NUMERO: 1222

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Meccanica delle Macchine

Prof. Eula

MECCANICA DELLE MACCHINE
(02IHSMA)
Ing. Biomedica

Programma del corso

Prof.ssa Gabriella EULA

Dip. di Ingegneria Meccanica ed Aerospaziale
(4° piano)
Tel. 011- 0906911
E-mail: gabriella.eula@polito.it

Programma delle lezioni

Scopo del corso e' di fornire i principali elementi teorici ed applicativi della Meccanica Applicata.

Richiami di Cinematica: cinematica del punto materiale; velocità e accelerazione di un corpo rigido; centro delle velocità; moti relativi; accelerazione di Coriolis; metodi grafici per la risoluzione dei problemi di cinematica; tipi di legge del moto; meccanismi articolati.

Accoppiamenti: rotoidale, prismatico, incastro; gradi di libertà.

Geometria delle masse: baricentri e momenti d'inerzia.

Statica e dinamica del corpo rigido: vincoli e reazioni vincolari; gradi di liberta' di un sistema; equazioni di equilibrio della dinamica; applicazioni delle equazioni di equilibrio per la risoluzione dei problemi di statica e dinamica; quantità di moto; energia cinetica.

Forze agenti negli accoppiamenti: aderenza e attrito; vari tipi di attrito; attrito nei perni; esempi, ipotesi dell'usura; meccanismi articolati con attrito nel perno.

Componenti meccanici basati sull'attrito: studio di freni a pattino; freni a tamburo; freni a disco; freni a nastro; frizioni piane e cenni di frizioni coniche; analisi di trasmissioni con flessibili (funi e cinghie); sistemi vite-madrevite.

Tipi di trasmissione del moto: ruote dentate cilindriche a denti diritti ed elicoidali, cenni su ruote coniche e sistema vite senza fine-ruota denti elicoidali, rotismi ordinari ed epicicloidali, transitori.

Caratteristiche generali di un sistema di trasmissione del moto*:* tipologie di accoppiamento motore-utilizzatore, rapporto di trasmissione, rendimento, condizioni di transitorio e di regime, riduzione dell'inerzia e delle forze/coppie ad un dato asse, macchine a regime periodico.

Vibrazioni: studio di vibrazioni libere e forzate smorzate in sistemi ad 1 grado di libertà; studio del transitorio, decremento logaritmico; studio del sistema forzato tramite il metodo dei vettori rotanti, risonanza, risposta in frequenza.

Meccanica delle Macchine

TEORIA & ESERCITAZ

EULA

ESERCITAZIONE: EULA

LABORATORIO: 1,30 h con relazione x incremento del voto (GIOV 14 2013, h 14,30-16,00)

LIBRI: FERRARESI, RAPARELLI "Meccanica applicata", CLUT → quasi tt argomenti

BELFORTE, "Meccanica applicata alle macchine" LBE → argomenti che mancano

Teorema 1. *Sia r un vettore posizione, rotante nel piano, di versore $\vec{\lambda}$ e con velocità angolare $\omega\vec{k}$, allora si ha*

$$\frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega\vec{k} \wedge r\vec{\lambda} \tag{1}$$

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che, per la linearità della derivata, possiamo considerare $r = \omega = 1$, senza perdere di generalità, poiché questi, in quanto costanti, si possono semplicemente portar fuori dalla derivazione. Per definizione il vettore velocità angolare $\vec{k}$ risulta ortogonale al piano definito dal vettore posizione $\vec{\lambda}$ e da quello velocità $\frac{d(\vec{\lambda})}{dt}$.
Ora, essendo $\vec{\lambda}$ un versore, si ha

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} = 1, \tag{2}$$

derivando ambo i membri dell'espressione precedente otteniamo

$$\frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \cdot \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \cdot \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} = 0,$$

ovvero

$$\frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \cdot \vec{\lambda} = 0. \tag{3}$$

Per definizione di velocità angolare si ha poi

$$\vec{k} = \vec{\lambda} \wedge \frac{d(\vec{\lambda})}{dt}. \tag{4}$$

Ricordando allora le proprietà dei prodotti misti si avrà

$$\vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\lambda} \wedge \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} \wedge \vec{\lambda} = (\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}) \wedge \frac{d(\vec{\lambda})}{dt} - \left(\vec{\lambda} \cdot \frac{d(\vec{\lambda})}{dt}\right) \wedge \vec{\lambda}$$

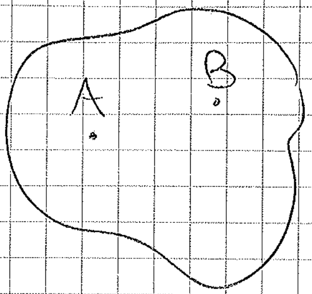
Ma, per la (2) e la (3), si ha

$$\vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \frac{d(\vec{\lambda})}{dt},$$

ovvero la tesi. □

CINEMATICA del CORPO RIGIDO nel PIANO

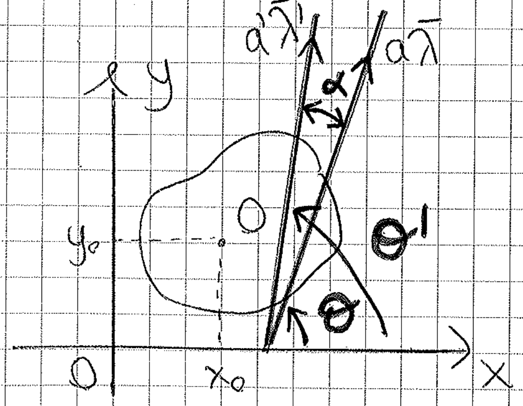
CORPO RIGIDO = se la distanza tra 2 punti qualsiasi non cambia (no molla)



$\overline{AB} = cost$

nel piano un corpo rigido ha bisogno di 3 coordinate per essere posizionato = 3 gradi di libertà di movimento che il corpo rigido ha nel piano (GdL)

sistema di riferimento cartesiano



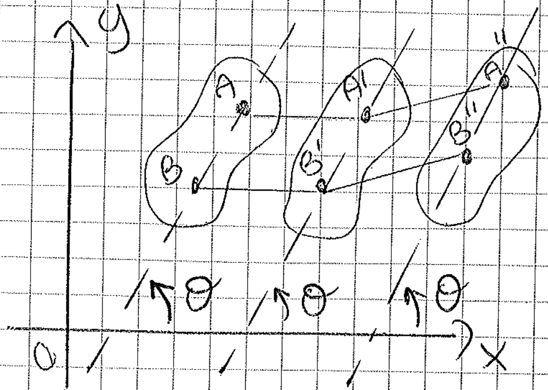
2 coordinate lineari x_0 e y_0 + una terza coordinata θ riferita a una retta orientata

GdL:

$$\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ \theta = \text{coordinata angolare} \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 264

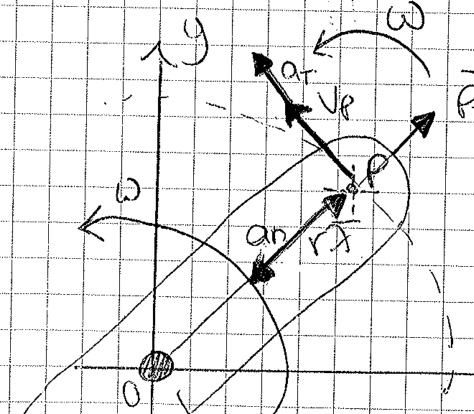
① MOTO DI TRASLAZIONE



la retta orientata rimane sempre // a se stessa → θ è costante → il corpo non ruota per cui $\boxed{\omega = 0, \dot{\omega} = 0}$

sia la
e le velocità dei suoi punti (ex A, B) sono uguali $\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_b}$ e lo stesso per l'accelerazione $\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_b}$ in modulo direzione e verso.

② MOTO ROTATORIO INTORNO AD UN PUNTO FISSO



ex: biella bloccata in O

punto P e al corpo rigido descrive attorno ad O una circo di raggio $\overline{PO}$

se $\overline{P-O} = r\bar{\lambda}$

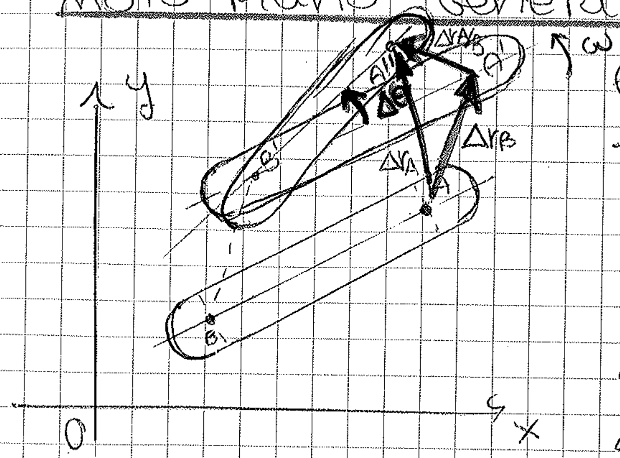
$\boxed{r\bar{\lambda} = \overline{P-O}}$ identifica la posizione di P ed è costante, è orientato e va da O a P

$$\bar{v}_p = \frac{d(r\bar{\lambda})}{dt} = \cancel{\frac{dr}{dt}}\bar{\lambda} + r\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = r\left[\omega\bar{k} \times \bar{\lambda}\right]$$

r = 0 xk r è costante

derivata di un vettore rotante

3) MOTO DI ROTOTRASLAZIONE O MOTO PIANO GENERICO



$A, B \rightarrow$ TRASLAZIONE $\rightarrow A', B'$

$\rightarrow$ ROTAZIONE di $\Delta\theta \rightarrow A'', B'$

$\overline{\Delta r_B}, \overline{\Delta r_{A/B}}, \overline{\Delta r_A}$

$\overline{\Delta r_A} = \overline{\Delta r_B} + \overline{\Delta r_{A/B}}$

$\Delta r_{A/B} = \Delta\theta\,(AB)$

ORA DERIVO:

$$\boxed{\overline{V_a} = \overline{V_b} + \overline{V_{a/b}} = \overline{V_b} + \omega\overline{k} \times (\overline{A-B})}$$

FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA

$\omega = 0$

$\overline{V_a} = \overline{V_b}$

TRASLAZIONE

$\overline{V_b} = 0$

$\overline{V_a} = \overline{V_{a/b}} = \omega\overline{k} \times (\overline{A-B})$

ROTAZIONE INTORNO AD UN PUNTO FISSO

$$\overline{a_a} = \overline{a_B} + \overline{a_{A/B}} = \overline{a_B} + \dot{\omega}\overline{k} \times (\overline{A-B}) - \omega^2(\overline{A-B})$$

$$\overline{a_a} = \overline{a_B} + \overline{a_{A/B\,tg}} + \overline{a_{A/B\,n}}$$

TEOREMA DI RIVALS

$\omega = 0, \dot{\omega} = 0$

$\overline{a_a} = \overline{a_B}$

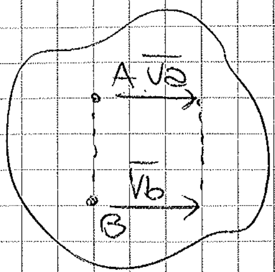
TRASLAZIONE

$a_B = 0$

$\overline{a_A} = \dot{\omega}\overline{k} \times (\overline{A-B}) - \omega^2(\overline{A-B})$

ROTAZIONE INTORNO A UN PUNTO FISSO

abbiamo un CASO LIMITE se:



velocità (le 2 rette sono //)
concordi e
uguali in modulo $|V_a| = |V_b|$
→ solo traslazione!

in tutti i casi abbiamo bisogno della retta AB, poi noti i moduli delle velocità tracciamo la retta che unisce i moduli. il Cv è ∩ tra AB e altra retta.

le formule sono quelle di prima.

nel caso della traslazione, il Cv è all'∞

$C_v = \infty, \; \omega = 0$

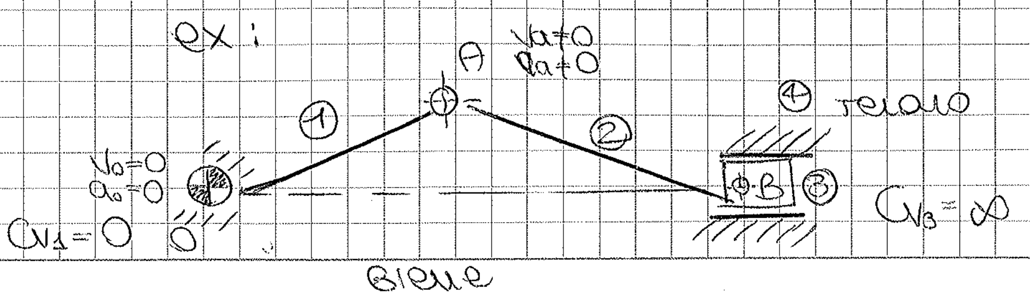
Questo è il metodo dei CV, solo x le velocità, poi vale sulle accelerazioni il teorema di Rivals

VINCOLI e GdL

<u>catena cinematica</u> = insieme di più corpi rigidi connessi da vincoli (ideali e reali) può essere:

- <u>semplice</u> = se ogni corpo rigido ha solo una o due coppie cinematiche (vincoli)

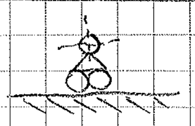
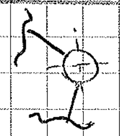
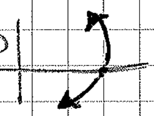
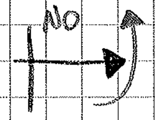
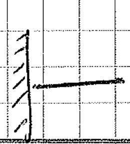
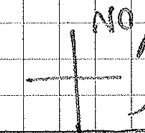
ex:



Sistema biella-manovella

biella

TABELLA DEI VINCOLI:

SIMBOLO	NOME	GdL	Gd VINCOLO		
	CARRELLO	2	1	NO 	C_2
	CERNIERA PIANA	1	2	NO 	C_1
	PATTINO	1	2	NO 	C_1
	INCASTRO	0	3	NO 	

$\circlearrowright$ ROTAZIONE

$\longrightarrow$ TRASLAZIONE ORIZ.

$\uparrow$ TRASLAZIONE VERT.

CALCOLO DEI GdL DI UN MECCANISMO

FORMULA DI GRÜBLER

$$\boxed{x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2}$$

x = NUMERO GdL

m = NUMERO CORPI COMPRESO IL TELAIO

C_1 = NUMERO VINCOLI A 1 GdL → PATTINI E CERNIERE

C_2 = NUMERO VINCOLI A 2 GdL → CARRELLI

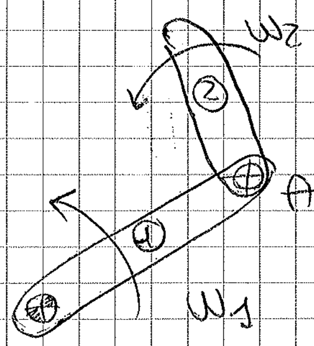
ESEMPIO Biella-manovella: (vedo disegno ↑)

$m = 4$ (AO, AB, 3, telaio 4)
$C_1 = 4$ (O, A, B, guida orizz. di 3)
$C_2 = 0$

$x = 3(4-1) - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$

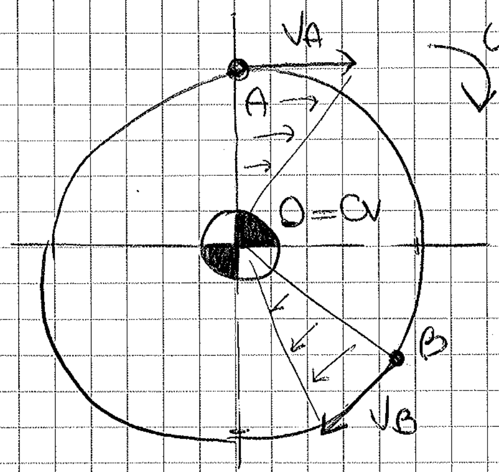
È QUINDI UN MECCANISMO A UN GRADO DI LIBERTÀ. → 1 DATO SOLO NELL'ESERCIZIO! RUOTO A ATTORNO AD O E B SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO ALTERNATO. BASTA UN' INGRESSO X OTTENERE L'USCITA.

ESEMPIO BRACCIO - LEVE:



$x = 2$, MECCANISMO CON 2 GRADI DI LIBERTÀ → 2 DATI NELL'ESERCIZIO! (2 MOTORI) 2 MOVIMENTI INDIPENDENTI

I GRADI DI LIBERTÀ DICONO IL NUMERO DI MOTORI X MUOVERE IL MECCANISMO.



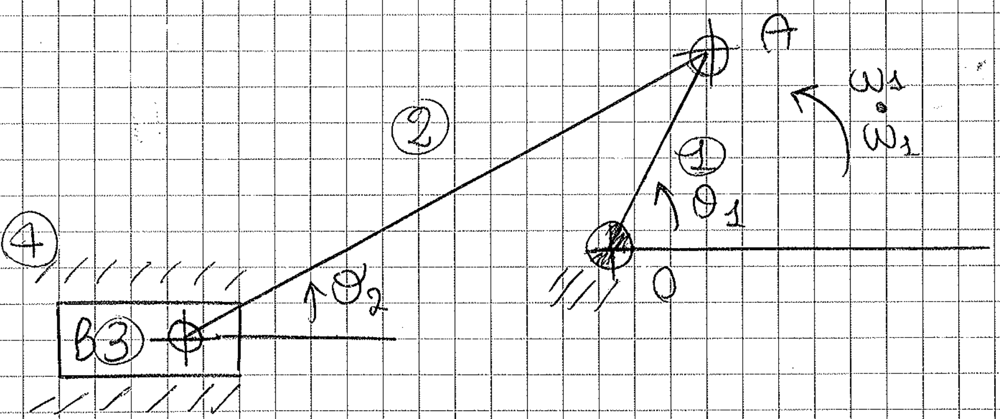
① DISCO INCERNIERATO NEL BARICENTRO

VELOCITÀ SEMPRE TANGENTE AL DISCO → MOTO ROTATORIO ATTORNO A UN PUNTO FISSO

$$\overline{V_a} = \cancel{\overline{V_{cv}}} + \omega\overline{k} \times (\overline{A-O}) = \omega\overline{k}(r)$$
$$\overline{V_b} = \cancel{\overline{V_{cv}}} + \omega\overline{k} \times (\overline{B-O}) = \omega\overline{k}(r)$$

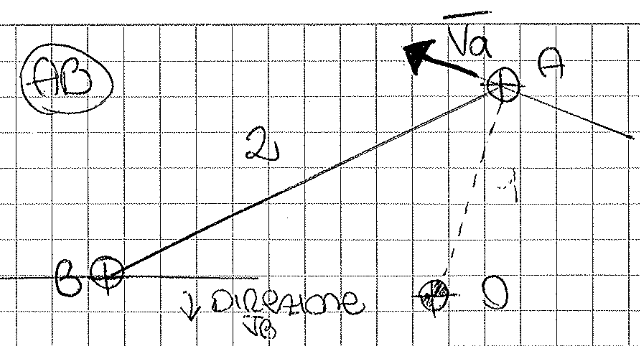
6 MARZO 2013

BIELLA-MANOVELLA



n_1 = 1500 giri/min θ_1 = 45°
$\dot{\omega}_1$ = 1000 rad/s² θ_2 = 30°
OA = 0,21 m → MANOVELLA
AB = 0,61 m → BIELLA
B = PIEDE DI BIELLA

MECCANISMO CHE TRASFORMA MOVIMENTO ROTATORIO DELLA MANOVELLA IN MOTO DI TRASLAZIONE ALTERNA SUL PIEDE DI BIELLA, O VICEVERSA.
MOTO ENTRA DA B ED ESCE DA OA (NO CASO NOSTRO)
MOTO ENTRA DA A ED ESCE DA B (CASO NOSTRO)



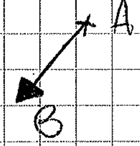
$\bar{V}_a$ rimane inalterata dal corpo 1 al 2

ora $\bar{V}_B \neq 0$!
e la cerco

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{B|A} \quad \text{TEOREM. FOND. CIN.}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \omega_2 k \times (\overline{B-A})$$

$\overline{B-A} \rightarrow$

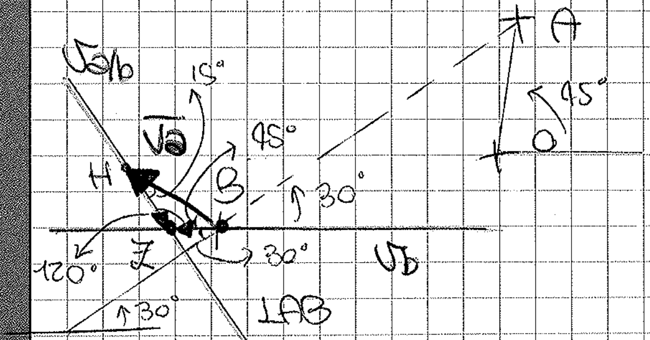


$$\bar{V}_B = \bar{V}_a + \omega_2 \bar{k} \wedge (\overline{B-A})$$

	$\bar{V}_B$	$\bar{V}_a$	$\omega_2 \bar{k} \wedge (\overline{B-A})$
MOD	?	✓	$\omega_2 AB = ?$
DIR	✓ orizz	✓	✓ ⊥ AB
VERSO	?	✓	? segue ω_2

POSSO CALCOLARE TUTTO!

TRACCIO IL TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ:

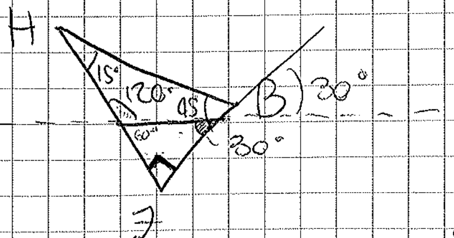


PARTO DA DOVE DEVO TROVARE QUALCOSA (B) CI METTO QUELLO CHE SO (V_a) PARTO DA V_a E TRACCIO UNA RETTA ⊥ AD AB

IL TRIANGOLO È BZH

TRASFERISCO LA FORMULA SUL TRIANGOLO × AVERE I VERSI DELLE VELOCITÀ

HO TROVATO I VERSI → ANALISI TRIGONOMETRICA × TROVARE GLI ANGOLI INTERNI DEL TRIANGOLO



ORA T. SENI / CARNOT...

$$\frac{V_{B|A}}{\text{sen}\,45°} = \frac{V_a}{\text{sen}(120)} = \frac{V_a}{\text{sen}(60°)}$$

$V_{b|a} = 26{,}93$ m/s

QUINDI $\qquad$ VA e VB con ω_2!

$$\overline{V_A} = \underbrace{\cancel{\overline{V}_{Cv2}}}_{=0} + \omega_2 \overline{k} \times (\overline{A - C_{v2}})$$

MOD. $\omega_2 = \frac{V_A}{AC_{v2}} = 44{,}21 \ \frac{rad}{s}$

DIR $\perp AC_{v2}$

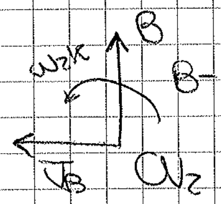
VERSO $\omega_2 \circlearrowleft$ (da $\overline{V_A}$)

$$\overline{V_B} = \underbrace{\cancel{\overline{V}_{Cv2}}}_{=0} + \omega_2 \overline{k} \times (\overline{B - C_{v2}})$$

MOD. $V_B = \omega_2 AC_{v2} = 9{,}86 \ m/s$

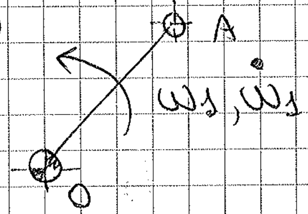
VERSO $\leftarrow$

DIR. ORIZZ.



ORA PASSIAMO ALLE ACCELERAZIONI:

(AO)



USO IL TEOREMA DI RIVALS

$$\overline{a_A} = \underbrace{\cancel{\overline{a_0}}}_{=0} + \overline{a_{A/O\,tg}} + \overline{a_{A/O\,n}}$$

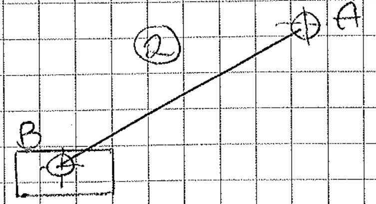
$$\overline{a_A} = \underbrace{\dot{\omega}_1 \overline{k} \times (\overline{A - O})}_{\text{TANG}} \underbrace{- \omega_1^2 (\overline{A - O})}_{\text{CENTRIP. O NORM.}}$$

	$\overline{a_T}$	$\overline{a_n}$
MOD.	$\dot{\omega}_1 AO = 210 \ m/s^2$	$\omega_1^2 AO = 5180{,}91 \ m/s^2$
DIR.	$\perp AO$	$//AO$
VERSO	$\dot{\omega}_1 \circlearrowleft$	$A \to O$

(DI SOLITO $\dot{\omega}$ SONO SEMPRE INCOGNITE)

8 MARZO 2013

(AB)



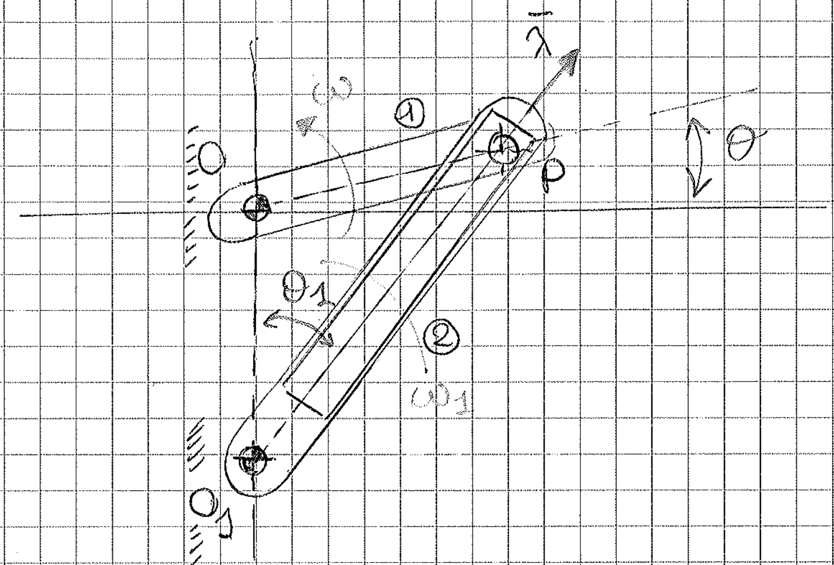
T. RIVALS

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{A/B\,tg}} + \overline{a_{A/B\,n}}$$

$$= \overline{a_A} + \dot{\omega}_2 \overline{k} \wedge (\overline{B - A}) - \omega_2^2 (\overline{B - A})$$

abbiamo un moto semplice, xk i corpi sono rigidi e le distanze tra i vincoli sono ben definite

GLIFO o GUIDA di FAIRBAIN



P è inserito in una guida in cui può scorrere e avvicinarsi o allontanarsi da O_1

(1) manovella che ruota anche di 360°
(2) corpo che ruota in modo alterno (≡ tergicristallo)

ci sono parti del meccanismo che si muovono internamente ad esso → le distanze cambiano

$\overline{PO_1}$ cambia durante il funzionamento ≠ cost

P è fissato su 1, $\overline{PO}$ = cost

qui siamo in presenza di moto composto

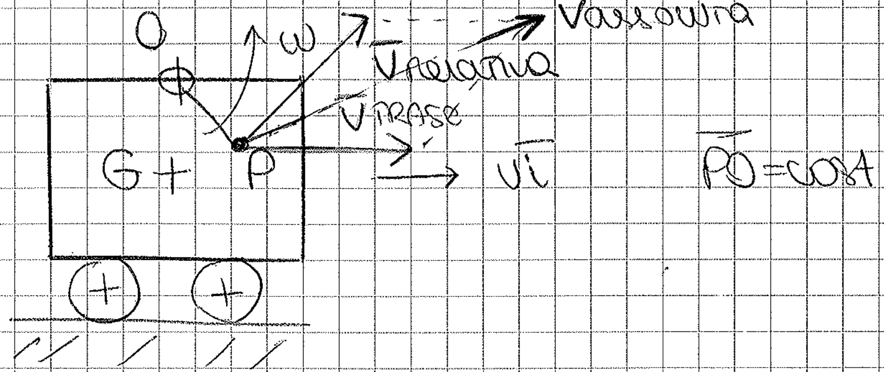
xk P unisce/compone più moti diversi, muovendosi lungo $\bar{\lambda}$, introduce un moto relativo tra le parti del sistema

$$\boxed{\bar{V}_{P\,assoluta} = \bar{V}_{P\,relativa} + \bar{V}_{P\,trascinamento}}$$

$$\boxed{\bar{a}_{P\,assoluta} = \bar{a}_{P\,relativa} + \bar{a}_{P\,trascinamento} + \bar{a}_{coriolis}}$$

PASSEGGERO SUL TRENO

TUTTA LA STESSA SPIEGAZIONE VALE X GLI ESERCIZI CON CARRELLO :



② MOTO RELATIVO : ROTAZIONE DI P INTORNO A O (ω)

③ MOTO DI TRASCINAMENTO: TRASLAZIONE LUNGO $\bar{i}$

① MOTO ASSOLUTO: COMPOSIZIONE DEI 2 MOTI

IN QUESTI ESERCIZI NON CI SONO GUIDE E LE DISTANZE RELATIVE NON CAMBIANO, MA ABBIAMO COMUNQUE UN MOTO COMPOSTO, IN PARTICOLARE IL MOTO ASSOLUTO È SEMPRE E SOLO LA COMPOSIZIONE DEI 2 (TRASC + REL), NON È UN MOTO PROPRIO

RITORNO AL GLIFO

$$\bar{V}_{P\,ass} = \bar{V}_{P\,rel} + \bar{V}_{P\,trasc}$$

$$\bar{V}_{P\,rel} = \pm V_{P\,rel}\,\bar{\lambda}$$

TROVO LE 2 ESPRESSIONI DELLE VELOCITÀ E LE SOSTITUISCO NELLA FORMULA

$$\bar{V}_{P\,trasc} = \Big[\underbrace{\cancel{\bar{V}_{O_1}}}_{=0} + \omega_1 \bar{k} \wedge (P-O_1)\Big] \quad \text{T.F.C.}$$

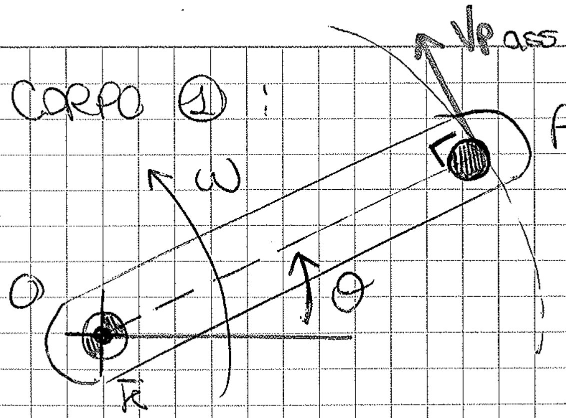
ω_1 TRASCINAMENTO

$$\bar{V}_{P\,ass} = \underbrace{\cancel{\bar{V}_{O}}}_{=0} + \omega \bar{k} \wedge (P-O)$$

ω ASSOLUTA

$$\bar{V}_{P\,ass} = \omega \bar{k} \wedge (P-O) = \pm V_{P\,rel}\,\bar{\lambda} + \Big[\omega_1 \bar{k} \wedge (P-O_1)\Big]$$

CORPO ① :



T.F.C :

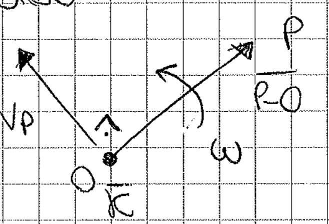
$$\bar{V}_P = \underbrace{\bar{V}_O}_{=0} + \bar{V}_{P/O} = \omega\bar{k} \wedge (\overline{P-O})$$

MOD : $\omega\,\overline{PO} = 47{,}1$ m/s

DIR : $\perp PO$

VERSO : ω ↺

Cioè :



RUOTO $\overline{P-O}$ NEL SENSO DI ω DI 90°

$\bar{V}_P$ È LA VELOCITÀ ASSOLUTA DI P!

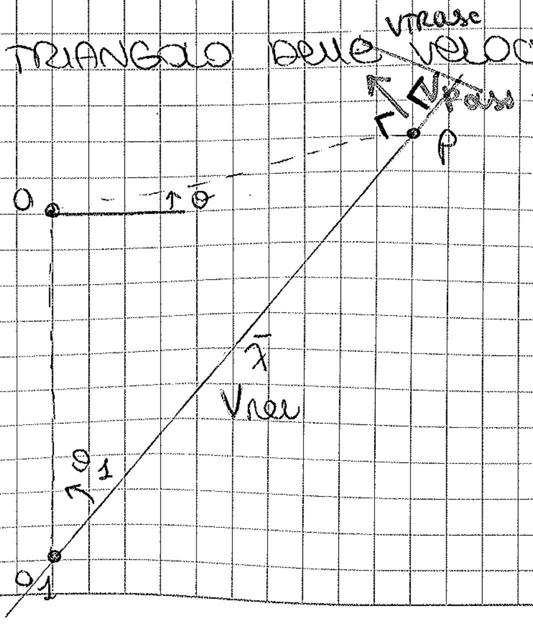
$\bar{V}_P$ SUL CORPO ② SI FRANTUMA IN VELOCITÀ REL. E DI TRASC.

$$\bar{V}_P = \bar{V}_{P\,ass} = \bar{V}_{P\,rel} + \bar{V}_{P\,TR} = \pm V_{P\,rel}\bar{\lambda} + \left[\underbrace{\bar{V}_{O_1}}_{=0} + \omega_1\bar{k}\wedge(\overline{P-O_1})\right]_{TR}$$

	V_P	$= \pm V_{rel}\bar{\lambda}$	$+ \left[\omega_1\bar{k}\wedge(\overline{P-O_1})\right]$
MOD	✓	?	$\omega_1\overline{PO_1} = ?$
DIR	✓	✓ LUNGO $\bar{\lambda}$	✓ $\perp PO_1$
VERSO	✓	?	↺ ω_1 ?

CONOSCO 1 VELOCITÀ E TUTTE LE DIREZIONI →

COSTRUISCO IL TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ



= È LA RISULTANTE! QUINDI TRACCIO LE ALTRE 2 DIREZIONI DALLA SUA CODA, NON DAL VERTICE

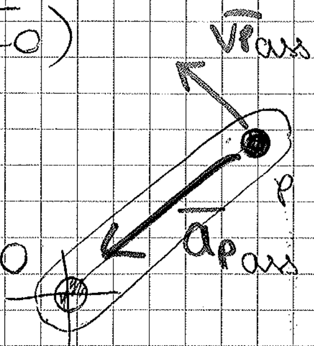
ORA CALCOLO LE ACCELERAZIONI:

CORPO ①

$$\bar a_P = \bar a_{P_{ass}} = \bar a_O + \bar a_{P/O\,tg} + \bar a_{P/O\,n}$$

$$\bar a_{P_{ass}} = \cancel{\dot\omega k \wedge (\overline{P-O})}_{=0} - \omega^2(\overline{P-O})$$

PERCHÈ $\omega = \text{cost}$, $\dot\omega = 0$



$$\bar a_{P_{ass}} = -\omega^2(\overline{P-O})$$

MOD. : $\omega^2 \overline{PO} = 7394,7\ m/s^2$

DIR. : LUNGO PO

VERSO : P → O (VERSO IL CENTRO DI CURVATURA)

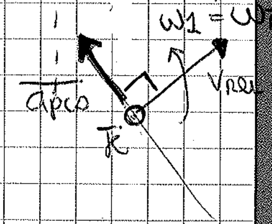
CORPO ②

$\omega_1 = \omega_{TRASC} \bar k$

$$\bar a_{P_{ass}} = \bar a_{P_{rel}}^{\,TRASL} + \bar a_{P_{TRA}}^{\,ROTAZ} + \bar a_{P_{CORIOLIS}}$$

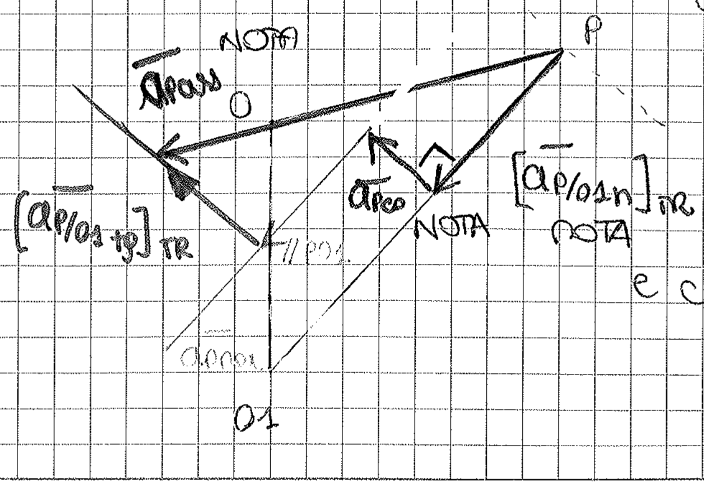
$$\bar a_{P_{ass}} = \pm a_{P_{rel}}\lambda + \left[\cancel{\bar a_{O_1}}_{=0} + \dot\omega_1 k \wedge (\overline{P-O_1}) - \omega_1^2(\overline{P-O_1})\right]_{TRASC} + 2\omega_1 k \wedge \bar V_{P_{rel}}$$

	$\bar a_{P_{ass}}$	$\pm a_{P_{rel}}\lambda$	$\dot\omega_1 k \wedge (\overline{P-O_1})$	$-\omega_1^2(\overline{P-O_1})$	$2\omega_1 k \wedge \bar V_{P_{rel}}$
M	✓	?	$\dot\omega_1 (\overline{PO_1}) = ?$	$\omega_1^2 PO_1 = 2398\ m/s^2$	$2\omega_1 V_{P_{rel}} = 352,89$
D	✓	✓ LUNGO λ	✓ $\perp PO_1$	LUNGO PO_1	$\perp \bar V_{P_{rel}}$, $\perp PO_1$
V	✓	?	?	$P \to O_1$	



3 VETTORI NOTI E 2 NOTI IN DIREZIONE!

COSTRUISCO IL POLIGONO DELLE ACCELERAZIONI



$a_{P_{ass}}$ È LA RISULTANTE

COMPONGO IL POLIGONO E METTO I VERSI DELLE FRECCE

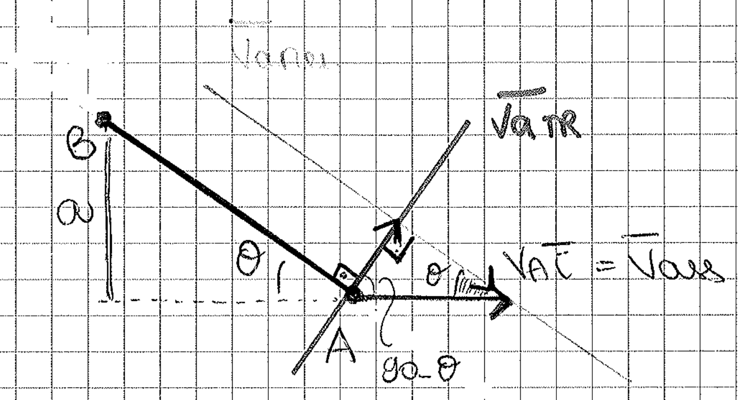
E CI FERMIAMO QUA!

$\overline{V_a} = V_a \bar{i} = \overline{V_{A\,ass}} = \overline{V_{A\,rel}} + \overline{V_{A\,trasc}}$

$\overline{V_{ASS}} = \pm V_{A\,rel}\bar{\lambda} + \underbrace{\overline{V_B}}_{=0} + \omega_1 \bar{k} \wedge (\overline{A-B})$

MOD	✓	?	$? = \omega_1 \overline{AB}$
DIR	✓	✓ $\parallel \bar{\lambda}$	✓ $\perp AB$
VERSO	✓	?	?

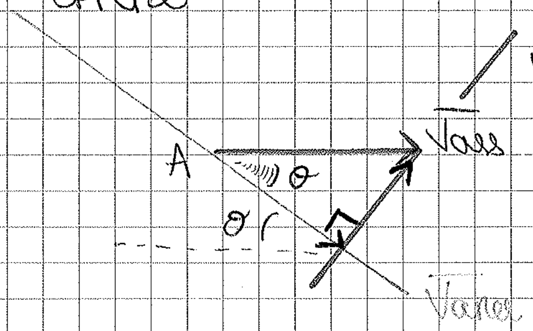
POSSIAMO COSTRUIRE IL TRIANGOLO DELLE VELOCITÀ



Dallo schema iniziale $a = 0{,}25\,m$ e quindi

$\overline{AB} = \frac{a}{\sin\theta} = 0{,}5\,m$

OPPURE

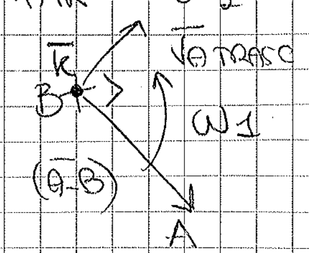


$V_{A\,rel} = V_{A\,ass}\cos\theta = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86\ m/s$ RISP. DOMA. $\boxed{2}$

$V_{A\,TR} = V_{A\,ass}\sin\theta = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5\ m/s$

$\omega_1 = \frac{V_{A\,TRAS}}{AB} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1\ rad/s$

VERSO DA $\overline{V_{A\,TR}} = \omega_1 \bar{k} \wedge (\overline{A-B}) \rightarrow$ ANTIORARIO



RISPOSTA ALLA DOMANDA $\boxed{1}$

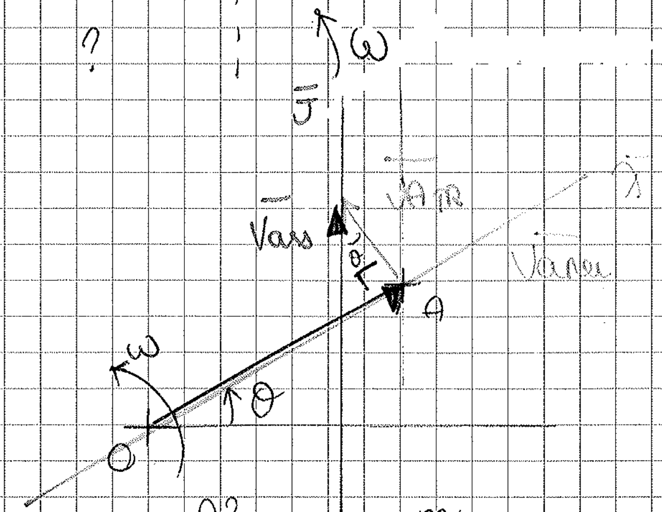
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 264

$\overline{V_A} = \overline{V_{A\,ass}} = \overline{V_{A\,rel}} + \overline{V_{A\,trasc}} = \pm V_{ass}\,\overline{J}$

$\boxed{AO = \frac{L}{\cos\theta}}$

$\pm \overline{V_{A\,ass}} = \pm V_a\,\overline{\lambda} + \underbrace{\cancel{\overline{V_0}}}_{=0} + \omega \overline{k} \wedge (\overline{A-O})$

M	?	?	$\omega \overline{AO} = 0{,}2 \,/\, 0{,}21$ rad/s
D	$/\!/ \overline{J}$	$/\!/ \overline{\lambda}$	$\perp \overline{AO}$
V	?	?	$\uparrow \omega$



$\frac{0{,}2}{1} = 0{,}2$ m/s

$V_{A\,ass} = \frac{V_{ATR}}{\cos\theta} = < \frac{0{,}21}{} = 0{,}226$ m/s risp. doma $\boxed{2}$

$V_{A\,rel} = V_{A\,ass} \sin\theta < \begin{matrix} 0{,}2 \cdot 0 = 0 \text{ m/s} \\ 0{,}226 \cdot = 0{,}077 \text{ m/s} \end{matrix}$ risp. doma $\boxed{1}$

$\updownarrow$

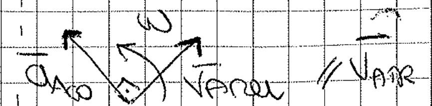
$V_{A\,rel} = V_{ATR} \operatorname{tg}\theta$

se $\theta = 0°$ la guida è orizzontale e $\perp \overline{J}$ → siamo a fine corso e la velocità relativa è 0, poi si inverte per tornare su

$$\overline{a_{A\,ss}} = \pm a_{ass}\overline{J} = \pm a_{A\,rel}\overline{\lambda} + \left[\underbrace{\cancel{a_0}}_{=0} - \omega^2(A-O) + \underbrace{\cancel{\dot{\omega}\overline{k} \wedge (\overline{A-O})}}_{=0}\right]_{TR} + 2\omega_{TR}\overline{k} \wedge \overline{V_{A\,rel}} \quad (\omega_{TR} = \omega)$$

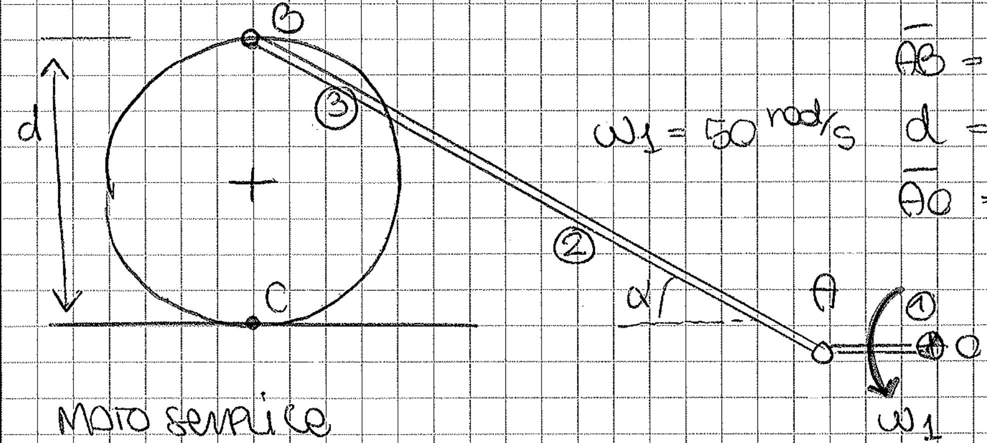
$$\pm a_{ass}\overline{J} = \pm a_{A\,rel}\overline{\lambda} - \omega^2(\overline{A-O}) + 2\omega\overline{k} \wedge \overline{V_{A\,rel}}$$

$-0{,}2 \,/\, -0{,}21$	$2\omega V_{A\,rel} = < \begin{matrix} 0 \text{ rad/s} \\ 0{,}155 \text{ rad/s} \end{matrix}$
$/\!/ AO$	$\perp \overline{V_{A\,rel}}$
$A \to O$	



cerco sempre il verso dell'acc. di Coriolis

esercizio ③



$\overline{AB} = 0,2\,m$

$\omega_1 = 50\ rad/s$ $\quad d = 0,1\,m$

$\overline{AO} = 0,04\,m$

① asticella
② biella
③ disco

MOTO SEMPLICE

CONTROLLO GdL (meccanismo 1)

$$x = 3(m-1) - 2C_1 - C_2 = 3(3-1) - 2\cdot \underset{(B,A)}{2} - \underset{(O)}{1} \quad (3,2,1)$$

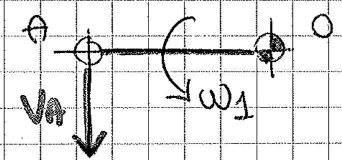
$$x = 6 - 4 - 1 = 1$$

METODO DEL CIV (dopo)

CORPO ① $CIV_1 = O$ (cerniera fissa)
CORPO ③ $CIV_3 = C$ (puro rotolamento)
DEVO TROVARE CIV_2

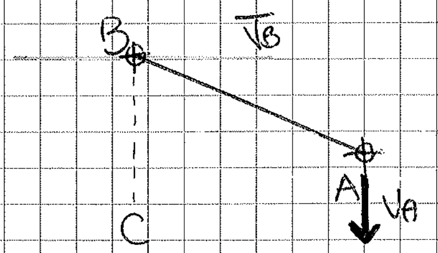
CORPO ① METODO DEL Δ

T.F.C. $\overline{V_A} = \underbrace{\overline{V_O}}_{=0} + \omega_1 \overline{k} \wedge (\overline{A-O})$



MOD: $\omega_1 \overline{AO} = 2\ m/s$
DIR: $\perp AO$
VERSO: ω_1

CORPO ②

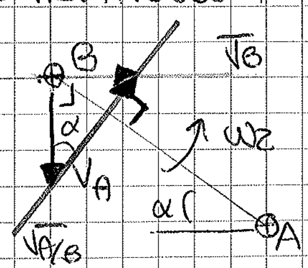


T.F.C. $\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{A/B}}$

$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \omega_2 \overline{k} \wedge (\overline{B-A})$

?	✓	$\omega_2 BA = ?$
$\perp BC$	✓	$\perp AB$
?	✓	?

FACCIO IL TRIANGOLO:



$AB = \dfrac{d}{\sin\alpha}$

CERCO GLI ANGOLI:

$\alpha = \arcsin\left(\dfrac{d}{AB}\right) = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = 30°$

E LE VELOCITÀ:

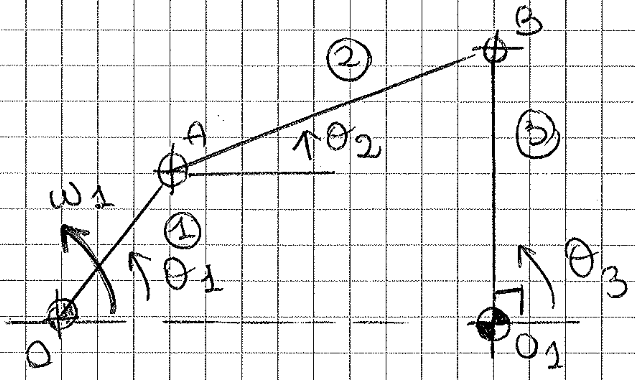
$V_B = V_{A/B} \sin\alpha = 1,155\ m/s$ $\boxed{1}$

VERSO →

$V_{A/B} = \dfrac{V_A}{\cos\alpha} = 2,31\ m/s$

VERSO ↗

ESERCIZIO 1 (1)



$\omega_1 = 157 \ rad/s$

$\overline{OA} = 0{,}023 \ m$

$\theta_1 = 60°, \theta_2 = 30°, \theta_3 = 90°$

$\overline{AB} = 0{,}061 \ m$

(1) MANOVELLA
(2) BIELLA
(3) BILANCIERE

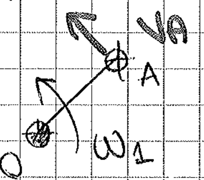
CONTROLLO GdL (m aspetto = 1)

$GdL = x = 3(m-1) - 2c_1 - c_2 = 3(4-1) - 2 \cdot 4$

(1,2,3) TELAIO ; (A,B) (O,O1)

$GdL = 1$

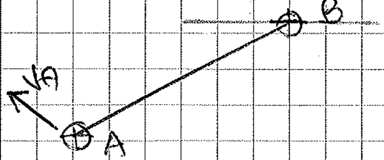
CORPO (1)



T.F.C. $\bar{V}_A = \underbrace{\bar{V}_O}_{=0} + \omega_1 \bar{k} \wedge (A-O)$

MOD : $\omega_1 \overline{AO} = 3{,}6 \ m/s$
DIR : $\perp AO$
VERSO : $\curvearrowleft \omega_1$

CORPO (2)

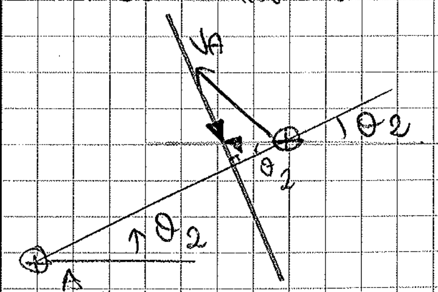


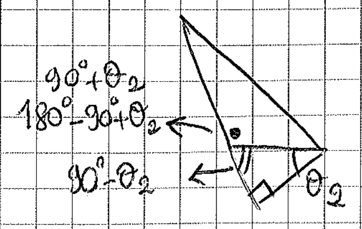
T.F.C. $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \omega_2 \bar{k} \wedge (\overline{B-A})$

	$\bar{V}_B$	$\bar{V}_A$	$\omega_2 \bar{k} \wedge (B-A)$
MOD	?	✓	$\omega_2 \overline{AB} = ?$
DIR	orizz ($\perp BO_1$)	✓	$\perp BA$
VERSO	?	✓	?

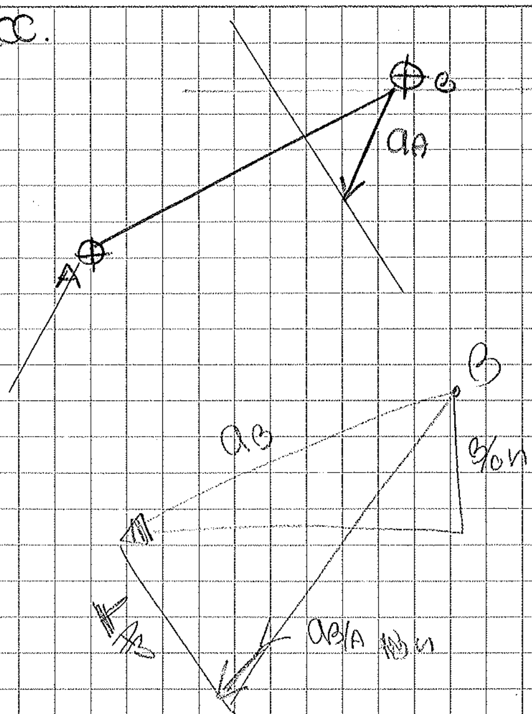
⚠ attenzione alla direzione V_B

CERCO TRIANGOLO





POLIGONO ACC.

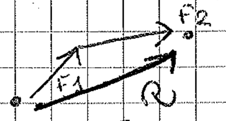


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 264

IDENTITÀ

$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ È LA DIAGONALE DEL PARALLELOGRAMMA

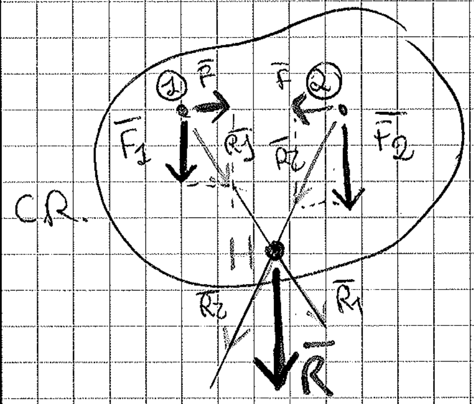
OPPURE POSSO COSTRUIRE IL TRIANGOLO DELLE FORZE, SECONDO IL METODO PUNTA-CODA



ANCHE AVENDO $\bar{R}$ POSSO SCOMPORLA IN 2 FORZE AD ESEMPIO F_x E F_y LUNGO GLI ASSI CARTESIANI

NEL MIO SISTEMA, DISEGNO O $\bar{R}$ O $\bar{F}_1$ ED $\bar{F}_2$!

IL PROBLEMA È SE $\bar{F}_1 \parallel \bar{F}_2$:

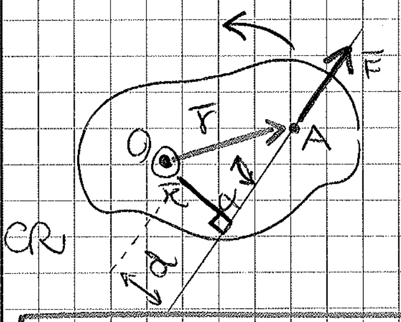


SOMMO E SOTTRAGGO UNA STESSA FORZA $\bar{F}$ E CERCO LE 2 RISULTANTI $\bar{R}_1 = \bar{F} + \bar{F}_1$, $\bar{R}_2 = -\bar{F} + \bar{F}_2$ ORA FINALMENTE COSTRUISCO IL PARALLELOGR. LA RISULTANTE È

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \cancel{\bar{F}} + \bar{F}_1 - \cancel{\bar{F}} + \bar{F}_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$\bar{R} \parallel$ a $\bar{F}_1$ e $\bar{F}_2$

IL MOMENTO DI UNA FORZA



È QUANDO F RISPETTO AD O PUÒ DARE UNA ROTAZIONE:

O = CERNIERA FISSA = POLO $d \perp F$

$\overline{OA} = \bar{r}$ $d = r \sin\alpha$

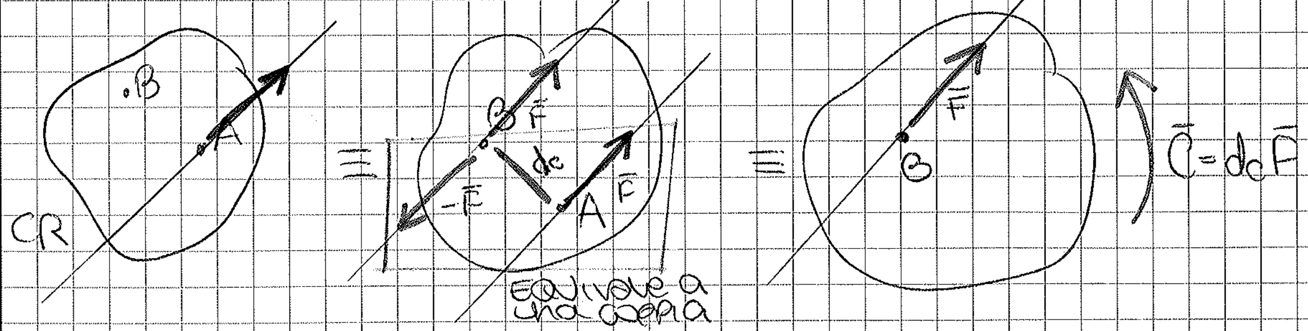
$\bar{k}$ USCENTE → ROTAZIONE ANTIORARIA

$$\boxed{\bar{M}_O = \bar{r} \wedge \bar{F} = rF \operatorname{sen}\alpha \, \bar{k} = dF\bar{k}}$$

$d = r\sin\alpha$, $\perp F$ = BRACCIO DELLA FORZA RISP. A O

È IMPORTANTE SCEGLIERE BENE IL POLO O, XK X OGNI PUNTO ABBIAMO DIVERSI d.

poi lascio la forza in B ed equivalgo a una coppia



se una forza $\bar F$ viene portata fuori dalla sua retta di azione, bisogna aggiungere un **momento di trasporto** $\boxed{\bar C = d_c \bar F}$

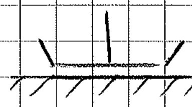
sono 3 sistemi equivalenti

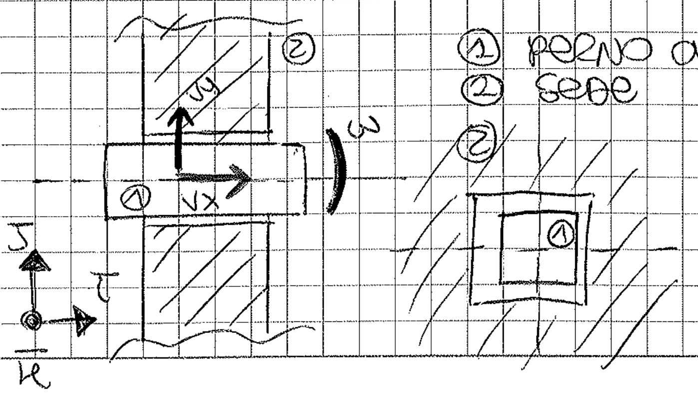
TIPI DI FORZE:

- forze concentrate (applicate in un punto)
- forze distribuite (applicate su una superficie)
- forze esterne : pesi e inerzie
  (compaiono anche sull'assemblato, sul sistema totale)
- forze interne : reazioni vincolari
  (che nascono nei vincoli e sono sempre delle incognite)

REAZIONI VINCOLARI

= sono forze e coppie scambiate nei **vincoli**, sono incognite e nascono nelle direzioni in cui il vincolo impedisce il moto.

COPPIA PRISMATICA () pattino, solo traslazione



① perno a sezione prismatica
② sede

$$\begin{cases} V_x \neq 0 \\ V_y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

può solo traslare lungo x

$\bar{F}_1 = \bar{F}_2$

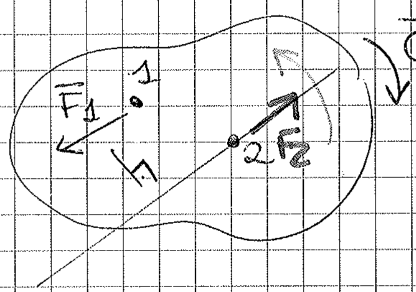
MOD. $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$

DIR. stessa retta d'azione

VERSO opposto

abbiamo le **ASTE SCARICHE**

② C.R. soggetto a 2 forze e 1 coppia imposta dall'esterno



conosciamo la coppia (M.D.V.)
conosciamo una delle 2 forze (M.D.V.)
(2 di 3 elementi)

la seconda forza deve essere
: // alla prima
: tale da formare con la prima una coppia che ruota in verso opposto a $\bar{C}_e$

MOD. $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$
DIR. $f_2 // F_1$
VERSO opposte

insieme formano una coppia di forze opposte a $\bar{C}_e$

EQUILIBRIO:

$F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow \bar{R}_F = 0$ (EQ. alla traslazione)

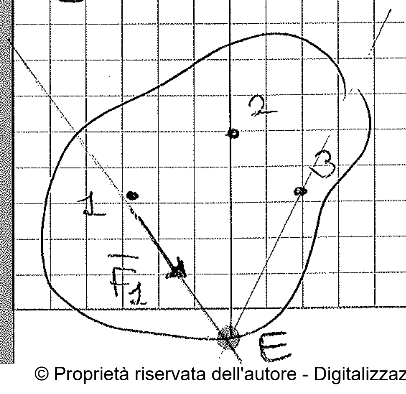
$\sum_+ C_e = F_1 b, \quad C_e - F_1 b = 0 \Rightarrow \sum \bar{M}_{RF} = 0$ (EQ. alla rotazione)

$\sum_+ C_e - C = 0$

EQUIVALENZA:

$C = F_1 b, \quad |\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$

③ C.R. soggetto a 3 forze



una è nota (M.D.V.) una in direzione e l'ultima in niente (solo il punto di appl.)

prolungo la retta di $\bar{F}_1$ fino a incontrare l'altra nota e trovo il
* punto di stella

anche la terza deve passare x il punto stella → traccio la direzione (x EQ. alla ROT.)

CORPO ③

abbiamo 3 forze: $\bar{F}$, $\bar{R}_V$ reazione vincolare e $\bar{R}_B$
usiamo la 3 regola.
F nota, R_V conosciamo direzione, R_B conosciamo B
il punto di stema è B!! B≡E

$\bar{F} + \bar{R}_B + \bar{R}_V = 0$

CORPO ②

asta scarica, le forze vanno lungo la congiungente degli estremi. Con la direzione di RB risolvo il corpo ③ con il triangolo delle forze, così trovo versi e moduli con gli angoli noti.
Grazie a RB trovo R_A x la 1ª regola.

PASSANDO DA UN CORPO ALL'ALTRO, LA FORZA CAMBIA VERSO! (ex. $\bar{R}_B$, $\bar{R}_A$) x il principio di azione e reazione

anche perché le reazioni vincolari non si vedono all'esterno!

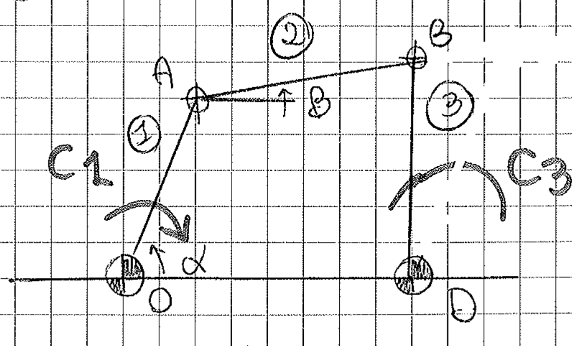
CORPO ①

disegno $\bar{R}_A$ con verso opposto al corpo ②
R_O e R_A formano la coppia C, regola 2

quindi C_1 va in senso antiorario ↰ C_1

$C_1 = R_A b$, $C_1 - R_A b = 0$, $R_A - R_O = 0$

QUADRILATERO ARTICOLATO

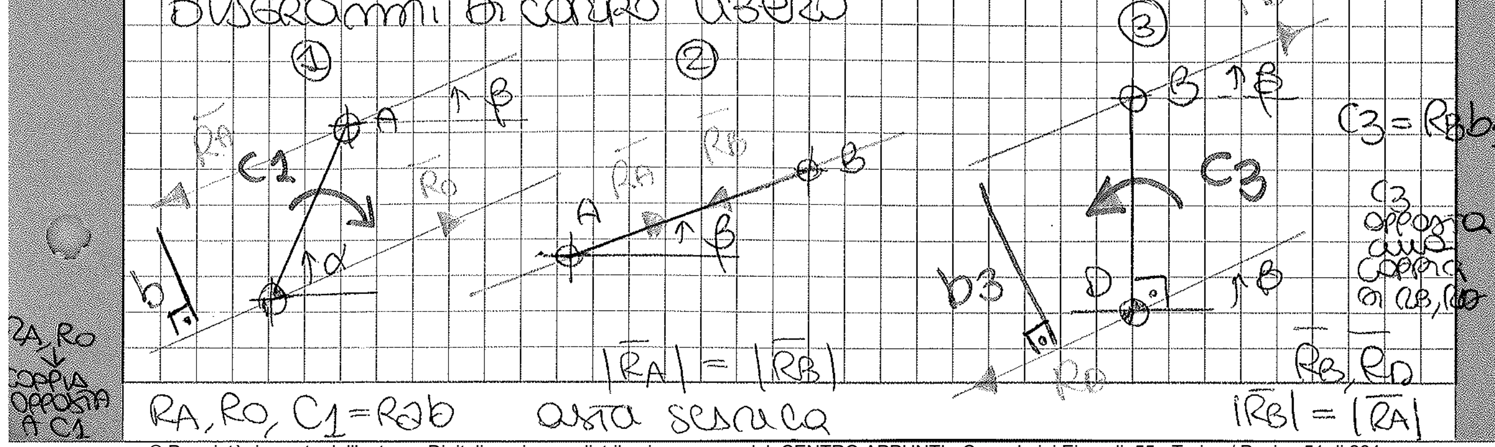


$C_3 = ?$

TRASCURO PESI

COME PRIMA

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO



RA, RO, $C_1 = R_A b$ asta scarica $|\bar{R}_B| = |\bar{R}_A|$

AZIONI DI INERZIA

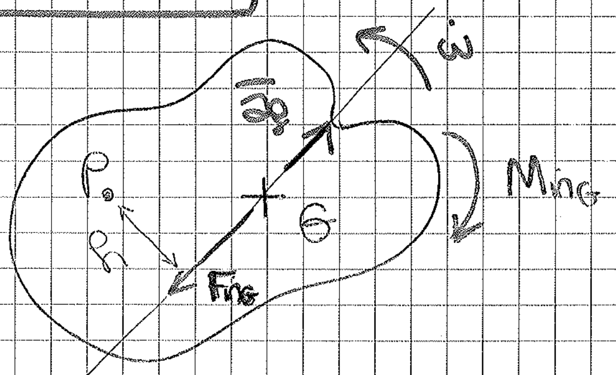
sono sempre opposte alle accelerazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{F}_{in_G} &= m\overline{a}_G \\ M_{in_G} &= I_G\,\dot{\omega} \end{aligned}}$$

FORZA DI INERZIA

COPPIA DI INERZIA

in = inerzia



EQUAZIONI RISPETTO AL BARICENTRO:

(G) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{est_i} + \overline{F}_{in_G} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{est_i} + \overline{M}_{in_G} = 0 \end{cases}$$

azioni di inerzia concentrate nel baricentro

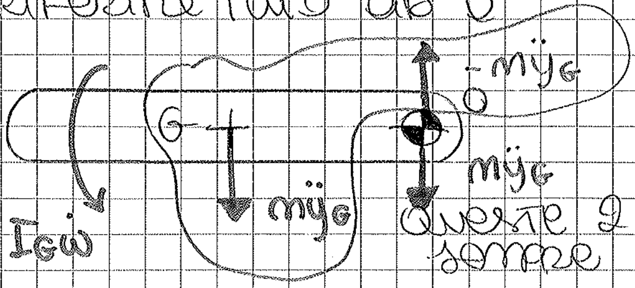
EQUAZIONI RISPETTO AD UN PUNTO GENERICO:

(P) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{est_i} + \overline{F}_{in_G} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{est_i} + \overline{M}_{in_G} + \underbrace{\overline{r} \wedge \overline{F}_{in_G}}_{\text{momento della forza di inerzia per il punto P}} = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

SE VOGLIO RIFERIRE TUTTO AD O

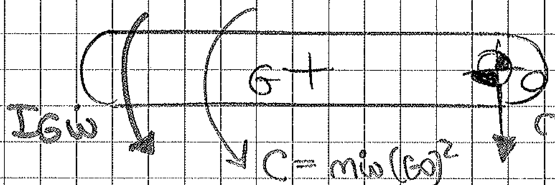


QUESTE 2 AZIONI VANNO SEMPRE ASSIEME

$I_O \neq I_G$ — MOMENTO D'INERZIA BARICENTRICO

MOMENTO D'INERZIA NON BARICENTRICO

SPOSTO UNA FORZA FUORI DALLA SUA RETTA D'AZIONE!



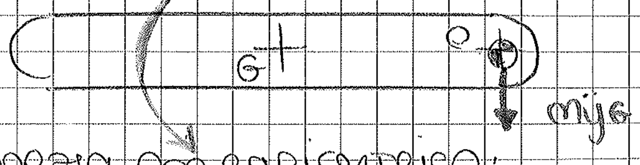
COPPIA DI TRASPORTO $C = (m\ddot{y}_G)(\overline{GO})$

$\overline{\ddot{y}}_G = \overline{a}_{tgG} = \underbrace{\overline{a}_O}_{=0} + \dot{\omega}\overline{k} \wedge (G-O)$

$\ddot{y}_G = \dot{\omega}(\overline{GO})$

$C = m\dot{\omega}(\overline{GO})^2$ $\quad M = I_G\dot{\omega} + \dot{\omega}m(GO)^2$

$M = \dot{\omega}\left[I_G + m(GO)^2\right] = I_O\dot{\omega}$



MOMENTO D'INERZIA NON BARICENTRICO:

$$\boxed{I_O = I_G + m(GO)^2}$$

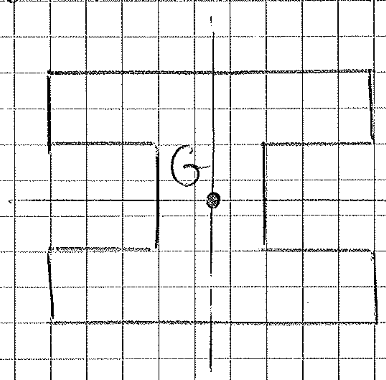
X IL TEOREMA DI HUYGHENS

IL MIO SISTEMA HA QUINDI

$$\boxed{M = I_O\dot{\omega}}$$

ORA

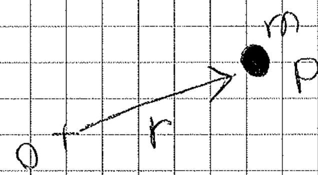
$O) \ldots I_O\dot{\omega} + \underbrace{\cancel{(m\ddot{y}_G)}}_{=0}$ ZERO sistema con 2 assi di simmetria



il baricentro si trova sull'∩ dei 2 assi di simmetria

MOMENTO DI INERZIA

punto materiale:



$$I_O = m(PO)^2 \qquad [kg \cdot m^2]$$

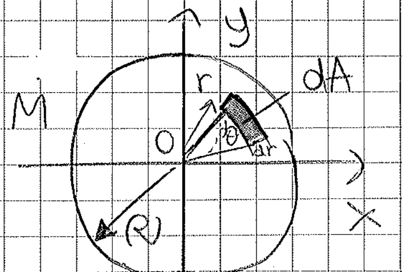
① sistema discreto:

$$I_O = \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i O)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

② sistema continuo:

$$I_O = \int_M r^2 \, dm = \rho \int_V r^2 \, dV$$

DISCO SOTTILE (l'altezza del disco è trascurabile)



definisco un elementino di area dA, ampiezza dθ, spessore dr

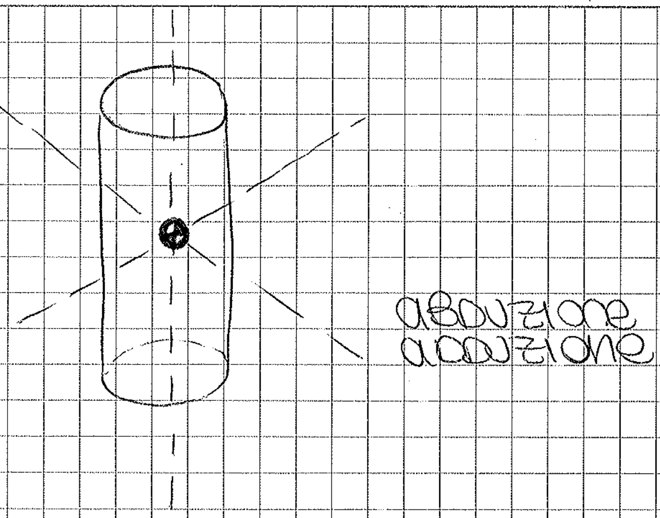
$$dA = dr \, [r d\theta] \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{matrix}$$

① momento di inerzia assiale / polare

$$I_O = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_A r^2 h \, dA = \rho h \int_A r^2 \, dr \cdot r \, d\theta =$$

$dV = h\,dA$

coscia:



La distribuzione di massa cambia rispetto a quale dei 3 assi scelgo

pg. 29 diagramma con coordinate dei baricentri di busto/coscia/polpaccio/piede

Sistema formato da 3 aste unite da cerniere + reaz. vincolare tra piede e terreno

peso < motore / resistente → pendolamento continuo durante il camminamento

piede → pedane di forza/dinamometriche che misurano la reazione vincolare

norme che permettono di stabilire le lunghezze del corpo umano → utili per costruire macchinari che si devono adattare a tutti

lunghezze suddivise x stato/sesso/massa

x farle è usato il percentile, che va dal 10 percentile donna al 90 percentile uomo

50 percentile ± coeff · DT – deviazione tipica

serve x avere un margine preciso di regolazione

attenzione anche a verificare errori di stampa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 264

RENDIMENTO

P_e = ENTRANTE (MOTRICE) $\longrightarrow$ SISTEMA $\longrightarrow$ P_u = USCENTE (UTILE)

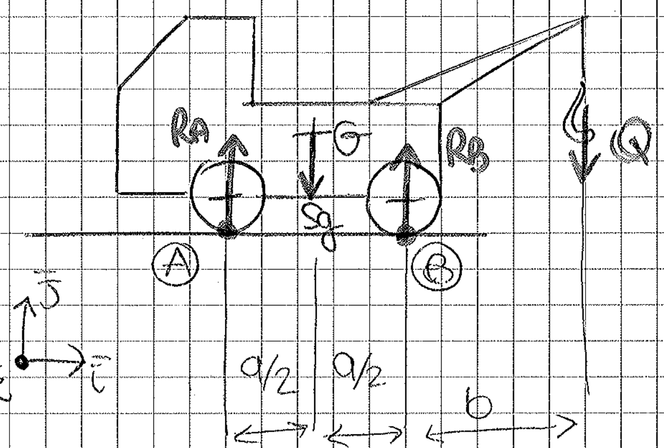
$\Downarrow$ P DISSIPATA (ATTRITO)

$$\boxed{\eta = \frac{P_u}{P_e} < 1}$$

CARRO ATTREZZI

203

FERMO $\bar{v} = 0$



$$\begin{cases} \bar{i} \quad \rightarrow \quad 0 = 0 & \text{EQ. ORIZZONTALE} \\ \bar{j} \quad \uparrow^+ \quad R_A + R_B - S_g - Q = 0 & \text{EQ. VERTICALE} \\ \bar{k} \quad (B)^+ \quad S_g \frac{a}{2} - R_A a - Q b = 0 & \text{EQ. ROTAZIONE} \end{cases}$$

$\rightarrow R_A = 4{,}59\ t$ se $Q = 4t$

$R_B = 19{,}41\ t$

$\rightarrow R_A' = 1{,}89\ t$ se $Q' = 6t$

$R_B' = 24{,}11\ t$

AUMENTIAMO IL CARICO

FINCHÉ $R_A \neq 0$ NON CI SARÀ RIBALTAMENTO!

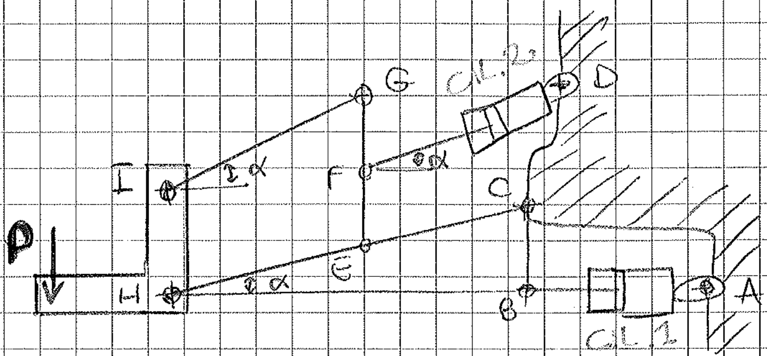
SE $R_A = 0$ CI SARÀ RIBALTAMENTO!

se $R_A = 0$ $Q = 7{,}4t$

TIRO PIÙ VELOCEMENTE LA MASSA M VERSO L'ALTO,
XK DA DX HO SOLO 1 FORZA, NON LA MASSA m_1 →
NON HO COINVOLTO L'INERZIA!
IL SISTEMA POTREBBE QUINDI AVERE UNA RESA DIVERSA!

PALA CARICATRICE (EQUILIBRIO STATICO)

201

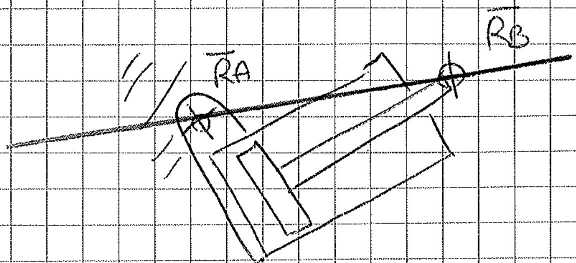


I CILINDRI SONO COMPONENTI DI UN SISTEMA
SEMPRE CONSIDERATI COME ASTE SCARICHE,
SONO TIPOLOGIE DI MOTORI. POSSONO ESSERE AD
OLIO O AD ARIA COMPRESSA

$$\boxed{F_{pressione} = p\,S}$$

FORZA DI PRESSIONE — PRESSIONE — SUPERFICIE

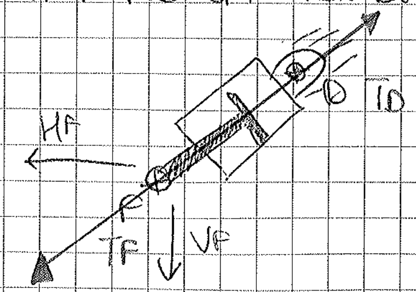
N CILINDRI = N MOTORI = N GdL



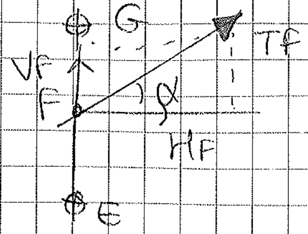
ECCO DOVE SONO I VINCOLI DEL CILINDRO

CERCO P_1, P_2,
PARTO DAL PUNTO CON MAGGIORI INFORMAZIONI.
(PALA A L)

(1) F HO UN CILINDRO = ASTA SCARICA



TROVO COSÌ LA DIREZIONE DELLE RISULTANTI E LA RIPORTO NEL CORPO 3



QUINDI:

$V_F = H_F \operatorname{tg}\alpha$ EQ. AUSILIARIA

E TROVO:

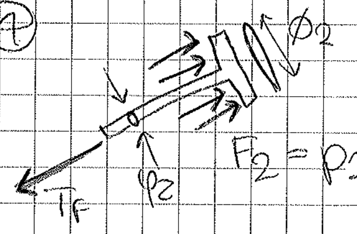
$V_E = -15140\,N$ $\quad H_E = -28224\,N$ $\quad$ E TROVO IL VERSO DI T_F

$V_F = 30280\,N$ $\quad H_F = 52448\,N$

T_F FA FUORIUSCIRE LO STELO DAL CILINDRO (TRAZIONE)

NELLA CAMERA DI SX AVRÒ QUINDI ... UNA FORZA

(2)



S_2 VIENE CALCOLATA COME LA DIFFERENZA DI 2 AREE

$F_2 = p_2 S_2 \qquad S_2 = \pi\left[\phi_2^2 - \varphi_2^2\right]\frac{1}{4} = 8{,}48\,mm^2$

DIAMETRI, NON RAGGI

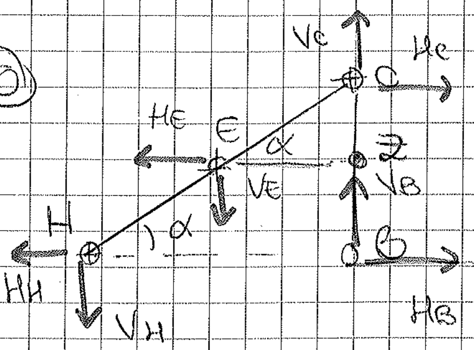
$T_F = p_2 S_2 \quad , \quad T_F = \sqrt{H_F^2 + V_F^2} = 60561$

$p_2 = \frac{T_F}{S_2} = 7139690{,}74\ Pa = 71\ bar$ (OLIO)

$\boxed{1\ bar = 10^5\ Pa}$

È UN CORPO UNICO!

(3)



i $\xrightarrow{+}$ $H_C + H_B - H_H - H_E = 0$

j $\uparrow^{+}$ $V_B + V_C - V_H - V_E = 0$

k $\circlearrowleft^{+}$ $H_B(\overline{EC}) + V_E(\overline{EC}\cos\alpha) - H_E(\overline{EC}\sin\alpha) + V_H(\overline{HC}\cos\alpha) - H_H(\overline{HC}\sin\alpha) = 0$

MANCA UN EQ.

$\begin{cases} \overline{EZ} = \overline{EC}\cos\alpha \\ \overline{EX} = \overline{EC}\sin\alpha \end{cases}$

$V_B = 0$!!

ASTA SCARICA

COSÌ

$H_B = T_B$

$V_B = 0$

⇒

moto unif acc:

$$x(t) = \underbrace{\cancel{x(0)}}_{x_A=0} + \underbrace{\cancel{v(0)}}_{v_A=0}t + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$$

nel nostro caso : • $x_{AB} = \frac{1}{2}\ddot{x}\,t^{*2}$ → tempo per definito in AB = 2m

$$v(t) = \underbrace{\cancel{v_0}}_{=0} + \ddot{x}t$$

• $v_B = \ddot{x}t^*$

Ricavo $t^* = \frac{v_B}{\ddot{x}}$ quindi $x_{AB} = \frac{1}{2}\ddot{x}\left(\frac{v_B}{\ddot{x}}\right)^2 =$

$x_{AB} = \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{\ddot{x}}$ ora devo trovare $\ddot{x}$!

$v_B = \sqrt{2x_{AB}\cdot\ddot{x}}$ ecco la formula che mi serve!

① $\nearrow^{+}x$ $\quad T_D - m_1\ddot{x} - m_1 g\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$

($\nwarrow^{+}y$ $\quad N_1 + N_2 - m_1 g\cos\alpha = 0$) → non serve!!

③ $\nearrow^{+}x$ $\quad T_E + T_N - T_D = 0$ $\qquad$ tensioni in una puleggia = posso essere legate da un momento (il raggio si semplifica sempre)

$\circlearrowleft^{+} O_3$ $\quad T_N\cancel{r_3} - T_E\cancel{r_3} = 0$, $\underbrace{T_N = T_E}$

è vera solo se non ∃ coppie esterne applicate sulla puleggia, solo se non ∃ attriti o rigidezze delle funi, solo se non esistono inerzie!

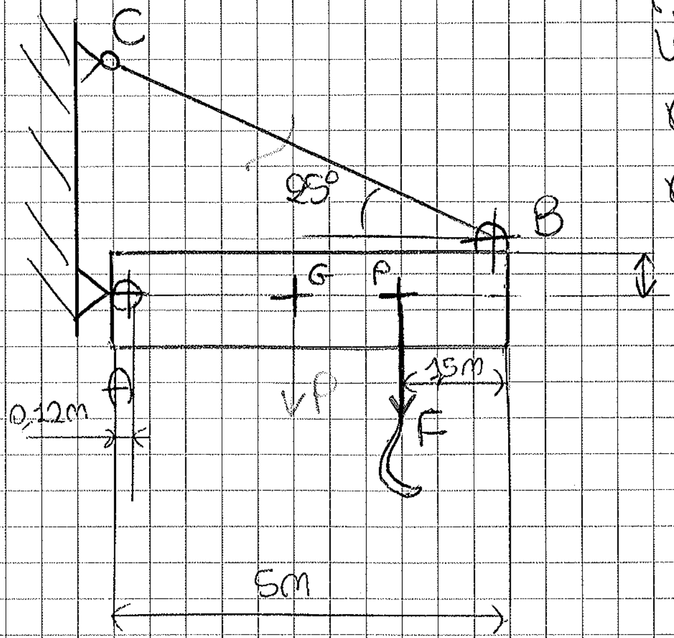
② $\circlearrowleft^{+} O$ $\quad I_O\dot{\omega}_2 + T_E r_2 - F r_2 = 0$

$T_N = T_E$

$T_D = 2T_E = 2T_N$

non bastano le equazioni! devo legare $\dot{\omega}_2$ a $\ddot{x}$

BRACCIO DI SUPPORTO 2.2



NON SI PUÓ TRASCURARE LO SPESSORE DELLA TRAVE

$m = 95\ kg/m$

$m = 95 \cdot 5 = 475\ kg$

$0{,}25\ m$ ↓ larghezza trave

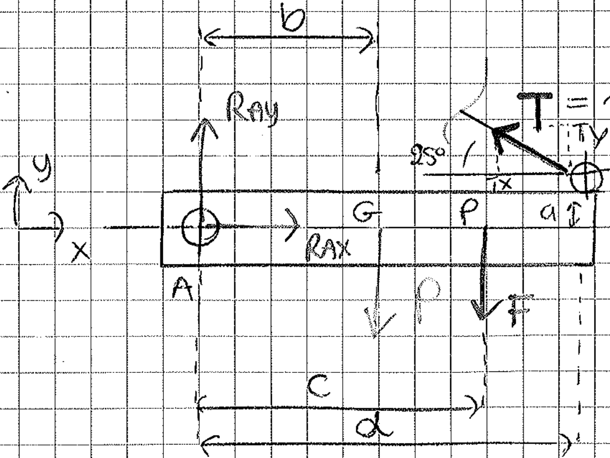
$F = 10^4\ N$

$P = mg = 4\,660\ N$

$T = ?$

$R_A = ?$

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



T = 2 componenti

$T_y = T\sin\alpha$

$T_x = T\cos\alpha$

$0{,}25\,m = a$

$a = 0{,}25\,m$

$b = 2{,}5 - 0{,}12 = 2{,}38\,m$

$c = 3{,}5 - 0{,}12 = 3{,}38\,m$

$d = 5 - 0{,}12 = 4{,}88\,m$

$\overset{+}{\curvearrowleft} A)\quad -Pb - Fc + Td\sin\alpha + T\cos\alpha\, a = 0$

$T(d\sin\alpha + a\cos\alpha) = Fc + Pb$

• $T = \dfrac{Fc + Pb}{d\sin\alpha + a\cos\alpha} = 19{,}61\ kN$

$\overset{+}{\rightarrow}\quad R_{Ax} = T\cos\alpha = 17{,}77\ kN$

$\uparrow y\quad R_{Ay} - P - F + T\sin\alpha = 0$

$R_{Ay} = 6{,}37\ kN$

• $R_A = \sqrt{R_{Ax} + R_{Ay}} = 18{,}88\ kN$

$$\boxed{L_{F\,peso} = -\int_0^h mg\,dz = -mgh}$$ [JOULE]

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$\boxed{E_{pg} = -L_{F\,peso} = mgh}$$ [JOULE]

ENERGIA CINETICA

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2}$$

V_G = velocità del baricentro

I_G = momento di inerzia baricentrico

Tutti i lavori e le energie sono utilizzate x il bilancio energetico di qualsiasi sistema:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

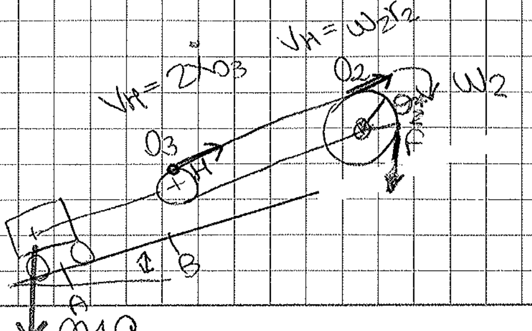
$$\boxed{L_{F\,est} + L_{F\,int} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pel}}$$

$L_{F\,est}$ non comprende le forze peso e le forze di inerzia!

ΔE_{cin} fa le veci delle forze di inerzia xk è una variazione di velocità

$L_{F\,int}$ comprende principalmente l'attrito

CARRELLO SU PIANO INCLINATO

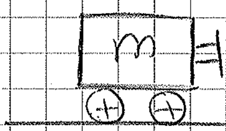


$V_A = 0$, $V_B = ?$

$\overline{AB} = 2m$

DATI UTILI X RISOLVERE CON IL BILANCIO ENERGETICO!

QUANTITÀ di MOTO e SUO MOMENTO



$\rightarrow \overline{v}_G$ $\quad \boxed{\overline{Q} = m\overline{v}_G}$ $\quad \left[kg \frac{m}{s} \right]$

$$\boxed{\frac{d\overline{Q}}{dt} = m\overline{a}_G = -\overline{F}_{in_G}}$$

la derivata della quantità di moto è uguale e opposta alle forze d'inerzia

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE:

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_{est_i} + \overline{F}_{in_G} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_{est_i} = -\overline{F}_{in_G} = \frac{d\overline{Q}}{dt}$$

TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_{est_i} = \frac{d\overline{Q}}{dt}}$$

se in un sistema isolato si ha:

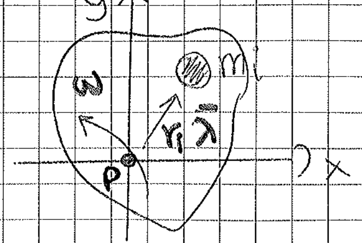
$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_{est} = 0 \rightarrow \frac{d\overline{Q}}{dt} = 0 \rightarrow \underline{\overline{Q} = cost}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\boxed{se \ \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_{est_i} = 0 \rightarrow \overline{Q} = cost}$$

il momento della quantità di moto è:

$$\overline{K}_P = \sum_{i=1}^{N} r_i\overline{\lambda} \wedge \underbrace{m_i \dot{r}_i \overline{\lambda}}_{Q_i}$$



$$\overline{K}_P = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

vettore posizione $r_i\overline{\lambda}$

$$\overline{K}_P = \sum_{i=1}^{N} r_i\overline{\lambda} \wedge m_i \left(\omega\overline{k} \wedge r_i\overline{\lambda} \right)$$

TERNA PRINCIPALE DI INERZIA

- è una terna di simmetria dove lungo un'asse si ha un momento d'inerzia massimo e lungo l'altro un momento d'inerzia minimo
- se questa terna è fissata nel baricentro è una terna centrale di inerzia
- se la terna centrale di inerzia è $[\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}]$

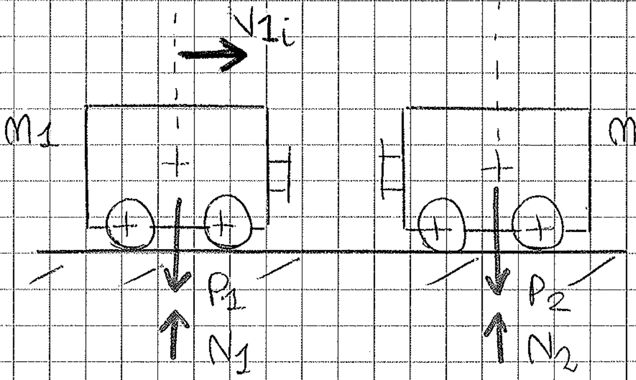
otteniamo $\boxed{\bar{K}_G = I_\lambda p \bar{\lambda} + I_\mu q \bar{\mu} + I_\nu r \bar{\nu}}$

p = componente della velocità angolare lungo λ

$$\begin{cases} p = \bar{\omega} \times \bar{\lambda} \\ q = \bar{\omega} \times \bar{\mu} \\ r = \bar{\omega} \times \bar{\nu} \end{cases}$$

dove " $\times$ " = "$\cdot$"

URTO DI CARRELLI FERROVIARI



$V_{1i} \neq 0$

$V_{2i} = 0$

sono in equilibrio verticale

non esistono forze orizzontali

abbiamo $\sum_{i=1}^{N} F_{est_i} = 0$ per cui $\bar{Q} = cost$

cioè la quantità di moto si conserva

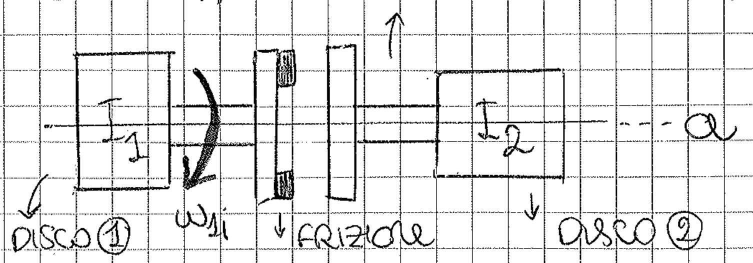
$\bar{Q}_i = \bar{Q}_f$ i = iniziale, f = finale

$\bar{Q}_i = m_1 \bar{V}_{1i}$

$\bar{Q}_f = m_1 \bar{V}_{1f} + m_2 \bar{V}_{2f}$ nel caso di un <u>urto elastico</u>

(si urtano e si respingono senza rimanere attaccati = all'istante finale sono separati in più abbiamo la conservazione dell'energia)

VOLANI IN ROTAZIONE



$\omega_2 = 0$

$\omega_{1i} \neq 0$

URTO ANELASTICO xk i 2 DISCHI SI AGGANCIANO e si passa da I_1 a $I_2 + I_1$ (c'è variazione di massa)

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE :

a) $\sum_{i=1}^{N} \bar{M}_{est_i} = 0 \rightarrow \bar{K}_G = cost$ CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$K_{G_i} = K_{G_f}$

$I_1 \omega_{1i} = (I_1 + I_2)\,\omega_f$

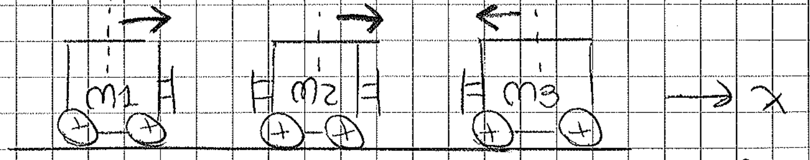
$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\,\omega_{1i}$$

abbiamo anche dissipazione di energia $\Delta E_k \neq 0$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}\omega_{1i}^2 I_1$$

URTO di CARRELLI FERROVIARI

3o1



$m_1 = 65 \cdot 10^3$ kg
$m_2 = 50 \cdot 10^3$ kg
$m_3 = 75 \cdot 10^3$ kg

$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_{est_i} = 0 \rightarrow \bar{Q} = cost!$

da trasf. in m/s
$v_1 = 2$ km/h
$v_2 = 1$ km/h
$v_3 = 1{,}5$ km/h

IPOTIZZO URTO ANELASTICO, e calcolo v_f finale a seguito dell'agganciamento dei carrelli

$Q_i = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3 =$

$Q_f = (m_1 + m_2 + m_3)\, v_d = (190 \cdot 10^3)\, v_d$

$Q_i = Q_f$

QUINDI:

$$\frac{1}{2}(\cancel{m_1+m_2}) V_f^2 = (\cancel{m_1+m_2}) g L (1-\cos\theta)$$

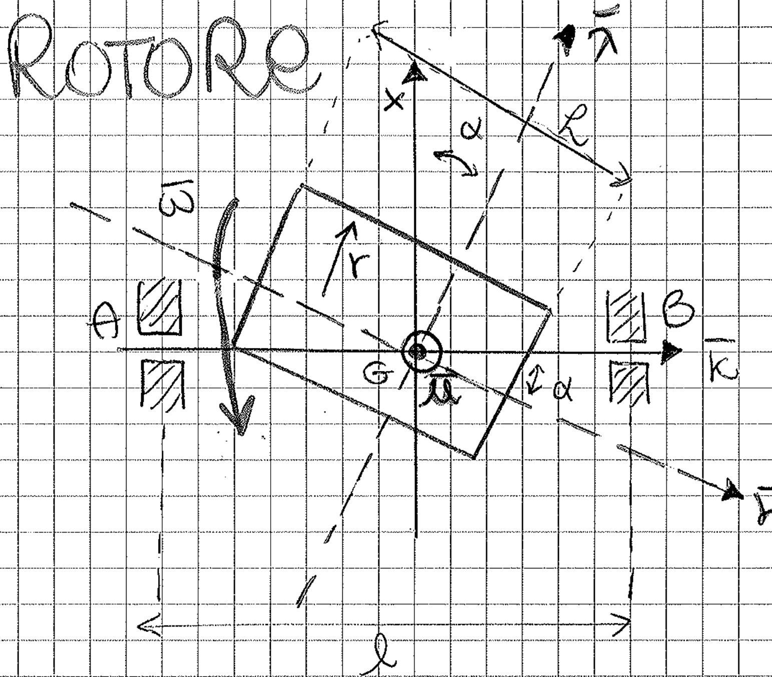
$$V_f = \sqrt{gL(1-\cos\theta)2} = 1{,}41\ m/s$$

$$V_i = \frac{(m_1+m_2)V_f}{m_1} = 709{,}41\ m/s$$

$$E_{DISS} = \Delta E_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_f^2 - \frac{1}{2}m_1 V_i^2 = 15067{,}9\ J$$

ROTORE

27 MARZO 2013



$\alpha = 1° = \text{cost}$

$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 157{,}08\ rad/s$

$\omega = \text{cost}$

$\bar F_{ING} = ?$ $\bar M_{ING} = ?$

$m = 275{,}6\ kg$

$\bar\omega = \omega \bar k$

$\bar u$ asse del cilindro inclinato di α

$\bar k$ asse di rotazione ($\bar\omega$)

▭ non è propriamente un rotore, ma un cilindro inclinato

A, B supporti dove si scarica il peso del rotore

$$m = \left[(\pi r^2)\ell\right]\rho = V\rho = 275{,}6\ kg$$

$$r = \frac{\varnothing}{2}$$

cioè ruota assieme al rotore;
- è una terna di simmetria;
- è una terna centrata nel baricentro;
- è una terna principale di inerzia.

Il fatto che $\bar{\omega}$ sia intorno a $\bar{k}$, implica che produce una coppia di inerzia $\bar{M}_{inG}$ perché $\bar{k} \neq \bar{\nu}$, dove $\bar{\nu}$ è l'asse del rotore!

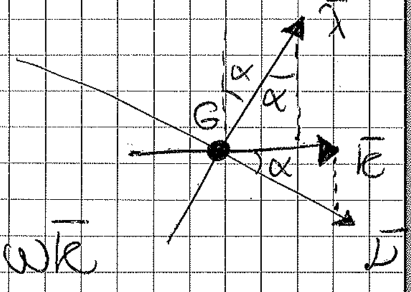
$$\bar{M}_{inG} = -\frac{d\bar{K}_G}{dt}$$ con $\bar{K}_G$ = momento della quantità di moto riferito al baric.

$\bar{K}_G$ deve essere espresso nella terna centrale di inerzia (xk è il modo più semplice per esprimerlo)

$$\bar{K}_G = I_\lambda p \bar{\lambda} + I_\mu q \bar{\mu} + I_\nu r \bar{\nu}$$

con
$$\begin{cases} p = \bar{\omega} \times \bar{\lambda} = \bar{\omega} \cdot \bar{\lambda} \\ q = \bar{\omega} \times \bar{\mu} = \bar{\omega} \cdot \bar{\mu} \\ r = \bar{\omega} \times \bar{\nu} = \bar{\omega} \cdot \bar{\nu} \end{cases}$$
dove $\bar{\omega} = \omega \bar{k}$ la velocità angolare è espressa con $\bar{k}$

Quindi esprimiamo $\bar{k}$ in funzione degli altri vettori proiettandolo su $\bar{\lambda}$ e $\bar{\nu}$



$$\bar{k} = \operatorname{sen}\alpha\, \bar{\lambda} + \cos\alpha\, \bar{\nu}$$

$$\bar{\omega} = \omega \sin\alpha\, \bar{\lambda} + \omega\cos\alpha\, \bar{\nu} = \omega \bar{k}$$

$p = \bar{\omega} \times \bar{\lambda} = \omega \sin\alpha$

$q = \bar{\omega} \times \bar{\mu} = 0$

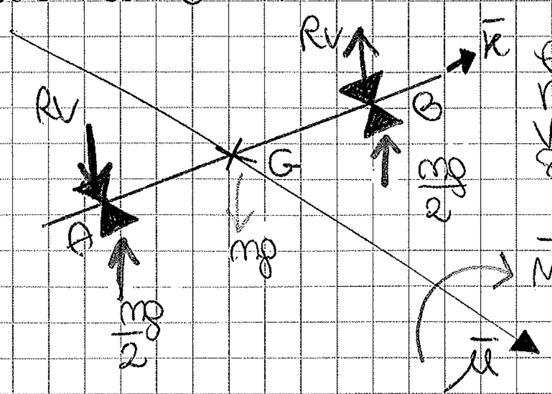
$r = \bar{\omega} \times \bar{\nu} = \omega\cos\alpha$

Ricordo che il prodotto scalare
$\bar{\lambda} \times \bar{\lambda} = 1$
$\bar{\lambda} \times \bar{\nu} = 0$

$$\bar{K}_G = \left[I_\lambda \omega \sin\alpha\right] \bar{\lambda} + \left[I_\nu \omega \cos\alpha\right] \bar{\nu}$$

Ora derivo questa quantità:
$(I_\lambda, \omega, I_\nu, \alpha)$ sono costanti (quindi derivo solo $\bar{\lambda}$ e $\bar{\nu}$)

ALBERO DEL ROTORE:



essendo il rotore centrato nel baricentro, sui supporti viene scaricato metà del suo peso

$\bar{M}_{ING}$ coppia di inerzia opposta alla regola della mano dx perché è negativa

sui supporti nascono anche delle reazioni vincolari dinamiche a causa di M_{ING} e che cercano di equilibrarla

$\bar{M}_{ING}$ porta giù B e su A
R_V porto su B e giù A
opposte

$$R_V = \frac{M_{ING}}{l} = 3014 N, \quad l = \overline{AB}$$

complessivamente:

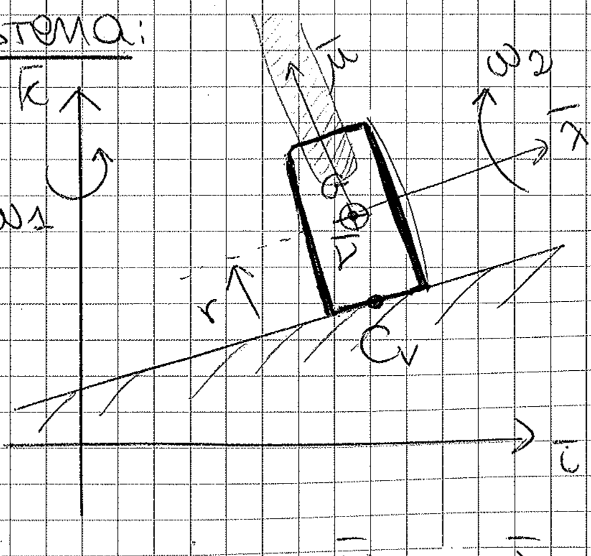
$+\uparrow$ A $\quad -R_V + \frac{mg}{2} = R_A = -1662 N$

$+\uparrow$ B $\quad R_V + \frac{mg}{2} = R_B = 4366 N$

reazioni vincolari dei singoli supporti

B → grande sforzo, A → minor sforzo

SISTEMA:



ruota su un piano inclinato (in curva)

la forcella della ruota dà il moto di trascinamento (a manina)

MOTO RELATIVO: $\bar{\omega}_{ASS} = \bar{\omega}_{REL} + \bar{\omega}_{TR} = -\omega_2 \bar{\lambda} + \omega_1 \bar{k}$

$$\frac{d\bar{K}_G}{dt} \rightarrow \frac{d\bar{\lambda}}{dt}, \frac{d\bar{\mu}}{dt}, \frac{d\bar{\nu}}{dt}$$

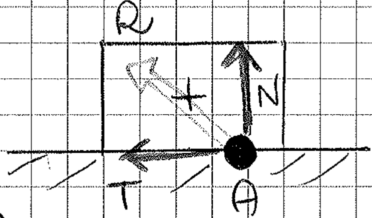
trattiene la cassa.

R ha come equilibrio la reazione del terreno uguale e opposta! scompongo questa nuova forza in 2 componenti verticale (N) e orizzontale (T).

Il punto A del terreno, dove R risulta applicata, non è allineato al baricentro cioè la sua verticale non passa più per G.

T = componente tangenziale di attrito di aderenza, è una forza reattiva opposta alla possibile direzione di moto
(verso facile da individuare)

R = reazione del terreno è legata a N e T



N e T sono legate dalla <u>legge dell'attrito di aderenza</u> ($\bar{v}=0$)

$$\boxed{T \leq f_a N}$$

f_a = coefficiente di attrito di aderenza, dipende dalla natura dei corpi a contatto e dallo stato delle superfici (tabelle)
(ex: olio tra le 2 superfici o altri lubrificanti)

in generale:

attrito
- opposto alla direzione del moto
- forze incognite
- <u>non</u> è lineare

T = FORZA DI ATTRITO TANGENZIALE DI STRISCIAMENTO CASSA - TERRENO OPPOSTA AL MOTO

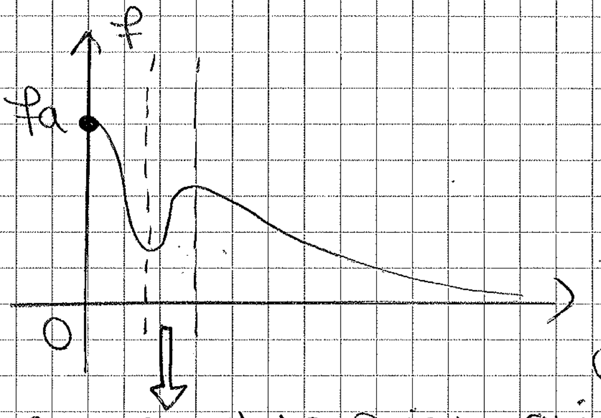
LA LEGGE DELL'ATTRITO DI STRISCIAMENTO LEGA N E T

$$\boxed{T = fN}$$

f = COEFFICIENTE DI ATTRITO DI STRISCIAMENTO (TABELLE)

$\boxed{f_a > f}$, sempre!

DIAGRAMMA SPERIMENTALE



FENOMENO DELLO STICK-SLIP

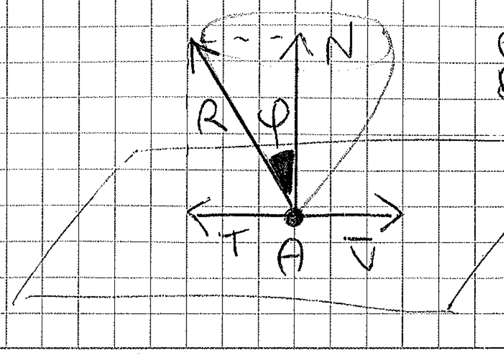
CONTINUO PASSAGGIO DALL'ADERENZA ALLO STRISCIAMENTO
(LA SLITTA SI MUOVE "A SALTELLI")
(PORTA CHE CIGOLA / GESSO CHE STRIDE)

MODELLO GEOMETRICO DI STRISCIAMENTO:

$\varphi = \hat{RN}$ = ANGOLO DI ATTRITO DI STRISCIAMENTO

$T = tg\varphi N \rightarrow \boxed{f = tg\varphi}$ PER LA LEGGE DI ATTRITO DI STRISCIAMENTO

CONO DI ATTRITO DI STRISCIAMENTO



$$\boxed{\varphi = arctg(f)}$$

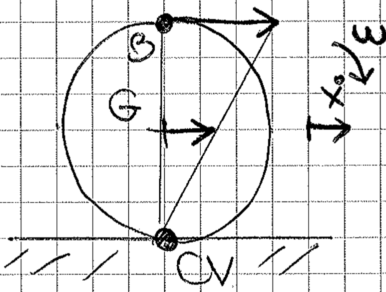
STABILISCO SE NEL PUNTO A DI CONTATTO RUOTA/TERRENO C'È ATTRITO
- DI ADERENZA (1 GdL)
- DI TRASCINAMENTO (2 GdL)

RUOTA
- 1 GdL, se $\dot{x}$ e ω, $\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$ sono legate
- 2 GdL, se $\dot{x}$ e ω, $\ddot{x}$ e $\dot{\omega}$ sono indipendenti

(a meno che l'esercizio non lo dica specificat.)

IPOTIZZO
1 GdL → PURO ROTOLAMENTO → ADERENZA
2 GdL → NO PURO ROT. → STRISCIAMENTO

ⓐ 1GdL



$|V_G| = \dot{x} = \dot{x}_G$

$|V_B| = 2V_G = 2\dot{x}$

x la distribuzione triangolare

$\dot{x}_G = \underbrace{\bar{V}_{CV}}_{=0} + \omega \bar{k} \wedge (\overline{G - CV})$

$|\dot{x}_G| = \omega r = |V_G|$

$\dot{x}_B = \underbrace{\bar{V}_{CV}}_{=0} + \omega \bar{k} \wedge (\overline{B - CV})$

$|\dot{x}_B| = \omega (2r) = |V_B|$

$$\boxed{\begin{array}{c} \dot{x}_G = \dot{x} = \omega r \\ \downarrow \text{ derivo in } G \\ \ddot{x}_G = \ddot{x} = \dot{\omega} r \end{array}}$$

CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO → ADERENZA

la 4ª equazione sarà quindi

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\omega} r \\ T \le f_a N \end{cases}$$ in puro rotolamento

→ disuguaglianza da verificare qui!!

Se trovo $T > f_a N$, allora non sono in aderenza e non sono in puro rotolamento, x cui $\dot{x} \neq r\omega$ e $\ddot{x} \neq r\dot{\omega}$, cioè la 4ª relazione non vale più! → allora ho strisciamento e uso la legge:

$\rightarrow \overline{v_B} = 2\overline{v_G}$ DISTRIBUZIONE TRIANGOLARE DELLE VELOCITÀ

NON TUTTE LE VELOCITÀ SULLA CIRCONFERENZA SONO A ESSA TANGENTI, MA ⊥ ALLA DISTANZA RISP. CV

$$* \ \overline{a_G} = \overline{a_{CV}} + \dot{\omega}\overline{k} \wedge (\overline{G-CV}) - \omega^2(\overline{G-CV})$$

$$\downarrow$$

$$\overline{a_{CV}} \neq 0, \quad \overline{a_{CV}} = \omega^2(\overline{G-CV})$$

$$\overline{a_G} = \cancel{\omega^2(\overline{G-CV})} + \dot{\omega}\overline{k} \wedge (\overline{G-CV}) - \cancel{\omega^2(\overline{G-CV})}$$

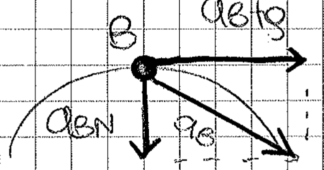
a_{CV} È OPPOSTA ALLA COMPONENTE CENTRIFUGA! E LA EQUILIBRA PERFETTAMENTE!

$$\overline{a_G} = \dot{\omega}\overline{k} \wedge (\overline{G-CV})$$

$|a_G| = \dot{\omega}\, \overline{GCV} = \dot{\omega} r$ VALE SOLO x G!! $\ddot{x}_G = \dot{\omega} r$

L'ACCELERAZIONE DI B INVECE È LA COMPOSIZIONE DI COMPONENTE NORMALE E TANGENZIALE

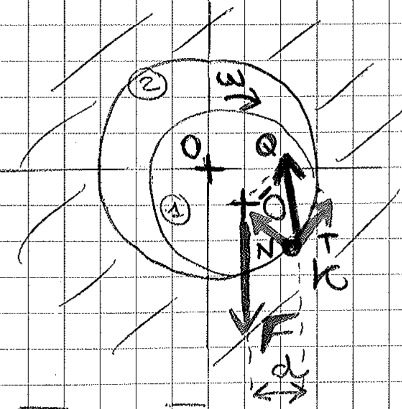
TUTTE QUESTE CONSIDERAZIONI VALGONO XK IN A C'È IL CV.



ATTRITO al PERNO

(CATEGORIA DEGLI ATTRITI RADENTI)

ABBIAMO UNA SEDE CIRCOLARE DETTA BOCCOLA.



UN PERNO CHE RUOTA DENTRO LA BOCCOLA TOCCANDOLA NEL PUNTO K

F È IL CARICO SUL PERNO CHE NON PASSA NEL PUNTO DI CONTATTO K.

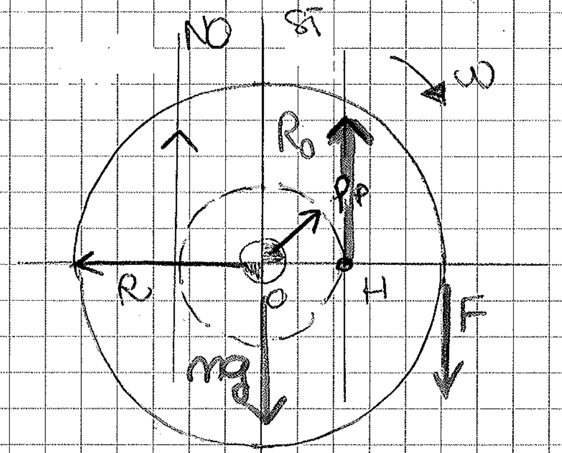
PER ATTRITO SI FORMANO N e T CHE SOMMATE DANNO Q

$\overline{Q} \parallel \overline{F}$ E SONO DISTANTI $d \rightarrow$ DANNO UNA COPPIA RESISTENTE QUINDI d È IL LORO BRACCIO

PROCEDIMENTO:

a) SEPARARE LE PARTI DEL SISTEMA
b) TRACCIARE IL CERCHIO DI ATTRITO SULLE CERNIERE
c) STABILIRE DIREZIONE E VERSO DI $\bar{Q}$ IN BASE ALLE 3 CONDIZIONI

- $\bar{Q}$ è la reazione vincolare nella cerniera e segue l'attrito al perno
- L'attrito al perno non sposta da O' né peso né inerzie



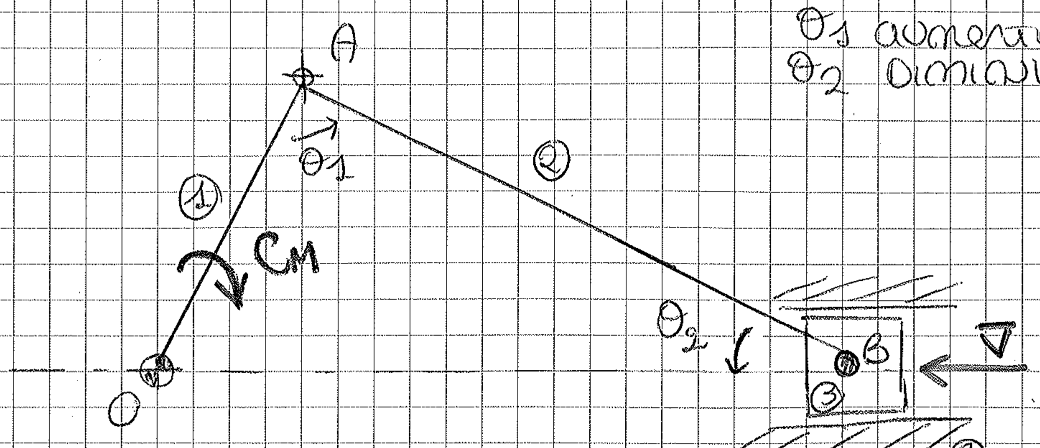
2 POSSIBILITÀ // a F
DOVE METTERE R_0
che da O si sposta in H
GRAZIE AL CERCHIO DI ATTRITO
R_0 deve essere opposto a ω!

R = RAGGIO DEL TAMBURO

$\rho_p = r_p \operatorname{sen} \varphi_p$ (r_p = DATO FORNITO) RAGGIO PERNO

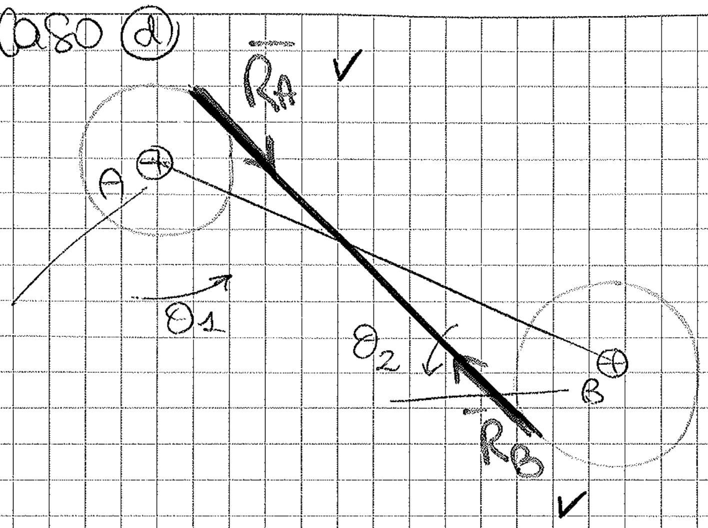
BIELLA - MANOVELLA

CON ATTRITO IN A e B



θ_1 AUMENTA
θ_2 DIMINUISCE

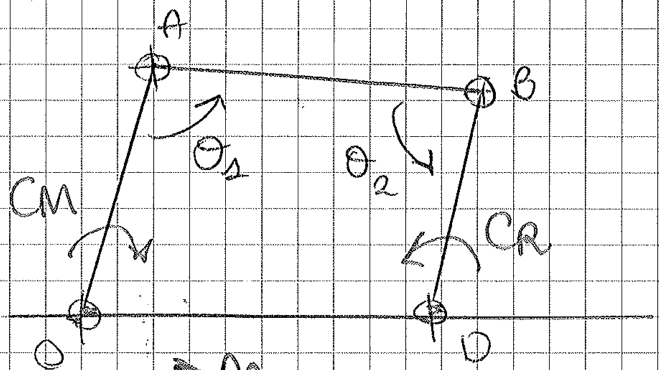
Caso (d)



finalmente sono tutte e 2 opposte al moto!

cioè sono rispettate sia le regole degli equilibri, sia le condizioni di attrito

QUADRILATERO ARTICOLATO

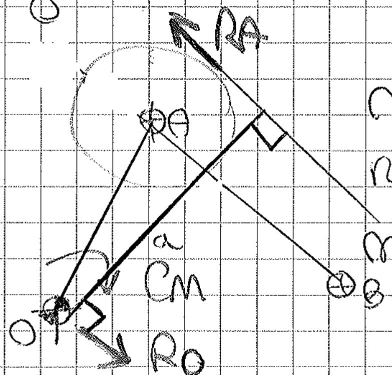


attrito in A e B

θ_1 aumenta

θ_2 diminuisce

nelle cerniere fisse (O,D) non c'è attrito al perno



mettiamo R_O e R_A, $\bar{R}_O // \bar{R}_A$

regola equilibri, $|\bar{R}_O| = |\bar{R}_A|$

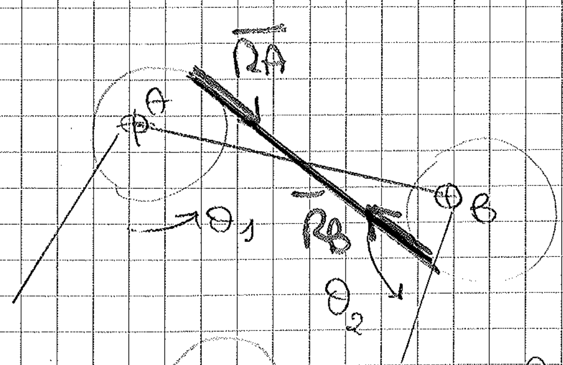
ma la direzione di R_A è AB!

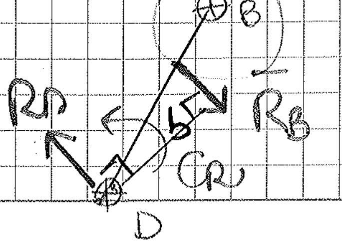
O) $C_M - R_A a = 0$ a = braccio

a > a_{ideale}

regola equilibri e condizioni di attrito

$|\bar{R}_A| = |\bar{R}_B|$





$R_B // R_D$

$|\bar{R}_B| = |\bar{R}_D|$

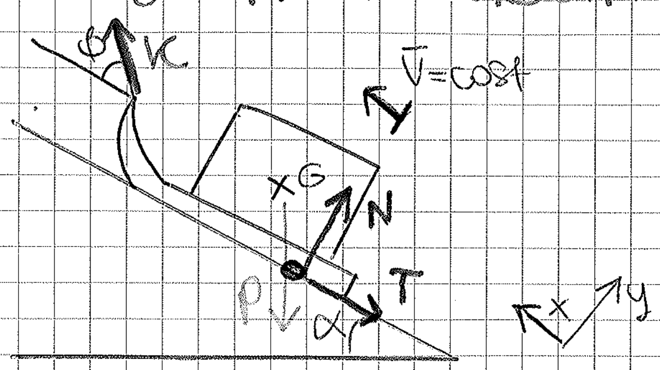
CR si oppone alla coppia che mette in moto il sistema

D) $C_R - R_B b = 0$

b = braccio

b < b_{ideale}

SLITTA SU PIANO INCLINATO (ES 4.1)



$\alpha = 30\%$

$m = 500\,kg$

$f = 0{,}2$ coeff attrito

$P = mg$

K_{min} ? β ?

$x \nearrow^+$ $K\cos\beta - T - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$

$y \nearrow^+$ $N - mg\cos\alpha + K\sin\beta = 0$

4 INCOGNITE

C'È ATTRITO DI STRISCIAMENTO!

$T = fN$

K minimo, forza minima richiesta dalla slitta, la trovo in funzione di β e poi derivo x trovarne il minimo! $\longrightarrow K(\beta)$

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha - K\sin\beta \\ T = -mg\sin\alpha + K\cos\beta \\ T = fN \end{cases}$$

$$\longrightarrow K(\beta) = \frac{f\,mg\cos\alpha + mg\sin\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta}$$

DENOM. DI K $\quad G(\beta) = \cos\beta + f\sin\beta \quad$ UNICO PEZZO CHE DIPENDE DA β

CERCO $G(\beta)_{\underline{max}}$ x avere $K(\beta)_{min}$

↳ xké è a denominatore

$$\frac{dG(\beta)_{max}}{d\beta} = -\sin\beta + f\cos\beta = 0$$