k < 0$

- $\boxed{W = 0} \Longrightarrow \underbrace{E_{kA} = E_{kB}}_{E_k = \text{COST}}$ (LAVORO NULLO)

ORA COMPRENDIAMO A PIENO IL PERCHE' UNA FORZA CENTRIPETA GENERA UN LAVORO NULLO, IN QUANTO ESSA NON PRODUCE ENERGIA CINETICA_

UNITA' DI MISURA

(NEL SISTEMA INTERNAZIONALE)

$W \rightarrow \underbrace{[M L T^{-2}]}_{F} \cdot \underbrace{[L]}_{s}$

$\rightarrow [M L^2 T^{-2}]$ $\rightarrow$ EQ_ DIMENSIONALI

$\rightarrow N \cdot m = \boxed{J \text{ (JOULE)}}$

DIMENSIONALMENTE W ED E_k SONO UGUALI, E PERCIO' AVRANNO LA STESSA UNITA' DI MISURA

$P \rightarrow J \cdot s^{-1} = \boxed{W \text{ (WATT)}}$

SPESSO CALCOLATI IN:

KILOWATTORA

$1 \, KWh = 1 \cdot 10^3 (W) \, 3600 \, (s) = 3{,}6 \cdot 10^6 (J)$

QUINDI IL LAVORO NELLA FORZA PESO → $\boxed{W = -mg(z_B - z_A)}$

CERCHIAMO, ORA, DI PASSARE ALL'ENERGIA:

$$W = -(\boxed{mgz_B} - \boxed{mgz_A})$$

$$W = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = -\Delta E_p$$

$\boxed{W = -\Delta E_p}$ → VIENE COSÌ INTRODOTTA UNA NUOVA ENERGIA: ENERGIA POTENZIALE → OSSIA IL LAVORO SCRITTO COME DIFF. DEI VALORI CHE LA FUNZ. ASSUME AI DUE ESTREMI

SE L'ENERGIA CINETICA (E_K) E' LEGATA AL MOVIMENTO, L'ENERGIA POTENZIALE E' LEGATA AL TIPO DI FORZA E VARIA AL VARIARE DI QUESTA.

AVENDO, IN QUESTO CASO, UNA FORZA PESO, LA NOSTRA ENERGIA POTENZIALE (E_p) SARA' TALE DA ESSERE CONSIDERATA IN MODO CHE IL LAVORO SIA UGUALE ALL'OPPOSTO DELLA SUA VARIAZIONE.

MA NON TUTTE LE FORZE AMMETTONO CIO', INFATTI QUESTA ESPRESSIONE VIENE LIMITATA A QUELLE FORZE DETTE: FORZE CONSERVATIVE (COME TUTTE LE FORZE COSTANTI)

QUELLE CHE NON POTRANNO → FORZE NON CONSERVATIVE

COMUNQUE, ANCHE L'E_p, COME L'E_K, E' DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE

$$E_p = mgz + c$$

SOMMANDO LE COST. NELLA ΔE_p ESSE SI ELIDONO. LA USEREMO ARBITRARIAMENTE

(2) LAVORO NELLA FORZA ELASTICA

$$W = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s}$$ ESSENDO $\vec{F}_{el} = -Kx\,\hat{u}_x$ AVREMO:

$$W = \int_A^B (-Kx\,\hat{u}_x) \cdot d\vec{s}$$ MA $\boxed{d\vec{s} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z}$

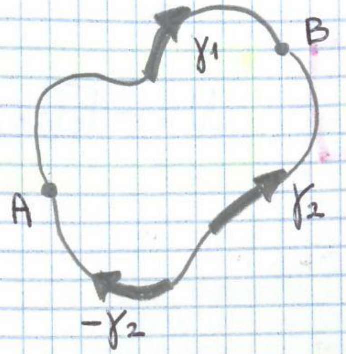
QUINDI: $W = \int_A^B (-Kx\,\hat{u}_x) \cdot \boxed{dx\,\hat{u}_x}$ → L'UNICO CHE RIMANE, IN QUANTO MOLTIPLICANDOSI CON u_y ED u_z SI ANNULLANO (PERCHE' ⊥)

$$W = -K\int_A^B x\,dx = -K\left[\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2}\right] = -\left[\frac{1}{2}Kx_B^2 - \frac{1}{2}Kx_A^2\right] =$$

$$= -(E_{p_B} - E_{p_A}) = -\Delta E_p \rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + \text{COST(ADDITIVA)}}$$

FORZE CONSERVATIVE E NON

IN QUESTO TIPO DI FORZE, PERCORRERE UNA TRAIETTORIA DA "A" A "B" OPPURE DA "B" AD "A" COMPORTA UN CAMBIAMENTO DEL SEGNO, MA NON DEL MODULO.



$$\boxed{\int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F}\,d\vec{s} = \int_{A\,\gamma_2}^{B} \vec{F}\,d\vec{s}}$$

INDIPENDENZA DALLA TRAIETTORIA.

$$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{s} = -\int_B^A \vec{F}\,d\vec{s}$$

SE VOGLIAMO, PERO', IL LAVORO CALCOLATO SUL CIRCUITO CHIUSO:

$$\boxed{\oint \vec{F}\,d\vec{s}}$$ INTEGRALE DI LINEA SU DI UN PERCORSO CHIUSO.

$$\oint \vec{F}\,d\vec{s} = \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F}\,d\vec{s} + \int_{B\,-\gamma_2}^{A} \vec{F}\,d\vec{s} =$$

$$= \int_{A\,\gamma_1}^{B} \vec{F}\,d\vec{s} - \int_{A\,\gamma_2}^{B} \vec{F}\,d\vec{s} = 0$$

QUINDI, IN UNA FORZA CONSERVATIVA IL LAVORO, IN UN PERCORSO CHIUSO, E' NULLO $\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F}\,d\vec{s} = 0}$

QUINDI PER LE FORZE CONSERVATIVE SI PUO' SCRIVERE UNA LEGGE DI CONSERVAZIONE:

SE PER TUTTE LE FORZE: $\boxed{W = \Delta E_K}$

PER LE FORZE CONSERVATIVE $\Rightarrow \boxed{W = -\Delta E_p}$

QUINDI EGUAGLIANDOLE: $\Delta E_K = -\Delta E_p \rightarrow E_{KB} - E_{KA} = -(E_{pB} - E_{pA})$

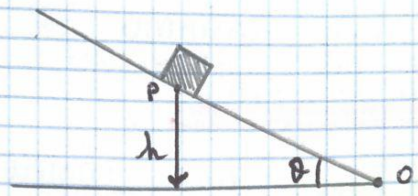
SOMMA DI $E_K + E_p$ DI B = SOMMA DI $E_K + E_p$ DI A $\Rightarrow \boxed{E_{KB} + E_{pB} = E_{KA} + E_{pA}}$

$E_K + E_p = E_M$ → ENERGIA MECCANICA

$$\boxed{E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow \boxed{E_m = \text{cost}}}$$

LEGGE DI CONSERVAZ. DELL'ENERG. MECCANICA

3) SE INVECE CI TROVIAMO IN UN PIANO INCLINATO SCABRO: (NON CONSERVAZIONE ENERGIA)



IL LAVORO DELLA FORZA D'ATTRITO LUNGO PO E'

$$W_{NC} = W_{ATT.} = -\mu d N \overline{PO} =$$

$$= -\mu d m g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

SAPENDO CHE PER LE FORZE NON CONSERVATIVE:

$$\boxed{W_{NC} = \Delta E_m}$$

$$-\mu d \cancel{m} g \frac{\cos\theta}{\sin\theta} h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 + (-\cancel{m} g h)$$

$$v_0^2 = 2gh\left(1 - \mu d \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

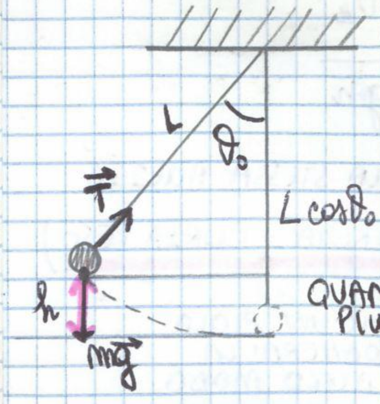
$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh \boxed{\left(1 - \frac{\mu d}{\operatorname{tg}\theta}\right)}}}$$

FATTORE AGGIUNTIVO ASSENTE NEL CASO DI FORZE' CONSERVATIVE

QUINDI, A PARITA' DI LUNGHEZZA DI PERCORSO C'E' UNA DIPENDENZA DALL'ANGOLO

4) CONSIDERIAMO UN PENDOLO SEMPLICE DI LUNGHEZZA L

$\boxed{\text{TROVANDOCI IN UN CASO DI FORZE CONSERVATIVE} \longrightarrow \text{LAVORO NULLO}}$



$$E_{p\,\theta_0} = mg(L - L\cos\theta_0) \;;\; E_K\,\theta_0 = 0$$

$$E_p = mgL(1-\cos\theta) \;;\; E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$mgL(1-\cos\theta_0) = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} m v^2$$

QUANDO LA MASSA E' NEL PUNTO PIU' BASSO L'Ep E' ZERO

$$v^2 = 2gL(\cancel{1} - \cos\theta_0 - \cancel{1} + \cos\theta)$$

VEL IN FUNZIONE DI UN QUALSIASI θ GENERICO ← $\boxed{v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

$$[\text{PER } \theta = 0] \Rightarrow v(\theta=0) = \sqrt{2g\boxed{L(1-\cos\theta_0)}} \rightarrow h$$

RISCRIVENDO LE TRE RELAZIONI, A SISTEMA:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{F} = -\nabla E_p}$$

GRADIENTE (∇)

NEL CALCOLO DIFFERENZIALE VETTORIALE, IL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE A VALORI REALI E' UNA FUNZIONE VETTORIALE. ESSO E' UN VETTORE CHE HA COME COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI DI TALE FUNZIONE. E' DENOTATO COME:

$$GRAD(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{u}_z$$

[DOVE IL SIMBOLO "∇" E' DETTO NABLA ("DEL") E NON HA UN SIGNIFICATO DI PER SE' MA NE ASSUME UNO QUANDO OPERA SU UN QUALCOSA.]

ECCO, QUINDI, SPIEGATO PERCHE': $\boxed{\vec{F} = -\nabla E_p}$

ESSA E' UNA EQ. VALIDA PER QUALSIASI SISTEMA DI RIFERIMENTO ED INDICA UNA RELAZIONE TRA FORZA ED ENERGIA POTENZIALE

INTRODOTTO IL "GRADIENTE" POSSIAMO CONSIDERARE ANCHE UN'ALTRA QUANTITA', OSSIA:

LA DIVERGENZA DI UN VETT.

$$\boxed{div(A) = \nabla \cdot \vec{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

MENTRE IL ROTORE DI UN VETT.

$$\boxed{rot(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A}}$$

- L'E_p NEL CASO DELLA "FORZA PESO" $\vec{P}$

$$\boxed{E_p = mgz} + \cancel{COST} \quad \text{INFATTI } \vec{P} = -\frac{dE_p}{d} u_z = -mg u_z$$

- L'E_p NELLA "FORZA ELASTICA" $\vec{F}_{el}$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k x^2} \quad \text{INFATTI } \vec{F}_{el} = -\frac{dE_p}{dx} u_x = -kx u_x$$

LIMITAZIONI DEL MOTO E GRAFICI DELL'E_p

NELL'AMBITO DELLE FORZE CONSERVATIVE POSSIAMO SCRIVERE:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p = COST$$

QUINDI:

$$\boxed{v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_p)}}$$

QUINDI, PER UN DATO VALORE DI E_m IL MOTO E' LIMITATO IN QUANTO, DOVENDO ESSERE LA RADICE POSITIVA, :

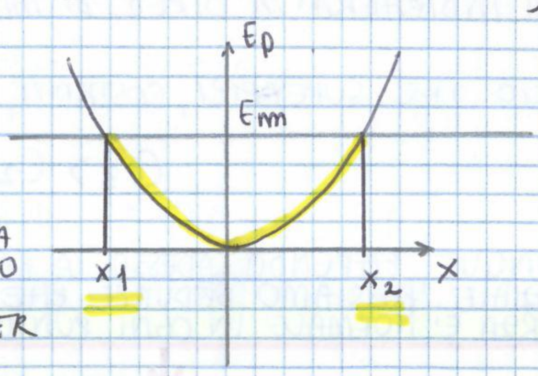
$\boxed{E_m \geq E_p}$ IN MODO CHE v ASSUMA VALORI REALI.

ESEMPIO 1

CONSIDERIAMO LA FORZA ELASTICA (UNIDIMENSIONALE)

$$\vec{F} = -kx\hat{u}_x$$

$$\vec{E_p} = \frac{1}{2} k x^2$$



IO DO' UNA CERTA ENERGIA E_m AL SISTEMA DEFINENDO DUE VAL. DI X E SO CHE IL MOTO SARA' VALIDO SOLO PER I VAL. DI X T.C.

$$\boxed{x_1 \leq x \leq x_2}$$

REGIONE IN CUI IL MOTO E' LIMITATO

5) $E_m = E_{m,5} \Longrightarrow$ IL MOTO E' SOLO LIMITATO SUP_ OSSIA, PUO' ESPLORARE LA REGIONE T.C. :

$$\boxed{x \leq x_{10}}$$

6) $E_m = E_{m,6} \Longrightarrow$ IL MOTO NON E' LIMITATO ED IL PUNTO MATERIALE PUO' ASSUMERE QUALSIASI x

MOMENTO DI UN VETTORE

IL MOMENTO DI UN VETTORE DIPENDE DA UN PUNTO SU DI ESSO CHIAMATO "POLO" E DAL VETT_ STESSO_

$$\boxed{\vec{M_o} = \vec{r} \times \vec{A}}$$

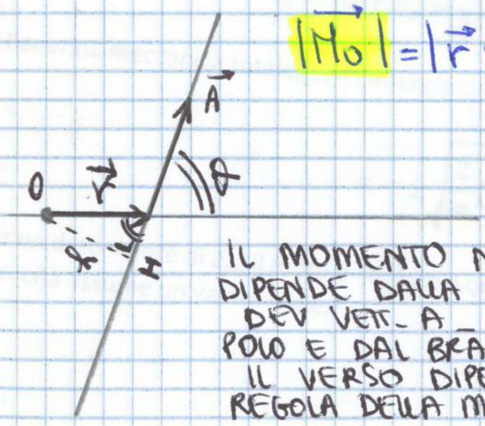
r ED A INDICANO UN PIANO ED IL LORO PRODOTTO VETT_ INDICA UN TERZO VETT_ $\perp$ A TALE PIANO_

$$|\vec{M_o}| = |\vec{r} \times \vec{A}| = rA\sin\theta = \boxed{hA}$$

DOVE h E' LA DISTANZA TRA IL POLO O E LA DIREZ_ INDIVIDUATA DA A_

h, OSSIA, IL BRACCIO DEL VETT_

$$\boxed{h = r\sin\theta}$$



IL MOMENTO NON DIPENDE DALLA DIREZ_ DEV VETT_ A_ MA DAL POLO E DAL BRACCIO_
IL VERSO DIPENDE DALLA REGOLA DELLA MANO DX

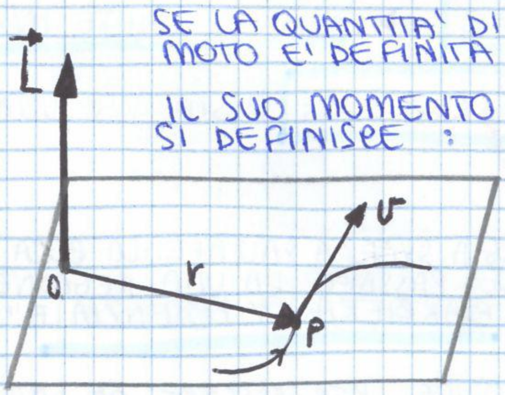
PARTICOLARI MOMENTI

(1) MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO = MOMENTO ANGOLARE

SE LA QUANTITA' DI MOTO E' DEFINITA : $\vec{P} = m\vec{v}$

IL SUO MOMENTO, DETTO ALTRESI' "MOMENTO ANGOLARE" SI DEFINISCE :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



$\vec{L}$ E' UN VETT_ ORTOGONALE AL PIANO $\vec{r}$ E $\vec{v}$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

DEL SINGOLO PUNTO MATERIALE E POLO FISSO

SCEGLIAMO UN POLO "O" E LO TENIAMO FISSO ($v=0$)
SE CALCOLIAMO LA VARIAZIONE NEL TEMPO DEL MOMENTO ANGOLARE DI UN PUNTO MATERIALE P IN MOVIMENTO, OPEREREMO MATEMATICAMENTE, FACENDONE LA DERIVATA:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \boxed{\vec{r}} \times \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} m}$$

CON "r" INDICHIAMO IL RAGGIO VETT. CHE VA DA P AD O

SUPPOSTO IL POLO "O" FERMO:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = 0 \quad ((\text{VEL.}) \times (\text{VEL.}))$$

INOLTRE:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

QUINDI:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \boxed{\boxed{\vec{r}} \times \boxed{\vec{F}}} = \vec{M}$$

IN DEFINITIVA, POTREMO SCRIVERE:

TEOREMA DEL MOM. ANGOLARE PER UN PUNTO MATERIALE

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

OSSIA, CHE LA DERIVATA DEL MOM. ANGOLARE E' = AL MOM. DELLA FORZA. SE ENTRAMBI I MOMENTI SONO RIFERITI ALLO STESSO POLO FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

RIPROPOSIZIONE DELLA LEGGE DI NEWTON

DA' LUOGO AD UNA **LEGGE DI CONSERVAZIONE DEL MOM. ANGOLARE**

$$\text{SE } \vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{COST}$$

["IL MOM. ANGOLARE DI UN PUNTO MATERIALE RIMANE COSTANTE NEL TEMPO (SI CONSERVA) SE IL MOM. DELLE FORZE E' NULLO"]

POSSIAMO, POI, RISCRIVERE LA RELAZIONE DEL TEO. DEL MOM. ANGOLARE, IN FORMA INTEGRALE:

$$\vec{M}\,dt = d\vec{L} \longrightarrow \int_0^t \vec{M}\,dt = \int_{\vec{L}_{in}}^{\vec{L}_{fin}} d\vec{L} = \vec{L}_{fin} - \vec{L}_{in}$$

FORZE CENTRALI

SI DEFINISCONO FORZE CENTRALI QUELLE FORZE (PUR NON ESSENDO REALMENTE TALI) CHE AGISCONO IN UNA CERTA REGIONE DELLO SPAZIO CON LE SEGUENTI PROPRIETA':

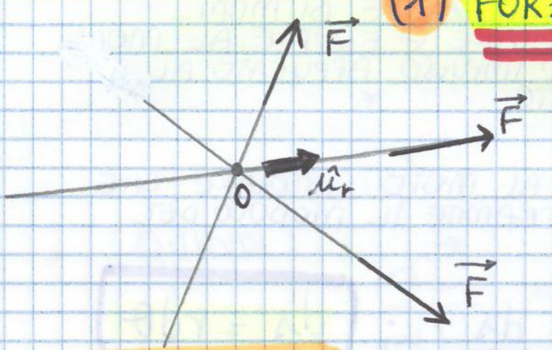
IN QUALSIASI PUNTO LA SUA DIREZIONE PASSA SEMPRE PER UN PUNTO FISSO, DETTO CENTRO DELLA FORZA, E IL MODULO E' FUNZIONE SOLTANTO DELLA DISTANZA DAL CENTRO STESSO.

$\hat{u}_r$ E' IL VERSORE CHE PUNTA DA "O" A "P" $\Rightarrow$ $OP = r$

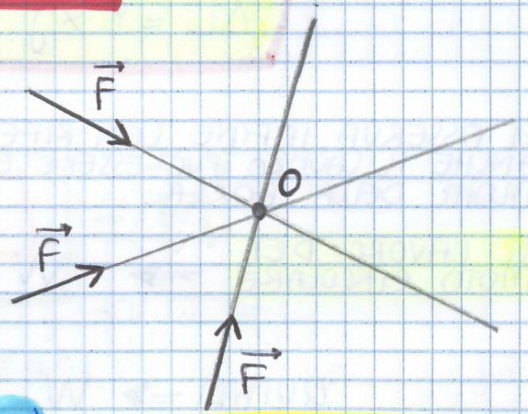
IN GENERALE:
$$\vec{F} = F(r)\,\hat{u}_r$$

ABBIAMO **DUE TIPI DI FORZE CENTRALI**

(1) **FORZE REPULSIVE**



$$F(r) > 0$$



(2) **FORZE ATTRATTIVE**

$$F(r) < 0$$

LA PRESENZA DI UNA FORZA CHE AGISCE IN UNA DET. REGIONE DI SPAZIO, COSTITUISCE UNA MODIFICA PER ESSO E STABILISCE QUELLO CHE SI CHIAMA: **CAMPO DI FORZA**

(TALE MODIFICA E' DOVUTA A QUALCHE CAUSA COME LE INTERAZIONI A DISTANZA)

IN UN CAMPO DI FORZE CENTRALI ABBIAMO SEMPRE CHE:

$$\boxed{\vec{r} \parallel \vec{F}} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = 0}$$

"IN UN CAMPO DI FORZE CENTRALI IL MOM. DELLA FORZA RISPETTO AL CENTRO E' OVUNQUE NULLO"

CIO' IMPLICA CHE:
$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = cost}$$

"NEL CAMPO DI FORZE CENTRALI E' COSTANTE IL MOM. ANGOLARE"

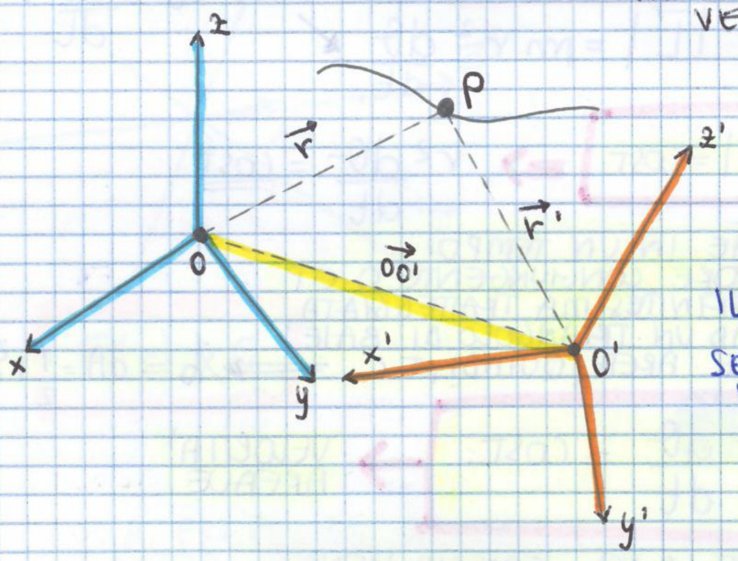
MOTI RELATIVI...

LO SPAZIO IN GENERALE, VIENE DEFINITO COME OMOGENEO (UGUALE IN TUTTI I PUNTI) E ISOTROPO (UGUALE IN TUTTE LE DIREZIONI)

MA PER I SISTEMI DI RIFERIMENTO IN MOTO NON ESISTE PIU' L'INVARIANZA DELLE LEGGI FISICHE IN QUANTO DUE OSSERVATORI, UNO IN MOTO RISPETTO ALL'ALTRO POSSONO SPERIMENTALMENTE OSSERVARE 2 LEGGI FISICHE DIVERSE. ADDIRITTURA IN CERTI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON VALE LA 1ª LEGGE DI NEWTON, PRINCIPIO DI INERZIA.

AMMETTIAMO, AD ESEMPIO, DI AVERE DUE TERNE DI ASSI ORTOGONALI IN CUI LA 2ª RUOTA E TRASLA RISPETTO LA 1ª.
PER CONVENZIONE CONSIDEREREMO LA 1ª TERNA COME IL SISTEMA FISSO E LA 2ª COME IL SISTEMA MOBILE, IN MOTO.

AVREMO, QUINDI, DUE RAGGI VETT. A SECONDA DELL'OSSERVATORE



RELAZIONE TRA I DUE RAGGI VETT. DEI DUE S.R.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'}$$

IL PUNTO MATERIALE (P) DI CUI DESCRIVIAMO IL MOTO E' SEMPRE LO STESSO MA DESCRITTO DA DUE PUNTI DI OSSERVAZIONE DIFFERENTI

DALLA RELAZ. FRA I DUE RAGGI POSSIAMO OTTENERE LA VEL. INNANZI DOBBIAMO, PERO' SCOMPORRE OGNI VETT. IN COMPONENTI:

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$

$$\vec{r}' = x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}$$

$$\vec{OO'} = x_{o'}\hat{u}_x + y_{o'}\hat{u}_y + z_{o'}\hat{u}_z$$ → RAGGIO VETT. RISPETTO AL SISTEMA FISSO, NEL PUNTO O'

AVENDO TALI COMPONENTI POSSIAMO CALCOLARE LA VEL. DI P RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO

↓

VELOCITA' ASSOLUTA: $$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z}$$

MOTI

IN DEFINITIVA AVREMO:

$$\vec{v} = \boxed{\vec{v}_{O'}} + \boxed{\vec{v}'} + x'\underbrace{(\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'})} + y'\underbrace{(\vec{\omega} \times \hat{u}_{y'})} + z'\underbrace{(\vec{\omega} \times \hat{u}_{z'})} =$$

$$= \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \underbrace{(x'\hat{u}_{x'} \; y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_{z'})}$$

TEO DELLE VEL RELATIVE

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \boxed{\vec{r}'}$$

QUESTO SPIEGA PERCHE' IL SISTEMA MOBILE PUO' TRASLARE O RUOTARE

POSSIAMO ORA INTRODURRE ANCHE LA VEL DI TRASCINAMENTO E LA VEL VALUTATA NEL SR FISSO IN P* SOLIDALE AL S.R MOBILE E COINCIDENTE CON P.

$$\boxed{\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

$$P^* \longrightarrow \vec{v}' = 0$$

LA VEL ASSOLUTA QUANDO $\vec{v}' = 0$ $\Longrightarrow$ VELOCITA' DI TRASCINAMENTO: $\vec{v}_{(t)} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

QUINDI: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{(t)}$ $\Longrightarrow$ RELAZ TRA VEL ASSOLUTA E RELATIVA

DERIVANDO ULTERIORMENTE OTTERREMO L'ACCELERAZIONE ASSOLUTA E RELATIVA.

NEL S.R.F. SI DEFINIRA' L'ACCELERAZIONE ASSOLUTA

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z}$$

NEL S.R.M. SI DEFINIRA' L'ACCELERAZIONE RELATIVA

$$\boxed{\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'}}$$

ACC. DI TRASCINAMENTO

$P^* \Rightarrow \vec{a}' = \vec{v}' = 0$

INSERENDO $\vec{a}' = \vec{v}' = 0$ NEL TEO. DELLE ACC. RELATIVE OTTENIAMO:

$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'}$$

RICORDANDO, INFATTI, CHE: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$

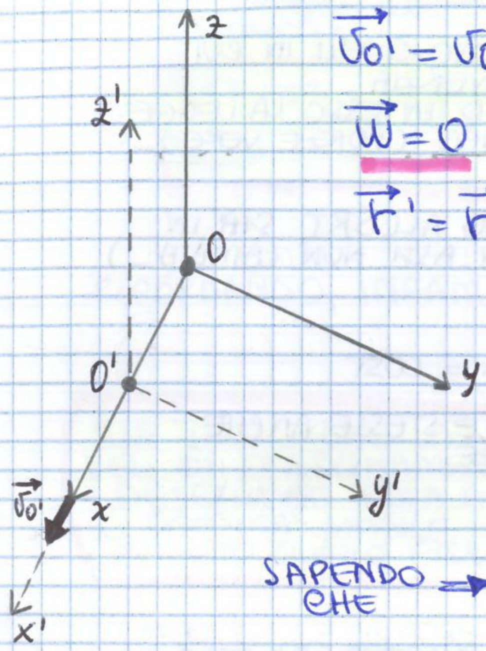
ACC. COMPLEMENTARE O DI CORIOLIS

SIA L'ACC. CHE LA VEL. DI TRASCINAMENTO DESCRIVONO COSA FA IL SISTEMA MOBILE RISPETTO QUELLO FISSO

MOTI

[1° TIPO] 1) MOTO DI TRASCINAMENTO RETT_UNIFORME

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI VI SIANO DUE SISTEMI INERZIALI IN MOTO RETT_UNIFORME L'UNO RISPETTO ALL'ALTRO



$$\vec{v}_{O'} = v_{O'} \cdot \hat{u}_x = \boxed{COST}$$

$$\vec{\omega} = 0$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{OO'} \quad \left(\text{SAPENDO CHE} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{OO'} \right)$$

$$\begin{cases} x' = x - \boxed{OO'} \Rightarrow x' = x - \boxed{v_{O'} t} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

SAPENDO CHE $\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}\,' + \cancel{\vec{\omega} \times \vec{r}\,'}$

$$\boxed{\vec{v}\,' = \boxed{\vec{v}} - \boxed{\vec{v}_{O'}}}$$

$$\vec{v}\,' = \underbrace{v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z}_{} - \boxed{v_{O'} u_x}$$

PERCIÒ:
$$\begin{cases} \vec{v}_{x'} = \vec{v}_x - \vec{v}_{O'} \\ \vec{v}_{y'} = \vec{v}_y \\ \vec{v}_{z'} = \vec{v}_z \end{cases}$$

INFINE, RIGUARDO L'ACCELERAZIONE:

$$\vec{a} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_{O'}}}_{\substack{=0 \\ (v=cost)}} + \vec{a}\,' + \cancel{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')} + \cancel{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'} + \cancel{2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}$$

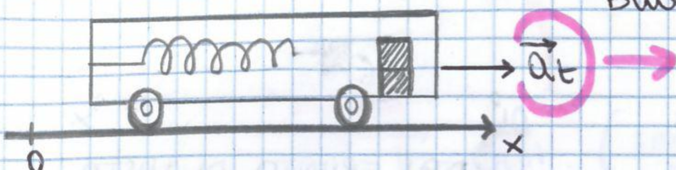
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$$

LE RELAZIONI CHE PERMETTONO DI CALCOLARE LE COORDINATE DI UN PUNTO IN UN SISTEMA INERZIALE NOTE QUELLE DELL'ALTRO SISTEMA INERZIALE, ESPRIMONO LE TRASFORMAZIONI GALILEIANE TRA I DUE SISTEMI

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

ESEMPI PRATICI

(1) IMMAGINIAMO DI ESSERE IN UN VAGONE FERROVIARIO QUINDI AVREMO UN OSSERVATORE A TERRA, CHE GUARDA IL VAGONE MUOVERSI ED UN SECONDO OSS_ SUL VAGONE_
SUL VAGONE V'E' POI UNA MOLLA, DI MASSA TRASCURABILE, ED UN BLOCCHETTO CHE SCORRE SUL PAVIMENTO



INIZIALMENTE, DAL PUNTO DI VISTA DELL'OSSERVATORE ESTERNO NON ESSENDOCI ATTRITO, IL BLOCCHETTO RIMANE FERMO ED E' IL PAVIMENTO CHE SI MUOVE SOTTO DI ESSO_

IN UN SECONDO MOMENTO, IL BLOCCHETTO RAGGIUNGE UNA ESTREMITA' DELLA MOLLA

$$\boxed{k\Delta x = ma = ma_t}$$

PER L'OSSERVATORE NEL VAGONE (FERMO RISPETTO LA MOLLA) E' IL BLOCCHETTO CHE ACCELERA VERSO SINISTRA, NON SAPENDO CHE E' IL VAGONE A MUOVERSI_

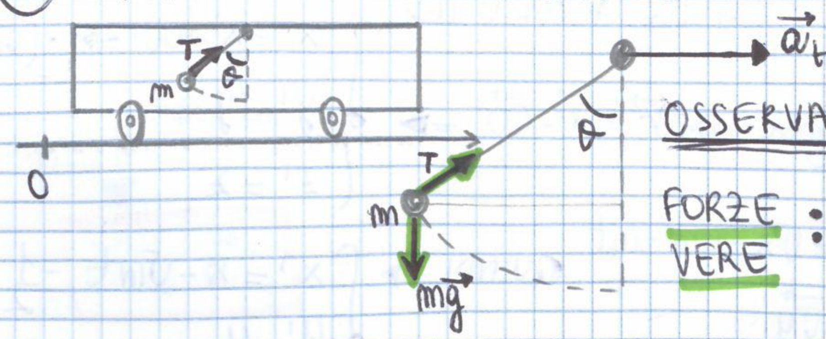
$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_t = -\vec{a}_t$$

QUANDO, POI, IL BLOCCHETTO VA SULLA MOLLA LUI VEDE LA COMPRESSIONE E LA SPIEGA COME UNA DEFORMAZIONE DATA DAL BLOCCHETTO CHE VA SULLA MOLLA CON UNA FORZA $-m\vec{a}_t$ E LA MOLLA REAGISCE PREMENDO A SUA VOLTA CON UNA Fel

$$\vec{F}el + \vec{F}_{APPARENTE} = 0$$

$$k\Delta x + (-m\vec{a}_t) = 0$$

(2) PONIAMO ADESSO, INVECE IL CASO IN CUI CI SIA UN PENDOLO ATTACCATO AL SOFFITTO:



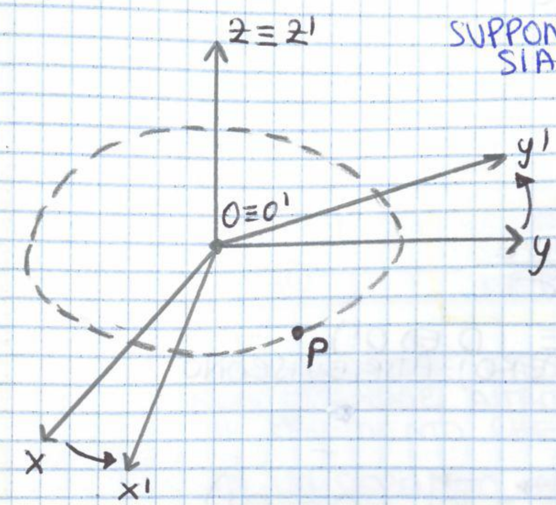
OSSERVATORE O

FORZE VERE : $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_t$

LA TENSIONE DELLA FUNE POSSO SCOMPORLA _ LA COMPONENTE VERTICALE E' QUELLA CHE MI INDICA LA FP_

$$\begin{cases} T\sin\theta = ma_t \\ T\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{tg\,\theta = \frac{a_t}{g}}$$

[3° TIPO] 3) MOTO DI TRASCINAMENTO ROTATORIO UNIF.



SUPPONIAMO ORA CHE IL MOTO DI TRASCINAMENTO SIA SOLTANTO ROTATORIO UNIFORME

PER COMODITA' $\vec{r} \equiv \vec{r}'$

$\vec{v}_0 = 0$

$\vec{a}_0 = 0$

$\vec{\omega} \neq 0 \; , \; \vec{\omega} = \text{cost}$

AVREMO QUINDI, LE SEGUENTI RELAZIONI:

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{APPARENTI} = m \vec{a}'$$

$$\vec{F} + \left(- m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}' \right) = m \vec{a}'$$

$$\vec{F} - \underbrace{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{F_{CENTRIFUGA}} - \underbrace{2m \vec{\omega} \times \vec{v}'}_{F_{CORIOLIS}} = m \vec{a}'$$

SISTEMA O : $\vec{v} = 0 \; ; \; \vec{a} = 0$

Se $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$ E $\vec{v} = 0$

SISTEMA O' : $\vec{v}' = - \vec{\omega} \times \vec{r} \; ; \; \vec{a}' = - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2 \vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{a}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$= \vec{\omega} \times \vec{v}$

L'OSSERVATORE IN O' VEDE RUOTARE P IN UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE

SE $\omega \neq 0 \Rightarrow a \neq a'$:

QUANDO CI SONO ROTAZIONI NON C'E' LA RELATIVITA' GALILEIANA.

QUESTO SISTEMA CONTINUO CHE STIAMO CONSIDERANDO E' UN SISTEMA DI N PUNTI, CIASCUNO DOTATO DI UNA SUA MASSA E VEL_ (TUTTE LE QUANTITA' LE' DEF_ CON L'INDICE i PERCHE' DIVERSE IN OGNI PUNTO)

PER ESEMPIO : $\boxed{\vec{P} = \sum_i \vec{P_i} = \sum_i m_i \vec{v_i}}$

QUINDI AVREMO I SINGOLI PUNTI CON LE SINGOLE QUANTITA' i-ESIME E LE QUANTITA' TOTALI DEL SISTEMA DATE DALLA SOMMA DI TUTTI GLI INDICI_
TUTTO CIO' AL FINE DI DEFINIRE QUANTITA' COMPLESSIVE DEL SISTEMA_

INIZIAMO, INFATTI, A DEFINIRE UNA SERIE DI GRANDEZZE PER CONSIDERARE IL SISTEMA IN MANIERA COMPLESSIVA_

INNANZI POSSIAMO DEFINIRE IL "CENTRO DI MASSA" IDENTIFICATO CON UN RAGGIO VETT_ :

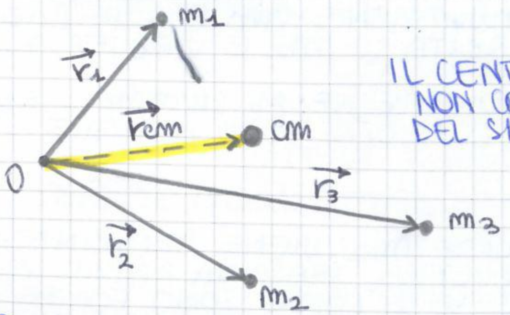
$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i}}$$

NOTAZIONE VETT_ INDIPENDENTE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO_

PROIETTANDOLO, AD ESEMPIO, NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO, AVREMO :

$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i x}{\sum_i m_i} \\[2ex] y_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i y}{\sum_i m_i} \\[2ex] z_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i z}{\sum_i m_i} \end{cases}$$

OVVIAMENTE LA POSIZIONE E' INDIPENDENTE DAL S.R. A DIFFERENZA DELLE SUE COORDINATE_



IL CENTRO DI MASSA, IN GENERALE NON COINCIDE CON NESSUN PUNTO DEL SISTEMA_

$\vec{r}_{cm}$ E' LA SOMMA VETT_ "PESATA" DEI RAGGI VETT_ (DIPENDE DAL VALORE DELLE MASSE DEI SINGOLI PUNTI)

INIZIAMO COL DEFINIRE, AD ESEMPIO, LA VELOCITA':

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) =$$

CONSIDERIAMO ADESSO QUALI POSSONO ESSERE LE GRANDEZZE CHE DIPENDONO DAL TEMPO. ESSENDO SOLO m COSTANTE ED r_i LE UNICHE DIPENDENTI, TUTTO IL RESTO 'FILTRERA' ATTRAVERSO LA DERIVATA

$$= \frac{\sum_i m_i \boxed{\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boxed{\vec{v}_i}}{\sum_i m_i}$$

ANCHE LA VEL. PARE PESATA RISPETTO LA DISTRIBUZIONE DELLE MASSE.

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}}$$

IL CM AVRA' COSI' UNA SUA VEL. PUR ESSENDO UN PUNTO ASTRATTO.

VEDIAMO, ORA, LA QUANTITA' DI MOTO:

ESSENDO $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m}}$

m → MASSA TOTALE (SOMMA DI TUTTE LE MASSE)

$\Downarrow$

QUANTITA' DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA → $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_{cm}}$

IL SISTEMA SI COMPORTA COME SE TUTTO SIA CONCENTRATO NEL SUO CM. ANCHE SE IO DA UNA SITUAZIONE GENERALE NON POSSO RICAVARE UN PUNTO PRECISO MA TANTO, QUELLO CHE A NOI INTERESSA E' LA SITUAZIONE GENERALE.

PASSIAMO ALL'ACCELERAZIONE

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \boxed{\frac{d\vec{v}_i}{dt}}}{\sum_i m_i} =$$

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \boxed{\vec{a}_i}}{\sum_i m_i}}$$

IMMAGINIAMO UN SISTEMA FORMATO DA DUE PUNTI ED ISOLATO (SENZA FORZE ESTERNE), IN ESSO VARRÀ LA CONSERVAZ_ DELLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA_
(2 MASSE: m_1 ED m_2)

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$$

$$= m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = \underline{COST} \Longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m_1 \overset{a_1}{\boxed{\frac{d\vec{v_1}}{dt}}} + m_2 \overset{a_2}{\boxed{\frac{d\vec{v_2}}{dt}}} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{m_1 a_1}_{\vec{F_1}} + \underbrace{m_2 a_2}_{\vec{F_2}} = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$$

$$\boxed{\vec{F_1} = -\vec{F_2}}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, DALLA OMOGENEITÀ DELLO SPAZIO, DERIVA, IN UN SISTEMA ISOLATO, LA CONSERVAZ_ TOTALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO, DA CUI DISCENDE LA 3ª LEGGE DI NEWTON DI AZIONE E REAZIONE_

ORA, INVECE, CI PREOCCUPIAMO DEL MOMENTO ANGOLARE PER RICAVARE ANCHE IN QUESTO CASO, IL TEO_DEL_MOM_ANGOLARE

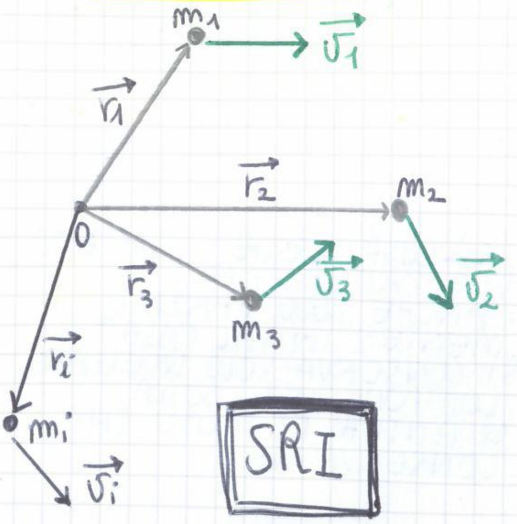
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \times m_i\vec{v_i}$$

I MOMENTI ANGOLARI FIN ORA LI ABBIAMO CALCOLATI RISPETTO UN POLO FISSO ANCHE SE SPESSO È PIÙ COMODO FARLO RISPETTO QUELLO MOBILE_

ANDIAMO, INFATTI, A CALCOLARE IL MOM_ANGOLARE RISPETTO IL POLO MOBILE:

FISSIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE CONSIDERANDO UN POLO "O" CHE PUÒ NON COINCIDERE CON L'ORIGINE E NON ESSERE FISSO_

CONSIDERANDO TUTTI I VETTORI $\vec{r_i}$ BISOGNA RICORDARE CHE SI MUOVONO ENTRAMBI I VERTICI



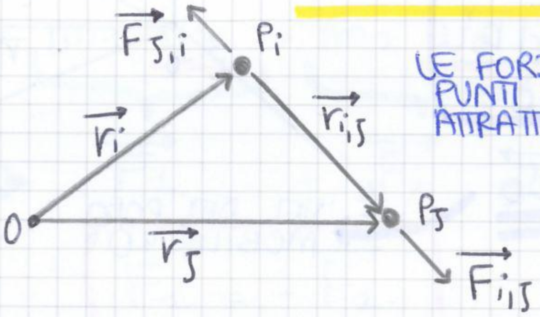
DALLA RELAZ. PRECEDENTE, ABBIAMO OTTENUTO CHE:

$$\sum_i (\vec{v_i} - \vec{v_0}) \times m_i \vec{v_i} + \vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(I)}$$

$$\underbrace{\sum_i \vec{v_i} \times m_i \vec{v_i}}_{=0 \text{ (DUE VETT. //)}} - \underbrace{\sum_i \vec{v_0} \times m_i \vec{v_i} + \vec{M}^{(E)}}\; + \underbrace{\vec{M}^{(I)}}_{=0}$$

$$\boxed{\vec{M}^{(I)} = 0}$$

$$\begin{cases} = -\vec{v_0} \times \sum_i m_i \vec{v_i} + \vec{M}^{(E)} \\ = -\vec{v_0} \times m \vec{v_{cm}} + \vec{M}^{(E)} \end{cases}$$



LE FORZE CHE AGISCONO SU TALI PUNTI POSSONO ESSERE SIA ATTRATTIVE CHE REPULSIVE

NOI, AD ESEMPIO, LE SUPPONIAMO REPULSIVE SAPENDO CHE (PER LA 3ª LEGGE DI NEWTON)

$$\boxed{F_{i,J} = -F_{J,i}}$$

$$\vec{M}_{iJ}^{(I)} = \vec{r_J} \times \vec{F_{i,J}} + \vec{r_i} \times \vec{F_{J,i}} =$$

$$= \vec{r_J} \times \vec{F_{i,J}} - \vec{r_i} \times \vec{F_{i,J}} =$$

$$= \boxed{(\vec{r_J} - \vec{r_i})} \times \vec{F_{i,J}}$$

$$= \vec{r_{i,J}} \times \vec{F_{iJ}} = 0$$

MA $\vec{r_{iJ}}$ ED $\vec{F_{iJ}}$ STANDO SULLA STESSA RETTA, CERTAMENTE SONO // PERCIÒ IL PRODOTTO VETT. È NULLO.

PERCIÒ ALLA FINE LA SOMMATORIA DI TUTTI QUESTI MOMENTI $M^{(I)}$ SARÀ SICURAMENTE NULLA, IN QUANTO SE PRESI A DUE A DUE I LORO PRODOTTI VETT. SONO NULLI.

TEO. DEL MOM. ANGOLARE (2ª EQ. CARDINALE)

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v_0} m \vec{v_{cm}}}$$

$\vec{M}^{(E)} \vec{v_0} m \vec{v_{cm}} = 0$:

- SE IL POLO È FISSO $(\vec{v_0} = 0)$
- SE $\vec{v_{cm}} = 0$ (CENTRO DI MASSA IN QUIETE)
- SE POLO $\equiv$ CM $\Rightarrow \vec{v_0} \equiv \vec{v_{cm}}$ $(\vec{v_0} \times \vec{v_{cm}} = 0)$
- SE $\vec{v_0} \,//\, \vec{v_{cm}}$

SE IL POLO O È FISSO O COINCIDE CON CM L'EVOLUZIONE DEL MOM. ANGOL. È DET. DALLE FORZE ESTERNE

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

QUINDI ABBIAMO TRE CASI:

(1) $\boxed{\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{L}}$ (PARALLELI ED HANNO LO STESSO VERSO)

$\Downarrow$

$\vec{L}$ AUMENTA (IN MODULO)

(2) $\boxed{\vec{M} \uparrow\downarrow \vec{L}}$ (PARALLELI ED HANNO VERSO OPPOSTO: ANTIPARALLELI)

$\Downarrow$

$\vec{L}$ DIMINUISCE

QUINDI SE $\vec{M} \parallel \vec{L}$ $\vec{L}$ DIMINUISCE O AUMENTA A SECONDA DEI VERSI.

(3) $\boxed{\vec{M}^{(E)} \perp \vec{L}}$ $\Longrightarrow$ $\vec{L}$ CAMBIA DIREZIONE

INOLTRE POSSIAMO ANCHE AVERE IL CASO IN CUI: $\boxed{\vec{M}^{(E)} = 0}$

$\Downarrow$

RUOTERANNO ALL'INFINITO } $\vec{L} = COST.$

SE L'ASTA, ANZI DI ESSERE RIGIDA E' TELESCOPICA AVREMO SITUAZIONI DIFFERENTI.

SI PUO' ACCORCIARE O ALLUNGARE

SE PRENDIAMO IL CASO IN CUI SI ACCORCIA

$$\vec{L} = 2mr^2\vec{\omega}$$

$$\vec{L}' = 2mr'^2\vec{\omega}'$$

$$\vec{L} = \vec{L}'$$

$$\cancel{2m}r^2\vec{\omega} = \cancel{2m}r'^2\vec{\omega}' \longrightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}\left(\frac{r^2}{r'^2}\right)$$

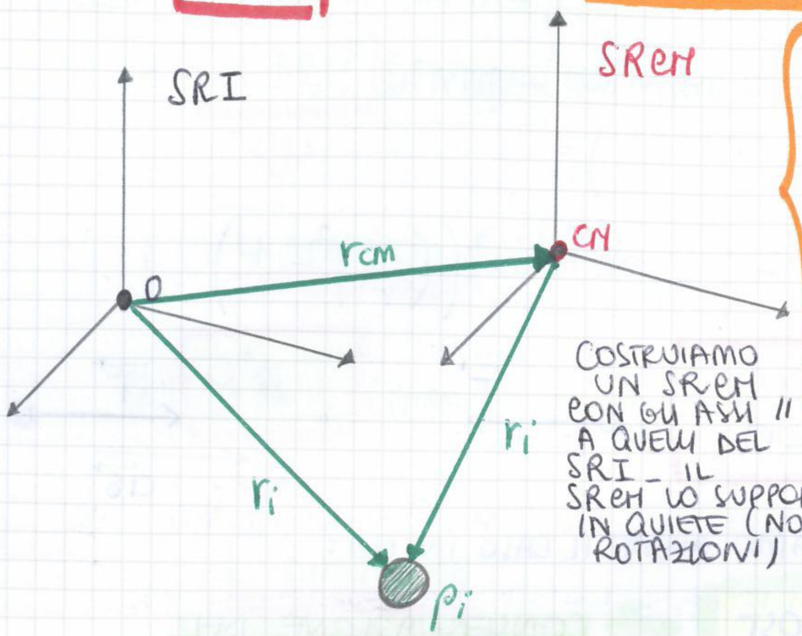
SE $r' < 0 \Rightarrow \omega' > \omega$

QUANDO LA BARRETTA VIENE ACCORCIATA DEVE AUMENTARE LA VEL. ANGOLARE CON CUI ESSE SI MUOVONO E SE SI ALLUNGA IL CONTRARIO.

$$E_{K\,INIZIALE} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) =$$

$$= mv^2 = mr^2\omega^2$$

NEL $\boxed{\text{SRCM}}$ VI SONO DET. CARATTERISTICHE:



- L'ORIGINE È NEL CM
- GLI ASSI MANTENGONO LA STESSA DIREZ. RISPETTO GLI ASSI DEL SRI E ASSUNTI // AD ESSO.
- IN GENERALE IL SRCM NON È INERZIALE. È SOLTAMENTE UN MOTO TRASLATORIO RETTILINEO UNIFORME SOLO SE $R^{(E)}=0$ COSÌ CHE ANCHE $a_{cm}=0$

COSTRUIAMO UN SRCM CON GLI ASSI // A QUELLI DEL SRI. IL SRCM LO SUPPONIAMO IN QUIETE (NO ROTAZIONI)

INDICHEREMO CON GLI APICI TUTTE LE QUANTITÀ RELATIVE AL SRCM.

PER IL PUNTO P AVREMO: $\boxed{\vec{r_i} = \vec{r_i}' + \vec{r}_{cm}}$

ESSENDO, POI, $\vec{\omega}=0$ (NO ROTAZIONI), DAL TEO. DELLE VEL. RELATIVE:

$\boxed{\vec{v_i} = \vec{v_i}' + \vec{v}_{cm}}$ $(\vec{v}_{O'} = \vec{v}_{cm})$

MA, FISSANDOCI NEL SRCM LA POSIZIONE E LA VEL. DEL CM RISPETTO A SÉ STESSO SONO NULLE:

$$\begin{cases} \vec{r}'_{cm} = 0 \\ \vec{v}'_{cm} = 0 \\ \vec{a}'_{cm} = 0 \end{cases}$$

QUINDI ...

$$\vec{r}'_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}'}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_i m_i \vec{r_i}' = 0}$$

LO STESSO RAGIONAMENTO VERRÀ ANCHE FATTO PER ACCELERAZIONE E VELOCITÀ: $\Rightarrow \boxed{\sum_i m_i \vec{a_i}' = 0}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{v_i}' = 0} = \boxed{\vec{p}' = 0}$$

LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA RISULTA NULLA SE MISURATA NEL SRCM

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(E)}}$$

IL TEO_ DEL MOM_ANGOLARE VALE ANCHE NEL SISTEMA (NON INERZIALE) DEL CENTRO DI MASSA, AL CALCOLO DEL MOM_ CONTRIBUISCONO SOLO LE FORZE VERE (ESTERNE)

TEOREMI DI KÖNIG

(CHENIG)

STABILISCONO LE RELAZIONI TRA I MOM_ ANGOLARI E LE ENERGIE CINETICHE DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

1 TEO_ DI KONIG PER IL MOM ANGOLARE

$\vec{L}$ (PER DEF_) $= \sum_i \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}$ SE $O \equiv$ ORIGINE DEL SRI

$$\vec{L} = \sum (\vec{r_i}' + \vec{r_{cm}}) \times m_i (\vec{v_i}' + \vec{v_{cm}})$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i}' \times m_i \vec{v_i}' + \sum_i \vec{r_i}' \times m_i \vec{v_{cm}} + \sum_i \vec{r_{cm}} \times m_i \vec{v_i}' + \sum_i \vec{r_{cm}} \times m_i \vec{v_{cm}}$$

$$\vec{L} = \vec{L_i}' + \underbrace{\left(\sum_i \vec{r_i}' m_i\right)}_{=0} \times \vec{v_{cm}} + \vec{r_{cm}} \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v_i}\right)}_{=0} + \vec{r_{cm}} \times \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{m} \vec{v_{cm}}$$

QUINDI : $\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r_{cm}} \times m \vec{v_{cm}}}$

$= \vec{L}' + \vec{r_{cm}} \times \vec{P}$

$= \vec{L}' + \vec{L_{cm}}$

MOM_ANGOLARE CHE SI AVREBBE SE TUTTA LA MASSA TOT_ FOSSE CONCENTRATA NEL CM

1° TEO_ DI KÖNIG

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L_{cm}}}$$

IN UN SRI IL MOM_ANGOLARE TOT_ DEL SISTEMA E' LA SOMMA FRA IL MOM_ ANGOLARE DEL CM_ E IL MOM_ ANGOLARE DEL SISTEMA RISPETTO IL CM_

SE IO SCEGLIESSI COME POLO IL CM OTTERREI CHE:

$$\vec{L} = \vec{L}'$$

TEOREMA DELL' ENERGIA CINETICA

DOBBIAMO CALCOLARE IL LAVORO ASSOCIATO AL MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

IL LAVORO ELEMENTARE RIFERITO ALLA i-ESIMA PARTICELLA → $\boxed{dW_i} = \vec{F_i} \cdot d\vec{r_i} =$

$$= \underline{\vec{F_i}^{(I)} \cdot d\vec{r_i} + \vec{F_i}^{(E)} \cdot d\vec{r_i}} =$$

$$= dW_i^{(I)} + dW_i^{(E)}$$

$$\underline{\vec{F_{iJ}}^{(I)} \cdot d\vec{r_J} + \vec{F_{Ji}} \cdot d\vec{r_i}}$$

AVENDO SCELTO 2 PUNTI, ORA CONSIDERIAMO LE FORZE CHE QUESTI SI SCAMBIANO E LA 2ª LEGGE DI NEWTON

$$\vec{F_{Ji}} = \boxed{\vec{F_{iJ}}}^{(I)} \cdot (d\vec{r_J} - d\vec{r_i}) = \vec{F_{iJ}}^{(I)} \cdot d(\vec{r_J} - \vec{r_i}) =$$

$$= \vec{F_{iJ}}^{(I)} \cdot d(\vec{r_J} - \vec{r_i}) = \underbrace{\vec{F_{iJ}}^{(I)} \cdot d\vec{r_{iJ}} \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma \neq 0$$

SAPENDO CHE $\boxed{\Sigma_{iJ} \vec{F_{iJ}}^{(I)} \cdot d\vec{r_{iJ}} = dW^{(I)}}$ CON $i \neq J$

E NON CI INTERESSA COME SI SPOSTANO MA CHE A DISTANZA SONO

$$\Downarrow$$

IN GENERALE $dW^{(I)} \neq 0$ IN QUANTO, DIPENDENDO DALLE DISTANZE, MUTUA TRA IL SISTEMA

$$W = \Sigma_i W_i = \Sigma_i \int_A^B dW_i = \Sigma_i \left(\int_A^B \vec{F_i} \, d\vec{r_i} \right) =$$

$$= \Sigma_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_{iB}^{\,2} - \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{iA}^{\,2} \right) =$$

(RICORDANDO CHE: $\vec{F_i} d\vec{r_i} = m_i \vec{v_i} d\vec{v_i}$)

$$= \boxed{\Sigma_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_B^{\,2}} - \boxed{\Sigma_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{iA}^{\,2}}$$

$$E_{KB} \qquad\qquad E_{KA}$$

$$W = E_{KB} - E_{KA}$$

$$\boxed{W^{(E)} + W^{(I)} = \Delta E_K}$$