NUMERO: 1221

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Geometria

Prof. Massazza_Ceria

GEOMETRIA

PROF: Carla Massaza

CORSO
- ALGEBRA LINEARE 1/2
- GEOMETRIA ANALITICA 1/4
  (STUDIO DI CURVE E SUPERFICI NELLO SPAZIO)
- ANALISI 1/4 $(f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$

LIBRO: • GRECO - VALABREGA (V. 1-2)
EDITORE:
LEVROTTO - BELLA (sennò Sanini)

MATERIALE: programma
esercizi sett. x sett. (+ soluzioni)

ESAME: TEST, 15 domande a risp multipla
7/15 → x accedere all'ORALE
ORALE, copia del compito, correzione domande

didattica_online → PROVE TEST

RICEVIMENTO: venerdì dalle 13,30
al Dipartimento di Matematica (3° piano)
TEL: 7512
TEL: 7500

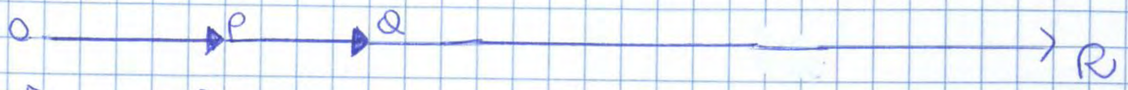
OPERAZIONI CON I VETTORI

★ **somma**

$(\vec{V}, +)$

aso ①

Due vettori con stessa direzione e stesso verso

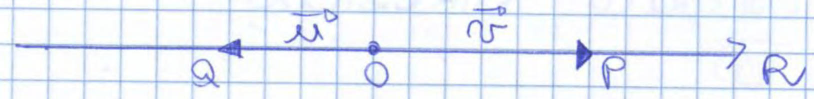


$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{u} + \vec{v} =$
- stessa direzione
- somma dei moduli
- stesso verso

se un vettore e nullo → si comporta come zero

aso ②

Due vettori con stessa direzione e diverso verso



somma =
- stessa direzione
- verso del vettore con modulo maggiore
- modulo = differenza dei moduli

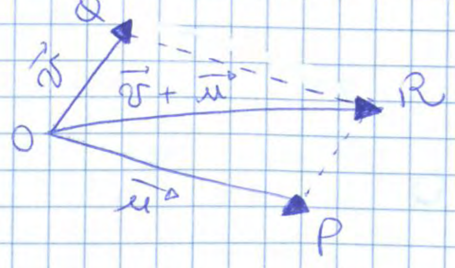
se 2 vettori hanno = modulo → vettore nullo

aso ③

Due vettori con diversa direzione

Regola del parallelogramma

(o regola punta/coda)



$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}$

▸ ESEMPIO: DI UN GRUPPO NON COMMUTATIVO

prendiamo 3 oggetti

le corrispondenze biunivoche sono 6

		①	②	③	④	⑤	⑥
1 •	⟶	1	1	3	2	2	3
2 •	⟶	2	3	2	1	3	1
3 •	⟶	3	2	1	3	1	2

SOSTITUZIONI / PERMUTAZIONI su 3 elementi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = S_1$$

FACCIO LA COMPOSIZIONE: APPLICO PRIMA S_1 e POI S_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

↓

$$S_2 \circ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I 2 RISULTATI SONO DIVERSI, SONO 2 CORRISPONZE BIUNIVOCHE DIVERSE

$$S_1 \circ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

PRESO L'INSIEME I, FACCIO BIEZIONE + COMPOSIZIONE

$(\mathcal{B}(I), \circ)$ è un GRUPPO

non è un GRUPPO COMMUTATIVO

★ **PRODOTTO** per un numero Reale (PER **SCALARE**)

FUNZIONE che va DA

$\mathbb{R} \times \bar{V} \to \bar{V}$

$(r, \vec{v}) \to r\vec{v}$

$\forall r \in \mathbb{R},\ r\vec{v}$ /

- DIREZIONE $\vec{v}$
- MODULO $|r||\vec{v}|$
- VERSO
  - di $\vec{v}$ se $r > 0$
  - OPPOSTO di $\vec{v}$ se $r < 0$

campo (in algebra) = insieme $\mathbb{K}$ con 2 operazioni, somma e prodotto, $+, \cdot$, con le seguenti proprietà: $(\mathbb{K}, +, \cdot)$

- rispetto alla somma, è un gruppo commutativo (valgono le 4 proprietà)
- $\mathbb{K} - \{0\} = \mathbb{K}^*$ (se tolgo lo zero)
  $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ $\mathbb{K}^*$ rispetto al prodotto è ancora un gruppo commutativo
  (elemento neutro = 1)
  (esiste l'inverso)
- P. distributiva del prodotto rispetto alla somma

Esistono infiniti campi con queste proprietà!
$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$, vengono trattati sempre in modo generale come campi! essi saranno i nostri $\mathbb{K}$

Esempi di spazi vettoriali

- vettori applicati in un punto
- V su $\mathbb{R}$ $(V, \mathbb{R})$ (il campo $\mathbb{K}$ è $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$
$\{(a_1, a_2, a_3)\}$, $a \in \mathbb{R}$
esempio: $(1, -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}) \in \mathbb{R}^3$
↓ sono i nostri vettori = tutte le terne

$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $a \in \mathbb{R}$

x chiamarli devo definire le 2 operazioni somma e prodotto in modo che le 8 proprietà valgano

$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{u} = (b_1, b_2, b_3)$

due spazi vettoriali che sono sostanzialmente diversi possono essere considerati uno solo!

altri esempi di spazi vettoriali

prendo un campo, $\mathbb{K}$ qualunque
(x comodità: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

matrici ad elementi reali con 2 righe e 3 colonne
= tabella di numeri reali

♥ esempio : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\pi}{2} \\ 2 & \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

per generalizzare, metto dei parametri

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

ma non è ancora la notazione più generale
→ convenzione :
- scegliere una lettera
- uso 2 indici $<$ riga : 1° indice
  colonna : 2° indice

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \text{ con } \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2,3 \end{matrix}}$$

$$\text{lettera}_{\text{colonna} \leftrightarrows \text{riga}}$$

definisco ora le 2 operazioni somma e prodotto:

MATRICI COME SPAZI VETTORIALI:

$$\mathbb{R}^{2,3}$$

→ RIGHE

→ COLONNE

↳ CAMPO

IN GENERALE:

$$(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{iJ}) \text{ dove } \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ J = 1 \dots n \end{matrix}$$

con A e $B = (b_{iJ})$ dove $i = 1 \dots n$, $J = 1 \dots n$

DEFINISCO SOMMA E PRODOTTO:

$$A + B = (c_{iJ}) \text{ dove } c_{iJ} = a_{iJ} + b_{iJ}$$

$$rA = (d_{iJ}) \text{ dove } d_{iJ} = r a_{iJ}$$

(1a) AL POSTO DI $\mathbb{R}$ POSSO METTERE UN CAMPO QUALUNQUE:

$$(\mathbb{K}^{m,n}) \text{ su } \mathbb{K}$$

RENDIAMO COME ESEMPIO:

$(\mathbb{R}^{2,3}, +, \cdot)$, $\mathbb{R}$ (I NUMERI DELLA MATRICE SONO REALI)

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{PER DISPORLI SU UNA RIGA CI SONO 6! POSSIBILITÀ}$$

$$= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

ECCO LA PRIMA
SESTUPLA LA PRIMA
CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

IMMAGINE DELLA MATRICE

DIMOSTRAZIONE DELLE PROPRIETÀ: 9 MARZO 2012

1) ∃ = ne esiste almeno uno di elemento neutro
→ unico

x dimostrare l'unicità di qualcs: suppongo di averne 2 e dimostro che coincidono

DIMOSTRAZIONE dell'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma

supponiamo che ne esistano 2 $\vec{0}$ e $\vec{0}$
e dimostriamo che $\vec{0} = \vec{0}$

$$\vec{0} + 0' = 0' = \vec{0} \Longrightarrow \vec{0} = 0'$$

usando la definizione di elemento neutro

2) ∃ l'opposto
→ unico

DIMOSTRAZIONE dell'unicità dell'opposto

supponiamo che esistano 2 opposti $\vec{v}'$ e $\vec{v}''$ di $\vec{v}$
e dimostriamo che sono uguali $\vec{v}' = \vec{v}''$
usiamo la definizione di opposto

$$\vec{v} + \vec{v}' = \vec{v}' + \vec{v} = 0$$
$$\vec{v} + \vec{v}'' = \vec{v}'' + \vec{v} = 0$$

dobbiamo utilizzare anche le altre proprietà →
la proprietà associativa

$$\vec{v}' + \vec{v} + \vec{v}'' = \underbrace{(\vec{v}' + \vec{v}) + \vec{v}''}_{\vec{0} + \vec{v}'' = \vec{v}''} \overset{\text{associativa}}{=} \underbrace{\vec{v}' + (\vec{v} + \vec{v}'')}_{\vec{v}' + \vec{0} = \vec{v}'}$$

$$\vec{v}'' = \vec{v}'$$

$$\cancel{0\vec{v}} + \vec{0} = 0\vec{v} + \cancel{0\vec{v}}$$

$$0\vec{v} = \vec{0}$$

INVECE PER LA SECONDA, FACENDO LA STESSA COSA
$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$

$$a\vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0})$$

P. DISTRIBUTIVA E SEMPLIFICHIAMO

$$\cancel{a\vec{0}} + \vec{0} = \cancel{a\vec{0}} + a\vec{0}$$

$$a\vec{0} = \vec{0}$$

TEOREMA (ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO)

NUOVA PROPRIETÀ: DIMOSTRAZIONE

$$ab = 0 \longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

METÀ È STATA DIMOSTRATA SOPRA ($\leftarrow$)

ORA DIMOSTRIAMO X I VETTORI:

È VERO CHE $a\vec{v} = \vec{0} \overset{?}{\longrightarrow} a = 0 \vee \vec{v} = 0$?

PROPOSIZIONE p : $a\vec{v} = \vec{0}$

È GIUSTO CHIEDERSI SE È VERA O FALSA

PROPOSIZIONE q : $a = 0$

PROPOSIZIONE r : $\vec{v} = 0$

QUINDI: $p \overset{?}{\longrightarrow} q \vee r$

X UNA REGOLA LOGICA LA PROP SOPRA È UGUALE A:

$p \wedge \text{not } q \overset{?}{\longrightarrow} r$

RISCRIVO: $a\vec{v} = \vec{0} \wedge a \neq 0 \overset{?}{\longrightarrow} \vec{v} = 0$

X DEFINIZIONE DI CAMPO, $\forall a \neq 0$ = ESISTE L'INVERSO

OVVERO $\exists a^{-1}$ TALE CHE $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$

SOTTOSPAZI

invece di spazio potevamo utilizzare il piano, definire i vettori e le operazioni somma, prodotto le proprietà ... e vedere che è uno spazio vettoriale.

ex: P. associativa → universale ("qualunque")
Tutte le P. universali valgono sempre anche se mi restringo a lavorare su un sottoinsieme
ex: elemento neutro / opposto → esistenziali valgono anche nel piano.

Per ogni spazio ci sono quindi ∞ sottospazi con sempre le 8 proprietà.

ancora spazi più piccoli sono le rette: sempre sottospazi in cui valgono le 8 proprietà.

sia $\bar{V}$ spazio vettoriale su un certo campo $\mathbb{K}$

$(\bar{V}, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$

Definizione sottospazio = S

$S \subseteq V$ è uno sottospazio se risulta essere uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di $\bar{V}$ ristrette a esse. (è se un insieme non vuoto)

♥ verifiche necessarie perché S sia un sottospazio:

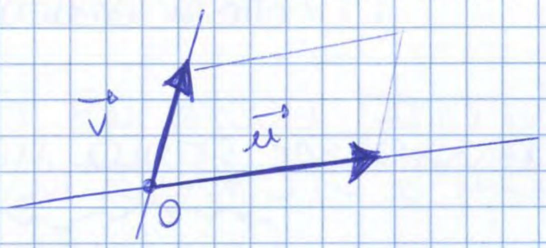
non basta verificare le 8 proprietà
prima bisogna verificare somma e prodotto
e che il risultato di qst 2 operazioni sia sempre

- vettore nullo + un vettore? NO (NO CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO)
- devo avere almeno una retta!

★ TUTTI I VETTORI CHE GIACCIONO SU UNA RETTA COSTITUISCONO UNO SPAZIO VETTORIALE

aggiungo una retta (∞ vettori)? NO (NO CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA)
- devo avere almeno un piano!

★ TUTTI I VETTORI CHE GIACCIONO SU UN PIANO COSTITUISCONO UNO SPAZIO VETTORIALE



- aggiungo una retta? NO devo aggiungere uno spazio...

esempio: sfera è un sottospazio? NO!

L'insieme di funzioni continue è un sottospazio vettoriale e l'abbiamo dimostrato in Analisi

L'insieme di funzioni derivabili una volta è un sottospazio vettoriale

L'insieme di funzioni derivabili ∞ volte è uno sottospazio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: spazi vettoriali

PRENDIAMO $\mathbb{R}^3$

$S = \{ (x,y,z) \;/\; ax+by+cz=0 \}$

VERIFICO SIA UN SOTTOSPAZIO (STESSE COSE DI PRIMA)

→ ABBIAMO OTTENUTO SOTTOSPAZI VETTORIALI

LO STESSO SE PRENDIAMO $\mathbb{R}^n$

O MEGLIO ANCORA $\mathbb{K}^n$

$S = \{ (x_1, x_2, \dots x_n) \;/\; a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = 0 \}$

VERIFICO SIA UN SOTTOSPAZIO

SE AVESSIMO INVECE:

$S = \{ x,y \;/\; 3x+2y=1 \}$

E' UN SOTTOSPAZIO ? NO MANCA L'ELEMENTO NEUTRO!

→ RETTA, MA NON PASSA PER L'ORIGINE

ALTRI ESEMPI

$V = \mathbb{K}^{2,2} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ POSSO USARE n, m AL POSTO DI 2,2

TRASPOSIZIONE SCAMBIO RIGHE/COLONNE

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{t} {}^tA \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

A TRASPOSTA

E' UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

APPLICATA 2 VOLTE TROVO L'IDENTITA' (MATRICE DI PARTENZA)

$t \circ t$ = IDENTITA'

nella generica matrice simmetrica servono meno parametri della matrice normale

(ex: 2x2 : 4parametri → 3parametri)

SOTTOSPAZIO DELLE MATRICI ASIMMETRICHE

$\mathcal{A} = \{ A / A = -{}^tA \}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = -a_{11} \leftrightarrow a_{11} = 0$

$a_{12} = -a_{12} \leftrightarrow a_{22} = 0$

gli elementi della diagonale devo essere $= 0$

$a_{21} = -a_{12}$ ovvero $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

hanno un solo parametro)

verifico sia un sottospazio:

matrice nulla è asimmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A \in \mathcal{A}$

chiusura rispetto alla somma:

$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta \\ -\alpha-\beta & 0 \end{pmatrix}$ la matrice somma è simmetrica $A + B \in \mathcal{A}$

chiusura rispetto al prodotto

$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\alpha \\ -\lambda\alpha & 0 \end{pmatrix}$ la matrice prodotto è simmetrica $\lambda A \in \mathcal{A}$

$(V, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$

PRENDIAMO 2 SOTTOSPAZI S_1 e S_2

$S_1 \cap S_2$ è ancora un sottospazio?

S_1, S_2 sottospazi $\overset{?}{\rightarrow}$ $S_1 \cap S_2$ sottospazio

VERIFICO:

- $\vec{0} \in S_1 \cap S_2$? (SI) xkè è in S_1 e in S_2
- $\vec{x} \in S_1 \cap S_2$, $\vec{y} \in S_1 \cap S_2 \overset{?}{\Longrightarrow}$ $\vec{x} + \vec{y} \in S_1 \cap S_2$

$\vec{x} \in S_1 \cap S_2 \downarrow \qquad \vec{y} \in S_1 \cap S_2 \downarrow$

$(\vec{x} \in S_1) \wedge (\vec{x} \in S_2) \wedge (\vec{y} \in S_1) \wedge (\vec{y} \in S_2)$

$\overset{?}{\Longrightarrow} (\vec{x} + \vec{y} \in S_1) \wedge (\vec{x} + \vec{y} \in S_2)$

S_1 e S_2 SONO CHIUSI RISPETTO ALLA SOMMA

QUINDI:

se $(\vec{x} \in S_1) \wedge (\vec{y} \in S_1) \Longrightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in S_1$

se $(\vec{x} \in S_2) \wedge (\vec{y} \in S_2) \Longrightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in S_2$

FINE DIMOSTRAZIONE

- $\vec{x} \in S_1 \cap S_2$, $a \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} a\vec{x} \in S_1 \cap S_2$

OVVERO

$(\vec{x} \in S_1) \wedge (\vec{x} \in S_2) \wedge a \in \mathbb{R} \Longrightarrow (a\vec{x} \in S_1) \wedge (a\vec{x} \in S_2)$

S_1 e S_2 SONO CHIUSI RISPETTO AL PRODOTTO, QUINDI:

se $(\vec{x} \in S_1) \Rightarrow (a\vec{x} \in S_1)$ e se $(\vec{x} \in S_2) \Rightarrow (ax \in S_2)$

sempio ①

PRENDO COME SOTTOSPAZI :

S_1 : Piano

S_2 : Retta somma: T LO SPAZIO

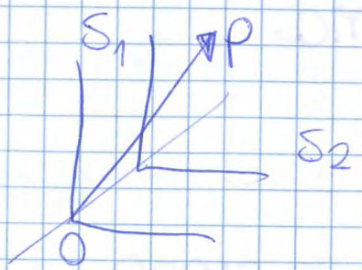
C'è UN SOLO MODO DI DECOMPORRE $\vec{OP}$!! (somma Bella)

sempio ②

RENDO COME SOTTOSPAZI

S_1 : Piano

S_2 : Piano somma: T LO SPAZIO

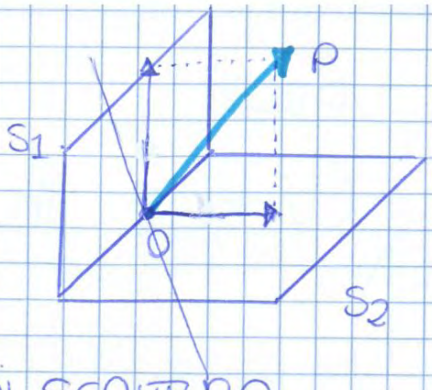


Ci SONO ∞ MODI DI DECOMPORRE $\vec{OP}$!! (somma BRUTTA)

②

$S_1 + S_2$

piano piano



- cade l'unicità di scrittura
- non è più una somma diretta, xk cambia la retta per S_1, mentre tengo fisso il piano S_2
- ∞ modi x scrivere $\vec{OP}$

Come capire se la somma è diretta o no?

considero 3 elementi: (o più...)

$S_1 + S_2 + S_3 \overset{def}{=} (S_1 + S_2) + S_3$

ale l'associativa!

ale anche l'associativa per la somma di sottospazi?

sì

xk vale la proprietà associativa per la somma di vettori

(dimostro)

CRITERIO

se il vettore nullo $\vec{0}$ si scrive in modo unico, vale anche x tutti gli altri

eorema: condizione necessaria e sufficiente

affinche' $S_1 + S_2 + \dots S_n$ sia diretta e' che vettore $\vec{0}$ si possa scrivere come somma di l vettore di S_1 con un vettore di $S_2, S_3 \dots S_n$, in odo unico.

é una somma diretta? NO!

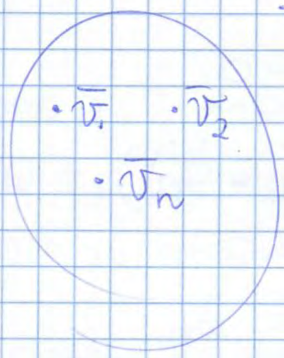
ma se faccio:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{\bar{0}\}$$

PROPRIO XK QSTA CONDIZIONE VALE SOLO NEL CASO PARTICOLARE (SOLO 2 SOTTOSPAZI)

nuovo esempio di spazio vettoriale

spazio vettoriale qualunque su un campo qualunque (ex: $\mathbb{R}$)



$V \quad K$

costruire il minimo sottospazio di V che contiene i vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n$

$$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$$

inimo
ottospazio di V_1: π i suoi multipli

$$\mathcal{L}(\bar{V}_1) = \{a\bar{v}_1 \dots a \in K\}$$

chiuso x la somma
chiuso x il prodotto

$$\left[a\bar{v}_1 + b\bar{v}_1 = (a+b)\bar{v}_1, \text{ chiuso x la somma}\right]$$

nimo
ottospazio di V_1 e V_2:

$$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \geq \mathcal{L}(\bar{v}_1), \mathcal{L}(\bar{v}_2)$$

$$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \mathcal{L}(\bar{v}_1) + \mathcal{L}(\bar{v}_2) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2\}$$

con $a_1, a_2 \in K$

inimo sottospazio di $V_1 \dots V_n$

$$\mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) = \mathcal{L}(\bar{v}_1) + \dots \mathcal{L}(\bar{v}_n) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 \dots a_n\bar{v}_n\}$$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$ PRIMA RIGA SECONDA COLONNA

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$ SECONDA RIGA PRIMA COLONNA

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$ SECONDA RIGA SECONDA COLONNA

È UN PRODOTTO COMMUTATIVO? $\boxed{\text{NO}}$

NON È UN GRUPPO COMMUTATIVO

CASO GENERALE:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$$ x l'esempio

$i = 1,2$
$j = 1,2$
$h = 1,2,3$

RIGHE A
COLONNE B
COLONNE A = RIGHE B

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots p \end{matrix}}$$

i = RIGHE A
j = COLONNE B
h = COLONNE A = RIGHE B

$$A_{23} \cdot B_{32} = C_{22} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

GUARDO LA PRIMA RIGHA c_{11} c_{12}

$$(c_{11}, c_{12}) = \Big(\underset{\times}{a_{11}}\underset{\heartsuit}{b_{11}} + \underset{\times}{a_{12}}\underset{\heartsuit}{b_{21}} + \underset{\times}{a_{13}}\underset{\heartsuit}{b_{31}},$$
$$\underset{\times}{a_{11}}\underset{*}{b_{12}} + \underset{\times}{a_{12}}\underset{*}{b_{22}} + \underset{\times}{a_{13}}\underset{*}{b_{32}}\Big)$$

$$= \Big(a_{11}(b_{11}, b_{12}) + a_{12}(b_{21}, b_{22}) + a_{13}(b_{31}, b_{32})\Big)$$

TERZA RIGA B

SE SCAMBIO L'ORDINE È VERO:

$$\boxed{{}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)}$$

PROVO A DIMOSTRARE CHE È VERO.

LA COLONNA I-ESIMA DI C SI OTTIENE COME COMBINAZIONE LINEARE DI TUTTE LE COLONNE DI A, USANDO COME COEFFICIENTI GLI ELEMENTI DELLA I-ESIMA COLONNA DI B.

METTIAMOCI NELL'INSIEME PARTICOLARE DELLE MATRICI QUADRATE A N-RIGHE E N-COLONNE:

$\mathbb{K}^{n,n}$

HA LE SEGUENTI OPERAZIONI

- SOMMA : $A+B$
- PRODOTTO x NUMERO : λA
} SPAZIO VETTORIALE
- PRODOTTO RIGHE x COLONNE : $A \cdot B$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO R·C

- IL PRODOTTO DI MATRICI NON È COMMUTATIVO
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$\forall A, B, C \qquad (AB)C = A(BC)$

(dimostrazione più avanti)

è una matrice diagonale!

QUANDO MOLTIPLICO LE MATRICI DIAGONALI OTTENGO ANCORA UNA MATRICE DIAGONALE!

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

RIESCO A SOSTITUIRE UNA MATRICE SOLITA CON UNA MATRICE DIAGONALE (+ FACILMENTE UTILIZZABILE)? VEDREMO LA DIAGONALIZZAZIONE DELLA MATRICE.

- NON ESISTE L'INVERSO! (PUÒ DARSI DI SÌ, PUÒ DARSI DI NO)

$$Ax = B$$

A, B MATRICI
x = INCOGNITA

SE ∃ UNA MATRICE INVERSA SINISTRA DI A, CHE INDICHIAMO CON A^{-1}, ALLORA POSSIAMO RISOLVERE L'EQUAZIONE COSÌ:

$$Ax = B$$
$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}B$$
$$\underbrace{(A^{-1}A)}_{=1} x = A^{-2}B \quad \text{ASSOCIATIVA}$$
$$x = \boxed{A^{-1}}B$$

VA A SX, XK IL PRODOTTO NON È COMMUTATIVO!
NON POSSO SCRIVERE $x = BA^{-1}$

∃ INVERSO: LO SCOPRIREMO POI...
(CONDIZIONE DELL'INVERTIBILITÀ DELLE MATRICI)

esempio:

ESEMPIO IN CUI:

$$A \neq 0,\ B \neq 0,\ AB = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PRIMA RIGA: $\boxed{0 \quad 0}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SECONDA RIGA: $\boxed{0 \quad 0}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

QUESTE MATRICI SONO I DIVISORI DELLO ZERO e SONO MATRICI NON INVERTIBILI.

$AB = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0 \Longrightarrow$ A non invertibile
B non invertibile

DIMOSTRAZIONE

$AB = 0$, A invertibile

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}0$$

$$(A^{-1}A)B = A^{-1}0$$

$IB = B = 0$ assurdo, x ipotesi $B \neq 0$!

in generale:

$$\boxed{A_{mn} I_{nn} = A_{mn}}$$

A_{23} ha inverso sx?

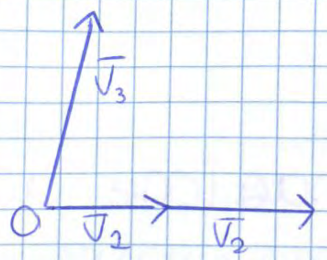
$\exists ? x \; / \quad x \cdot A_{23} = I$

$x_{32} \cdot A_{23} = I_{33}$

$\exists ? x_{32} \; / \quad x_{32} \cdot A_{23} = I_{33}$

risolvere qst equazione tra matrici ☺

idem se li prendo:



Definizione di indipendenza lineare / insieme libero

i vettori $\bar V_1 \dots \bar V_n$ si dicono linearmente indipendenti

e e solo se ⟺ vale questa implicazione:

$$\boxed{a_1 \bar V_1 + \dots + a_n \bar V_n = \vec 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0}$$

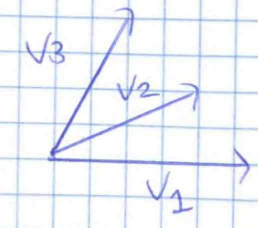
Tutto ciò equivale a dire: ⟺

⟹ la somma $\mathcal{L}(\bar V_1) + \dots + \mathcal{L}(\bar V_n)$ è diretta

⟹ ∃| esistono e sono unici dei numeri $(a_1 \dots a_n)$ / $\bar V = a_1 \bar V_1 + \dots a_n \bar V_n$

gni vettore può essere scritto come combinazione
ineare in modo unico

x: somma non diretta / i 3 vettori non sono l. indip



$$\bar V_3 = 0 \bar V_1 + 0 \bar V_2 + 1 \bar V_3$$

$$\bar V_3 = a \bar V_1 + b \bar V_2 + 0 \bar V_3$$

vettori $V_1 \dots V_n$ sono linearmente indipendenti =
= l'insieme $\{V_1 \dots V_n\}$ è libero

un insieme con $\bar 0$ non può essere libero!

x: $\{\bar V_1, \bar V_2, \bar V_3 = \bar 0\}$ ⟶ $0\bar V_1 + 0 \bar V_2 + 1 \bar V_3 = 0$

PORTO TUTTO DA UNA PARTE:

$$\bar{v}_i - a_1\bar{v}_1 - a_2\bar{v}_2 - \dots - a_{i-1}\bar{v}_{i-1} = \bar{0}$$

ASSURDO!

non so niente delle a,

ma so che il coefficiente $\bar{v}_i$ è uno! $\bar{v}_i \neq 0$!

quindi non sono tutti nulli!!!

Ⓑ IPOTESI: le 2 condizioni ① e ② sono vere

TESI: l'insieme è LIBERO

SUPPONGO: $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0} \overset{?}{\Longrightarrow} a_1 = \dots = a_n = 0$

- a_n deve essere zero, xk altrimenti va contro le ipotesi:

$$a_n^{-1}(a_n\bar{v}_n) = (-a_1\bar{v}_1 - a_2\bar{v}_2 \dots - a_{n-1}\bar{v}_{n-1})\,a_n^{-1}$$

$$\bar{v}_n = a_n^{-1}(-a_1\bar{v}_1 - a_2\bar{v}_2 \dots - a_{n-1}\bar{v}_{n-1})$$

ASSURDO! $\bar{v}_n$ non è combinazione lineare

- ora: $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_{n-1}\bar{v}_{n-1} = \bar{0}$
- a_{n-1} deve essere zero xk...
- andando avanti fino a_2 ...
- rimane $a_1\bar{v}_1 = \bar{0}$
- ma l'ipotesi dice che $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$
- in uno spazio vettoriale vale la legge di annullamento del prodotto

$\Rightarrow a_1 = 0$

sommare 2 vettori = sommare le componenti

$\bar{v} =$

$\bar{u} = c_1\bar{b}_1 + \dots \quad c_n\bar{b}_n \longrightarrow (c_1, \dots c_n)$

$\bar{v} + \bar{u} =$ usando le 8 proprietà degli spazi vettoriali

$\bar{v} + \bar{u} = (a_1 + c_1)\bar{b}_1 + \dots (a_n + c_n)\bar{b}_n \rightarrow$

$\longrightarrow (a_1 + c_1, \dots, a_n + c_n)$

faccio il prodotto scalare

$\lambda\bar{v} \longrightarrow (\lambda\bar{b}_1, \lambda\bar{b}_2, \dots, \lambda\bar{b}_n)$

Basi   posso sostituire i vari vettori con numeri

↓

se scopro che è una base allora mi posso spostare nel campo numerico e semplificare i calcoli

preso uno spazio vettoriale V posso trovare sempre una base finita? NO

TEOREMA metodo degli scarti successivi

da un sistema finito di generatori possiamo estrarre una base

$V = \mathcal{L}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

$\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ siano un sistema di generatori ma non linearmente indipendente (sono troppi, devo buttare vettori e il vettore nullo)

= tolgo gli zeri

22 MARZO 2012

RIPASSINO

$V, \mathbb{K}$

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ ORDINATO / LIBERO / SISTEMA DI GENERATORI

BASE

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI x TROVARE UNA BASE DA UN SISTEMA DI GENERATORI

ORA, HO UN INSIEME LIBERO che GENERA UN V SOTTOSPAZIO e VOGLIO INGRANDIRLO x AVERE UNA BASE

(ex: AGGIUNGO UN VETTORE DI UN' ALTRO PIANO → OTTENGO TUTTO LO SPAZIO)

- CONOSCIAMO UNA BASE DI V, $B = (\bar{b}_1, \dots \bar{b}_n)$
- NE VOGLIAMO FABBRICARE UN' ALTRA che CONTENGA UN INSIEME LIBERO $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$
- VOGLIAMO COMPLETARE $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ AD UNA BASE DI V

SISTEMA DI GENERATORI:

$S.g \quad \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$

USO IL METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI x FABBRICARMI UNA BASE

$\bar{v}_1$ → TENGO

$\bar{v}_2$ MULTIPLO DI $\bar{v}_1$? NO → TENGO

LI TENGO TUTTI FINO A $\bar{v}_k$, INSIEME LIBERO

QUALCHE b LA TENGO, QUALCHE NO, L'IMPORTANTE è che SIA CONTENUTO L'INSIEME LIBERO $\{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n\}$

⟹ DA UN SISTEMA LIBERO POSSIAMO FABBRICARE UNA BASE

TEOREMA (della BASE)

DUE BASI DI UNO STESSO SPAZIO VETTORIALE $\bar{V}$ HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI. QUESTO NUMERO SI CHIAMA DIMENSIONE DI $\bar{V}$.

- trovo base dai dati del problema
- trovo numero elementi della base = dimensione

S SOTTOSPAZIO DI $\bar{V}$

$\bar{V}$ HA UN CERTO dimensionale ~~SOTTOSPAZIO~~ ⓝ

S HA DIMENSIONE ≤ A QUELLA DI $\bar{V}$

S È UNO SOTTOSPAZIO PROPRIO, ALLORA LA SUA DIMENSIONE È < DI QUELLA DI $\bar{V}$

S HA LA SUA BASE $(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k)$ ↷ INSIEME LIBERO

$\bar{V}$ HA LA SUA BASE $(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

$k \leq n$?

$k = n \iff S = \bar{V}$

$(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k)$ è UN INSIEME LIBERO (XK È UNA BASE);

OGNI INSIEME LIBERO SI PUÒ COMPLETARE A UNA BASE

→ AGGIUNGO QUALCOSA E ARRIVO A n ELEMENTI, OPPURE NON AGGIUNGO NEX ELEMENTI

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

DIMOSTRARE PRIMA UN LEMMA:

LEMMA DI STEINITZ STEINITZ

SIA $\bar{V} = \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ ($\bar{V}$ GENERATO DA $\mathcal{L}(\dots)$)

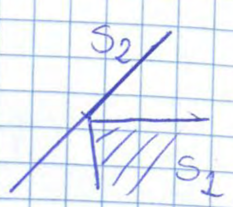
SIA $\{\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k\}$ UN INSIEME LIBERO.

$\Longrightarrow$ ALLORA $k \leq n$

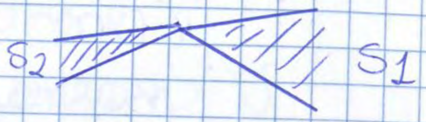
(OGNI SISTEMA DI GENERATORI È RISTRETTO A UNA BASE)

DIMENSIONE DI UNA SOMMA DI SOTTOSPAZI

PRENDIAMO COME 2 SOTTOSPAZI:



* S_1 PIANO, DIMENSIONE 2
  S_2 RETTA, DIMENS. 1
  LO SPAZIO AMBIENTE (S_1+S_2), DIM. $3 = 1+2$ ✓
  $S_1 + S_2 = V$



* S_1 PIANO, DIM 2
  S_2 PIANO, DIM 2
  LO SPAZIO AMBIENTE (S_1+S_2), DIM ~~4~~ NO 3
  $S_1 + S_2 = V$

PIANO + RETTA → SOMMA DIRETTA

ABBIAMO 2 SOTTOSPAZI DI V CON LE LORO BASI:

$$\begin{cases} S_1 \rightarrow B_1 = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_h) \\ S_2 \rightarrow B_2 = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots \bar{c}_k) \end{cases}$$

● $S_1 + S_2$ → COSTRUISCO IL SUO SISTEMA DI GENERATORI FACENDO $\cup$

$S_1 + S_2 = \mathcal{L}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_h, \bar{c}_1, \bar{c}_2 \dots \bar{c}_k)$

se è vero, posso estrarre una base e dire che la dimensione di $S_1 + S_2$ è:

$$\boxed{\dim(S_1 + S_2) \leq h + k = \dim(S_1) + \dim(S_2)}$$

somma: $\bar{s} \in (S_1 + S_2)$

$\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$ con $\bar{s}_1 \in S_1$ e $\bar{s}_2 \in S_2$

ma $\bar{s} = (\beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_h \bar{b}_h) + (\gamma_1 \bar{c}_1 + \dots + \gamma_k \bar{c}_k)$

E'UN INSIEME LIBERO.

CAPITOLO ④

IL METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI È SCOMODO.

$\bar{V}$, $\mathbb{K}$

$\mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p)$

$B = ?$

NON SO GLI ELEMENTI DI $\bar{V}$, NON SO LE OPERAZIONI...

MI FISSO UNA BASE DI $\bar{V}$, LA SCELGO.

$B = (\bar{b}_1, \dots \bar{b}_n)$

COSTRUISCO L'ISOMORFISMO: IDENTIFICO OGNI VETTORE CON L'INSIEME DELLE SUE COMPONENTI

$$\bar{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\bar{v} = x_1\bar{b}_1 + \dots + x_n\bar{b}_n \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

$$\bar{v}_1 = x_{11}\bar{b}_1 + \dots + x_{1n}\bar{b}_n \rightarrow (x_{11}, \dots x_{1n})$$

$$\bar{v}_2 = \dots$$

$$\dots$$

$$\bar{v}_p = x_{p1}\bar{b}_1 + \dots x_{pn}\bar{b}_n \rightarrow (x_{p1}, \dots, x_{pn})$$

E PENSO COME RIGHE DI UNA MATRICE

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{RIGA 1} \\ \text{RIGA 2} \\ \vdots \\ \text{RIGA P} \end{array} \end{array}$$

IL PROBLEMA DIVENTA TROVARE UNA BASE × LO SPAZIO GENERATO DALLE RIGHE DELLA MATRICE M.

E CALCOLARE LA DIMENSIONE

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL RANGO

DIMOSTRO $\dim \mathcal{L}(R_1 \dots R_m) = \dim \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

OPPURE $\dim \mathcal{L}(R_1 \dots R_m) \leq \dim \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

$\dim \mathcal{L}(R_1 \dots R_m) \geq \dim \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

BASTA DIMOSTRARNE UNA, XKÉ POI TRASPONGO A E MI VIENE DIMOSTRATA LA SECONDA!

$\mathcal{R}$ SPAZIO GENERATO DA:

$\mathcal{R} = \mathcal{L}(R_1 \dots R_m)$ IDEM PER:

$\mathcal{C} = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

$r = \dim \mathcal{R}$

BASE DI $\mathcal{R}$: $\bar{V}_1 \dots \bar{V}_r$ (SONO DELLE N-UPLE DI NUMERI)

POSSO PENSARLI COME RIGHE DI UNA MATRICE

$\bar{V}_1 = (C_{11}, C_{12}, \dots C_{1n})$

$\vdots$

$\bar{V}_r = (C_{r1}, C_{r2}, \dots C_{rn})$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \dots & C_{rn} \end{pmatrix}$$

R_1 COMBINAZIONE LINEARE DI $(\bar{V}_1 \dots \bar{V}_r)$ BASE DI $\mathcal{R}$

$R_1 = p_{11}\bar{V}_1 + p_{12}\bar{V}_2 + \dots p_{1r}\bar{V}_r$

$R_2 = p_{21}\bar{V}_1 + \dots \dots p_{2r}\bar{V}_r$

$\vdots$

$R_m = p_{m1}\bar{V}_1 + \dots \dots p_{mr}\bar{V}_r$

TERZO CAMBIAMENTO:

$\mathcal{L}(\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$

e anche così lo spazio è sempre lo stesso

VERIFICO:

è vero che $\mathcal{L}(\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_2, \dots v_n) \subseteq \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$?

BASTA VERIFICARE CHE $v_1+v_2 \in \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$

(xk gli altri non sono cambiati, ci stanno dentro già)

inclusione ovvia, immediata conseguenza di sottospazio vettoriale (chiuso rispetto alla somma)

è vero che $\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n) \subseteq \mathcal{L}(\bar{v}_1+\bar{v}_2, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$?

chiamo $\bar{v}_1+\bar{v}_2 = \bar{v}_1'$

quindi $\bar{v}_1 = \bar{v}_1' - \bar{v}_2$

controllo che $\mathcal{L}(\bar{v}_1' - \bar{v}_2, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n) \subseteq \mathcal{L}(\bar{v}_1', \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$

inclusione ovvia, xk è uno spazio vettoriale...

$\bar{v}_1+\bar{v}_2$ può essere fatto, e in modi diversi, tantissime volte

$\bar{v}_1 \to \bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + a_{13}\bar{v}_3 + \dots + a_{1n}\bar{v}_n$ con a qualunque

idem lo posso fare per $a_{1i} \in \mathbb{K}$

$\bar{v}_2 \to \dots$ a può anche essere nullo

e x qualsiasi $\bar{v}$

$\bar{v}_i = \bar{v}_i + a_{i1}\bar{v}_1 + a_{i2}\bar{v}_2 + \dots a_{in}\bar{v}_n$

VOGLIO FABBRICARMI UNA MATRICE

- senza righe nulle
- con righe linearmente indipendenti:

= base

$$\cancel{a_1 R_1} + \cancel{a_2 R_2} + \cancel{a_3 R_3} = (\quad , \alpha a_1 , \quad , \beta a_2)$$

$$\downarrow$$

βa_2

$\beta a_2 = 0$

$\beta \neq 0$

$a_2 = 0$

infine

$a_3 R_3 = (0,0,0,0)$

ma $R_3 \neq 0$ xké $\gamma \neq 0$

allora

$a_3 = 0$

Definizione

Supponiamo che in ogni riga <u>non nulla</u>, ci sia almeno un elemento <u>non nullo</u>, con sotto tutti zeri.
Allora diciamo che la matrice è ridotta per righe.

Teorema

<u>Una matrice ridotta per righe</u>, ha rango uguale al numero delle righe non nulle.

La dimostrazione è uguale a quella dell'esempio sopra ↑

x sapere il rango dobbiamo quindi trasformare una matrice qualunque in una ridotta!

Una matrice ridotta per righe e senza righe nulle può avere più righe che colonne?
x rispondere, uso il teorema del rango e il fatto che da ogni sistema di generatori posso sempre estrarre una base

$$A^{RIDOTTA} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ IL RANGO È 2

→ abbiamo messo in evidenza una base: R_2

26 MARZO 2012

METODO DI RIDUZIONE delle matrici

$V, \mathbb{K}$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\}$

$W = \mathcal{L}(v_1, \dots v_n)$ SOTTOSPAZIO GENERATO DA QUEI VETTORI

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI DI BASE:

- ● $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \rightarrow (a\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$
- ● $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \rightarrow (\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n)$

CAMBIO IPOTESI

SUPPONGO $\{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n\}$ LINEARM. INDIP = INSIEME LIBERO

ALLORA ANCHE:

- $\{a\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\}$
- $\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\}$

SONO LIBERI!

DIMOSTRO:

$\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n\}$ È LIBERO?

PRENDO LA DEFINIZIONE GENERALE:

$$a_1(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3 + \dots a_n\bar{v}_n = \bar{0} \overset{?}{\Longrightarrow}$$

UNA MATRICE RIDOTTA PER RIGHE $\in K^{m,n}$ DEVE PER FORZA AVERE $m \leq n$, x NON AVERE RIGHE NULLE.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA DI STEINITZ

TESI: SIA $\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ UNA BASE DI $\bar{V}$
SIA $\{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k\}$ UN INSIEME LIBERO
ALLORA $k \leq n$.

DIMOSTRO: (USANDO LE 2 PROPRIETÀ APPENA VISTE)

$$b_1 \in \bar{V} \longrightarrow (\quad ? \quad) \in K^n$$

$$b_1 \in \bar{V} \longrightarrow (1, 0, 0 \dots, 0)$$
$$b_2 \in \bar{V} \longrightarrow (0, 1, 0 \dots 0)$$
$$b_n \in \bar{V} \longrightarrow (0, 0, 0 \dots 0, 1)$$

$\mathcal{B}$ = BASE CANONICA

$$v_1 \longrightarrow (a_{11} \dots a_{1n})$$
$$v_2 \longrightarrow (a_{21} \dots a_{2n})$$
$$v_k \longrightarrow (a_{k1} \dots a_{kn})$$

COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE?

$$\rightarrow A \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_k \end{matrix} \xrightarrow[\text{RIGHE}]{\text{RIDUCO x}} A'$$

$R_1, R_2 \dots R_k$ È UN INSIEME LIBERO
RIDUCO PER RIGHE LA MATRICE.

$$A' \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{matrix} R'_1 \\ R'_2 \\ \vdots \\ R'_k \end{matrix} \longrightarrow$$

IL RANGO SARÀ UGUALE A PRIMA
L'INSIEME LIBERO RIMANE LIBERO

in più, P_1 é una matrice invertibile.
(e pure quadrata)

DIMOSTRO che P_1 é invertibile:

$$\otimes P_1 = I$$

Devo trovare $\otimes = P_1^{-1}$

ovvero la matrice che moltiplicata a sx per A' mi dia A:

$$A = \otimes A' \qquad R_1' = R_1 + R_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1'} \begin{pmatrix} R_1' \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 = R_1' - R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = A$$

Verifico:

$$P_1' P_1 = P_1 P_1' = I$$

DEVO TROVARE L'INVERSA DI PQ.

MA IL PRODOTTO DI MATRICI NON È COMMUTATIVO!

$$PP^{-1} = P^{-1}P = I$$

SCAMBIO L'ORDINE

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = I$$

$$(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) = P(QQ^{-1})P^{-1} =$$

$$P(I)P^{-1} = PP^{-1} = I$$

(STO PARLANDO SEMPRE DI MATRICI QUADRATE)

ESERCIZIO IMPORTANTE:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 2h & 3 \\ -2 & 4h^2 & 2 \end{pmatrix}$$

QST È UNA FAMIGLIA DI MATRICI AL VARIARE DI h

$h \in \mathbb{R}$

QUAL È IL RANGO, A VARIARE DI h?

max RANGO = 3

min RANGO =

EX) DISCUTE COME VARIA IL RANGO, AL VARIARE DEL PARAMETRO

FACCIO LA RIDUZIONE

SCELGO UN ELEMENTO DELLA 1° RIGA E FACCIO VENIRE SOTTO ZERO.

SCELGO IL TERZO.

STUDIO dei SISTEMI LINEARI

una incognita → lineare 1° GRADO

- $ax = b$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$ noti
  $x \in \mathbb{R}$ incognito

ex : $3x = 2$

se a é invertibile $(a \neq 0)$
moltiplico a Dx e a Sx per (a^{-1})

abbiamo 2 casi

↙ ↘

$a \neq 0$

$$a^{-1}(a)x = b\,a^{-1}$$
$$(a^{-1}a)\,x = a^{-1}b$$
$$x = a^{-1}b$$

$a = 0$

$$0x = b$$

2 casi

↙ $b = 0$: $0x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \infty$ soluz

↘ $b \neq 0$: $\emptyset$ nessuna soluz

- $ax = b$ $\quad a, b, x$ matrici $\in \mathbb{K}^{2,2}$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$, $X \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$AX = B$$

se A é invertibile, se $\exists A^{-1}$, copio il metodo di prima
(attenzione alla non commutatività)

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

HO SCRITTO UN'EQ. EQUIVALENTE PERCHE' HA LE STESSE SOLUZIONI

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

29 MARZO 2012

* DUE EQUAZIONI, 2 VARIABILI

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- SONO 2 RETTE: TROVO IL LORO PUNTO DI ∩
  → OVVERO LE COORDINATE DEL PUNTO
- CASI PARTICOLARI:
  - una non è una retta
  - non si incontrano (//)
  - rette coincidenti

♥ esempi con numeri:

① $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ non sono parallele xk il vettore (2,1) non è // al vettore (1,−1) → una soluzione

② $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=0 \end{cases}$ sono parallele distinte → NO soluzioni

③ $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$ rette coincidenti → infinite ∞ soluzioni

- Fissare l'attenzione sui coefficienti a,b di x,y! ovvero la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

A = matrice coefficienti

B = matrice termini noti

CASO ① una sola soluzione

Dall'esempio

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Le righe di A non sono proporzionali

→ il rango è 2, $\rho(A) = 2$

→ il rango di (A,B) è 2, $\rho(A,B) = 2$

I 2 ranghi sono uguali → sistema risolvibile

CASO ② nex soluzione

Dall'esempio

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Le righe di A sono proporzionali!

→ il rango è 1, $\rho(A) = 1$

→ il rango di (A,B) è 2, $\rho(A,B) = 2$

RANGO A ≠ RANGO B → NO SOLUZIONE

CASO ③ ∞ soluzione

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \rho(A) = 1 \\ \rho(A,B) = 1 \end{matrix} \qquad \text{(righe proporzionali)}$$

I 2 ranghi sono = → sistema risolvibile

$B \in \mathcal{L}(A_1, A_2)$?

OPPURE

$$\begin{tikzcd}\mathcal{L}(A_1, A_2) \arrow[r, leftrightarrow, bend right] & \mathcal{L}(A_1, A_2, B)\end{tikzcd}$$

che relazione
c'è tra qst spazi?

$\subseteq$

questa inclusione
(sempre vera) quando
diventa un'uguaglianza?
quando la loro dimensione
è la stessa!

→ $\dim \mathcal{L}(A_1, A_2) = \dim \mathcal{L}(A_1, A_2, B)$?

→ $\rho(A) = \rho(A, B)$?

SISTEMA RISOLVIBILE ⟺ $\rho(A) - \rho(A,B)$

n quanti modi riesco a scrivere B come
ombinazione lineare di A_1, A_2?

♡ con gli esempi

$$A_1 x + A_2 y = B$$

②

$$2A_2 x + A_2 y = B$$
$$A_2 y = B - 2A_2 x$$

DIMOSTRAZIONE ①

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \underset{\sim}{A_1} & \underset{\sim}{A_2} \ldots & \underset{\sim}{A_n} & \underset{\sim}{B} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\underset{(m,n)}{A}\,\underset{(n,1)}{X} = \underset{(m,1)}{B}}$ VALE SEMPRE QUESTA RELAZIONE

USANDO LE OPERAZIONI TRA MATRICI, POSSO RISCRIVERE IL SISTEMA NELLA FORMA:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = = B$$

COLONNE DI A

$$A_1, A_2, \ldots A_n, B \in \mathbb{K}^m$$

IL SISTEMA È RISOLUBILE? =

= IL VETTORE B SI PUÒ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI $A_1, A_2, \ldots A_n$? =

= $B \in \mathcal{L}(A_1, A_2, \ldots A_n)$? =

$\mathcal{L}(A_1, \ldots A_n) = \mathcal{L}(A_1, \ldots A_n, B)$? =

= $\dim \underbrace{\mathcal{L}(A_1 \ldots A_n)}_{\text{SPAZIO COLONNE A}} = \dim \underbrace{\mathcal{L}(A_1 \ldots A_n, B)}_{\text{SPAZIO COLONNE A,B}}$?

X IL TEOREMA DEL RANGO

= $\rho(A) = \rho(A,B)$?

(SI) SISTEMA RISOLUBILE

(NO) SISTEMA NON RISOLUBILE

$x_{p+1} \dots x_n$ si possono fissare a piacere.

fissati a piacere le n-p incognite, libro pg 77

ovvero $x_{p+1} \dots x_n$, il secondo membro diventa una C.L. di colonne i cui coeff sn numeri assegnati

→ allora esistono e sono determinati in modo unico p numeri $(x_1 \dots x_p)$, in quanto le prime p colonne di A sono una base dello spazio delle colonne

SIST. LINEARI CON MATRICE DEI COEFF. RIDOTTA (X RIGHE)

Situazione speciale: matrice dei coefficienti = matrice ridotta x righe

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}x & x & x & x\\ x & x & x & x\\ x & x & x & x\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}x\\ x\\ x\\ x\end{matrix}}_{B}\right)$$

A è ridotta

una riga nulla → equazione del tipo

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = b_4$$

$$0 = b_4$$

se b_4 è ≠ non ci saranno soluzioni!

se una riga è nulla → il suo coeff deve essere = a zero x avere un sistema risolvibile, e quell' eq. diventa inutile

$b_4 = 0$ equazione inutile

$b_4 \neq 0$ sistema non risolvibile (vedo anche con il teorema R-C)

♥ esempio numerico

$$\begin{cases} x_1 + \boxed{x_2} + x_3 + x_4 = b_1 = 1 \\ 2x_1 \quad 0 \quad - x_3 + \boxed{x_4} = b_2 = 0 \\ \boxed{x_1} \quad 0 \quad -2x3 \quad 0 = b_3 = 0 \end{cases}$$

ovvero ↓

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

SCELGO DI ESPLICITARE LA x_n CHE VOGLIO LE SOLUZIONI SARANNO UGUALI, CAMBIA SOLO IL PARAMETRO!

USO IL METODO DI SOSTITUZIONE

$$\begin{cases} x_1 = +2x^3 \\ x_4 = x_3 - 2x_1 \\ x_2 = -x_1 - x_3 - x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = +2x^3 \\ x_4 = x_3 - 4x_3 = -3x_3 \\ x_2 = \cancel{-2x^3} + \cancel{3x_3} - \cancel{x_3} + 1 = \end{cases}$$

$$s = (2x_3, 1, x_3, -3x_3)$$

soluzioni TUTTE in funzione di x_3

x verificare → prendo s e lo sostituisco nelle varie equazioni

ex: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$2\cancel{x_3} + 1 + \cancel{x_3} - 3\cancel{x_2} = 1$

GIUSTO !!

$$s = \left(x_1, 1, \frac{x_1}{2}, -\frac{3}{2}x_1 \right)$$

rappresentazione parametrica diversa!

VISTO CON LE MATRICI:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_1 + R_2$$ TRASFORMAZIONE LECITA !!

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$ È RIDOTTA !! E HA LE STESSE SOLUZIONI DI QUELLA DI PARTENZA!

STESSA TECNICA USATA × STUDIARE $\cap$ DI 2 CIRCONFERENZE!

ex: $\begin{cases} x^2+y^2-2x=1 \\ x^2+y^2+x+y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2-2x=1 \\ -2x-x-y=1-3 \end{cases}$

FACCIO LA DIFFERENZA

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=1 \to \text{CIRCONFERENZA} \\ -3x-y=-2 \to \text{RETTA!!!} \end{cases}$$ $\cap$

RITORNIAMO ALLA SITUAZIONE GENERALE

$$\begin{aligned} E_1(x_1, \dots x_n) &= 0 \\ E_2(x_1, \dots x_n) &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\ E_m(x_1, \dots x_n) &= 0 \end{aligned}$$

POSSO FARE 2 OPERAZIONI ELEMENTARI CHE MI CAMBIANO IL SISTEMA, MA NON LE SOLUZIONI!

OPERAZIONI:

★ $E_1 = aE_1$, $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{R})$

★ $E_1 = E_1 + E_2$ SOMMA DI UN'EQUAZIONE CON UN'ALTRA

SI PUÒ FARLO SEMPRE! → VERIFICO

ABBIAMO QUINDI TROVATO, CON LE 2 TRASFORMAZIONI, UN SISTEMA EQUIVALENTE! ①=②

* $\boxed{E_i \rightarrow E_i + \lambda E_J \quad \forall i, \forall J}$

* E IN PIÙ POSSIAMO ANCHE PERMUTARE L'ORDINE DELLE RIGHE (OPERAZIONE ELEMENTARE CHE SI FACEVA X RIDURRE LA MATRICE.)

} TRASF. ELEMENTARI CHE NON CAMBIANO LO SPAZIO DELLE RIGHE DELLA MATRICE NE' IL RANGO NE' CAMBIANO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA!

LO SCOPO È INFATTI RIDURRE LA MATRICE A (NO (A,B)) . → ECCO COME RISOLVERE I SISTEMI LINEARI! E AUTOMATICAMENTE SI CALCOLANO ANCHE I RANGHI! COSÌ CON IL TEOREMA R-C SO LE SOLUZIONI DEL SIST. LINEARE!

SISTEMI CON I PARAMETRI: (DIFICILI!)

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ h & 2h & 3 & -3 \\ -2 & -4h^2 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad \text{con } h \in \mathbb{R}$$

AL VARIARE DI h VOGLIO SAPERE SE IL SIST.:
- NON È RISOLVIBILE
- È RISOLVIBILE (QUANTE SOLUZ.)

RIDURRE LA MATRICE! (A)

PRENDO UN ELEMENTO NON NULLO

(PIÙ TARDI LAVORO CON IL PARAMETRO MEGLIO È)

SCELGO L'ELEMENTO NON NULLO CHE SOTTO NON HA PARAMETRI!!

(X NON DOVER FARE $R_2 \rightarrow R_2 - hR_1$)

2 Aprile 2012

SOLUZIONE

$AX = B$ SISTEMA LINEARE

$$\Big\downarrow \text{RIDUZIONE}$$

$A'X = B'$

$$\begin{cases} A' = PA \\ B' = PB \end{cases}$$

dove $P =$ matrice invertibile fatta con le trasf...

se X_0 è una soluzione di $AX=B$, cioè se è vero che vale l'uguaglianza $AX_0=B$ allora è anche vero che:

$$PAX_0 = PB \quad \text{moltiplico a sx} \times P$$

$$(PA)X_0 = PB$$

$$A'X_0 = B'$$

Quindi ogni soluzione del sistema $Ax=B$ è anche soluzione di $A'x=B'$.

Vale anche il viceversa:

$$(PA)x = PB$$

$$P^{-1}(PA)x = P^{-1}(PB)$$

xké P è invertibile!

$$(P^{-1}P)Ax = (P^{-1}P)B$$

$$Ax = B$$

SISTEMA LINEARI OMOGENEI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

SISTEMI LINEARI OMOGENEI $AX=0$

$A(x_0 + y_0) = 0$

$Ax_0 + Ay_0 = 0$

$0 + 0 = 0$ FINE DIMO.

HO SCRITTO COMPATTATO $Ax=0$ SOTTO FORMA DI PRODOTTO DI MATRICE, MA IN REALTÀ SAREBBE TI IL SISTEMA SOPRA (↑)

TROVATA UNA SOLUZIONE RIESCO SUBITO A CONOSCERE TUTTE LE ALTRE.

OBBIETTIVO → TROVARE LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO - SOLUZIONE OVVERO TROVO UNA BASE E NE CONTO GLI ELEMENTI OVVERO QUANTI VETTORI MI SERVONO x CONOSCERLO TUTTO.

⇒ CI SONO $n-p$ PARAMETRI IN GIOCO NELLE SOLUZIONI, ALLORA LA DIMENSIONE SARÀ $n-p$

RANGO MATRICE $= p$ ALLORA I PARAMETRI DELLE SOLUZIONI SONO $n-p$.

TEOREMA

LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È $n-p$

$p =$ RANGO MATRICE A

$n =$ NUMERO DELLE INCOGNITE

DIMOSTRAZIONE

$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_px_p + \dots A_nx_n = 0$

$\underbrace{A_1x_1 + \dots + A_px_p}_{\text{SONO L.I} \Rightarrow \text{SONO UNA BASE}} = -A_{p+1}x_{p+1} \dots - A_nx_n$

ESEMPIO NUMERICO:

MATRICE RIDOTTA $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

RISOLVO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left(\underbrace{-x_3 + x_4, -x_3 - 2x_4}_{\text{x_1, x_2 SONO FUNZIONI DI x_3 x_4}}, x_3, x_4\right)$$

INSIEME DELLE MIE SOLUZIONI

$S_3 = (-1, -1, 1, 0)$ SE $x_3 = 1$

$S_4 = (1, -2, 0, 1)$ SE $x_4 = 1$

$x_3 S_3 + x_4 S_4 = (-x_3 + x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = S$!!!

ECCO LA MIA BASE

(S_3, S_4) è una BASE DI V

XChé SONO L.I

CONOSCO LE 2 SOLUZIONI S_3, S_4 E DA QUESTE POSSO

RICAVARMI TUTTE LE ALTRE

ORA, IN GENERALE : $A \in K^{m,n}$

$AX = B$, $B \neq 0$ $\rho(A) = \rho(A,B)$

ASSOCIO IL SUO OMOGENEO ASSOCIATO

$AX = 0$

TEOREMA

(ΣA)

SIA y_0 UNA SOLUZIONE FISSATA DI $AX = B$
SIA S LA SOLUZIONE GENERALE DEL SISTEMA $AX = 0$. ALLORA LA SOLUZIONE GENERALE
(ΣB) DI $AX = B$ È $\boxed{S + y_0}$.

NATURALMENTE $\rho(A) = \rho(A,B)$)

DIMOSTRAZIONE

) OGNI N-UPLA DEL TIPO $S + y_0$ È SOLUZIONE DI $AX = B$

SOSTITUISCO $X = S + y_0$:

$A(S + y_0) = B$

P. DISTRIBUTIVA

$AS + Ay_0 = B$

$\downarrow$
SOLUZIONE DI $AX = 0$ OVVERO $AS = 0$

$0 + Ay_0 = B$

$\downarrow$
SOLUZIONE DI $AX = B$ CIOÈ $Ay_0 = B$

$B = B$

$AX = B$ se $B = I$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$X = \left(\underbrace{\begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \end{matrix}}_{X_1} \; \underbrace{\begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \end{matrix}}_{X_2} \right)$$

PRIMA RIGA DI AX : $\begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 = (1,0) \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 = (0,1) \end{cases}$

SECONDA RIGA DI AX :

SISTEMA DOVE LE INCOGNITE SONO DEI VETTORI (RIGA-COLONNA MATRICE) E I COEFF. SONO VETTORI.

$$(A,I) = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{VETTORI}} \right)$$

SE UNA MATRICE E' DIAGONALE

$A = {}^tA$

LA MATRICE DIVENTA :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

X AVERE IL RANGO = 2 ,

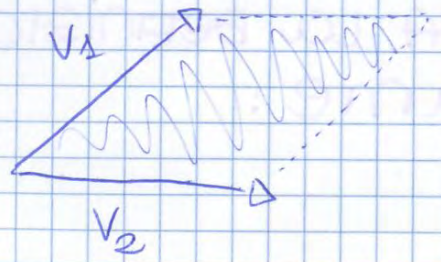
$$a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0$$

$$\frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0$$

$a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \neq 0$! ECCO IL DETERMINANTE !

X AVERE 1 SOLA SOLUZIONE , IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEVE ESSERE DIVERSO DA ZERO!

AREA DI UN PARALLELOGRAMMO:



$\bar{V}_1 = a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} = (a_{11}, a_{12})$

$\bar{V}_2 = a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} = (a_{21}, a_{22})$

CERCO AREA PARALLELOGRAMMO:

$$AREA = \| \bar{V}_1 \times \bar{V}_2 \| = \| \bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2 \|$$

$$= | (a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j}) \times (a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j}) |$$

ORA USO LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE

$$AREA = | a_{11}a_{21}\,\bar{i}\times\bar{i} + a_{11}a_{22}\,\bar{i}\times\bar{j} + $$
$$+ a_{12}a_{21}\,\bar{j}\times\bar{i} + a_{12}a_{22}\,\bar{j}\times\bar{j} |$$

$\bar{i}\times\bar{i} = 0$ XK SONO $\bar{i} \,//\, \bar{i}$

$\bar{j}\times\bar{j} = 0$ $\bar{j} \,//\, \bar{j}$

$$\det\begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

$$x = -x$$

ma $x \in \mathbb{K}$

$$\Longrightarrow \quad x + x = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 \, !$$

RAGIONAMENTO FATTO A PARTIRE DALLA ECONDA PROPRIETÀ! NON DALLA FORMULA X IL CALCOLO DEL DETERMINANTE!

③ $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} \lambda R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$

TRASFORMAZIONE ELEMENTARE! $R_1 \to \lambda R_1$

$$\det A' = \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{12} a_{21}$$

$$\det A' = \lambda (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

$\boxed{I}$ $\det A' = \lambda \det A$

(RICORDO che SOLO LA PRIMA RIGA È STATA MOLTIPLICATA PER λ!)

CONSIDERIAMO INVECE LA TRASFORMAZIONE:

$$R_1 \Rightarrow R_1' + R_1''$$

(UNA RIGA COME SOMMA DI 2 RIGHE)

QUINDI

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} R_1' \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} R_1'' \\ R_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ y}}{\det A} = \begin{pmatrix}\lambda R_1\\ R_2\end{pmatrix} = \underset{\substack{\downarrow\\ \lambda y}}{\lambda\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix}} \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$y = \lambda y \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$y - \lambda y = 0$$

$$y(1-\lambda) = 0$$

$$y = 0 \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

UNICITÀ DELLA FUNZIONE DETERMINANTE

sia $f : \mathbb{K}^{2,2} \Rightarrow \mathbb{K}$
una funzione che verifica le proprietà ①, ②, ③ (I, II, III)

controlliamo che risulta necessariamente
$f = \det$!

esaminiamo prima il caso particolare:

★ A con una riga nulla
$\det A = 0$

$f(A) = 0$

★ possiamo supporre $a_{11} \neq 0$ $(R_1 \neq 0)$
poiché sia f che det. soddisfano le 3 proprietà possiamo supporre che A

Ci sono tantissimi modi diversi x calcolare il determinante di una matrice ($\forall$ questi metodi soddisfano sempre le proprietà!)

Partendo sempre dal caso semplice $A \in \mathbb{K}^{2,2}$:

★ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad A \in \mathbb{K}^{2,2}$

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

prima riga

prima colonna

seconda riga

seconda colonna

il meno segnala il cambiamento di ordine degli indici

$1122 \rightarrow 1221$

Primo addendo: ho fatto intervenire tutte le righe e tutte le colonne!! → idem x il secondo addendo!

Gli indici 1,2.. sono messi in tutti i modi possibili!!

Se invece $A \in \mathbb{K}^{3,3}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

Quanti sono i modi possibili di combinazione degli indici?

$3! = 6$

DIVENTA :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ORA FACCIO : $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È UNA MATRICE DIAGONALE : ORA FACCIO IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE

$$\det A = 1(-3)(0) = 0$$

N.B

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE $A \in \mathbb{K}^{1,1}$ È L'ELEMENTO STESSO

★

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{K}^{2,2}$$

$$\det A = a_{11} a_{22}$$

- PRIMO ELEMENTO a_{11} $1+1=2$ PARI, IL SEGNO RIMANE LO STESSO ⊕

POI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- SECONDO ELEMENTO a_{12} $1+2=3$ DISPARI, IL SEGNO VIENE INVERTITO ⊖

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

13 Aprile 2012

REGOLA DI LAPLACE (PRIMO TEOREMA)

$$\boxed{\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \dots + a_{1n}A_{1n}}$$

POSSO USARE SIA LA PRIMA RIGA
CHE LA SECONDA, LA TERZA ...

PROPRIETÀ

SI PUÒ FAR VEDERE CHE:

$$\det {}^tA = \det A$$

(USANDO IL METODO 1)

SECONDO TEOREMA DI LAPLACE

(CONSEGUENZA DEL PRIMO / DELLA REGOLA)

$$\boxed{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0}$$

→ USO I COMPLEMENTI DI UN'ALTRA RIGA

→ x IL TEOREMA!

DIMOSTRAZIONE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \times \\ \end{array}$$

$$\underbrace{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}\overset{?}{=} 0$$

LO CONSIDERO COME IL DET DI UNA MATRICE
CON 2 RIGHE UGUALI (E SAPPIAMO ESSERE DET = 0)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

→ COSÌ HO I COMPLEMENTI ALGEBRICI CHE MI SERVONO (DELLA SECONDA RIGA)

→ METTO a_{11} a_{12} a_{13}

USO IL TEOREMA DI BINET:

A INVERTIBILE = $\exists B \ / \ AB = I$ (IPOTESI)

$\Longrightarrow \det(AB) = \det I = 1$ (2 MATRICI UGUALI HANNO LO STESSO DET)

$\overset{\text{BINET}}{\Longrightarrow} \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$

QUINDI, x FORZA, $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$

② $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow$ A INVERTIBILE

OVVERO VOGLIO TROVARE L'INVERSA DI A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

C: MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI TRASPOSTI

FACCIO IL PRODOTTO:

$$AC = \begin{pmatrix} \underset{1^\circ \text{ TEOREMA L.}}{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}} & \underset{2^\circ \text{ TEOREMA L}}{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}} & 2^\circ \text{T. L.} \\ \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

$$AC = \det A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot I$$

$A \dfrac{C}{\det A} = I$ ECCO L'INVERSA! $\boxed{\dfrac{C}{\det A}}$

$X = A^{-1} B$ ← ancora si ha un unica soluzione

xk : $\det A \neq 0 \iff \exists A^{-1}$

$X = \frac{C}{\det A} B$ $\quad C =$ matrice dei complementi algebrici di A, trasposta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ calcolo $\otimes$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} CB = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} \\ b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det D}{\det A} \qquad D = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{B} \; \underbrace{\qquad\quad}_{\text{pezzo } A}$

$$x_2 = \frac{\det E}{\det A} \qquad E \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{B}$

$$x_3 = \frac{\det F}{\det A} \qquad F \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\quad}_{\text{pezzo } A} \; \underbrace{\quad}_{B}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A' \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\det A' \neq 0$ = HA RANGO MAX = 2

POSSO CONCLUDERE CHE A HA RANGO 2 ? (SI)

XK GIÁ NELLA MATRICE PICCOLA A' LE 2 RIGHE NON SONO PROPORZIONALI!

MA NON E' IL CASO DI TUTTI I MINORI!

$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ $\quad \det A'' = 0$

$A''' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det A''' = 0$

(MA) $\det A' \neq 0$ → NE BASTA ALMENO UNO!

SE A HA 2 RIGHE IL SUO RANGO È 2 SE E SOLO SE ESISTE UN MINORE (DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE) DI ORDINE 2 NON NULLO!!

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad f(A) = 1$ XK TUTTI I MINORI DI O.2 SONO = A ZERO ED ESISTE UN ELEMENTO (MINORE DI O.2) NON NULLO.

ORA GENERALIZZIAMO! $\quad$ (O.2 = ORDINE 2)

FUNZIONI LINEARI

16 Aprile 2012

2 SPAZI VETTORIALI $\bar{V}$ e $\bar{W}$ SULLO STESSO CAMPO

$$\bar{V} \xrightarrow{f} \bar{W}$$

* COMPORTARSI BENE RISPETTO ALLA SOMMA :

$$\bar{u} \longrightarrow f(\bar{u})$$

$$\bar{v} \longrightarrow f(\bar{v})$$

$$\bar{u}+\bar{v} \longrightarrow f(\bar{u}+\bar{v})$$

$\Longrightarrow$ PROPRIETÀ : $\boxed{\begin{array}{c} f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \\ \forall\, \bar{u},\bar{v} \in V \end{array}}$

CONSIDERIAMO

$$V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$$\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \rightarrow (x,y,z)$$

ESEMPIO DI FUNZIONE CHE HA UN BUON COMPORTAMENTO RISPETTO ALLA SOMMA

* COMPORTARSI BENE RISPETTO AL PRODOTTO

$$a\bar{u} \longrightarrow f(a\bar{u})$$

$\Longrightarrow$ PROPRIETÀ : $\boxed{\begin{array}{c} f(a\bar{u}) = a(f\bar{u}) \\ \forall\, \bar{u} \in V,\ a \in K \end{array}}$

CONSIDERIAMO:

$$V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$$a\bar{v} = ax\bar{i} + ay\bar{j} + az\bar{k} \rightarrow (ax, ay, az) = a(x,y,z)$$

ESEMPIO DI FUNZIONE CON UN BUON COMPORTAMENTO X IL PROD

$f(x) = ax$ $\qquad a \in \mathbb{R}$

(rette che passano x l'origine ⇒ uniche che vanno bene!)

♡ esempio (da generalizzare)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ voglio descrivere tt queste funzioni

Suppongo sia una funzione lineare

Scelgo una base comoda = canonica

$e_1 = (0,1) \qquad e_2 = (1,0)$

elemento generico:

$(x,y) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

$f(x,y) = f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2) =$ prima proprietà

$= f(x\bar{e}_1) + f(y\bar{e}_2) =$ seconda proprietà

$= x f(\bar{e}_1) + y f(\bar{e}_2)$

f è definita in modo unico una volta che ho scelto e_1 ed e_2

$f(\bar{e}_1) = a, \quad f(\bar{e}_2) = b$

$f(x,y) = xa + yb$ $\qquad$ polinomio di primo grado omogeneo (senza termine noto)

Così sono le uniche funzioni lineari, sono tutte fatte così ... ⇒ ⇐

... ora tutte quelle fatte così sono davvero funzioni lineari? verifichiamo le 2 proprietà

$f(x,y) = ax + by$ è lineare davvero?

① conserva la proprietà della somma?

esempio numerico

$$f(e_1) = (3,1)$$
$$f(e_2) = (1,-1)$$

$$f(x,y) = x(3,1) + y(1,-1) =$$
$$= (\underbrace{3x+y}, \underbrace{x-y})$$ SCRITTO IN RIGA

↓ 2 POLINOMI DI PRIMO GRADO OMOGENEI

$$f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$$

contiene chi sono le immagini dei ...

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ la matrice dei coefficienti

$$\Leftarrow \underbrace{f(e_1) \; f(e_2)}_{A}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

SCRITTO IN COLONNA

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

APPLICAZIONE TRA MATRICI E MOSTRARE CHE È LINEARE:

APPLICAZIONE LINEARE TRA MATRICI

$$X_{h,k} \xrightarrow{f} \underbrace{A_{m,h} \; X_{h,k}}_{m,k}$$

$X \in \mathbb{K}^{h,k}$ $\qquad$ $AX \in \mathbb{K}^{m,h}$

VERIFICO CHE È UNA FUNZIONE LINEARE:

① SOMMA:

$X \to AX$

$Y \to AY$

$$X+Y \to A(X+Y) \overset{?}{=} AX + AY$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO TRA MATRICI → VERA

② PRODOTTO:

$$\lambda X \to A(\lambda X) \overset{?}{=} \lambda(AX)$$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO TRA MATRICI → VERA

Se $X \in \mathbb{K}^{h,1}$,

$X \to AX \in \mathbb{K}^{m}$

$V = \mathcal{C}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \qquad W = \mathbb{R}$

$$V \longrightarrow W$$

$$f \xrightarrow{I} \int_a^b f(x)\,dx$$

I = INTEGRALE

① SOMMA:

$$g \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f+g \longrightarrow \int_a^b (f+g)\,dx = $$

$$= \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

② PRODOTTO: $\lambda g \longrightarrow \int_a^b \lambda g\,dx = \lambda \int_a^b g\,dx$

I è una funzione lineare!

ESERCIZIO:

$$V \to V$$

FISSO UN VETTORE QUALUNQUE: $\bar{i}$

$$\bar{v} \to \bar{v} \times \bar{i} = \bar{v} \wedge \bar{i} = f(\bar{v})$$

VERIFICO, USANDO IL PRODOTTO VETTORIALE, che è una funzione lineare.

FISSO UNA BASE DI V (canonica), APPLICO LE PROPRIETÀ ... MATRICE

PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE APPLICAZIONI LINEARI

PROPRIETÀ IMMEDIATE CHE DISCENDONO DALLE 2 DELLA SOMMA E DEL PRODOTTO ;

① CONSERVAZIONE DELLA C.L.

$$f(a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2) = f(a_1\bar{u}_1) + f(a_2\bar{u}_2) =$$

$$= a_1 f(\bar{u}_1) + a_2 f(\bar{u}_2)$$

LA FUNZIONE CONSERVA LA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DALLA FUNZIONE ALLA SUA IMMAGINE

(IDEM CON 3 ELEMENTI ECC...)

$$\boxed{f(a_1\bar{u}_1 + \dots + a_n\bar{u}_n) = a_1 f(\bar{u}_1) + \dots + a_n f(\bar{u}_n)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_1 \dots a_n \in K$, $\forall \bar{u}_1 \dots \bar{u}_n \in V$

② LO ZERO NELLO ZERO

$$\boxed{f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W}$$

Una funzione lineare manda lo zero nello zero

$$\underbrace{f(\bar{0}_V)}_{x} = f(\lambda\bar{0}_V) = \lambda \underbrace{f(\bar{0}_V)}_{x}$$

$x = \lambda \bar{x}$, $\forall \lambda$

$$(1-\lambda)\,\bar{x} = \bar{0} \qquad \lambda \neq 1 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

OPERAZIONI colle FUNZIONI LINEARI

19 Aprile 2012

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ RETTA PER L'ORIGINE

$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$V \xrightarrow{f} W$ in $\mathbb{K}$

$\mathcal{L}(V, W)$

· PRENDO 2 FUNZIONI LINEARI f, g :

→ STABILISCO LA SOMMA :

$(f+g)$

$$\boxed{(f+g)(\bar{v}) \overset{def}{=} f(\bar{v}) + g(\bar{v})}$$

$\forall \bar{v} \in V$

se f e g sono lineari, anche $f+g$ è lineare?
verifichiamo che $f+g$ è lineare:

① Buon comportamento rispetto alla somma
($f+g$ conserva la somma)

$$(f+g)(\bar{u}+\bar{v}) \overset{?}{=} (f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v})$$

$\downarrow$

$$(f+g)(\bar{u}+\bar{v}) \overset{def\ (\text{sopra})}{=} f(\bar{u}+\bar{v}) + g(\bar{u}+\bar{v})$$

$=$ f e g sono lineari $= f(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{u}) + g(\bar{v})$

$=$ W-SPAZIO VETTORIALE (la somma è associativa)

$\parallel$

$$(f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{u}) + g(\bar{v})$$

esempio:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

$$f \rightarrow A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}\right) \\ f(\bar{e}_1) \quad f(\bar{e}_2) \end{array}$$

importante:

$$\mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \text{SPAZIO DUALE DI } V$$

LA COMPOSIZIONE DI 2 APPLICAZIONI LINEARI

SUPPONIAMO DI AVERE 3 SPAZI VETTORIALI:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

f, g FUNZIONI LINEARI

$$\bar{v} \rightarrow f(\bar{v}) \longrightarrow g(f(\bar{v}))$$

$$(g \circ f)(\bar{v}) = g(f(\bar{v}))$$

$$f, g \text{ lineari} \Longrightarrow g \circ f \text{ lineare}$$

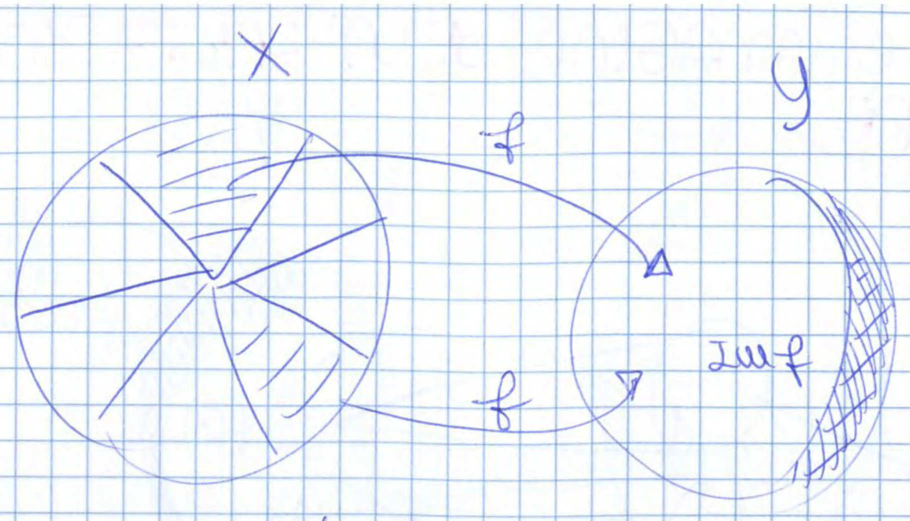
x la somma

$$(f \circ g)(\bar{u}+\bar{v}) \overset{?}{=} (f \circ g)(\bar{u}) + (f \circ g)(\bar{v})$$

$$(f \circ g)(\bar{u}+\bar{v}) \overset{\text{DEF. FUNZ. COMPOSTA}}{=} f((g(\bar{u}+\bar{v}))) \overset{\text{ma } g \text{ è lineare}}{=} f(g(\bar{u})+g(\bar{v}))$$

$$\overset{\text{ma } f \text{ è lineare}}{=} f(g(\bar{u})) + f(g(\bar{v}))$$

LO STESSO X IL PRODOTTO



PARTIZIONI!

TUTTI GLI ELEMENTI DELLA STESSA PARTE HANNO LA STESSA IMMAGINE!

L'INSIEME IMMAGINE DI UN'A.L.

LE FUNZIONI LINEARI SONO UNA SOTTOFAMIGLIA MOLTO PICCOLA, MA CON INTERESSANTI PROPRIETÀ:

TEOREMA

f È LINEARE E OPERA TRA 2 SPAZI VETTORIALI:

$f : V \longrightarrow \bar{W}$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Im} f$ È UN SOTTOSPAZIO DI W

VERIFICHIAMO:

① $\bar{O}_W \in \mathrm{Im} f$ (VERO)

xké $f(\bar{O}_V) = \bar{O}_W$

② CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA:

$\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \mathrm{Im} f \overset{?}{\Longrightarrow} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in \mathrm{Im} f$

$\bar{w}_1 = f(\bar{v}_1)$, $\bar{w}_2 = f(\bar{v}_2)$ $\Longrightarrow$

$\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = f(\bar{v}_1) + f(\bar{v}_2) = f(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$

$$f(\bar{k}_1) = \bar{O}_W \, , \; f(\bar{k}_2) = \bar{O}_W \overset{?}{\Longrightarrow}$$

$$f(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) = \bar{O}_W$$

$$f(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) = f(\bar{k}_1) + f(\bar{k}_2) = \bar{O}_W + \bar{O}_W = \bar{O}_W$$

D è chiuso anche rispetto al prodotto. Ⓑ

* le altre fibre sono ottenute dal nucleo per traslazione (sommando un elemento)

$\bar{v} \in f^{-1}(\bar{w})$

ora ci aggiungiamo gli elementi del nucleo

$\bar{k} \in \operatorname{Ker} f$

$\bar{v} + \bar{k} \in f^{-1}(\bar{w}) \rightarrow$ da dimostrare

$f(\bar{v} + \bar{k}) = \bar{w}$

$f(\bar{v} + \bar{k}) = f(\bar{v}) + f(\bar{k}) = \bar{w} + \bar{O}_W = \bar{w}$

$\bar{k}$ qualsiasi → tutti gli elementi del nucleo stanno nella fibra

→ la fibra è composta da tutti gli elementi del nucleo (traslato) + $\bar{v}$

↓ dimostro:

sia $\bar{v}_1 \in f^{-1}(\bar{w})$

$\bar{v}_1 \overset{?}{=} \bar{v} + k$ con $k \in \operatorname{Ker} f$

$\Longrightarrow \bar{v}_1 - \bar{v} \in \operatorname{Ker} f$

$f(\bar{v}_1 - \bar{v}) = f(v_1) - f(v) = \bar{w} - \bar{w} = \bar{O}_W$

Dimostrato.

(proprietà che si applica ai sistemi lineari.)

$f^{-1} : W \to V$ la funzione inversa :

è lineare? $\bar{w} = f(\bar{v}) \to \bar{v}$

CONTROLLO :

① somma, deve valere

$$f(\bar{u}+\bar{v}) \to f(\bar{u}) + f(v)$$

in questo caso

f isomorfismo

→ A invertibile

TEOREMA pg 109

se f è un isomorfismo

$\Rightarrow f^{-1} : \bar{W} \to \bar{V}$

è un'a.l.

sia

PROPOSIZIONE (a.l. & insiemi LIBERI)

f iniettiva,

se $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

se $a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n) = \bar{0}_W \rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$

DIMOSTRO:

$a_1 f(\bar{v}_1) + \dots a_n f(\bar{v}_n) = \bar{0}_W$

ma f è lineare $\Leftrightarrow$

$f(a_1\bar{v}_1 + \dots a_n\bar{v}_n) = \bar{0}_W$

ma f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}_V\}$ $\Leftrightarrow$

$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V$

$a_1 = a_2 = \overset{\Leftrightarrow}{\dots} = a_n = 0$

una funzione iniettiva manda un insieme libero in un insieme libero

PROPOSIZIONE (a.l. e insieme liberi)

$f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2), \dots, f(\bar{v}_n)$ libero in W

$\Rightarrow \bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ libero in $\bar{V}$

sì, vero!

DIMOSTRO:

che $a_1\bar{v}_1 + \dots a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V \overset{?}{\Rightarrow} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

noi sappiamo che:

$\underbrace{a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = \bar{0}_V}_{\text{applico la } f} \Rightarrow$

$f(a_1\bar{v}_1 + a_n\bar{v}_n) = f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n) = \underset{\text{lineare}}{f\text{ è}}$$
$$= a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_n f(\bar{v}_n)$$
$$= \mathcal{L}(f(\bar{v}_1) + \dots + f(\bar{v}_n))$$

FINE DIMOSTRAZIONE

APPLICAZIONI LINEARI E BASI

PRENDIAMO UN ISOMORFISMO:

$$f: V \rightarrow V$$

SICCOME È INIETTIVA: f MANDA UN INSIEME LIBERO IN UN INSIEME LIBERO

SICCOME È SURIETTIVA: f MANDA UN SISTEMA DI GENERATORI DI V IN UN SISTEMA DI GENERATORI DI W

ALLORA

$\Rightarrow$ se f è un isomorfismo, f manda una base di V in una di W

SE 2 SPAZI SONO ISOMORFI, ESISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA LE BASI DI V e W!

DA A.L. ALLA SUA MATRICE ASSOCIATA

SUPPONIAMO:

$$V_n \xrightarrow{f} W_m \quad \mathbb{R}$$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ BASE DI V

$\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_m')$ BASE DI W

Ma... anche $\overline{W}$ è di dimensione finita!

$$\bar{w}_1 = f(\bar{b}_1) = a_{11}\bar{b}'_1 + a_{21}\bar{b}'_2 + \dots + a_{m1}\bar{b}'_m$$

(x convenzione l'indice fisso è il secondo)

elementi di $\overline{W}$ scritti in funzione della base di $\overline{W}$, le loro componenti sono colonne di una matrice

$$\vdots$$

$$\bar{w}_n = f(\bar{b}_n) = a_{1n}\bar{b}'_1 + a_{2n}\bar{b}'_2 + \dots + a_{mn}\bar{b}'_m$$

scritto ⊕ rapidamente:

$$\bar{w}_i = a_{1i}\bar{b}'_1 + \dots + a_{mi}\bar{b}'_m$$

$$\boxed{\bar{w}_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\,\bar{b}'_k \quad \text{con } i = 1, \dots, n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{f(\bar{b}_1)} \quad \underbrace{\qquad}_{f(\bar{b}_2)} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{f(\bar{b}_n)}$$

Fissate le 2 basi, c'è una corrispondenza biunivoca tra matrici e a.l.

La matrice non è fissa, ma dipende dalla coppia di base scelta

→ scegliere le basi buone a seconda dell'uso

23 Aprile 2012

Ti voglio bene

MATRICE ASSOCIATA AD UNA A.L.

$$f : V_n \longrightarrow W_m \quad \mathbb{K}$$

base di V $\quad \mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$

W $\quad \mathcal{B}' = (\bar{b}_1', \dots, \bar{b}_m')$

la f. lineare è determinata in modo unico quando assegno : $f(\bar{b}_1) \dots f(\bar{b}_n)$

$$f(\bar{b}_1) = a_{11}\bar{b}_1' + a_{21}\bar{b}_2' \dots + a_{m1}\bar{b}_m'$$

$$\vdots \qquad \dots$$

$$f(\bar{b}_n) = a_{1n}\bar{b}_1' + a_{2n}\bar{b}_2' + \dots + a_{mn}\bar{b}_m'$$

$$M_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad \underbrace{\phantom{a_{m1}}}_{f(\bar{b}_1)} \cdots \underbrace{\phantom{a_{mn}}}_{f(\bar{b}_n)}$$

nendo :

$$f(\bar{v}) = x_1'\bar{b}_1' + \dots x_m'\bar{b}_m' \longleftrightarrow (x_1', \dots x_n') \quad (W)$$

$$\bar{v} = x_1\bar{b}_1 + \dots x_n\bar{b}_n \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \quad (V)$$

$$* X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad * X' = f(X) = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}$$

sono legati dalla relazione : $\boxed{X' = AX}$ $\longrightarrow$ $y = AX$

é lineare?

non é necessario dimo con le 2 proprietá!

Basta che un polinomio di 1° grado omogeneo (dimo. prima)

NO LINEARI

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2^2 + x_3 \, , x_2 - x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\text{sen}(x_1 + x_2) \, , x_2 - x_3)$$

continuo: scrivo la matrice rispetto alle 2 basi canoniche

$\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ base di $\mathbb{K}^3$

$\mathcal{B}' = ((1,0),(0,1))$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1', \bar{e}_2')$ base di $\mathbb{K}^2$

$M_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A = \Big($ può nascere x colonne $f(\bar{b}_1) =$ o x righe $f(x_1, \dots x_n) = \dots \Big)$

x righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$1x_1 + 1x_2 - 2x_3$

$0 \quad x_2 - x_3$

controllo: (x le colonne)

$f(\bar{e}_1) = f((1,0,0)) = (1,0)$ (solo x_1)

$f(\bar{e}_2) = f((0,1,0)) = (1,1)$ (solo x_2)

$f(\bar{e}_3) = f((0,0,1)) = (-2,-1)$ (solo x_3)

(e se prendo $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$?)

● TROVARE Imf ? (SPAZIO-IMMAGINE) e la sua dimensione?

? Imf è generato da $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)$

{colonne della matrice}

$(1,0) \quad (1,1) \quad (-2,-1)$

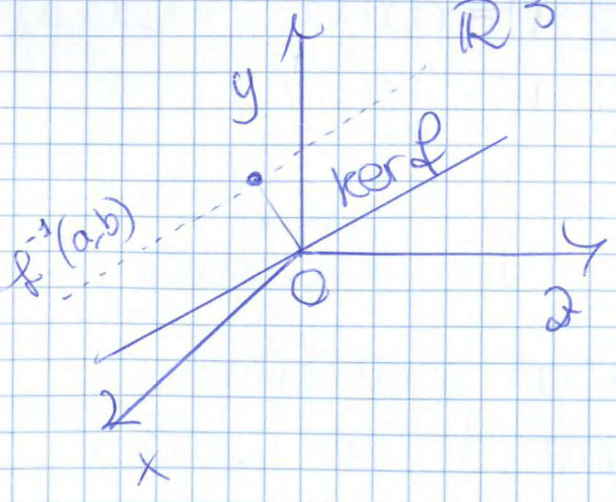
la f non è iniettiva quindi non è una base ma un sistema di generatori

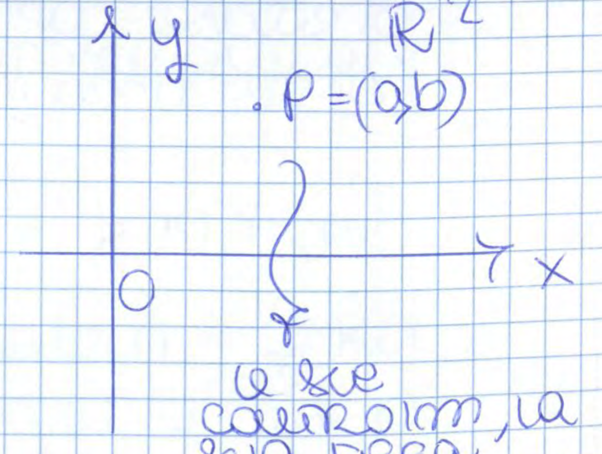
le cui componenti sono le colonne della matrice

$\dim \operatorname{Im} f = \rho(A) = 2$

bastano 2 vettori L.I. a 2 componenti

la f è suriettiva xke è $\mathbb{R}^2$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$





le sue controim, la sua fibra è la retta traslato di un po'

$$f^{-1}(a,b) = \begin{cases} x_1+x_2-2x_3=a \\ x_2-x_3=b \end{cases}$$

$\text{Im} f = \{$ spazio generato dai vettori di W che hanno come componenti le colonne di A $\}$

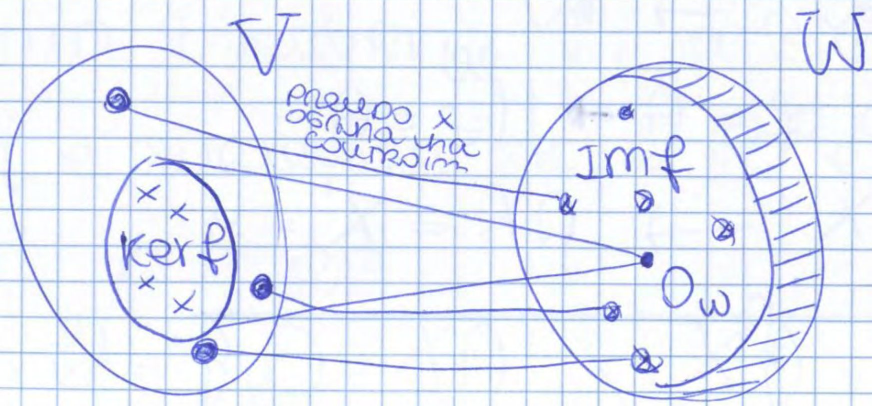
$$\boxed{\dim \text{Im} f = \rho(A)} = \text{spazio delle colonne di } A$$

metto assieme le 2 formule

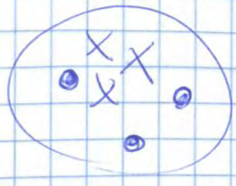
$$\dim \text{Ker} f = \dim V - \dim \text{Im} f$$

$$\boxed{\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = \dim V}$$

VISTO GRAFICAMENTE:



Base Ker f (dim Ker f)
Base Im f (dim Im f)



$\dim V$ = Base di V

Base Ker f + Base Im f = Base V

♡ esempio :

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ costruisco una f lineare avendo qst info

- $f((1,-2)) = (1,1,1)$
- $f((2,1)) = (1,0,1)$
- $f((1,1)) = (1,2,3)$

$\exists$ una f L. che soddisfa qst info?

↳ guardo come sono messi qst 3 vettori rispetto all' immagine

ho 3 vettori → non sono L.I. !!

posso estrarre una base?

sì, x esempio i primi 2!

[xk il terzo è C.L. dei primi 2]

$$(1,1) = x(1,-2) + y(2,1)$$

$$\begin{cases} 1 = x + 2y \\ 1 = -2x + y \end{cases}$$

trovo le componenti del 3° vettore rispetto alla base da me creata

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 + 2R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right) = \begin{cases} 5x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3/5 \\ x_1 = -1/5 \end{cases}$$

$(1,-2) = \bar{b}_1$ base 1
$(2,1) = \bar{b}_2$ base 2
} da me scelte

$(1,1) = \bar{v}$ vettore

$$\bar{v} = -\frac{1}{5}\bar{b}_1 + \frac{3}{5}\bar{b}_2$$

vettore scritto in funzione delle 2 basi.
applico la f sui 2 membri

$$\begin{cases} x = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 \\ y = -2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \end{cases}$$

x, y NOTE
RICAVO $\bar{u}_1, \bar{u}_2$

$$f(x,y) = u_1 f(\bar{b}_1) + u_2 f(\bar{b}_2)$$
$$= u_1 f(1,-2) + u_2 f(2,1) =$$
$$= u_1(1,1,1) + u_2(1,0,1)$$

(SOSTITUISCO u_1 e u_2)

u_1, u_2 mi DICONO COM'È FATTA $f(x,y)$!

② SECONDO MODO DI PROCEDERE

$f((1,0)) = ?$, $f((0,1)) = ?$

$f(\bar{b}_1)$
$f(\bar{b}_2)$ $= ?$
RISPETTO ALLA BASE CANONICA

PRENDO LE INFO E LE RISCRIVO:

$$(1,-2) = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$$
$$(2,1) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

$$f(\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2) = (1,1,1)$$

MA f È LINEARE:

$$f(\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2) = f(\bar{e}_1) - 2f(\bar{e}_2) = (1,1,1)$$

IDEM:

$$2f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) = (1,0,1)$$

HO SCRITTO IL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} f(\bar{e}_1) - 2f(\bar{e}_2) = (1,1,1) \\ 2f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) = (1,0,1) \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & +1 \end{pmatrix}$$

1 $f+g \xrightarrow{?} A+B$

LA MATRICE SI COSTRUISCE PER COLONNE.

1ª COLONNA DELLA MATRICE f+g (M_{f+g})

$$(f+g)(\bar{b}_1) = \underbrace{f(\bar{b}_1)}_{\text{PRIMA COLONNA DI } A} + \underbrace{g(\bar{b}_1)}_{\text{PRIMA COLONNA DI } B} =$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}\bar{b}_1' + a_{21}\bar{b}_2' \dots + a_{m1}\bar{b}_m') + (b_{11}\bar{b}_1' + b_{21}\bar{b}_2' + \dots + b_{m1}\bar{b}_m')$$

$$= (a_{11}+b_{11})\bar{b}_1' + (a_{21}+b_{21})\bar{b}_2' + \dots (a_{m1}+b_{m1})\bar{b}_m'$$

$$\longrightarrow M_{f+g} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \\ a_{21}+b_{21} & \dots \\ \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \end{pmatrix}$$

COSÌ PER TUTTE LE COLONNE.

2 $\lambda f \xrightarrow{?} \lambda A$ pg 116

1ª colonna della matrice λf ($M_{\lambda f}$)

$$\lambda f(\bar{b}_1) = f(\lambda \bar{b}_1)$$

$$= (\lambda a_{11}\bar{b}_1' + \lambda a_{21}\bar{b}_2' + \dots + \lambda a_{m1}\bar{b}_m')$$

$$= \lambda(a_{11}\bar{b}_1' + a_{21}\bar{b}_2' + \dots + a_{m1}\bar{b}_m')$$

ma anche $g \circ f$ é lineare:

$$g \circ f \longleftrightarrow M^{BB''}_{g \circ f} = C$$

se conosco A, B, come mi fabbrico C?

$$\boxed{C = B \cdot A}$$

(RICORDO: B·A ORDINE DI $g \circ f$)

$$\begin{cases} C \in \mathbb{K}^{n,h} \\ B \in \mathbb{K}^{h,m} \\ A \in \mathbb{K}^{m,n} \end{cases} \qquad B^{h\cancel{m}} A^{\cancel{m}n} = C^{hm}$$

$\Rightarrow$ COMPORRE FUNZIONI É = MOLTIPLICARE MATRICI!

LE PROPRIETÁ SI TRASMETTONO:

associativa: $\begin{cases} (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \\ (AB)C = A(BC) \end{cases}$

DIMOSTRO:
CONTROLLO che la PRIMA COLONNA DI C
É LA PRIMA COLONNA DEL PRODOTTO BA

1° COLONNA C:

INVECE DEI VETTORI USO LE COMPONENTI

$$(g \circ f)(\bar{b}_1) = g(f(\bar{b}_1)) =$$

$$= g\left(\begin{matrix}\text{PRIMA} \\ \text{COLONNA} \\ \text{DI } a\end{matrix}\right) = g(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) =$$

= PRENDO LA MATRICE DI g E LA MOLTIPLICO x LA COLONNA $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = B_{hm} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{h1} \end{pmatrix} =$$ PRIMA COLONNA DEL PRODOTTO BA

stesso lavoro x $\bar{b}_2$

$i_V(\bar{b}_2) = \bar{b}_2$ ecc!

andando avanti x colonne trovo la matrice identica :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \vdots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} A = I}$$

quindi A è invertibile a dx e a sx

$$M_{f^{-1}}^{B'B} M_f^{BB'} = M_{i_V}^{BB} = I = A^{-1} A$$

Teorema (matrici associate agli isomorfismi)

la matrice è invertibile quando essa, a.l. tra 2 spazi vettoriali di cui sono state fissate le basi, è un isomorfismo:

esempi ;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^2_e \to \mathbb{R}^2_e$

$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$

è un isomorfismo!

→ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad B = ((1,1),(1,-2))$ $\quad B'((1,-1),(2,0))$

$f \mapsto M_f^{BB'} = A$ sempre un isomorfismo.

e la base nuova:

$$F = (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = < \begin{matrix} f_1 = (1, 2) \\ f_2 = (-1, 1) \end{matrix}$$

scrivo f_1 e f_2 rispetto alla base vecchia

$$\begin{matrix} f_1 = \bar{e}_1 + 2e_2 \text{ colonne} \\ f_2 = -\bar{e}_1 + e_2 \text{ colonne} \end{matrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ cambiamento di base

prendo $\bar{v}$ vettore qualunque:

$$\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2$$

devo trovare la coppia (y_1, y_2) in funzione di (x_1, x_2)

sostituisco $\bar{f}_1$ e $\bar{f}_2$:

$$\bar{v} = y_1(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) + y_2(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$$

ritrovo le componenti rispetto alla base vecchia

$$= \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\substack{\text{x forza} \\ x_1}}\bar{e}_1 + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{\substack{\text{x forza} \\ x_2}}\bar{e}_2$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$ ma io volevo y in funzione di x !!!

risolvo il sistema lineare con x_1, x_2 termini noti

la matrice dei coefficienti è P

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ALTRA INTERPRETAZIONE DELLA MATRICE $\underline{P}$

SEMPRE $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

BASE DELLO SPAZIO DI ARRIVO $E=(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$

BASE DELLO SPAZIO DI PARTENZA $F=(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$

FABBRICO $M_i^{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{P}$ MATRICE DELL'IDENTITÀ RISPETTO A 2 BASI OPPORTUNE

$$i(\bar{f}_1) = \bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$$
$$i(\bar{f}_2) = \bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

$$\bar{v} = y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2$$

$$i(\bar{v}) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = (\bar{v})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$X = PY$$

<u>CAMBIAMENTO DI BASE</u> = DARE TANTI VETTORI L.I QUANTI ERANO QUELLI DELLA BASE VECCHIA CON LE NUOVE COMPONENTI ESPRESSE IN FUNZIONE DELLA BASE VECCHIA!

$\bar{v} = y_1 \bar{f}_1 + \dots + y_n \bar{f}_n$ VETTORE DI PARTENZA

$\Leftrightarrow y$

$i(\bar{v})) = \bar{v} = x_1 \bar{e}_1 + \dots x_n \bar{e}_n$ VETTORE DI ARRIVO

$\Leftrightarrow X$

X si ottiene $X = PY$ (REGOLA PRECEDENTE)

RISOLVO QUESTO SISTEMA LINEARE

$y = P^{-1} X$

P È CERTAMENTE INVERTIBILE, XK LE SUE COLONNE SONO L.I, IL SUO RANGO È MASSIMO

TEOREMA DEL CAMBIO BASE

SUPPONGO DI AVERE UNA f. LINEARE:

$f: V \to W$

SUPPONGO DI AVERNE TROVATA LA MATRICE RISPETTO A UNA COPPIA DI BASE.

CAMBIO LE BASI E CAMBIA LA MATRICE:

$$\begin{tikzcd} f: V \arrow[r] & W \\ E \arrow[d, bend right, "P"'] & F \arrow[d, bend left, "Q"] \\ E' & F' \end{tikzcd}$$

$M_f^{E,F} = A$

$M_f^{E',F'} = A'$

SITUAZIONE PARTICOLARE :

$$f: V \to V$$

$$P \left(\begin{matrix} E \\ F \end{matrix} \right. \qquad \left. \begin{matrix} E \\ F \end{matrix} \right) P$$

QUESTE FUNZIONI SI CHIAMANO ENDOMORFISMI (che vanno da uno spazio a se stesso)

LA MATRICE DI UN ENDOMORFISMO E' SEMPRE QUADRATA

PARTICOLARE : LA BASE IN PARTENZA E IN ARRIVO E' SEMPRE LA STESSA (E)

CAMBIAMENTO DI BASE → UNO SOLO!

$$M_f^E = A$$

$$M_f^F = A'$$

$$\boxed{A' = P^{-1} A P}$$

A e A' SONO LE MATRICI DI UNA STESSA A.L. RISPETTO A 2 BASI DIVERSE → SI POSSONO IDENTIFICARE, XK RAPPRESENTANO LA STESSA FUNZIONE → RELAZIONE DI EQUIVALENZA :

SIMILITUDINE

LE DUE MATRICI A e A' SONO SIMILI !

DEFINIZIONE

A' SIMILE AD A $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ∃ LA MATRICE INVERTIBILE P PER CUI RISULTA $A' = P^{-1} A P$

DIMOSTRO VERIFICANDO LE 3 PROPRIETA' :

- RIFLESSIVA
  (P. IDENTITA')
- SIMMETRICA
  A' SIMILE AD A $\overset{?}{\Rightarrow}$ A SIMILE AD A' ?

$f(\bar{b}_1) = \lambda_1 \bar{b}_1$ MULTIPLO DI $\bar{b}_1$

$f(\bar{b}_2) = \lambda_2 \bar{b}_2$ MULTIPLO DI $\bar{b}_2$

(se non fosse 2 ma n, andrei avanti così)

OGNI VETTORE DELLA BASE HA COME IMMAGINE VA IN UN SUO MULTIPLO! (E VICEVERSA)

MATRICE DIAGONALE RISPETTO A UNA BASE $\Leftrightarrow$ I VETTORI DELLA BASE HANNO COME IMMAGINE UN LORO MULTIPLO.

LA BASE $\mathcal{B}$ DÀ LUOGO AD UNA MATRICE DIAGONALE SE E SOLO SE OGNI SUO VETTORE/ELEMENTO HA COME IMMAGINE UN SUO MULTIPLO

$\Rightarrow$ UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DÀ LUOGO A UNA MATRICE DIAGONALE

PROBLEMA:

TROVARE TUTTI I VETTORI $\bar{v}$ x I QUALI RISULTA $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ (AUTOVETTORI)

- VETTORE NULLO (MA NON SERVE x UNA BASE!!)
  IL VETTORE $\bar{0}_V$ SODDISFA LA RELAZIONE MA NON SERVE x COSTRUIRE UNA BASE
  $\Rightarrow$ $\boxed{v \neq 0}$ (XKÉ ALTRIMENTI I NUMERI DEL CAMPO VANNO BENE)
- CERCO PRIMA λ E POI $\bar{v}$ $\Rightarrow$ CERCHIAMO I NUMERI $\in \mathbb{R}$ (SPECIFICATO!!!) IN CORRISPONDENZA DEI QUALI $\exists \bar{v} \neq \bar{0}$!!! x CUI RISULTA $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$
- SCOPERTI λ, MI CERCO $\bar{v}$ (AUTOVALORI)

AUTOVALORI & AUTOVETTORI

30 Aprile 2019

DI UN'A.L. DI UNO SPAZIO IN SÉ (= ENDOMORFISMO)

$f: \underset{B}{V} \to \underset{B}{V}$ LINEARE (PAGINE PREC)

ORA DISCORSO + GENERALE E ASTRATTO

DEFINIZIONE DI AUTOVETTORE

UN VETTORE $\bar{v} \in V$ SI DICE AUTOVETTORE PER f QUANDO $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ (LA SUA IMMAGINE È UN SUO MULTIPLO). OVVERO SE $\exists \bar{v} \in V$ / $f(\bar{v})$ SIA PARALLELO A $\bar{v}$

(BASI DI AUTOVETT → MATRICI DIAGONALI)

OSSERVAZIONE:

- ZERO È SEMPRE UN AUTOVETTORE, ($\bar{0}$) E IL CORRISPONDENTE λ È INDETERMINATO, È QUALUNQUE.

DEFINIZIONE DI AUTOVALORE

UN ELEMENTO DEL KAMPO, $\lambda \in \mathbb{K}$, SI DICE AUTOVALORE PER f SE:

$\exists \bar{v} \neq \bar{0}$ / $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$. (NE DEVE ESISTE ALMENO UNO NON NULLO, DI $\bar{v}$)

PROBLEMA: DATA f TROVARE AUTOVALORI!

AUTOVALORI & AUTOVETTORI

30 Aprile 2019

Di un'a.l. di uno spazio in sé (= **ENDOMORFISMO**)

$f: \underset{\mathcal{B}}{V} \to \underset{\mathcal{B}}{V}$ lineare (PAGINE PREC)

ORA DISCORSO + GENERALE E ASTRATTO

DEFINIZIONE DI AUTOVETTORE

n vettore $\bar{v} \in V$ si dice autovettore per f quando $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ (la sua immagine è un suo multiplo). ovvero se $\exists \bar{v} \in V \,/\, f(\bar{v})$ sia parallelo a $\bar{v}$

basi di autovett → matrici diagonali)

OSSERVAZIONE:

- zero è sempre un autovettore, ($\bar{0}$) e il corrispondente λ è indeterminato, è qualunque.

DEFINIZIONE DI AUTOVALORE

Un elemento del Kampo, $\lambda \in K$, si dice autovalore per f se:

$\exists \bar{v} \neq \bar{0} \,/\, f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$. (ne deve esistere almeno uno non nullo, di $\bar{v}$)

PROBLEMA: DATA f TROVARE AUTOVALORI!

esempio con l'A.L. nulla:

$f: V \to V$ lineare, $f(\bar{v}) = \bar{0}, \forall \bar{v}$

$\bar{v} \to 0$

cerco λ / $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

$f(\bar{v}) = 0\bar{v}, \forall \bar{v}$

ho trovato un autovalore $\lambda = 0$, per cui l'autospazio $V_0 = V$ corrisponde con il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V

esempio con l'A.L. identità:

$f: V \to V$ lineare, $f(\bar{v}) = \bar{v}, \forall \bar{v}$

$\bar{v} \to \bar{v}$

Quali sono gli autovalori e gli autovettori?

autovettore → va a finire in un suo multiplo

x noi ogni $\bar{v}$ → " " se stesso

unico autovalore $\lambda = 1$, per cui l'autospazio $V_1 = V$ corrisponde con il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V.

NUCLEO E INIETTIVITÀ

$f: V \to V$ lineare, $\ker f \neq \{\bar{0}_V\}$

! è la stessa cosa che dire che 0 è un autovalore

$\ker f \neq \{\bar{0}_V\} \Rightarrow \exists \bar{v} \neq \bar{0} / f(\bar{v}) = \bar{0} = 0\bar{v}$

$\Rightarrow$ condizione di non iniettività!

V_λ È UN SOTTOSPAZIO DI V

DISCORSO PIÙ ASTRATTO XK DIMOSTRARE CHE L'AUTOSPAZIO V_λ È UN SOTTOSPAZIO DI V:

$f: V \to V$

λ È UN AUTOVALORE

$\exists \bar{v} \neq \bar{0} \; / \; f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

CERCO TT GLI AUTOVETTORI (ANCHE LO 0)

CONSIDERO $V_\lambda = \{ \bar{v} \; / \; f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \}$

$$f(\bar{v}) - \lambda \bar{v} = \bar{0}_V$$

INVECE DI $\lambda \bar{v}$ SCRIVO

$$\lambda \bar{v} = \lambda \, i(\bar{v})$$

LAMBDA VOLTE LA FUNZIONE IDENTITÀ: - ARTIFICIO -

QUINDI

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$$
$$f(\bar{v}) = \lambda \, i(\bar{v})$$
$$f(\bar{v}) - \lambda \, i(\bar{v}) = \bar{0}$$
$$(f - \lambda i)(\bar{v}) = \bar{0}$$

TT $\bar{v}$ SONO IL NUCLEO DELLA FUNZIONE $f - \lambda i$ E IL NUCLEO È UN SOTTOSPAZIO

V_λ SI PUÒ PENSARE NUCLEO DI QSTA PARTICOLARE FUNZIONE $(f - \lambda i) = \varphi_\lambda$

TROVATI GLI AUTOVALORI, GLI AUTOSPAZI SONO NUCLEI DI QUESTE PARTICOLARI A.L.

PER ASSURDO, SUPPONIAMO CHE ∃ DEGLI INDICI J TALI CHE $\bar{v}_J$ SIA C.L. DEI PRECEDENTI.

INDICHIAMO CON i IL PRIMO: (= I PRECEDENTI SONO UN INSIEME LIBERO)

$$\bar{v}_i = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots a_{i-1}\bar{v}_{i-1}$$

APPLICO LA f AI 2 MEMBRI: (f LINEARE)

$$f(\bar{v}_i) = a_1 f(v_1) + \dots a_{i-1} f(\bar{v}_{i-1})$$

$\bar{v}$ SONO DEGLI AUTOVETTORI

$$\lambda_i\bar{v}_i = a_1\lambda_1\bar{v}_1 + \dots + a_{i-1}\lambda_{i-1}\bar{v}_{i-1}$$

RIMETTO LA FORMULA DI v_i QUI DENTRO:

$$\lambda_i(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_{i-1}\bar{v}_{i-1}) =$$

$$= \lambda_1 a_1\bar{v}_1 + \dots \lambda_{i-1} a_{i-1}\bar{v}_{i-1}$$

PORTO TUTTO A SX: SCRIVO I COEFF DI v_1 ...

TUTTI I COEFF DEVONO ESSERE $= 0$ (INSIEME LIBERO)

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda_i - \lambda_1)a_1 = 0, \\ &(\lambda_i - \lambda_2)a_2 = 0, \\ &\vdots \\ &(\lambda_i - \lambda_{i-1})a_{i-1} = 0 \end{aligned}\right\} \text{VALE LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{v}_i = \bar{0} \text{ FALSISSIMO!}$$

CONTRADDIZIONE, PER $\bar{v}_i$ È C.L DEI PRECEDENTI

$\rightarrow \bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$ È UN INSIEME LIBERO!

CERCO GLI AUTOVALORI λ DI f PER CUI:

$$\exists X \neq 0 \ / \ f(X) = \lambda X \text{ cioè } AX = \lambda X$$

Posso anche scrivere:

$$AX = \lambda I X$$

I: MATRICE IDENTITÀ

$$\boxed{(A - \lambda I) X = 0}$$

SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI MATRICE $A - \lambda I$ DEVE AVERE <u>QUALCHE SOLUZIONE NON NULLA</u>, OSSIA LA MATRICE DEVE AVERE

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

QUINDI LA MATRICE NON DEVE ESSERE INVERTIBILE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - (a_{12}a_{21}) =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

UAZIONE X
ROVARE GLI
UTO-
ALORI $\leftarrow$

$$= \underbrace{\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det A}_{\text{POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'ENDO}} = 0$$

E CAMBIO LA BASE, IL POLINOMIO RIMANE = ?

$' = P^{-1}AP \qquad A' = A - \lambda I$ pg 190

et $(P^{-1}AP - \lambda I)$ SCRIVO $I = P^{-1} I P$

et $(P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P)$

X TROVARE IL TERMINE NOTO:

$$a_0 + a_1\lambda^1 + \dots a_n\lambda^n = P_n(\lambda)$$

PONGO $\lambda = 0$ → $\boxed{P(0) = a_0 = \det A}$

X STUDIARE GLI AUTOSPAZI

SUPPONIAMO DI AVER RISOLTO IL POLINOMIO CARATTERISTICO,

SIA λ_0 UNA RADICE DELL'EQ $P(\lambda) = 0$, CIOÈ λ_0 È UN AUTOVALORE,

CERCO $V_{\lambda_0} = \{ \bar{v} \,/\, f(\bar{v}) = \lambda_0 \bar{v} \}$

OVVERO TUTTI GLI AUTOVETTORI CON λ_0 AUTOVALORE

V_{λ_0} È L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE $AX = \lambda_0 X$ CIOÈ

$$(A - \lambda_0 I)X = 0$$

- ORA NE VOGLIAMO TROVARE UNA BASE
- OPPURE RISOLVO IL SIST. OM. X TROVARE LE SOLUZIONI
- OPPURE CERCO LA DIMENSIONE:

$\dim V_{\lambda_0}$ = NUMERO INCOGNITE LIBERE

$$\dim V_{\lambda_0} = n - \rho(A - \lambda_0 I)$$

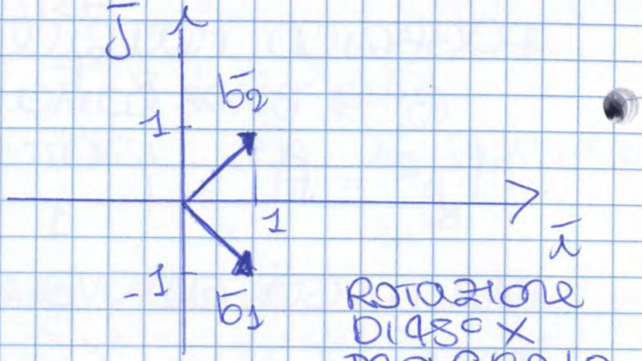
$\boxed{\lambda = -1}$ V_{-1} $x - y = 0$ EQ. BISETTRICE

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango} < 2$$

$$(x, x) = x \underbrace{(1, 1)}_{\bar{b}_2}$$

HO TROVATO LE BASI FATTE DA AUTOVETTORI

$\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$



ROTAZIONE DI 45° x TROVARE LA BASE NUOVA

$M_f^{\mathcal{B}} \rightarrow$ VOGLIO TROVARLO RISPETTO ALLA NUOVA BASE

$f(\bar{b}_1) = \bar{b}_1$ PRIMA COLONNA

$f(\bar{b}_2) = -\bar{b}_2$

L'ORDINE DIPENDE DALL'ORDINE DELLE BASI

$M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ MATRICE DIAGONALE" CON SULLA DIAGONALE PRINCIPALE I 2 AUTOVALORI

è l'unica che posso fabbricarmi?

NO, ce ne sono $n!$ con n = numero autovalori

esempio di esercizio (non ci sono abb autovettori)

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$f(\bar{v}) = \bar{v} \times \bar{i}$ $\bar{i}$ vettore fissato

è una funzione lineare (verifico...)

$\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \longleftrightarrow {}^t(x, y, z)$ colonna

TROVARE UN AUTOVETTORE // $\bar{v} \times \bar{i}$
NON C'È NE SONO TRANNE IL VETTORE NULLO!

MAGARI LA STESSA FUNZIONE OPERA DA $\mathbb{C}^3$ A $\mathbb{C}^3$
→ LA ESTENDO! SU CAMPO COMPLESSO,
XK COSÌ POSSO TROVARE LE ALTRE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO
COSÌ HO 3 AUTOVALORI : $0, i, -i$
CERCO I 3 AUTOSPAZI V_0, V_i, V_{-i}

PRIMO AUTOVETTORE $\boxed{V_0}$

$$x\underbrace{(1,0,0)}_{\bar{b}_1}$$

$\boxed{V_i}$ METTO i IN λ

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix} = A - iI$$

MOLTIPLICO LA SECONDA $\cdot(-i)$ E OTTENGO LA TERZA RIGA
NON CONSIDERO + LA TERZA RIGA!

$$\begin{cases} -ix = 0 \\ -iy + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = iy \end{cases}$$

$$(0, y, iy) = y\underbrace{(0, 1, i)}_{\bar{b}_2}$$

$\boxed{V_{-i}}$ METTO $-i$ IN λ

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix} = A + iI$$

LA TERZA RIGA NON LA CONSIDERO DI NUOVO

$$\begin{cases} ix = 0 \\ iy + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = -iy \end{cases}$$

TEOREMA SUGLI ENDOMORFISMI SEMPLICI

SONO FATTI EQUIVALENTI, CHE CARATTERIZZANO UN ENDOMORFISMO SEMPLICE

- V AMMETTE UNA BASE DI AUTOVETTORI / FORMATA DA AUTOVETTORI DELL'ENDOMORFISMO f
- $\exists$ UNA BASE DI V RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE DI f È DIAGONALE
- SE $\lambda_1, \dots \lambda_h$ SONO GLI AUTOVALORI DI f, ALLORA LA SOMMA DIRETTA DI

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h} = V$$

→ UGUAGLIANZA TRA INSIEMI PERÒ DIVENTANO UN'UGUAGL. TRA NUMERI

SE LA DIMENSIONE DI V È n $(f: V_n \to V_n)$

$\Rightarrow h$ È $\leq n$

(RADICI MULTIPLE)

(RADICI COMPLESSE MENTRE LO SONO SUI REALI)

ANCHE SE GLI AUTOSPAZI SONO DI MENO, LA LORO SOMMA DIRETTA È = A V

$$\text{BASE } V_{\lambda_1} \cup \text{BASE } V_{\lambda_2} \dots \cup \text{BASE } V_{\lambda_h} = \text{BASE DI } V$$

FORMATA DA AUTOVETTORI!!

- $\dim(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h}) = \dim V = n$

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_h} = n$$

LI CALCOLO FACILMENTE DALLA MATRICE

- ⓐ TUTTI GLI AUTOVALORI $\in \mathbb{K}$

ⓑ $\dim V_\lambda = m$ MOLTEPLICITÀ DI λ COME RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$n - \rho(A - \lambda I) = m$ // //

DEFINIZIONE:

un endomorfismo è detto semplice quando le 5 condizioni equivalenti sono soddisfatte

domanda semplice: dato un endomorfismo vedere se è semplice

4 Maggio 2012

TEOREMA SULLA DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI

se λ ha molteplicità m,

$\dim V_\lambda \leq m$.

DIMOSTRO:

Scegliamo una base che mette bene in evidenza la dimensione di V_λ

$\dim V_\lambda = d$

costruisco una base di V che abbia come sottoinsieme una base di V_λ — insieme libero

base di $V_\lambda = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_d)$ completiamola x avere una base di V.

$(\lambda - T)$ compare almeno all'esponente d :

$\Rightarrow m \geq d$

DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE QUADRATA

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$: DIAGONALIZZARLA VUOL DIRE PENSARE A COME LA MATRICE ASSOCIATA AD UNA CERTA f MEDIANTE LA BASE CANONICA

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $M_f^{\varepsilon} = A$

CHIEDERSI SE f È UN ENDOMORFISMO SEMPLICE → ∃ UNA SUA MATRICE DIAGONALE SE SÌ, A È DIAGONALIZZABILE →

* SE f È SEMPLICE, DICIAMO CHE A È DIAGONALIZZABILE ED UNA QUALUNQUE MATRICE DIAGONALE CHE RAPPRESENTI f SI DICE DIAGONALIZZATA DI A.

* SE f NON È SEMPLICE, DICIAMO CHE A NON È DIAGONALIZZABILE.

COME MI FABBRICO LA MATRICE DIAGONALE SENZA PASSARE DAGLI ENDOMORFISMI?

= COME MI TROVO UNA DIAGONALIZZATA DI A, QUANDO ESISTE

- TROVO GLI AUTOVALORI DELL'ENDOMORFISMO f OSSIA DELLA MATRICE A (CIASCUNO CON LA SUA MOLTEPLICITÀ)

esempio di esercizio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?
riesco a diagonalizzarla in campo $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$?

endomorfismo:
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $f(x,y) = (x+y, 2x+2y)$
le 2 righe della matrice sono proporzionali
$\rho(A) = 1$
$\rightarrow$ 0 è un autovalore $<$ semplice? doppio? calcoli.
scrivo il polinomio caratt:

$$A - TI = \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ 2 & 2-T \end{pmatrix}$$ cerco il suo det

$$\det(A-TI) = T^2 - 3T = T(T-3) < \begin{matrix} T=0 \\ T=3 \end{matrix}$$
2 autovalori

ci sono 2 possibili diagonalizz:

$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entrambe vanno bene

vedo gli autospazi

$V_0 = \ker f : \{ x+y=0$

$\underbrace{(x, -x)}_{}$ $= x(1;-1) \Rightarrow \bar{b}_1 (1,-1)$
soluz equaz in funz di x

$V_3 \rightarrow A-3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ le 2 righe sono proporzionali

$\{-2x+y=0$

$(x, 2x) = x(1,2) \Longrightarrow \bar{b}_2 (1,2)$
soluz. eq. in funzione di x

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$f(\bar{b}_1)$ $f(\bar{b}_2)$

ESEMPIO DI ESERCIZIO GENERALE

matrice simmetrica a 2 righe e 2 colonne

[M. simmetrica → sempre diagonalizzabile in campo reale!
(serve x lo studio delle coniche!)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica
(sono un sottospazio di dimensione 3 = 3 parametri!!!) → sono ∞^3 matrici simmetriche

$A \in \mathbb{R}^{2,2}$

A è sempre diagonalizzabile:

x ché è simmetrica ⇓

Dimostro
applico la ⓢ condiz di endo semplice

$$P(T) = T^2 - (a_{11} + a_{22})T + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

calcolo Δ

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$
$$= a_{22}^2 + a_{11}^2 + \underbrace{2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22}} + 4a_{12}^2 =$$
$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 + 4a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22}$$
$$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

somma di 2 quadrati
mai numero negativo!!
sono sempre diagonalizz!

$\Delta > 0$
2 radici distinte
2 autovalori semplici → $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} = V$
$1 + 1 = 2$

$\Delta = 0$
autovalore doppio
⇓
controllo l'autospazio!

$\Delta = 0$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} I$$ è già diagonale!

$(a_{11}-\lambda_1, a_{12})(a_{11}-\lambda_2, a_{12}) = 0$

PRODOTTO SCALARE $=0$, LE 2 RETTE SONO $\perp$

PROPRIETÀ A.L. (x DEFINIZIONE) (2)
PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE A.L. (3)
NUCLEO È UN SOTTOSPAZIO DI V (+ CRITERIO INIETTIVITÀ)
Imf È UN SOTTOSPAZIO DI W (+ CRITERIO SURIETTIVITÀ)
CRITERIO x ISOMORFISMI (E INVERSO) / SE $\dim V = \dim W$ pg 122!
A.L E I.L.
A.L. E GENERATORI
$\mathbb{K}^{m,n} \longleftrightarrow \mathcal{L}(V,W)$
MATRICI ASSOCIATE AGLI ISOM (ISOM $\Leftrightarrow$ A È INVERTIBILE)
$\dim \mathrm{Im} f = \rho(A)$ / TROVARE BASE Imf
NUCLEO E $AX=0$ / " " NUCLEO
TEOREMA DELLA DIMENSIONE → $\dim V = \dim \ker f + \underbrace{\dim \mathrm{Im} f}_{\rho(A)}$
NON INIETTIVITÀ / NON SURIETTIVITÀ
TEOREMA SULLA MATRICE DI PASSAGGIO
TEOREMA DEL CAMBIO BASE + COROLLARIO pg.125
MATRICI SIMILI
π I CRITERI x DEFINIRE UN AUTOVALORE
I.L. DEGLI AUTOVETTORI → SOMMA DIRETTA DI AUTOSPAZI
AUTOVALORI E P.C.
INVARIANZA DEL P.C.
CRITERI x ENDOMORFISMI SEMPLICI pg. 192 / 193
TEOREMA SULLA DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI
TEOREMA SULLE MATRICI DIAGONALIZZABILI

PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI

$\bar{u} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ (x_1, x_2, x_3) COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE CANONICA FORMATA DAL

$\bar{v} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}$$

DALLE PROPRIETÀ

DEFINIRE UN PRODOTTO SCALARE IN UN QUALUNQUE SPAZIO VETTORIALE

IL PRODOTTO SCALARE, DEFINITO SULL'$\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE V È DEFINITO: (FUNZIONE)

$f: V \times V \to \mathbb{R}$, che verifica le ④ PROPRIETÀ

OSSERVAZIONI SULLE PROPRIETÀ ② E ③

$f(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{v}$

FISSO $\bar{u} = \bar{u}_0$!

$f(\bar{u}_0, \bar{v}) = \bar{u}_0 \cdot \bar{v} = \varphi(\bar{v})$

GUARDO LA CONDIZIONE ③

$f(\bar{u}_0, a\bar{v}) = a\, f(\bar{u}_0, \bar{v})$ CONDIZIONE DI LINEARITÀ X IL PRODOTTO

GUARDO LA CONDIZIONE ②

$f(\bar{u}_0, \bar{v}+\bar{w}) = f(\bar{u}_0, \bar{v}) + f(\bar{u}_0, \bar{w})$ CONDIZIONE DI LINEARITÀ X LA SOMMA

COMUNQUE FISSO LE 2 VARIABILI, LA FUNZIONE DELLA VARIABILE NON FISSATA È LINEARE.

IL PRODOTTO SCALARE È UNA FUNZIONE BILINEARE.

LTRE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

- $\bar{v}\cdot\bar{0} = 0$, $\bar{0}\cdot\bar{v} = \bar{0}$
- $\bar{v}\cdot(a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n) = a_1(\bar{v}\cdot\bar{v}_1) + \ldots + a_n(\bar{v}\cdot\bar{v}_n)$

DEFINIZIONE DI ORTOGONALITÀ

$\bar{u}$ È ORTOGONALE A $\bar{v}$, $\bar{u} \perp \bar{v}$ SE E SOLO SE

$$\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v} = 0}$$

x DEFINIZIONE IL VETTORE NULLO 0 È $\perp$ A TUTTI GLI ALTRI.

RIVEDO BENE I VERSORI (= BASE ORTOGONALE)

TORNIAMO A LAVORARE SU SPAZI DI DIMENSIONE FINITA

V_n, FISSIAMO UNA SUA BASE QUALUNQUE $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$

CONOSCERE IL PRODOTTO SCALARE SIGNIFICA CONOSCERE COME ESSO OPERA SULLE COPPIE DI VETTORI ESTRATTE DALLA BASE

IL PRODOTTO SCALARE È DEFINITO IN MODO UNICO QUANDO SI SA COME ESSO OPERA SULLE COPPIE DI VETTORI ESTRATTE DALLA BASE.

$$\bar{u} = x_1 \bar{b}_1 + \dots + x_n \bar{b}_n$$

$$\bar{v} = y_1 \bar{b}_1 + \dots + y_n \bar{b}_n$$

$\bar{u} \cdot \bar{v} =$ USO LE 4 CONDIZIONI !

$$= (x_1 \bar{b}_1 + \dots + x_n \bar{b}_n) \cdot (y_1 \bar{b}_1 + \dots + y_n \bar{b}_n)$$

APPLICO ② E ③

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1 y_1 \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 + x_1 y_2 \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 + \dots + x_1 y_n \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_n +$$
$$+ x_2 y_1 \bar{b}_2 \cdot \bar{b}_1 + x_2 y_2 \bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2 + \dots + x_2 y_n \bar{b}_2 \cdot \bar{b}_n +$$
$$\dots$$

CASO PARTICOLARE (COMODO x I CALCOLI)

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 = 1 \longrightarrow \bar{b}_i \cdot \bar{b}_i = 1$$

$$\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j = 0 \longleftrightarrow \forall (i, j) \text{ CON } i \neq j$$

PROPRIETÀ (INSIEME ORTONORMALE = LIBERO)

UN INSIEME ORTONORMALE È LIBERO.

DIMOSTRO:

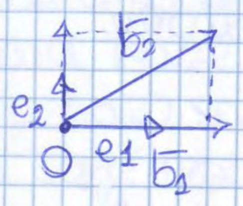
x DEFINIZIONE : $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

PLICO x v_1 $\underbrace{a_1\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}_{1} + \underbrace{a_2\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1}_{0} \cdots \Rightarrow a_1\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

PLICO TO v_2 $a_1\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 + a_2\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 \cdots \Rightarrow a_2 v_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

ECCETERA!

PROCEDIMENTO x PASSARE DA UNA BASE A UNA BASE ORTONORMALE



DA 2 BASI → NE VOGLIO COSTRUIRE UNA ORTONORMALE

$\bar{e}_1$: VERSORE NATO DA UNA BASE DIVISO x LA NORMA

PRENDO UN VETTORE A CUI ⊥, ALTO COME LA PROIEZIONE DI $\bar{b}_2$ LO DIVIDO x LA NORMA x AVERE $\bar{e}_2$.

→ ORTONORMALIZZAZIONE DI UNA BASE

DETTA O. DI GRAM-SCHMIDT

$\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$

$\bar{e}_1 = \dfrac{\bar{b}_1}{\|\bar{b}_1\|}$ e_1 NASCE DAL PRIMO VETTORE DIVIDENDOLO x LA NORMA!

$\bar{e}_2$ = LO CERCO COME C.L. DEI PRIMI 2 VETTORI (IL PRIMO GIÀ SCRITTO GIUSTO)

$\bar{e}_2 = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{b}_2$ DEVO TROVARE α_1 e α_2

$\bar{e}_2$ LO VOGLIO ⊥ a $\bar{e}_1 \Rightarrow \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = 0$

$(\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{b}_2) \cdot \bar{e}_1 = \alpha_1 + \alpha_2\bar{b}_2 \cdot \bar{e}_1 = 0$

$\alpha_1 = -\alpha_2\bar{b}_2 \cdot \bar{e}_1$ TROVATO α_1

ALLORA $\bar{e}_2 = -(\alpha_2\bar{b}_2 \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{b}_2$ VA BENE, MA

ESERCIZIO: DIMOSTRO

W sottospazio di V:
cerco

$$T = \{ \bar{v} \in V \ / \ \bar{v} \perp \bar{w} \ , \ \forall \bar{w} \in W \}$$

allora T è un sottospazio. T è l'ortogonale di W e W è l'ortogonale di T

Dimostro:

- $\bar{0} \in T$?

  $0 \cdot \bar{w} = 0$ (sempre x definizione)

- $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \in T$?

  $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \cdot \bar{w} = 0$

  $\underbrace{\bar{v}_1 \cdot \bar{w}}_{0} + \underbrace{v_2 \cdot \bar{w}}_{0} = 0$ ogni $\bar{v}$ è $\perp$ a $\bar{w}$

- $(a v_1) \in T$?

  $(a\bar{v}_1) \cdot \bar{w} = 0$

  $a(\underbrace{\bar{v}_1 \cdot \bar{w}}_{0}) = 0$

  $a\bar{0} = \bar{0} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

T, che contiene tutti gli elementi di V ortogonali agli elementi di W (sottospazio di V) è anch'esso sottospazio di V.

SSAGGIO DA UNA BASE ORTO AD UNA ALTRA ORTO

10 Maggio 2012

$(\mathbb{R}^n, \cdot)$ SPAZIO VETTORIALE PIÙ PRODOTTO SCALARE

RENDO LA BASE CANONICA (ORTONORMALE)

$B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$

OVA BASE

$B' = (\bar{b}_1 \dots, \bar{b}_n)$

OME DEVE ESSERE FATTA LA MATRICE DI PASSAGGIO X AVERE B' ORTONORMALE.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & & p_{1n} \\ & & \\ p_{n1} & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad\quad}_{\bar{b}_1} \quad \underbrace{\quad\quad}_{\bar{b}_2} \quad \underbrace{\quad\quad}_{\bar{b}_n}$$

RISPETTO ALLA BASE VECCHIA

$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 = 1 \Longrightarrow$

$i \neq j \Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{b}_i \cdot \bar{b}_i = 1 \\ \bar{b}_i \cdot \bar{b}_j = 0 \end{array}}$$

CONDIZIONI X UNA BASE ORTONORMALE

$${}^tP \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \cdot \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

OLTIPLICANDO X LA TRASPOSTA

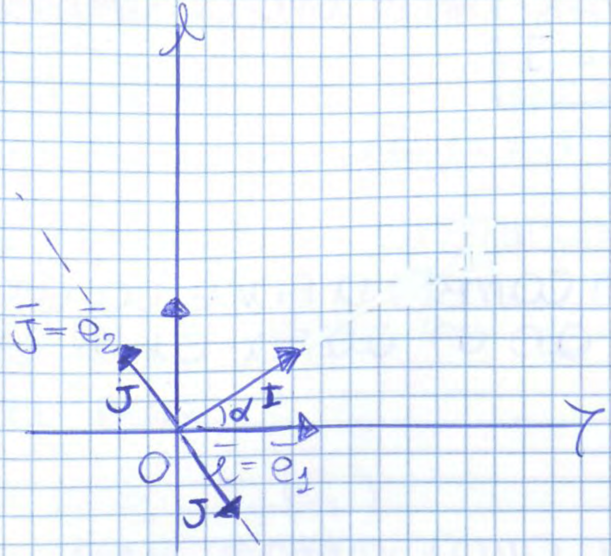
VENGONO TUTTI ZERI TRANNE DOVE C'È L'INDICE UGUALE

$$\boxed{{}^tP \cdot P = I}$$

CONDIZIONE XK LA NUOVA BASE SIA ANCORA ORTONORMALE = P ORTOGONALE

$\Downarrow$

P^{-1} ESISTE ED È $= {}^tP \Longrightarrow \boxed{P^{-1} = {}^tP}$



$\bar{i}, \bar{j}$ = Base canonica
nuova Base $\bar{I}$
(trovato da $\bar{i}$ ruotato di α)

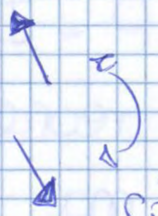
$\bar{I} = (\cos\alpha)\bar{i} + (\text{sen}\,\alpha)\bar{j}$ (x trigonometria)

secondo nuovo vettore della base

- direzione ⊥ I
- modulo = 1
- verso → 2 possibilità

$J_1 = -(\text{sen}\,\alpha)\bar{i} + (\cos\alpha)\bar{j}$

$J_2 = \text{sen}\,\alpha(\bar{i}) - (\cos\alpha)\bar{j}$



sono opposti, cambio di segno le 2 componenti

$$P_1 = \begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & \to i \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & \to j \\ I & J & \end{array} \Rightarrow \det = ?$$

I ↓ componenti del primo nuovo vettore della base

$\det = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$

$\det = 1$

P_1 ortogonale speciale

$$P_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \det = ?$$

matrice simmetria

$\det = -1$

P_2 ortogonale non speciale

sono le 2 sole famiglie di matrici ortogonali $\in \mathbb{R}^{2,2}$

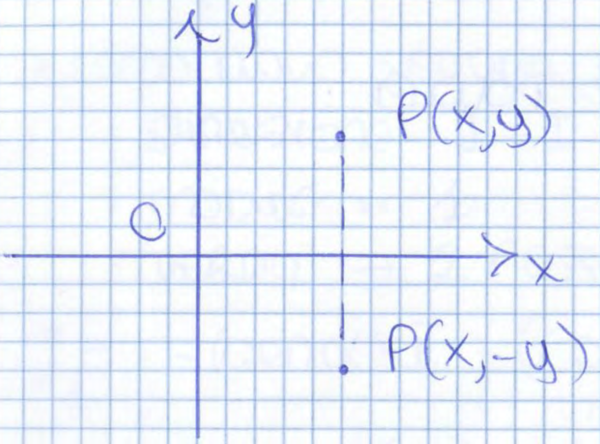
$f_2(x,y) = (x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ x\sin\alpha - y\cos\alpha)$

↳ RIFERITA A $M_f^c = P_2$

SE CAMBIO IL SEGNO DI y → OTTENGO f_1 DI PRIMA!

$$\begin{tikzcd}(x,y) \arrow[r, "\text{simm.} = \varphi"] \arrow[rr, bend right] & (x,-y) \arrow[r, "f_1 = \text{ROTAZIONE}"] & (\dots)\end{tikzcd}$$

f_2 = COMPOSIZIONE DI SIMMETRIA + ROTAZIONE



SIMMETRIA
ORTOGONALE
RISPETTO L'ASSE x

GUARDANDO INVECE P_1 e P_2 ⟹ DEDUCO STESSE COSE

$c_1 = 1\bar{c}_1 + 0\bar{c}_2$

$c_2 = 0\bar{c}_1 - 1\bar{c}_2$

c_1, c_2 COLONNE P_1

$\bar{c}_1, \bar{c}_2$ COLONNE P_2

$$P_2 = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_\varphi$$

PRODOTTO TRA MATRICI = COMPOSIZIONE TRA FUNZIONI

$$\boxed{f_2 = f_1 \circ \varphi}$$

ECCO LA RELAZIONE TRA QUESTE 2 FUNZIONI LINEARI.

FUNZIONI ASSOCIATE A MATRICI ORTO~~NORM~~ALI $\in \mathbb{R}^{n,n}$
GON

$P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ORTONORMALE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;/\; M_f^{C} = P$ C = CANONICA

* PROPRIETÀ (CARATTERIZZ DI QST FUNZ^i)

$$\boxed{f(\bar{v}) \cdot f(\bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w}} \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$$

CONSERVANO LA METRICA DEGLI SPAZI =
CONSERVANO IL PRODOTTO SCALARE

DIMOSTRO:

$\bar{v} = (x_1, \dots\dots x_n) \longrightarrow X$ MATRICE COLONNA $= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\bar{w} = (y_1, \dots\; y_n) \longrightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\bar{v} \cdot \bar{w} = x_1 y_1 + \dots\dots + x_n y_n$

$\bar{v} \cdot \bar{w} = \underset{1 \times n}{{}^tX} \cdot \underset{n \times 1}{Y}$ (RIGA x COLONNA)

$$\boxed{\bar{v} \cdot \bar{w} = {}^tX \cdot Y}$$

$f(\bar{v}) =$ COME MATRICE COLONNA $= PX = M_f^{C} X$ (COMPO RISPETTO ALLA MATRICE DELLE IMMAGINI)

$f(\bar{w}) = \quad // \quad = PY = M_f^{C} Y$

$f(\bar{v}) \cdot f(\bar{w})$ = USO LA REGOLA
$\downarrow$
P SCALARE

$= {}^t(PX)(PY) =$ ASSOCIATIVA

$= {}^tX({}^tP \cdot P)Y = {}^tX \cdot I \cdot Y =$

$= {}^tX Y = \bar{v} \cdot \bar{w}$

11 Maggio 2012

FORME QUADRATICHE sui Reali

in una variabile :

$q(x) = ax^2$ $\qquad a,b,c \in \mathbb{R}$

in due variabili :

$$q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 \cdot x_2 + a_{22} x_2^2$$

a_{11} xc si riferisce alla prima x_1

a_{12} si riferisce alle 2 x sia x_1 sia x_2

in tre variabili:

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + $$
$$+ 2a_{23} x_2 x_3 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$

in n variabili:

$$\boxed{q(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{j<i} a_{ij} x_i x_j}$$

considero le matrici dei coefficienti delle F.Q.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \cdot & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{la completo x simmetria}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrice associata alla forma quadratica

si può usare la matrice x scrivere la forma quadratica !

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2) \; 1 — 1 \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1,2)}{{}^tX} \underset{(2,2)}{A} \underset{(2,1)}{X} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$ viene un numero!

CI SI CHIEDE COSA FA LA FORMA QUADRATICA IN UN PICCOLO INTORNO DELL'ORIGINE (CAMBIA DI SEGNO O NO)

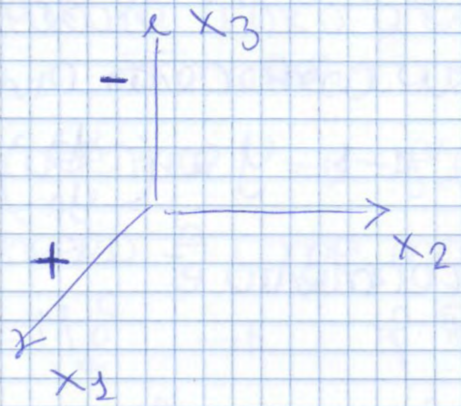
SERVE UNA MATRICE DIAGONALE → TUTTI GLI ELEMENTI CON INDICI DIVERSI SONO NULLI

$2a_{ij}x_ix_j = 0$ → SOPRAVVIVONO SOLO I QUADRATI

SUPPONIAMO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$$

ORA È FACILE CAPIRE COME CAMBIA DI SEGNO:



SE PRENDO:

$x_1 = x_2 = 0$

$x_3 \neq 0$, $x_3 = 1$

$q(0,0,1) < 0$ $(= -1)$

MI SONO MOSSA SULL'ASSE x_3

SE PRENDO:

$x_2 = x_3 = 0$

$x_1 \neq 0$

$q(x_1, 0, 0) > 0$

MI SONO MOSSA SULL'ASSE x_1

⇒ QUESTA FORMA QUADRATICA NON MANTIENE IL SEGNO COSTANTE (XKÈ I SEGNI DEI COEFF. NON SONO TUTTI UGUALI)

SE INVECE QUALCUNO DEI COEFF. È NULLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$$

È SEMPRE POSITIVA TRANNE QUANDO x_1 E x_2 SONO NULLI → SULL'ASSE x_3 (NON SOLO NELL'ORIGINE!)

Risulta $D = P^{-1}AP$;

② in più, una matrice simmetrica ammette una base di autovettori ortonormale. Questo significa che la matrice del cambio di base dalla base canonica alla nuova è una matrice ortogonale, cioè $^tP = P^{-1}$

Conseguenza:

$$\rho(A) = \rho(B) = \rho(^tPAP)$$

se P è invertibile

Proprietà del rango

Il rango di una matrice qualsiasi, che viene moltiplicata a dx o a sx per una matrice invertibile, non cambia.

P invertibile $\Rightarrow \rho(A) = \rho(AP) = \rho(PA)$

considero A come matrice di una funzione

$A = M_f^C \longrightarrow f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f", "\downarrow A"'] \arrow[rr, bend right=40, "PA"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi", "\downarrow P"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\varphi \circ f = PA$

$\rho(A) = \dim \operatorname{Im} f$

$\rho(AP) = \dim \operatorname{Im} (\varphi \circ f)$

P è invertibile $\rightarrow \varphi$ è un isomorfismo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

n = numero colonne

$n - \rho(A) =$ numero degli autovalori nulli

DIAGONALIZZA UNA MATRICE SIMMETRICA CON UNA MATRICE P QUALUNQUE

MATRICE SIMMETRICA 2x2, DIAGONALIZZIAMOLA:
con una matrice P qualunque, non per forza ortogonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & 3 \end{pmatrix}$$

↓ deve diventare uno zero

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ovvero ho moltiplicato a sx x una matrice invertibile la trasposta di

$A' = {}^tPA$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

MATRICE DIAGONALE!

stavolta ho moltiplicato a dx sempre per la matrice di prima non trasposta

$A'P = {}^tPAP = A'' = D$

MATRICE CHE OTTENGO DALL'IDENTITÀ OPERANDO NELLO STESSO MODO

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = {}^tP$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C_2 \to C_2 - 2C_1$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P \longrightarrow \text{non è ortogonale!}$$

CONTROLLO:

$${}^tP \cdot A = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A' !$$

$$A'P = {}^tP \cdot AP = A'' = D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D!$$

$x_1 = y_1 - y_2$
$x_2 = y_2$
↑

$A \to q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ ↗ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$D \to q(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$

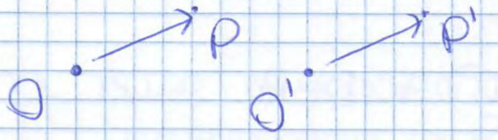
14 Maggio 2012

VETTORI LIBERI

ora ci servono i vettori liberi, non solo quelli applicati in un punto (che trattavamo prima)

Prendiamo tutti i vettori applicati in tutti i punti dello spazio

- 2 vettori sono in relazione quando differiscono solo per il punto di applicazione = relazione di equivalenza



Suddivido il grosso insieme di prima in classi di equivalenza

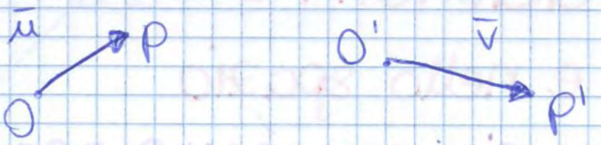
Definizione di vettore libero:

un vettore libero è un classe di equivalenza (un insieme). → è una classe di equipollenza di segmenti orientati dello spazio

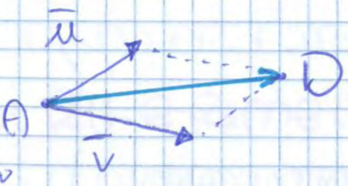
(2 segmenti orientati AB e CD si dicono equipollenti se hanno = direzione, = verso, = lunghezza)

Classe della somma:

vediamo 2 classi:



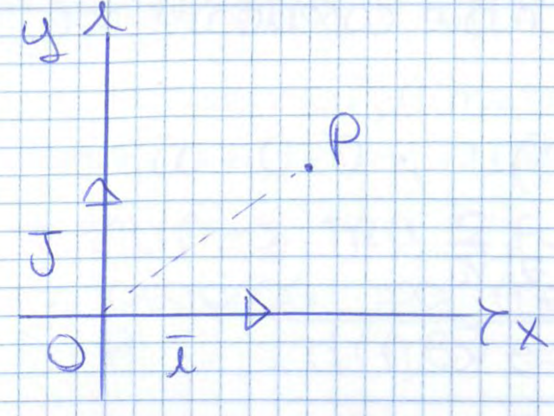
x fare la somma applico 2 classi in uno stesso punto



Il vettore $\vec{AD}$ definisce una classe di equivalenza chiamata $\bar{u}+\bar{v}$.

! è essenziale che la classe non cambia a seconda del punto di applicazione (ex: A)

idem x tutte le altre operazioni!



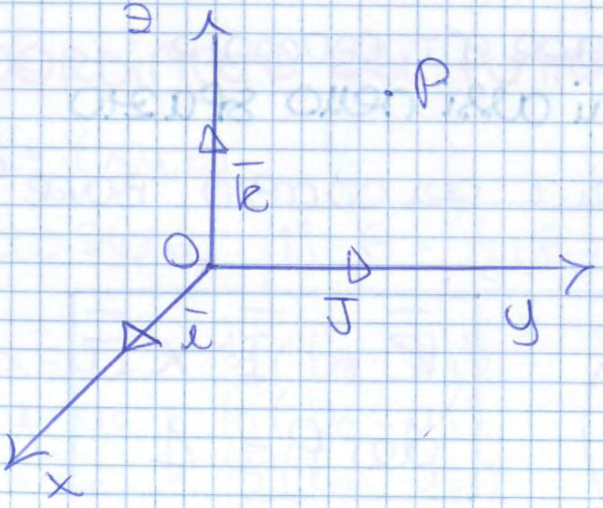
$P - O = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$

(x,y) < COORDINATE DI P
COMPONENTI DI P−O RISPETTO ALLA BASE $B = (\bar{\imath}, \bar{\jmath})$

R = (ORIGINE, BASE ORTONORMALE)

VERSI PRESI XK SE MI MUOVO DA i A j RUOTANDO USO IL VERSO ANTIORARIO

* · NELLO SPAZIO È TU UGUALE MA HO 3 RETTE
· FISSO O
· FISSO UNA BASE ORTONORMALE
· (x,y,z) < COORDINATE DI P
IL VETTORE P−O HA QUESTE COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE ORTONORMALE



SI SCEGLIE $\bar{k}$, VERSO IN SU, COME SE MI USCISSE DALLA TESTA E IO VEDO $\bar{\imath}$ RUOTARE VERSO $\bar{\jmath}$ SEMPRE IN VERSO ANTIORARIO

⟹ $\bar{k} = \bar{\imath} \times \bar{\jmath}$
IL PRODOTTO VETTORIALE DI 2 VERSORI È UN VERSORE

PUÒ CAPITARE DI DOVER FARE DEI CAMBIAMENTI DI BASE:

CAMBIO DI RIFERIMENTO CARTESIANO

⟹ PRENDO UN'ALTRA ORIGINE E PRENDO UN'ALTRA BASE ORTONORMALE

① CAMBIA L'ORIGINE, CIOÈ SCELGO COME NUOVA ORIGINE O' DI COORDINATE (a,b,c)

⟹ TRASLAZIONE DI ASSI

RELAZIONI TRA 2 PUNTI

FISSIAMO UN RIFERIMENTO ORTOGONALE NELLO SPAZIO
FISSIAMO $A=(a_1,a_2,a_3)$ e $B=(b_1,b_2,b_3)$

DISTANZA TRA 2 PUNTI NELLO SPAZIO

LA DISTANZA TRA A e B è IL MODULO DEL VETTORE $B-A$: $d(A,B)=|B-A|$

$$A-O = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$
$$B-O = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$$

$$d(A,B) = |B-A| = |(B-O)-(A-O)| =$$
$$= |(b_1-a_1),(b_2-a_2),(b_3-a_3)| =$$

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$$

NEL PIANO è UGUALE TOLGO SOLO UNA COMPONENTE.

COORDINATE DEL PUNTO MEDIO

$M=(x,y,z)$

CONDIZIONE : $\boxed{M-A=\frac{1}{2}(B-A)}$

$$\begin{cases} x-a_1 = \frac{1}{2}(b_1-a_1) \\ y-a_2 = \frac{1}{2}(b_2-a_2) \\ z-a_3 = \frac{1}{2}(b_3-a_3) \end{cases}$$

$$\boxed{x=\frac{a_1+b_1}{2} \qquad y=\frac{a_2+b_2}{2} \qquad z=\frac{a_3+b_3}{2}}$$

COORDINATE DEL PUNTO MEDIO = SEMISOMMA DELLE COORDINATE DEGLI ESTREMI

P_0 = ORIGINE
$P_0 + \bar{v}$ = PUNTO 1
t = QUANTE VOLTE IL PUNTO 1
P = GENERICO PUNTO

$\Big\}$ $P = P_0 + t\bar{v}$

(t = PARAMETRO che DESCRIVE IL PUNTO SU UNA RETTA)

① RETTA NEL PIANO

$P_0 = (x_0, y_0)$ \ FISSATI
$\bar{v} = (\ell, m)$ /
$P = (x, y)$ — GENERICO

t = PARAMETRO

SCRIVO L'UGUAGLIANZA TRA VETTORI DI PRIMA PASSANDO ALLE COMPONENTI

$$\begin{cases} x - x_0 = \ell t \\ y - y_0 = mt \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA

MEGLIO:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases}}$$

● esempio numerico:

$P_0 = (2, -1)$ LA RETTA PASSA x P
$\bar{v} = (1, 3)$ LA RETTA È // a $\bar{v}$

$P = (x, y) \Rightarrow P - P_0 = t\bar{v}$

$P = (2, -1) + t(1, 3)$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

x OGNI VALORE DI t TROVO PUNTO DELLA RETT

② RETTA NELLO SPAZIO

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\bar{v} = (\ell, m, n)$
$P = (x, y, z)$