NUMERO: 1227

DATA: 27/10/2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Giuffrè

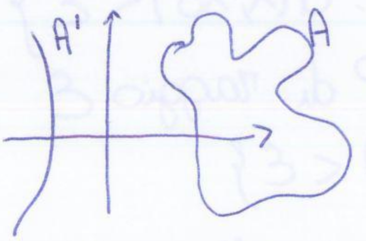
MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc.

Prof. Mazzi

# ANALISI MATEMATICA II

Esther Giuffrè

-INSIEME LIMITATO: A è limitato se
$\exists M > 0$ tale che $A \subseteq B_M(0)$




centro O, raggio M
A è limitato, A' è illimitato
Devo fare finta che ci sia una circonferenza che racchiude entrambe le figure

L'insieme A è illimitato se non è limitato:
$\forall M > 0 \quad \exists P \in A \quad P \notin B_M(0)$

-INSIEME COMPATTO: A è compatto se A è chiuso e limitato, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

# • FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

| | |
|---|---|
| $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ | $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad m > 1$ |
| funzioni e variabili scalari | funzioni e variabili vettoriali |
| $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ | $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots F_m(x, \dots))$ |

-PROP.: Se $\bar{x}$ punto di accumulazione del dominio di A
$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\exists \lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall B_\varepsilon(l) \quad \exists B_\delta(\bar{x})$ tale che:
Se $x \in (B_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}) \cap A \to f(x) \in B_\varepsilon(l)$

-PROP.: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$\exists \lim\limits_{x \to \bar{x}} F(x) = L$ (vettore) $= (l_1, \dots, l_m)$
$\forall B_\varepsilon(L) \subseteq \mathbb{R}^m \quad \exists B_\delta(\bar{x})$
Se $x \in (B_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}) \cap A \Rightarrow F(x) \in B_\varepsilon(L)$

-PROP.: $\lim\limits_{x \to \bar{x}} F(x) = L = (l_1, \dots, l_m) \iff$
$\lim\limits_{x \to \bar{x}} F_i(x) = l_i$
↳ Componenti

Se questo limite esiste finito,
$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

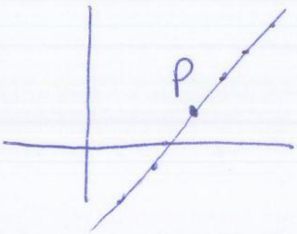
- Se voglio vedere se esistono le derivate parziali nell' origine: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

quindi la derivata esiste ed è uguale a 0.
E anche $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
L' esistenza delle due derivate parziali in un punto non garantisce la continuità della funzione.

- DERIVATE DIREZIONALI:
$(x_0, y_0)$ interno al dominio




$\vec{v}$ $\quad \vec{v} = (v_1, v_2)$ versore

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\to$ retta per $(x_0, y_0)$ // a $\vec{v}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se $\exists$ finito il limite si dice che f è derivabile in $(x_0, y_0)$ lungo la direzione $\vec{v}$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ è la derivata direzionale di f in $(x_0, y_0)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{h} = (hv_1, hv_2) \\ &|\vec{h}| = \sqrt{h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2} = \sqrt{h^2 \underbrace{(v_1^2 + v_2^2)}_{=1 \text{ perché è un versore}}} = \sqrt{h^2} = |h| \end{aligned}}$$

$L(x-x_0, y-y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \cdot (x-x_0, y-y_0)$

- EQUAZ. DEL PIANO TANGENTE:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Qualunque curva liscia che passi per un determinato punto del grafico ammette una retta tangente, contenuta in un piano tangente.

- PROP.: $f(x,y) = g(x)$

1) Se $g$ è continua in $\mathbb{R}$ come funzione di una variabile, allora lo è anche come funzione di più variabili.
2) Somma, prodotto, rapporto con funzioni $\neq 0$ e continue, è continua
3) La composizione di funzioni continue è una funzione continua.

- DEF.: $f$ è di classe $C^1$ su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$ se $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ esistono e sono continue su $A$.

- TEOR.: $f \in C^1(A)$, $A$ aperto di $\mathbb{R}^n$
$\rightarrow$ $f$ è differenziabile in $A$

- MATRICE JACOBIANA:

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad i = 1, \dots, m$

$\bar{x}$ punto interno ad $A = \text{dom}$

$$JF(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad m \times n$$

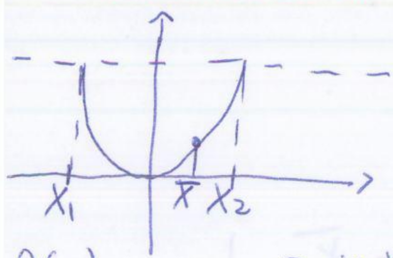
$F$ è differenziabile in $\bar{x}$ se $\exists L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che:

$F(x) = F(\bar{x}) + L(x-\bar{x}) + o(\|x-\bar{x}\|)$ per $x \rightarrow \bar{x}$

$\|x-\bar{x}\| = d(x,\bar{x})$

## - INVERTIBILITA' LOCALE:

$$f(x) = x^2$$




$f(x)$ non è invertibile globalmente, ma localmente, cioè restringo la funzione all'intorno desiderato ($B_r$)

$f: B_r(\bar{x}) \to f(B_r(\bar{x}))$

$f^{-1}: f(B_r(\bar{x})) \to B_r(\bar{x})$

$f(x)$ è localmente invertibile solo per $x \neq 0$

Il teorema dice che: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia $\bar{x}$ punto interno al dominio di $A$, $f$ derivabile in $\bar{x}$ e $f'(x) \neq 0$,

$\Rightarrow \exists B_r(\bar{x}) \qquad \exists B_s(f(\bar{x}))$

$\exists f^{-1}: B_s(f(\bar{x})) \to B_r(\bar{x})$ inversa di $f$

Inoltre: $f^{-1}$ è derivabile in $f(\bar{x})$

$$(f^{-1})'(f(\bar{x})) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

Se $f'(x) = 0$, la funz. inversa, se esiste, non è derivabile.

Si dice inversa locale di $F$ in $\bar{x}$ una funzione

$F^{-1}: B_s(F(\bar{x})) \to B_r(\bar{x})$

tale che $\forall x \in B_r(\bar{x})$

1) $F^{-1}(F(\bar{x})) = x$

2) $\forall y \in B_s(F(\bar{x})) \qquad F(F^{-1}(y)) = y$

- TEOREMA: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) $A = \text{dom} F$ aperto, $F \in C^1(A)$

2) $\bar{x} \in A$

3) $J_F(\bar{x})$ è invertibile

$\Rightarrow \exists F^{-1}: B(F(\bar{x}), s) \to B(\bar{x}, r)$

$F^{-1}$ è di classe $C^1$ su $B(F(\bar{x}), r)$

$J F^{-1}(F(x)) = (J F(x))^{-1}$

• TEOR. DEGLI ZERI:

per funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con dominio $\mathbb{R}^n$ vale:

$\exists \bar{x} : f(\bar{x}) < 0 \quad \exists \tilde{x}\ f(\tilde{x}) > 0$

$\to \exists z : f(z) = 0$

$\Rightarrow \det J\phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\det J\phi(x)$ ha lo stesso segno su $\mathbb{R}^n$ (se $\phi$ è di classe $C^1$)

- CURVA IN FORMA PARAMETRICA DI $\mathbb{R}^n$:

• $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua

• $\gamma$ iniettiva, cioè se $t_1 \neq t_2 \to \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

Sostegno di $\gamma = \mathrm{Im}\,\gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$

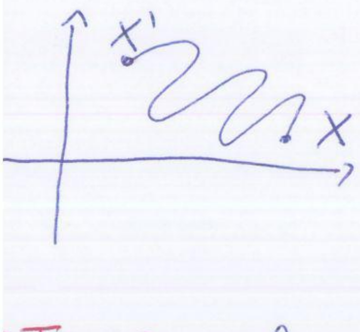
- DEF.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso per archi

se $\forall x^1, x^2 \in A$, $\exists$ una curva

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tale che

$\gamma(a) = x^1 \quad \gamma(b) = x^2$

$\gamma(t) \subseteq A, \quad \forall t \in [a, b]$




Possiamo trovare una curva che unisce i due punti non uscendo dall'insieme, detto connesso per archi.

• TEOR.: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua, A connesso

$\exists x_1 \in A \quad f(x_1) < 0, \ \exists x_2 \in A \quad f(x_2) > 0$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in A \quad f(\bar{x}) = 0$

Se è sia > che < 0, si deve calcolare il volume assoluto.

- DEF.: $\iint_R f = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \text{area}(R_{ij}) \times c_{ij} = \sum_{ij} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) c_{ij}$

base, ma poiché la base è un rettangolo ne calcolo l'area

→ integrale su R della funzione a scala

- PROP.: l'integrale è indipendente dalla suddivisione di R
f, g a scala su R rettangolo

⇒ $\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g$ linearità di $\int$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \int_R \lambda f = \lambda \int_R f$ omogeneità di $\int$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata, definita su un rettangolo R e limitata su R, cioè:

$\exists M > 0 \quad \forall (x,y) \in R, \quad |f(x,y)| \leq M$

- Una funzione a scala h definita su R è una maggiorante a scala di f se
$f(x,y) \leq h(x,y) \qquad \forall (x,y) \in R$

- Una funzione a scala g definita su R è una minorante a scala di f se
$g(x,y) \leq f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in R$

- Prendo 2 insiemi numerici e come tali avrò un estremo inferiore e uno superiore:
$\exists \sup \{ \int_R g, \ g \text{ minorante a scala} \} \leq \inf \{ \int_R h, \ h \text{ maggiorante a scala} \}$

- DEF.: $\underline{\int}_R f = \sup \{ \int_R g, \ g \text{ minorante a scala di } f \}$
si chiama integrale inferiore di f su R
- $\overline{\int}_R f = \inf \{ \int_R h, \ h \text{ maggiorante a scala di } f \}$
si chiama integrale superiore di f su R

⇒ $\forall f$ limitata su R → $\underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f$

- PROP.: Se $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$
e $g$ è integrabile su $[a,b]$, $h$ è integrabile su $[c,d]$
$\Rightarrow \int_R f = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$

DIMOSTRAZIONE: $\iint_R g(x)\,h(y) = \int_a^b \left(\int_c^d h(y)\,g(x)\,dy\right) dx$

$$\int_c^d h(y)\,g(x)\,dy = g(x) \underbrace{\int_c^d h(y)\,dy}_{H}$$

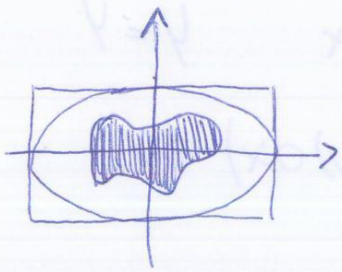
$$\int_a^b \left(\int_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right) dx = \int_a^b H\,g(x)\,dx = H \int_a^b g(x)\,dx =$$
$$= \left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

## • INSIEMI MISURABILI SECONDO PEANO - JORDAN

$\Omega \# \subseteq \mathbb{R}^2 \to$ dominio

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$ $\to$ funzione caratteristica di $\Omega$

Se $\Omega$ è limitato, $\exists$ $R$ rettangolo tale che $\Omega \in R$



$\chi_\Omega$ è definito su $R$

- DEF.: $\Omega$ è misurabile (secondo Peano - Jordan) se $\chi_\Omega$ è integrabile su $R$.

• $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \wedge x \in \mathbb{Q},\ 0 \le y \le 1\}$
la funzione caratteristica di questo dominio non è integrabile.

• Se $\Omega$ è misurabile, si dice misura di $\Omega$:
$|\Omega| = \int_R \chi_\Omega$ è sempre uguale qualunque rettangolo io prenda:

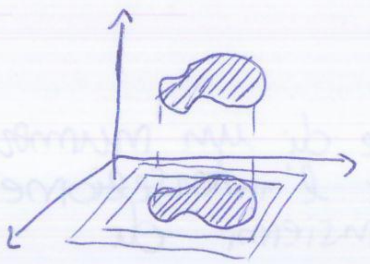
- PROP.: Se $\Omega$ è misurabile in $\mathbb{R}^2$, è vero che:
- $\mathring{\Omega}$ è misurabile (interno)
  $\bar{\Omega}$ è misurabile (chiusura)
- $\forall \tilde{\Omega} \quad \mathring{\Omega} \subseteq \tilde{\Omega} \subseteq \bar{\Omega} \rightarrow |\mathring{\Omega}| = |\tilde{\Omega}| = |\bar{\Omega}|$

Noi sappiamo che: $\bar{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega \qquad |\partial\Omega| = 0$

$$|\bar{\Omega}| = |\mathring{\Omega} \cup \partial\Omega| = |\mathring{\Omega}| + \underbrace{|\partial\Omega|}_{0} + \underbrace{|\mathring{\Omega} \cap \partial\Omega|}_{0} = |\mathring{\Omega}|$$

- DEF.: $f$ è integrabile su $\Omega$
$\Longleftrightarrow \tilde{f}(x)$ è integrabile su $R$ rettangolo che contiene $\Omega$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \qquad \int_\Omega f = \int_R \tilde{f}$$



Non dipende dalla scelta del rettangolo

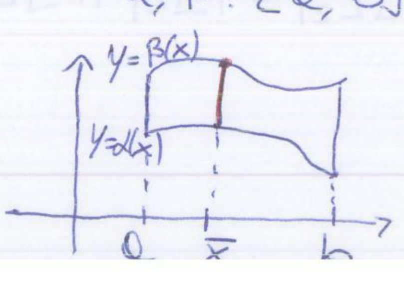
- $f$ è continua quasi ovunque su $\Omega$ se è continua su $\Omega$ tranne al più su un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ di misura nulla

• TEOREMA: $\Omega$ è misurabile
$f$ è limitata su $\Omega$ e continua quasi ovunque su $\Omega$
$\Rightarrow f$ è Reimann-integrabile su $\Omega$

• TEOREMA:
1) Se $f$ è integrabile su $\Omega$ e $g(x) = f(x)$ su $\Omega$ tranne al più su un insieme di misura nulla
$\rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$

2) Se $f$ è limitata su $\Omega$ e $|\Omega| = 0 \rightarrow \int_\Omega f = 0$

• $a \leq x \leq b \qquad \alpha, \beta : [a, b] \rightarrow R$ continue
$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$



4) $\left|\int_\Omega f\right| \leq \int_\Omega |f|$

5) $\int_\Omega |f| =$ volume della parte di spazio tale che $(x,y) \in \Omega$
$0 \leq z \leq |f(x,y)|$

6) teorema della media integrale:

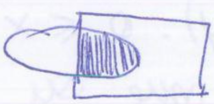
$$\inf_{x\in\Omega} f(x) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f \leq \sup_{x\in\Omega} f(x) \qquad \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

7) Additività rispetto al dominio
$\Omega_1$, $\Omega_2$ misurabili

a) supponiamo che: $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$


$\rightarrow \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$

b) $|\Omega_1 \cap \Omega_2| \neq 0$



$\rightarrow \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f$

8) Se $f = g$ su $\Omega \setminus C$, $|C| = 0$
$\rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$

## • CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
biunivoca, di classe $C^1$ con la matrice jacobiana $J_P\Phi$ invertibile

$\Phi : A' \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\Phi$ immagine
aperto, connesso, $\neq \emptyset$ $\qquad$ $\Omega$ controimmagine

- PROPRIETÀ:

1) $\forall B' \subseteq A'$ aperto $\rightarrow \Phi(B')$ è aperto in $A$
2) $\Omega \subseteq A$ misurabile $\rightarrow \Phi^{-1}(\Omega')$ misurabile
3) $B' \subseteq A' \rightarrow \Phi(\partial B') \subseteq \partial(\Phi(B))$

• TEOREMA: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme misurabile e
$\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$ un cambiamento di variabili
(cioè $\Phi$ biunivoca, di classe $C^1$, $J_P\Phi$ è invertibile $\forall P \in \Omega'$)
- $f$ continua su $\Omega$

$\Omega' = \{(s,t) : 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1\}$

$\Phi : \Omega' \to \Omega$

$(t,s) \longmapsto (x,y) = (tv_1 + sw_1,\ tv_2 + sw_2)$

$\det J\Phi = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0$ perché i due vettori sono linearmente indipendenti

$h = |v| \cdot \operatorname{sen} \alpha$

$\int_\Omega dx\,dy = |w| \cdot |v| \cdot \operatorname{sen}\alpha = |w \wedge v| =$ (prodotto vettoriale)

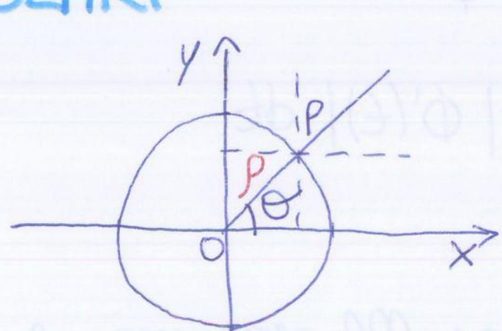
$= \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \int_\Omega dx\,dy = \int_{\Omega'} \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} ds\,dt =$

$= \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \int_{\Omega'} ds\,dt = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot 1$

$0 \leq s \leq 1$
$0 \leq t \leq 1$

## • CAMBIAMENTI DI VARIABILI IN COORD. POLARI




$P \neq O$
Ci sarà un'unica circonferenza che passa per P

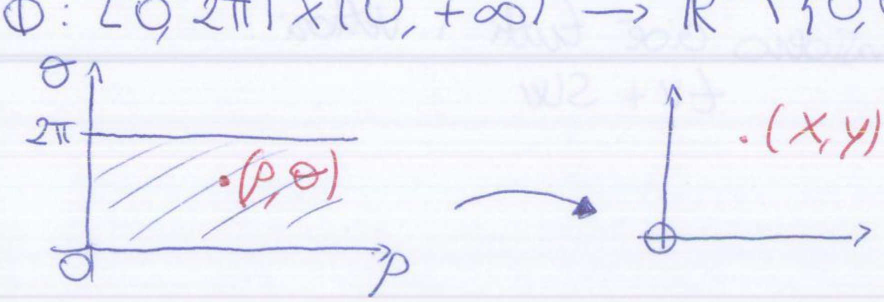
$\theta$ = angolo che la semiretta OP forma con il semiasse delle $x > 0$

$\rho = \overline{OP}$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\quad \rho > 0$, $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Dato che: $O(0,0) \to \rho = 0$, $\theta$ qualsiasi

$\Phi : [0, 2\pi) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ è biunivoca



# • INTEGRALI TRIPLI

Domini $D \subseteq \mathbb{R}^3$

Si parte da un parallelepipedo e poi lo si divide in tanti altri più piccoli:

$f$ a scala

 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

$\int_R f = f \, V \, \square$

$f(x) = cost = C$

$\int_R f = \sum_{i=1}^{j} C_i \text{ Volume}(R_i)$

- Se $f$ è limitata su un parallelepipedo $R$

→ magg. a scala $\quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
min. a scala

$\sup \{ \int_R g \,;\, g \text{ min} \} \qquad \inf \{ \int_R h \,;\, h \text{ magg} \}$

$\underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f$

Se $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$ si dice che $f$ è R-integrabile su $R$

- DEF.: $\Omega$ è misurabile se $\chi_\Omega$ è R-integrabile su $R$ e $|\Omega| = \int_R \chi_\Omega$ → cioè la misura di $\Omega$ è uguale al volume di $\Omega$

- PROP.: $\Omega$ è misurabile in $\mathbb{R}^3 \iff |\partial \Omega| = 0$

Hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$:
1) archi di curva regolari, segmenti, punti
2) superf. in forma parametrica
3) $\sigma(K)$ hanno misura nulla
4) sostegno di una particolare funzione di una particolare superf.: $\{(x, y, f(x,y)) ; (x,y) \in K$ misurab. in $\mathbb{R}^2$, $f$ continua$\}$

$K \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x, y, f(x,y)) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3(x,y))$

5) $|\Omega| = 0 \Rightarrow \int_\Omega f = 0$

Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \partial\Omega_1$
$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subseteq \partial\Omega_2$ $\rightarrow |\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

# • INTEGRALI TRIPLI CON CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$ $[\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \text{ aperti}, \neq \emptyset]$

Dobbiamo chiedere che:
- $\Phi$ biunivoca
- $\Phi$ di classe $C^1$ su $\Omega'$
- $\det J\Phi \neq 0$ su $\Omega$

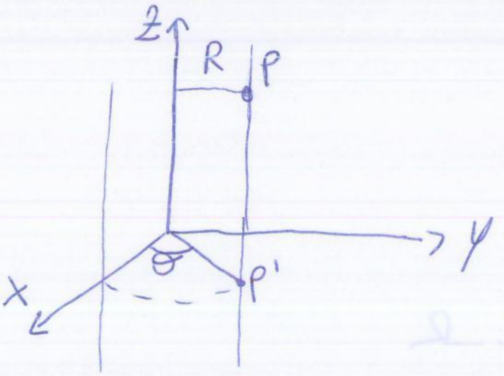
• $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $\Omega$

$\Omega$ misurabile in $\mathbb{R}^3$ ($\Rightarrow \Phi^{-1}(\Omega) = \Omega'$ è misurabile)

$$\int_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} f(\Phi(u, v, w))\, |\det J\Phi(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$$

l'area $= \int_\Omega dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} |\det J\Phi(u, v, w)|\, du\, dv\, dw$

- Coordinate cilindriche:




Ho un unico cilindro di equaz: $x^2 + y^2 = R^2$

$\theta$: angolo che $OP'$ forma con il semiasse delle $x > 0$ sul piano $xy$

Al variare di $P$ sulla retta, varierà la $z$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

$\rho = R^2$
$\rho \geq 0$ $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$
$t \in \mathbb{R}$ ($t$ corrisponde alla stessa $z$)

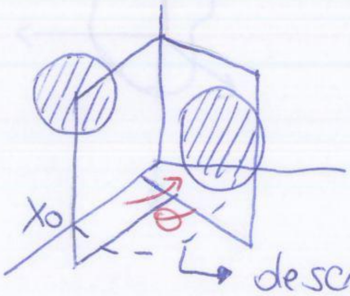
$\rho = 0 \rightarrow$ mi dà l'asse $z$ tutti i punti dell'asse, quindi non è biunivoca

$$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^3$$
$$(\rho, \theta, t) \longmapsto (x, y, z)$$

$\rho = 0 \rightarrow \Phi$ trasforma tutti i punti

$$\Phi[(0, \theta, t)] = (0, 0, t)$$

# • SOLIDI DI ROTAZIONE




Un solido di rotazione si ottiene prendendo una superf. contenuta in un piano perpendicolare e facendola ruotare intorno all'asse.

↳ descrive una circonferenza di raggio $x_0$

$S(x, 0, z) \quad x \geq 0$

$\Omega_S$ = solido che si ottiene facendo ruotare $S$ intorno all'asse $z$.

Uso le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad (\rho, t) \in S \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$(\rho, t) \in S \;\updownarrow\; (x, y) \qquad \theta \in [0,2\pi) \Downarrow \Omega_S'$$

$$Vol(\Omega_S) = \iiint_{\Omega_S} dx\,dy\,dz = \int_{\Omega_S'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dt$$

Integro per strati che sono tutti uguali a $S$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\iint_S \rho\, d\rho\, dt\right)}_{\text{un numero che non dipende da } \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} N\, d\theta = N\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \iint_S \rho\, d\rho\, dt = 2\pi \iint_S x\, dx\, dz = |\Omega_S|$$

## • 1° TEOR. DI GULDINO:

$x_G$ (baricentro geometrico di $S$)

$$x_G = \frac{1}{|S|}\iint_S x\, dx\, dz$$

$$\iint_S x\, dx\, dz = x_G |S|$$

$$|\Omega_S| = 2\pi x_G |S|$$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \Rightarrow (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$

- $\forall t \in \mathring{I}, \quad (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \neq (0, \dots, 0)$

$\| \gamma'(t) \| \neq 0 \quad , \quad \forall t \in \mathring{I} \Rightarrow$ si può accartocciare ma non presenta spigoli

$\gamma'(t)$ è il vettore tangente al sostegno della curva $\gamma$ nel punto $\gamma(t)$.

Sotto queste ipotesi $\gamma(t)$ è una curva nel senso iniettivo del termine.

$\gamma [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se l'intervallo è chiuso abbiamo un arco di curva

Per il teorema di Weierstrass, il sostegno di un arco di curva è un insieme limitato in $\mathbb{R}^n$.

$\gamma(t)$ = legge di moto

Se $\gamma'(t)$ è continua e $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$, allora sul sostegno è assegnato un verso di percorrenza uguale al verso del vettore tangente.

- $\gamma$ è un arco di curva se $I = [a, b]$ intervallo chiuso
  $\gamma$ è una curva chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$
  $\gamma$ è semplice $\forall t_1, t_2 \in I \quad t_1 \neq t_2 \to \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
  ($\gamma(I)$ non ha autointersezioni)
  $\gamma$ è chiusa se : - $\gamma(a) = \gamma(b)$
  - $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$
  $t_1 \neq t_2 \to \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

$\gamma$ è regolare a tratti se su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \in I$, $\gamma$ ha al più un numero finito di punti in cui $\gamma'(t) = 0$.

3) $\alpha'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [c,d]$

$2+3 \rightarrow \alpha'(s)$ ha sempre lo stesso segno perché se $\alpha'(s)>0$ in $\bar{s}$, $\alpha'(s)$ è continua, allora per il teor. della permanenza del segno

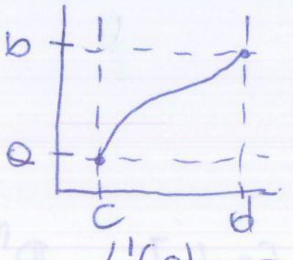
$\exists$ un intorno di $\bar{s}$ in cui $\alpha'(\bar{s})>0$

$\left.\begin{array}{l}\alpha'(s_1)>0\\ \alpha'(s_2)<0\end{array}\right\} \rightarrow$ per il teor. degli zeri $\exists\, \tilde{s}\ \alpha'(\tilde{s})=0$

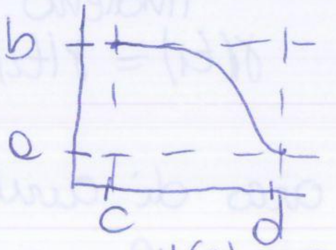
$\Rightarrow \alpha'(s)>0 \quad \forall s \in [c,d] \Rightarrow \alpha$ è strettam. crescente

oppure

$\alpha'(s)<0 \quad \forall s \in [c,d] \Rightarrow \alpha$ è strettam. decrescente



$\alpha'(s)>0$



$\alpha'(s)<0$

- Integriamo due curve:

$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n \qquad \delta: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma$ e $\delta$ differiscono per un cambiamento di parametrizzazione se $\exists$ un cambiamento di variabili regolare:

$$\begin{tikzcd} {[c,d]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & {[a,b]} \arrow[d, "\gamma"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\alpha : [c,d] \xrightarrow{\alpha} [a,b]$

l'immagine di $\gamma[a,b]$ e di $\alpha[c,d]$ sono la stessa cosa

Se è vero che: $\delta(s) = \gamma(\alpha(s))$:

1) $\gamma([a,b]) = \delta([c,d])$

$s_1 \neq s_2 \Rightarrow \delta(s_1) \neq \delta(s_2)$

$\forall s_1, s_2 \in [c,d]$

$\gamma(\underbrace{\alpha(s_1)}_{t_1}) = \delta(s_1) \qquad \gamma(\underbrace{\alpha(s_2)}_{t_2}) = \delta(s_2)$

2) $\gamma$ è chiusa $\Leftrightarrow \delta$ è chiusa

3) $\gamma$ è regolare $\Leftrightarrow \delta$ è regolare

- PROPRIETÀ:

1) è lineare $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f, g : A \to \mathbb{R}$ continue

$$\Rightarrow \int_\gamma (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \int_\gamma f\, ds + \beta \int_\gamma g\, ds$$

2) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\rightarrow \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$$

- DENSITÀ E BARICENTRO:

$\rho$ = densità $\quad \gamma([a,b])$

$\gamma$: cavo di densità variabile

$$\Rightarrow M(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_\gamma \rho\, ds$$

(massa cavo)

Questo integrale serve per calcolare le grandezze statiche, non legate al moto.

Il baricentro: $x_G^i = \frac{1}{M(\gamma)} \int_\gamma x^i \rho\, ds$

L'integrale non dipende né dal verso di percorrenza della curva né dalla parametrizzazione.

- TEOREMA: $\alpha : [c,d] \to [a,b]$

$\alpha$ cambiamento di variabili regolare

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare

$\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ regolare

$\delta(s) = \gamma(\alpha(s))$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$\delta([c,d]) \subset A$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\, ds = \int_\delta f\, ds$$

DIMOSTRAZIONE: $\vec{\delta}'(s) = \alpha'(s)\, \vec{\gamma}'(\alpha(s)) \quad \forall s \in [c,d]$

$$\int_\delta f\, ds = \int_c^d f(\delta(s))\, \|\vec{\delta}'(s)\|\, ds$$

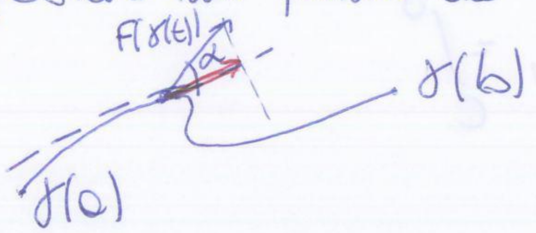
$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt$$

# • INTEGRALI DI LINEA (O DI 2ª SPECIE)

$\gamma : [a,b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ curva regolare

$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vettoriale

Vogliamo ad esempio calcolare il lavoro compiuto per spostare un punto da a a b:




$P \rightarrow$ vettore $\vec{F}(P)$ applicabile in $P$

$F \rightarrow$ campo continuo

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot \tau$$

Prendo la componente di F tangenziale alla curva

$\dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \tau(t)$ versore tangente al sostegno di $\gamma$ in $\gamma(t)$

$|F| \cos\alpha = |F|\,|\tau| \cdot \cos\alpha = F(\gamma(t)) \cdot \tau(t) \rightarrow$ ottengo la lunghezza della proiezione di $F(\gamma(t))$ lungo la semiretta tangente a $\gamma(t)$ generata dal vettore tangente.

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = \int [F(\gamma(t)) \cdot \tau(t)]$$

$\hookrightarrow$ funzione scalare che posso integrare su $\gamma$

Devo quindi:

$$\int [F(\gamma(t)) \cdot \tau(t)]\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$(F(\gamma(t)) \cdot \tau(t))\, \|\gamma'(t)\| = \left( F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \cdot \|\gamma'(t)\| =$$

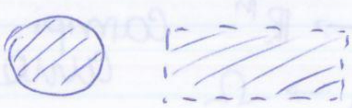
$$= \left( F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \cdot \frac{1}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}} \cdot \cancel{\|\gamma'(t)\|}$$

$$\int_\gamma F\, dP = \int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot \tau(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

# • SUPERFICI / INTEGRALI

$\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua

A aperto, $A \neq \emptyset$, connesso



$$(u,v) \to \left.\begin{array}{l} x = \sigma_1(u,v) \\ y = \sigma_2(u,v) \\ z = \sigma_3(u,v) \end{array}\right\} = \sigma(u,v)$$

$\sigma(A)$ è il sostegno della superficie

$$\begin{cases} x = m_1 u + m_1 v = \sigma_1(u,v) \\ y = m_2 u + m_2 v = \sigma_2(u,v) \\ z = m_3 u + m_3 v = \sigma_3(u,v) \end{cases} \qquad \vec{m}, \vec{m} \quad (u,v)$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (\sigma(\mathbb{R}^2)) = (u,v) \longmapsto \sigma(u,v)$

= piano generato da $\vec{m}$ e $\vec{m}$ passante per $(0,0,0)$

CONDIZIONI:

1) Se $\sigma$ è continua e iniettiva $\to \sigma(A)$ è una "superficie"

2) • $\sigma$ di classe $C^1$ su A (cioè che tutte le derivate siano continue $\forall (u,v) \in A$)

• $J\sigma \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$J\sigma = \begin{pmatrix} \nabla\sigma_1 \\ \nabla\sigma_2 \\ \nabla\sigma_3 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 2 \qquad \text{ha rango massimo } 2 \quad \forall (u,v) \in A$$

Si dice che $\sigma$ è regolare.

$$J\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Rango di $J\sigma(u,v) = 2 \iff$ i due vettori colonna sono linearmente indipendenti

• $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\bar{u},\bar{v})$ generano un piano passante per $\sigma(\bar{u},\bar{v}) = P$ se sono linearmente indipendenti.

Si può dimostrare: $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\bar{u},\bar{v}) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\bar{u},\bar{v}) = N(u,v)$

→ Massa della lamina $= \int_\sigma \rho \, d\sigma$

Coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_\sigma x \rho \, d\sigma$$

# • CAMBIAMENTO DI PARAMETRIZZAZIONE

$A' \xrightarrow{\Phi} A$

$\Phi$ cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^2$

$\Phi \in C^1(A')$, $\det J\Phi \neq 0$ su $A$

$\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare e

$\delta : A' \to \mathbb{R}^3$ sup regolare

differiscono per un cambio di parametrizzazione se

$\exists\, \Phi : A' \to A$ camb. di variabili regolare tale che

$$\begin{tikzcd} (s,t)\, A' \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\delta"'] & A\,(u,v) \arrow[d, "\sigma"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$\delta(s,t) = \sigma(\Phi(s,t)) \qquad \forall (s,t) \in A'$

è vero che:

1) $\delta(A') = \sigma(A)$ hanno lo stesso sostegno

2) $\sigma$ è regolare $\Leftrightarrow$ $\delta$ è regolare

3) $\sigma$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\delta$ è iniettiva (superf. semplici)

$$\vec{N}\delta(s,t) = \frac{\partial \delta}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \delta}{\partial t}(s,t)$$

$$[\det J\Phi(s,t)]\, \vec{N}\sigma(\Phi(s,t)) =$$

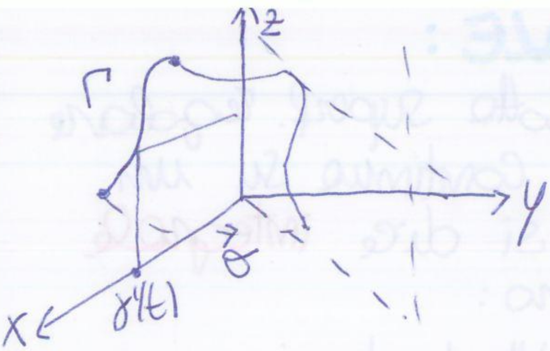
$$= (\det J\Phi(s,t))\, \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\Phi(s,t)) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\Phi(s,t))$$

→ 1) Se $\det J\Phi(s,t) > 0 \qquad \forall (s,t) \in A'$

$\vec{N}\delta$ e $\vec{N}\sigma$ hanno lo stesso verso e le superfici hanno lo stesso orientamento

2) Se $\det J\Phi(s,t) < 0 \qquad \forall (s,t) \in A'$

$\vec{N}\delta$ e $\vec{N}\sigma$ hanno verso opposto e le superf. hanno orientamento opposto.




In coordinate cilindriche, è facile vedere che $\Sigma$ si può parametrizzare nel seguente modo:

$$\sigma(t,\theta): \begin{cases} x = \gamma_1(t)\cos\theta \\ y = \gamma_1(t)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \gamma_2(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} a \le t \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$\sigma : K = [a,b] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

è una parametrizzazione della superf. di rotazione.
Osserviamo che fissare un angolo $\theta$ significa fissare un semipiano $\pi_\theta$ passante per l'asse $z$.
Con $\theta$ fissato, $\Sigma \cap \pi_\theta$ è una copia di $\Gamma$ ottenuta per rotazione di un angolo $\theta$.

Per definizione:

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_K \|N(t,\theta)\|\, dt\, d\theta$$

Calcoliamo:

$$N(t,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \gamma_1'(t)\cos\theta & \gamma_1'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta & \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1(t)\,\mathrm{sen}\,\theta & \gamma_1(t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

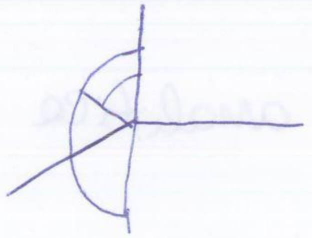
$$= -\gamma_2'(t)\gamma_1(t)\cos\theta\,\vec{i} - \gamma_2'(t)\gamma_1(t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j} + \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\,\vec{k}$$

$$\|N(t,\theta)\| = \sqrt{\gamma_2'(t)^2\cdot\gamma_1(t)^2 + \gamma_1(t)^2\cdot\gamma_1'(t)^2} = |\gamma_1(t)|\,\|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow \iint_K \|N(t,\theta)\|\, dt\, d\theta = \iint |\gamma_1(t)|\cdot\|\gamma'(t)\|\, dt\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_a^b |\gamma_1(t)|\cdot\|\gamma'(t)\|\, dt$$

Area superficie sferica: di raggio R



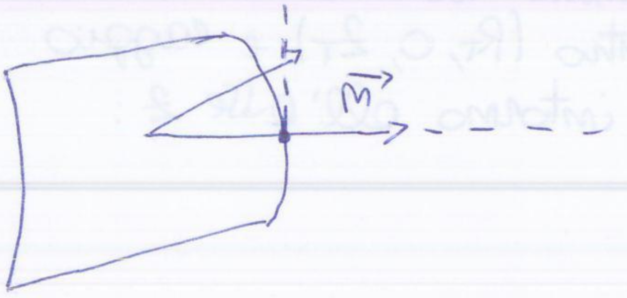
$$\begin{cases} x = R\,\text{sen}\,\varphi \\ y = 0 \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_\Gamma x\, ds = 2\pi \int_0^\pi R\,\text{sen}\,\varphi \cdot \|\gamma'(\varphi)\|\, d\varphi =$$
$$= 2\pi \int_0^\pi R^2 \,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi = 4\pi R^2$$

## • INTEGRALE DI FLUSSO:

L'integrale di flusso ha particolare rilevanza nelle applicazioni. È utile per esempio per calcolare la portata di una conduttura, vale a dire il volume di liquido che attraversa la sezione della conduttura nell'unità di tempo. Esso è utile anche a calcolare la corrente elettrica che attraversa nell'unità di tempo la sezione di un cavo.

Data una calotta superficiale regolare $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$, e dato un campo vettoriale $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo su un insieme A che contiene il sostegno $\Sigma: \sigma(K)$ di $\sigma$, per calcolare il flusso di F attraverso $\Sigma$ si procede così:



- PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI FLUSSO:

1) È lineare, cioè se F e G sono campi vettoriali definiti su A e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_\sigma (\alpha F + \beta G) \cdot \vec{n} = \alpha \int_\sigma F \vec{n} + \beta \int_\sigma G \vec{n}$$

2) Additività rispetto al dominio:

Se $\sigma$ è una superficie regolare a tratti, il cui sostegno è $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \Sigma_K$

e $\sigma_i : K_i \to \mathbb{R}^3$ è la parametrizzazione delle calotte superficiali:

$$\int_\sigma F \cdot \vec{n} = \int_{\sigma_1} F \cdot \vec{n}_1 + \ldots + \int_{\sigma_K} F \cdot \vec{n}_K$$

- OSSERVAZIONE: Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ compatto la cui frontiera sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti e $g : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$. Allora:

1. Se $\Sigma$ è la superficie definita da:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in K,\ z = g(x, y)\}$$

$$N(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right)$$

2. $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in K,\ y = g(x, z)\}$

$$N(x, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, z), -1, \frac{\partial g}{\partial z}(x, z)\right)$$

3. $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in K,\ x = g(y, z)\}$

$$N(y, z) = \left(1, -\frac{\partial g}{\partial y}(y, z), -\frac{\partial g}{\partial z}(y, z)\right)$$

Più in generale, partendo dalla seguente formula:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

dico che: $\omega$ è una 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^m$

$$\omega = f_1(x)\, dx_1 + \dots + f_m(x)\, dx_m$$

$$x \longmapsto \{\text{applic. lineare } f_1(x)\, dx_1 + \dots + f_m(x)\, dx_m\}$$

- $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \longleftrightarrow f_1 dx_1 + \dots + f_m dx_m$

Prendiamo una curva:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \vdots \\ x_m = \gamma_m(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx_1 = \gamma_1'(t)\, dt \\ \vdots \\ dx_m = \gamma_m'(t)\, dt \end{cases}$$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int (F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \dots + F_m(\gamma(t) \cdot \gamma'(t))\, dt =$$

$$= \int_\gamma F_1(\gamma(t))\, dx_1 + \dots + F_m(\gamma(t))\, dx_m = \int \omega$$

Se ho: $\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m$

$\gamma = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m =$$

$$= \int_a^b (F_1(\gamma(t))\, \gamma_1'(t)\, dt + \dots)$$

- $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma f\, dx \qquad \omega = f dx + 0 dy$$

$$\int_\gamma (f, 0)\, dP = \int f(\gamma(t))\, \gamma_1' dt + 0 \cdot \cancel{\gamma_2'(t)}\, dt$$

## • FORMULA DI GAUSS-GREEN:

- $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega$ ap $\neq \emptyset$
- $K$ aperto con bordo
- $\partial K$ orientato positivamente

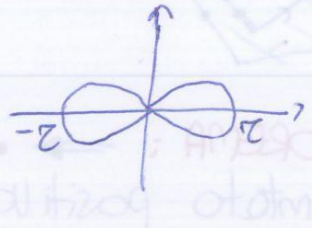
$$\Rightarrow \int_{\partial K} f \, dy = \iint_K \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial K} (0, f) \cdot dP$$

$$\int_{\partial K} f \, dx = -\iint_K \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial K} (f, 0) \cdot dP$$

## • LEMNISCATA DI BERNOULLI:

Curva di equaz.: $(x^2+y^2)^2 = r(x^2-y^2)$

In coord. polari: $\rho = r\sqrt{\cos 2\theta}$




## • ROTORE DI F:

$F$ di classe $C^1(\Omega)$

$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathrm{rot}\, F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Invece di $x, y, z$: $x \to x_1$, $y \to x_2$, $z \to x_3$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\vec{k} =$$

$$= \nabla \wedge F \text{ (curl)}$$

## • CALOTTA SUPERFICIALE CON BORDO:

$K$ aperto con bordo di $\mathbb{R}^2$

$\mathring{K} \neq \emptyset$, compatto, connesso

$\partial K = \cup$ di num. finito di curve chiuse, semplici, regolari a tratti e i sostegni sono disgiunti.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1(x,y) & F_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{N} \rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{k} \qquad \vec{N} = (0, 0, 1)$$

$$\iint_\sigma \text{rot}\, F \cdot \vec{n} = \iint_K \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(0, 0, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial K} F \cdot dP = \int_{\partial \sigma} F\, dP$$

- **TEOR. (DIVERGENZA):**

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$

$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\right)(x_1, \dots, x_n)$

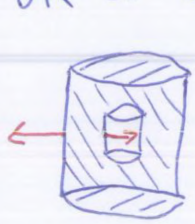
$\text{div} F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial y}\right)(F_1, \dots, F_n)$

- **DEF.:**
- $K$ aperto con bordo in $\mathbb{R}^3$
- $\mathring{K} \neq \emptyset$
- $K$ compatto, connesso
- $\partial K$ (= frontiera topologica) è l'unione di un numero finito di calotte superf. regolari il cui sostegno si interseca al più lungo un arco di curva.

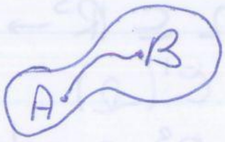
$\partial K$ è orientato in senso uscente al solido

$\partial K$ = superf. laterali + le due circonferenze



• PROP.: $\Omega$ aperto, $\neq \emptyset$, connesso

- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo su $\Omega$
- $g: \Omega \to \mathbb{R}$ potenziale di $F$ su $\Omega$
- $\gamma: [a, b] \to \Omega \quad \gamma(a) = A, \ \gamma(b) = B$




$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = g(B) - g(A)$

DIMOSTRAZIONE: $h(t) = g(\gamma(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}$ è di classe $C^1$ su $(a, b)$

$h'(t) = \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \qquad h'(t)$ continua

$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b h'(t)\, dt$

$= h(b) - h(a) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = g(B) - g(A)$

• COROLLARIO: Se $\Omega$ è connesso, $F$ è conservativo su $\Omega$

$\Rightarrow$ 1) $\int_\gamma F \cdot dP$ con $\gamma$ che unisce A e B e sostegno contenuto in $\Omega$


dipende solo da A e B, non da $\gamma$

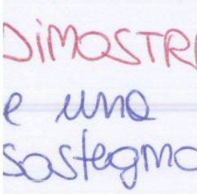
2) $\int_\gamma F \cdot dP = g(B) - g(A) \qquad \forall g$ potenziale di $F$

• PROP.: Se:

- $\Omega$ è aperto, connesso, $\neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo conservativo su $\Omega$
- $g_1, g_2$ sono potenziali di $F$ su $\Omega$

$\Rightarrow \exists\, K \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) + K \quad \forall x \in \Omega$

DIMOSTRAZIONE: Fisso $A \in \Omega$ e considero un $\forall x \in \Omega$ e una curva regolare che unisce A ad $x$, con il sostegno $\subseteq \Omega$ ($\exists$ perché $\Omega$ è connesso).




$\int_{\gamma_x} F \cdot dP = g_1(x) - g_2(A) = g_2(x) - g_2(A) \quad \forall x \in \Omega$

$\Rightarrow g_1(x) = g_2(x) \underbrace{- g_2(A) + g_1(X)}_{K}$

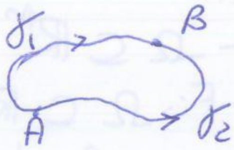
$$\int_{\gamma} F\, dP = \int_{\gamma_1+\gamma_2} F\, dP = \int_{\gamma_1} F\, dP + \int_{\gamma_2} F\, dP =$$

$$= \int_{\gamma_1} F\, dP - \int_{-\gamma_2} F\, dP = \text{curva da } A \text{ verso } B - \text{curva da } A \text{ verso } B = 0$$

Quindi l'integrale dipende solo dagli estremi e non dalla curva in cui mi muovo.

Adesso: ③ $\rightleftarrows$ ②

Se $\oint_{\gamma} F\, dP = 0 \rightarrow \int_{\gamma_1} F\, dP = \int_{\gamma_2} F\, dP$




$\gamma_1$ e $\gamma_2$ curve che uniscono A e B

$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ curva chiusa

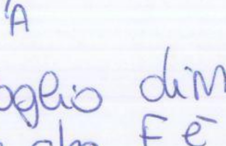
$$\oint_{\gamma} F\, dP = 0 = \int_{\gamma_1-\gamma_2} F\, dP = \int_{\gamma_1} F\, dP + \int_{-\gamma_2} F\, dP =$$

$$= \int_{\gamma_1} F\, dP - \int_{\gamma_2} F\, dP = 0 \implies \int_{\gamma_1} F\, dP = \int_{\gamma_2} F\, dP$$

Adesso: ② $\rightleftarrows$ ①

So che $\forall$ curva $\gamma$ che unisce A e B (sostegno $\subseteq \Omega$) $\int_{\gamma} F\, dP$ è lo stesso

Fisso $A \in \Omega$, prendo $x \in \Omega$ e chiamo $\gamma_x$ una $\forall$ curva che unisce A e x (sostegno $\subseteq \Omega$)




$$g(x) = \int_{\gamma_x} F\, dP$$

Voglio dimostrare che $g(x)$ è un potenziale di F su $\Omega$ (e che F è conserv. su $\Omega$) cioè:

$\nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega$

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall i = 1 \dots m$

Dimostro che $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = F_1(x) \quad \forall x \in \Omega$

$\gamma_h = (x_1 + t, x_2, \dots, x_m)$ e se deriva resta: $\vec{N} = (1, 0, 0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_1+h, x_2, \dots, x_m) - g(x_1, \dots, x_m)}{h} =$$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ su $\Omega$ $i,j = 1, 2, 3$

DIMOSTRAZIONE: se F è conservativo su $\Omega \to \exists g$ potenziale di F, cioè $\exists g$

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}\right)(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^1(\Omega) \to g \in C^2(\Omega)$$
$\forall i = 1, \dots, m$

$\to$ vale il teor. di Schwarz: $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$

$\forall x \in \Omega$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x) \\ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) \end{aligned}\right\}$$ sono uguali per il teorema di Schwarz

Dico che F è irrotazionale su $\Omega$ se

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ $\forall x \in \Omega$

$\forall i, j = 1, \dots, m$

- TEOREMA:

F è conserv. e di classe $C^1$ su $\Omega \to$ F è irrotazionale

- COROLLARIO: se $F \in C^1(\Omega)$ e F non è irrotazionale

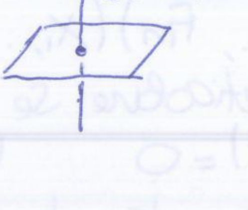
$\exists x \in \Omega$, $\exists i, j = 1, \dots, m$ tali che $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$

F non è conservativo

- ATTENZIONE:

$\exists$ campi con $\mathrm{rot} F = 0$ che non sono conservativi

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$




$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = -\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\partial A = \gamma + \delta$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = 0$$

'' GREEN

$$\int_{\partial A} F\, dP = \int_\gamma F\, dP + \int_\delta F\, dP = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F\, dP = -\int_\delta F\, dP$$

In $\mathbb{R}^3$: Voglio dimostrare che $\forall \gamma$ curva chiusa semplice con il sostegno $\subseteq \Omega$, $\int_\gamma F \cdot dP = 0$.
Prendo $\gamma$ curva chiusa semplice, poiché $\Omega$ è sempl. connesso $\exists\, \sigma: K \to \mathbb{R}^3$ calotta superf. con bordo di cui $\gamma$ è il bordo
$\partial \sigma = \gamma$
Per il teorema di Stokes:

$$\int_{\gamma = \partial\sigma} F\, dP = \int_\sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{poiché } \operatorname{rot} F = 0$$

# • SUCCESSIONI

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad a(n) = a_n$

oppure $\operatorname{dom} F = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \}$

$$\left.\begin{array}{l} \{ a_n = (-1)^n \}_{n \in \mathbb{N}} \\ \{ a_n \}_n \in \mathbb{N} \\ \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1} = \left\{ \frac{1}{n},\ n \geq 1 \right\} = \frac{1}{n},\quad n > 1 \end{array}\right\} \text{notazioni}$$

Una successione soddisfa definitivamente una certa proprietà se $\exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0$ la successione soddisfa quella proprietà.

$$\{ n^2 - 4 \}_{n \geq 0} \qquad \begin{array}{l} n = 2 \to 4 - 4 = 0 \\ n = 3 \to 9 - 4 = 5 > 0 \\ n = 4 \to n^2 - 4 > 0 \end{array}$$

$\forall a,\ (a, +\infty) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \to +\infty$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.

I limiti si possono calcolare solo con punti di accumulaz., quindi ha senso usare solo $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

**COROLLARIO:** Se $\exists \{a_{mk}\}$ $\exists \{a_{mk}\}$ sottosucc. di $\{a_m\}$ tale che: $\lim_{K \to +\infty} a_{mK} = l_1 \neq \lim_{h \to +\infty} a_{mh} = l_2$

$\Rightarrow \nexists \lim_{m \to +\infty} a_m$

In particolare: Se $\lim_{K \to +\infty} a_{2K} = l_1$ $\neq$ $\lim_{K \to +\infty} a_{2K+1} = l_2$ $\Rightarrow \nexists \lim_{m \to +\infty} a_m$

Infatti se prendo: $a_m = (-1)^m$ non ha limite perché:

$a_{2K} = (-1)^{2K} = 1 \to 1$ per $K \to +\infty$

$a_{2K+1} = (-1)^{2K+1} = -1 \to -1$ per $K \to +\infty$

**TEOREMA:**

Se $a_{2K} \to l$, $a_{2K+1} \to l$ $\Rightarrow \exists \lim_{m \to +\infty} a_m = l$

$\exists m_0 \quad 2K \geq m_0$

$\exists m_1 \quad 2K+1 \geq m_1$

**DEF.:** $\{a_m\}$ è crescente se $\forall m, m \in \mathbb{N}$, $m < m \to a_m < a_m$

**PROP:** $\{a_m\}$ è crescente (strett.) $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq a_{m+1}$ ($<$)

$\{a_m\}$ è decrescente (strett.) $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, a_m \geq a_{m+1}$ ($>$)

**DIMOSTRAZIONE:** $m < m \quad m - m = p \quad m = m + p$

Se $a_m$ è crescente $\to a_m \leq a_{m+1} \quad \forall m$

Se $a_m \leq a_{m+1}$ $\forall m$ $\to a_m \leq a_{m+1} \leq a_{m+2} \leq \dots \leq a_{m+p}$ $\Rightarrow a_m \leq a_m$

**TEOREMA:** Se $\{a_m\}$ è una successione monotona, $\exists \lim_{m \to +\infty} a_m$

In particolare:

- Se $a_m$ è crescente, $\lim_{m \to +\infty} a_m = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{a_m\}$
- Se $a_m$ è decrescente, $\lim_{m \to +\infty} a_m = \inf_{m \in \mathbb{N}} \{a_m\}$

Supponiamo ora che $q > 1$:
possiamo applicare la parte precedente della dimostrazione alla successione $\frac{1}{a_n} = b_n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \to \frac{1}{q} < 1$$

$$\to \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

• SCALA DEGLI INFINITI:

$$\lg n \quad n^\alpha \quad \underset{q>1}{q^n} \quad n! \quad n^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = \begin{cases} 0 \to n^n \text{ è } \infty \text{ di ordine superiore a } n! \\ \end{cases}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Calcolo: $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

Riferendoci al limite notevole:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

lo applico al mio caso:

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right]^n = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1 \to \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \to n! \text{ è } \infty \text{ di ordine inferiore di } n^n$$

# SERIE NUMERICHE

$\{a_n\}_{n \geq 0}$

Devo dare significato a questa somma infinita:

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \geq 0} a_n$

Possiamo costruire un'altra successione:

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + a_n$

$\vdots$

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n$: ridotta ennesima

$\{S_n\} \to$ è una successione delle ridotte

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} S \in \mathbb{R} & \text{la serie converge a } S \text{ e } S \text{ si chiama somma della serie} \\ +\infty & \text{converge positivamente} \\ -\infty & \text{diverge negativamente} \\ \nexists & \text{la serie è indeterminata o oscillante} \end{cases}$

## NOMENCLATURA:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\quad a_n \to$ termine generale della serie

$S_n = a_0 + \dots + a_n \to$ ridotta n-esima

- Achille e la tartaruga:


$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$

$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \qquad b_n = a_n$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n \geq 0} b_n$ hanno lo stesso comportamento

DIMOSTRAZIONE:

$S_n = \underbrace{a_0 + \ldots + a_{n_0}}_{S_{n_0}} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n$

$t_n$(ridotto) $= \underbrace{b_0 + \ldots + b_{n_0}}_{t_{n_0}} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n$

I primi termini possono essere uguali o meno, ma non importa; devono essere uguali gli ultimi.

$t_n = S_n - S_{n_0} + t_{n_0}$

$\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n_0} + t_{n_0})$

Se $\exists \lim S_n = S \in \mathbb{R} \to \lim_{n\to+\infty} t_n = S \underbrace{- S_{n_0} + t_{n_0}}_{\text{questi sono termini finiti che all'infinito non hanno peso}} \in \mathbb{R}$

Se $\exists \lim S_n = \pm\infty \to \lim_{n\to+\infty} t_n = \pm\infty$

Se $\nexists \lim S_n \to \nexists \lim t_n$

• CRITERIO NECESSARIO DI CONVERGENZA:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to$ so che questa serie è convergente, allora:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad$ Se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim a_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ converge

• ESEMPIO: $\sum \lg(1+\frac{1}{n})$ è divergente $\qquad a_n = \lg(1+\frac{1}{n}) = 0$ per $n \to +\infty$

Quindi se $a_n = 0$, non significa che la serie converge

DIMOSTRAZIONE: per ipotesi:

$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad \exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$S_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \to \exists \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE: $t_n = \lambda a_0 + \ldots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + \ldots + a_n)$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \lambda(a_0 + \ldots + a_n) = \begin{cases} \lambda S & \text{se } \sum a_n \text{ converge} \\ \pm\infty & \text{se } \sum a_n \text{ diverge} \\ \nexists & \text{se } \sum a_n \text{ è indeterminato} \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ $\quad \sum 0 \cdot a_n = \sum 0 = 0, \quad S_n = 0$

• SOMMA DI SERIE:

| $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ | $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ | $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \neq \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n)$ |
|---|---|---|
| $S$ | $t$ | $S + t$ |
| div $+\infty$ | $t$ | div $+\infty$ |
| div $-\infty$ | $t$ | div $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | ? |
| indet. | indet. | ? |

DIMOSTRAZIONE: Siano $S_n = a_0 + \ldots + a_n$

$t_n = b_0 + \ldots + b_n$

$\Sigma = (a_0 + b_0) + \ldots + (a_n + b_n)$

Vale la proprietà associativa

$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n)$

$= S_n + t_n =$ ridotta n-esima di $\Sigma(a_n + b_n)$

$\lim_{n\to+\infty} (S_n + t_n) = S + t$ CASO FINITO (I°)

• ESEMPIO:

$\sum n = \sum a_n$ $\quad\quad \sum(-n) = \sum b_n$

div a $+\infty$ $\quad\quad$ div a $-\infty$

$\sum(n - n) = 0 = \sum 0$ $\quad\quad$ converge a $0$

## CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad a_n, b_n \geq 0$ (definitivamente)

Se $a_n$ e $b_n$ hanno lo stesso ordine di grandezza per $n \to +\infty$, cioè se

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\to$ le due serie hanno lo stesso comportamento

In questo caso dirò che se una serie diverge, diverge anche l'altra, se converge una converge l'altra.

DIMOSTRAZIONE: Se $\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$ perché $\frac{a_n}{b_n} \geq 0$

Posso scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $l - \varepsilon > 0$

Per definizione di limite, fissato $\varepsilon$

$\exists n_0 \; n \geq n_0 \to 0 < l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$

moltiplico per $b_n > 0$:

$0 < b_n(l - \varepsilon) < a_n < b_n(l + \varepsilon)$

Uso il I° criterio del confronto per dimostrare che:

1) Se $\sum a_n$ converge $\to \sum(l-\varepsilon) b_n$ converge $\to \sum b_n$ conv.

2) Se $\sum b_n$ converge $\to \sum(l+\varepsilon) b_n$ converge $\to \sum a_n$ converge

$\sum a_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum b_n$ converge

$(p \to q) \Longleftrightarrow (\text{non } q \to \text{non } p)$

Da qui segue:

$\sum a_n$ diverge $\Longleftrightarrow \sum b_n$ diverge

## CRITERIO DEL RAPPORTO:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \geq 0$

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

1) Se $l < 1 \to \sum a_n$ converge

2) Se $l > 1 \to \sum a_n$ diverge

3) Se $l = 1 \to$ il criterio non dà informazioni

$0,07 = 7 \sum_{m=2} \left(\frac{1}{10}\right)^m = 7\left(\frac{10}{9} - 1 - \frac{1}{10}\right) = 7 \cdot \left(\frac{100-90-9}{90}\right) =$

$= 7 \cdot \frac{1}{90} = \frac{7}{90}$

$0,07 = \frac{3}{10} + \frac{7}{90} = \frac{27+7}{90} = \frac{34}{90}$

2) $0,\overline{9} = 1$

$9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots$

$= \sum_{m=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-m} = 9\left[\frac{1}{1-1/10} - 1\right] = 9\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

3) $0,\overline{81} = 81 \cdot 10^{-2} + 81 \cdot 10^{-4} + \dots$

$81 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{2m} = 81 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^m$

## • LEGAME TRA INTEGRALI IMPROPRI E SERIE NUMERICHE:

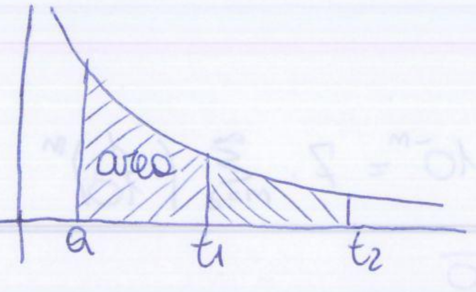
$f$ decrescente su $[a, +\infty)$

$\rightarrow f$ è integrabile su $\forall$ intervallo $[a, b]$, quindi si può studiare il comportamento

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{converge} \\ \pm\infty & \text{diverge} \\ \nexists & \text{indeterminato} \end{cases}$$

Se $f(x) \geq 0 \rightarrow F(t) = \int_a^b f(x)\,dx$ è crescente e $\geq 0$, e

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \begin{cases} l \geq 0 \\ +\infty \end{cases}$$




la funzione cresce perché man mano aggiungo termini positivi.

$t_1 < t_2 \rightarrow F(t_1) \leq F(t_2)$

Se $f(x) \geq 0$ e integrabile su $\forall [a, b]$, allora:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \lim_{m \to +\infty} \int_a^m f(x)\,dx \quad \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq a$$

$\Rightarrow t_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \underbrace{\int_1^{n+1} f(x)\,dx}_{m \leq l} \leq \underbrace{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)}_{l}$

$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx$

$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx \quad \lim_{n\to+\infty}$ su $l \in \mathbb{R}$

Se $\lim_{n\to+\infty} S_n = l \in \mathbb{R} \rightarrow$ per il teor. del confronto sui limiti

$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ converge a $m \leq l$

ma $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente

Se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ converge

$\rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ converge

$\Rightarrow f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad 1 < \alpha < 2$

$\sum \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha \geq 2 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$ decrescente

Ho questa funzione, a cui associo una serie:

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad \alpha \neq 1$

$= \int_1^t \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} - 1\right) =$

$\Rightarrow$ se $\alpha > 1 \rightarrow 1-\alpha < 0$, $\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge $\forall \alpha > 1$

2) Se $a_n$ ha ordine superiore o uguale ad $\alpha > 1$

$\rightarrow a_n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$ per $\forall \beta \in (1, \alpha)$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{\frac{1}{n^\beta}} < \varepsilon$$

$$0 \leq a_n < \varepsilon \cdot \frac{1}{n^\beta}$$

$\Sigma \frac{1}{n^\beta}$ converge $\rightarrow \Sigma a_n$ converge per confronto

ESEMPIO:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ $\quad e^{-n^2}$ è un infinitesimo di ordine > ad ogni potenza di $\frac{1}{n^\alpha}$

$\rightarrow \Sigma e^{-n^2}$ converge

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ $\quad \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha}{n^n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \Sigma \frac{1}{n^n}$ converge

3) $\Sigma \frac{e^{-n}}{\sqrt{n^5}} = \Sigma \frac{e^{-n}}{n^{5/2}}$

$$\frac{\frac{e^{-n}}{n^{5/2}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{e^{-n}}{n^{5/2}} \cdot n^2 = \frac{e^{-n}}{n^{1/2}} \rightarrow 0$$

$\rightarrow \frac{e^{-n}}{n^{5/2}}$ è un infinitesimo di ordine > di 2, quindi > 1

$\rightarrow$ la serie converge

DIMOSTRAZIONE:

$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots \geq 0$ serie decrescente

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$

$S_0 = (-1)^0 b_0 = b_0 \quad \geq S_1 = b_0 + (-1)^1 b_1 = b_0 - b_1$

$S_2 = b_0 - \underbrace{b_1 + b_2}_{\leq 0} \leq S_0 \qquad S_1 \leq S_3 = b_0 - b_1 + \underbrace{b_2 - b_3}_{\geq 0} \leq S_2$


$S_{2n+1}$ successione crescente
$S_{2n}$ succ. decrescente

$\Rightarrow S_{2n+1} \leq S_{2k} \qquad \forall n, \forall k$

$\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \sup \{S_{2n+1}\} = l$
$\qquad \Rightarrow l \leq m$
$\lim_{k \to +\infty} S_{2k} = \inf \{S_{2k}\} = m$

$\lim_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = l - m$

$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1}$

$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} \to 0$

$\lim_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = l - m$
$\qquad ||$
$\lim_{n \to +\infty} (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow l = m$

Abbiamo dimostrato che:

$\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n} = S$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = S$

$\Rightarrow$ la serie converge

- NOTA:

| | |
|---|---|
| $\sum (-1)^n \frac{1}{\lg n}$ converge<br>$\sum \frac{1}{\lg n}$ diverge | $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ diverge<br>$\sum \frac{1}{n^2}$ converge |
| $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge<br>$\sum \frac{1}{n}$ diverge | |

- DEF.:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

• TEOREMA:

Se $\sum a_n$ converge assolutamente $\rightarrow$ $\sum a_n$ converge (semplicemente) e

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

DIMOSTRAZIONE:

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$\sum b_n$ e $\sum c_n$ sono serie a termini positivi

$0 \leq b_n \leq |a_n| \quad \forall n$

$0 \leq c_n \leq |a_n|$

Per ipotesi: $\sum |a_n|$ converge

$\Rightarrow \sum b_n$ converge per il criterio del confronto

$\sum c_n$ " " "

# • SUCCESSIONI DI FUNZIONI:

$f_n(x) = x^n$

$f_n(x) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

- ESEMPIO: $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

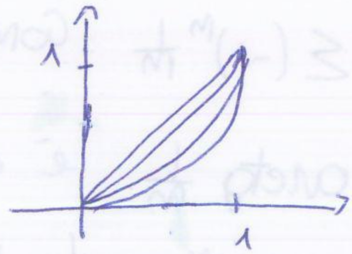
$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \nexists & x = -1 \quad (-1)^n \\ \nexists & x < -1 \quad (-1)^n |x|^n \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

La successione $f_n(x) = x^n$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{per } n \to +\infty$$

dove $f(x)$ è detta funzione limite

- CONVERGENZA PUNTUALE:




Data una successione $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ si dice che $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ su $I$ se

$\forall x \in I, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

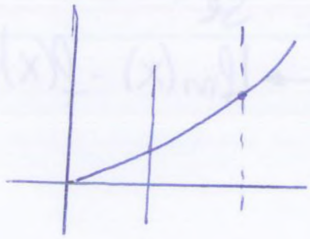
cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tale che $n \geq n_0$

$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

$|x^n - 0| < \varepsilon$

$(f(x) = 0)$

$$x^n \to \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



. su $[0, a]$ con $a < 1$, $x^n \rightrightarrows 0$ unif. su $[0, a]$

. su $[0, 1)$ non conv. unif. a $0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \ n \geq n_0 \ \ x \in I \to |x^n - 0| < \varepsilon$

$x^n < \varepsilon$ $\qquad 0 < x < 1$ $\quad$ se $\varepsilon < 1$, $\lg \varepsilon < 0$

$\lg x^n < \lg \varepsilon$ $\qquad \lg x < 0$

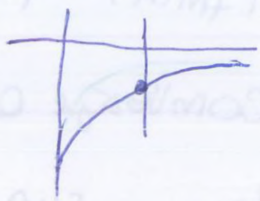
$n \lg x < \lg \varepsilon$

$n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg x} > 0$ $\quad$ se $\varepsilon < 1$

Se $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg x} \to x^n < \varepsilon$

. Adesso lavoro su $[0, a] \subseteq [0, 1)$

$\lg x$ è crescente $\to \lg$



$\lg x \leq \lg a \qquad \forall x \leq a$

$\dfrac{1}{\lg x} \geq \dfrac{1}{\lg a}$

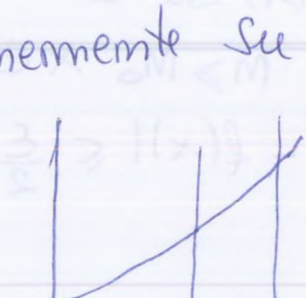
Se $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a} \geq \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg x}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

Se $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a} \Rightarrow x^n < \varepsilon$

allora $x^n$ converge uniformemente su $[0, a]$

Se $a > 1$, $\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg a} \to +\infty$



$f_n(x)$ non conv. unif. su $(0, +\infty)$

$$\sup_{x \in (0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} f_n(x) = 1 \not\to 0$$

quindi la successione è costante in 1 e non tende a 0.

Se prendo: $x \geq a > 0$ $\quad [a, +\infty)$ $\quad$ Ex: $a = 1/100$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \ n \geq n_0 \ \ x \geq \frac{1}{100} \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$

Se prendo $n_0 = 100$, $f_{n_0}(x) = 0$ $\quad \forall x \geq 1/100$

$\forall n \geq 100 \to f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [\frac{1}{100}, +\infty)$

**TEOREMA:**
$f_n(x)$ funz. continue su $I$ e $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su $I$
$\Rightarrow f(x)$ è continua su $I$.

**DIMOSTRAZIONE:** $\forall \bar{x} \in I, \exists B(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ /
$x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap I \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

Per dimostrarlo, dobbiamo sapere che:
la convergenza unif. dice che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \geq n_0 \ x \in I$
$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (*)

Scelgo $f_n$ che soddisfa (*), $f_n$ è continua per ipotesi su tutto $I$, quindi anche in $\bar{x}$, cioè:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap I$
$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(\bar{x})| < \varepsilon$ (**)

Fissato $\varepsilon$, scelgo $n$ in modo che (*) sia vera, e scelgo $\delta$ in modo che (**) sia vera.

$x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$:

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |\underbrace{f(x) - f_n(x)} + \underbrace{f_n(x) - f_n(\bar{x})} + \underbrace{f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})}|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\overset{(*)}{<} \varepsilon \text{ (conv. unif.)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(\bar{x})|}_{\overset{(**)}{<} \varepsilon \text{ (continuità)}} + \underbrace{|f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|}_{\overset{(*)}{<} \varepsilon}$$

$\to < 3\varepsilon$

Devo dimostrare che: $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \overset{?}{=} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ n \geq n_0 \to \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \overset{?}{<} \varepsilon$

$= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$

Poiché $f_n \rightrightarrows f$ su $[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ n \geq n_0 \ x \in [a,b] \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\circledast$ Se $0 \leq g \leq h$ su $[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b g \leq \int_a^b h$ (monotonia)

$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = 0$

-ESEMPIO: $f_n(x) = \cos x^n \quad x \in [0, \pi/4]$

$\int_0^{\pi/4} (\cos x^n)\,dx \ \xrightarrow[n\to+\infty]{?}$

$\cos x^n \qquad x \in [0, \pi/4] \subseteq [0,1)$

$x^n \to 0 \qquad \cos x^n = \cos 0 = 1 \quad \forall x \in [0, \pi/4]$

Se $\cos x^n \rightrightarrows f(x) = 1$ su $[0, \pi/4]$

$\sup_{x\in[0,\pi/4]} |\cos x^n - 1| = \sup (1 - \cos x^n)$

$1 - \cos x^n$ è crescente su $[0, \pi/4]$

$\sup_{x\in[0,\pi/4]} (1 - \cos x^n) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\right) = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x^n \rightrightarrows f(x) = 1$ per $n \to +\infty$ su $[0, \pi/4]$

• TEOR. DI DERIVAZIONE:

- $I$ intervallo aperto $f_n(x) \in C^1(I)$
  (cioè derivabile, con derivate continue su $I$)
- $\exists\, x_0 \in I \quad f_n(x_0) \to z \in \mathbb{R}$
- $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ unif. su $\forall [a,b] \subseteq I$

$\Rightarrow$ • $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ unif. su $\forall [a,b] \subseteq I$
• $f(x) \in C^1(I)$
• $f'(x) = g(x)$

$[f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n'(x) \to f'(x)]$

DIMOSTRAZIONE:

① $f_n'(x)$ per ipotesi sono funzioni continue su $I$
$f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ su $\forall [a,b] \subseteq I$ ~~$[\underset{x}{\cdot}]$~~

② per il teor. fondamentale del calcolo integrale, se $f_n(x)$ è di classe $C^1$. Preso $x_0 \in I$

$$\Rightarrow f_n(x) = f_n(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt}_{f_n(x) - f_n(x_0)}$$

So che $f_n(x_0) \to c$ per $n \to +\infty$
Per il teor. sull'integrazione:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t) \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \text{ sui compatti}$$

$$f_n(x) \to z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = f(x)$$

puntualmente su $I$
$f(x)$ è derivabile

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = g(x), \ \forall x \in I$$

- $\sum f_n(x)$ conv. uniformemente a $S(x)$ su $I$ se $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ su $I$, cioè se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n_0(\varepsilon) \quad n \geq n_0 \quad x \in I \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

o equivalente

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |r_n(x)| = 0 \qquad r_n = \text{resto } n\text{-esimo}$$

- ESEMPIO:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge $\iff |x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$ la serie converge puntualm. su $(-1, 1)$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = S_n(x)$

Converge uniform.?

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right| = \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|$$

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$r_n'(x) = \frac{(n+1)x^n(1-x) - x^{n+1}(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)x^n - (n+1)x^{n+1} + x^{n+1}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1} - \cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2} = \frac{x^n}{(1-x)^2}(n+1-nx)$$

$r_n'(x) > 0 \iff n+1-nx > 0$

$n+1 > nx \rightarrow x < \frac{n+1}{n}$

$r_n(x)$ è crescente se $x < \frac{n+1}{n}$

Criterio sulla convergenza assoluta:
$\sum_{m=0}^{\infty} |f_m(x)|$ converge $\rightarrow \sum_{k=m+1} |f_k(x)|$ converge e

$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k$ = resto m-esimo di $\sum M_m$

Dato che $\sum M_m$ è convergente, il resto m-esimo di una serie convergente è uguale a zero.

$|S(x) - S_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k \quad \forall x \in I$

$S_m$ tende a $S$, quindi $\sum M_k \rightarrow 0$

$\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} \sup_{x \in I} |S(x) - S_m(x)| = 0$

e $\sum f_m(x)$ converge uniformemente.

• TEOREMA: $f_m(x)$ continue su $I$
Se $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ su $I$
$\Rightarrow S(x)$ è continua su $I$.

DIMOSTRAZIONE:
$S_m(x) = f_0(x) + \ldots + f_m(x)$ è continua su $I$, $\forall m$
Per ipotesi, $S_m(x) \rightrightarrows S(x)$ su $I$
$\Rightarrow S(x)$ è continua su $I$ per il teor. sulle successioni

• TEOREMA: $f_m(x)$ continue su $[a,b]$
$\sum f_m(x)$ converge unif. a $S(x)$ su $[a,b]$
$\Rightarrow \sum_{m=0} \int_a^b f_m(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum f_m(x)\right] dx = \int_a^b S(x)\,dx$

Si chiama teor. di integrazione termine a termine.

DIMOSTRAZIONE: $S_m(x) = S_0(x) + \ldots + S_m(x)$
$S_m(x) \rightrightarrows S(x)$ continue su $[a,b]$
$\Rightarrow \int_a^b S_m(x) \rightarrow \int_a^b S(x)\,dx$

Cioè: