NUMERO: 1220

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Geometria Riassunti, Temi, Eserc.

Prof. Massazza_Ceria

Geometria

esercitazione (Massazza)

ORARIO: h. 8,30 - 11,30 AVENIA AULA A-3C

PROF: CERIA
michela.ceria@unito.it
RICEVIMENTO SU APPUNTAMENTO

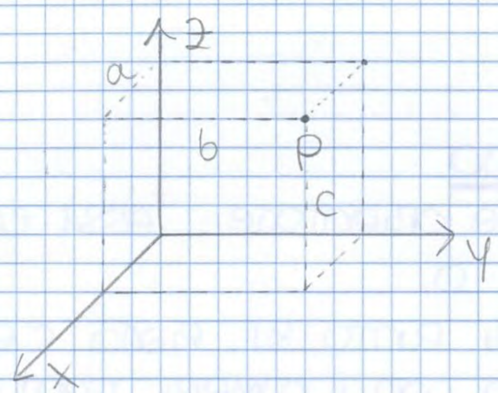
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 488

SPAZIO

- tre rette orientate
- origine O
- corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^3$

$\{\text{punti spazio}\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b,c) \,/\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$(a,b,c) \longleftrightarrow P$

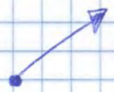


versore = modulo lungo 1

si impone sempre che gli assi siano perpendicolari tra di loro → (esistono anche altri sistemi)

Calcolo vettoriale

vettore :



per trattare con grandezze scalari e vettoriali

- modulo = lunghezza = norma indicata con $\|\vec{v}\|$
- direzione = retta su cui giace
- verso = orientamento del segmento

possono essere ← liberi / applicati / cursori

applicati

dove • è il punto di applicazione

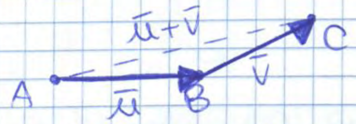
liberi

mi interessa solo com'è fatto, ma non dove si trova

↳ sono uguali (x/c sono liberi)

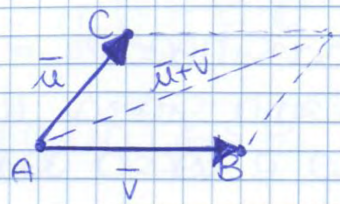
- DIVERSA DIREZIONE:

  - METODO PUNTA-CODA (POLIGONALE)



APPLICO IL 2° VETTORE NELLA PUNTA DEL PRIMO

  - METODO PARALLELOGRAMMA

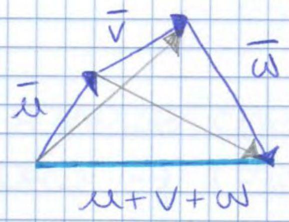


APPLICO I 2 VETTORI NELLO STESSO PUNTO

★ LE PROPRIETÀ DELLA SOMMA (4)

- ASSOCIATIVA (metodo punta-coda)

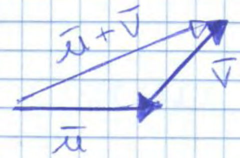
$$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$$



- ESISTE UN ELEMENTO NEUTRO (ZERO) $a+\bar{0}=a$
- OGNI ELEMENTO HA UN ELEMENTO OPPOSTO $a+(-a)=0$
- COMMUTATIVA $a+b=b+a$

- $\|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

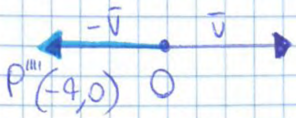
|| NORME ||
| VALORE ASSOLUTO |



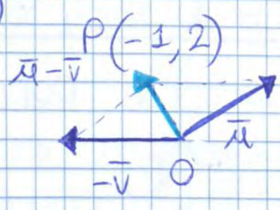
- $\|\bar{u}+\bar{v}\| \geq \big| \|\bar{u}\| - \|\bar{v}\| \big|$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 488

$-\bar{v}$



- $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$

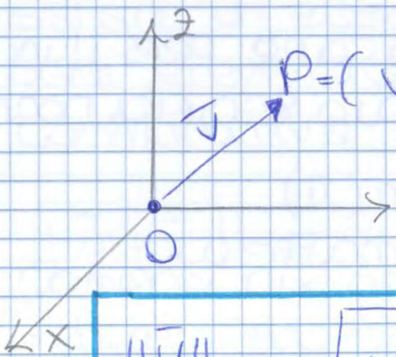


2) Presi $\bar{a}, \bar{b}$ vettori,
sappiamo che $\|\bar{a}\| = 8$, $\|\bar{b}\| = 3$
chiamiamo $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}$ e $\|\bar{r}\|$
troviamo massimo e minimo per $\|\bar{r}\|$

- stessa direzione, verso $=$
  O $\|\bar{r}\| = 11$
- stessa direzione, verso opposto
  O $\|\bar{r}\| = 5$
- direzione diversa? NO!!! sarebbe intermedio

diagonale sempre < 11 e > 5
$\downarrow$ somma lati $\quad \downarrow$ diff lati

Perché non era "un caso"...



$P = (v_x, v_y, v_z) \rightarrow$ componenti del vettore $\bar{v}$
così posso calcolare il modulo

$$\boxed{\|\bar{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

per un versore:

$$\|\bar{v}\| = 1 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \|\bar{v}\|^2$$

condizione x avere un versore

$$vers(\bar{v}) = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$ le sue componenti

sono $vers(\bar{v}) = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \right)$

esercizi

① siano:

$\bar{u} = (1, -2, 5)$
$\bar{v} = (2, 3, 1)$
$\bar{w} = (0, -2, 3)$

quale è vera?

a) $2\bar{u} - \bar{v} + \bar{w} = (1, 2, 4)$

b) $3\bar{u} - 2\bar{v} + 5\bar{w} = (-1, -22, +28)$

c) $\bar{w} + 3\bar{v} = (4, 3, 1)$

d) $-\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = (1, 2, -1)$

ⓐ $2\bar{u} = (2, -4, 10)$
$-\bar{v} = (-2, -3, -1)$
$\bar{w} = (0, -2, 3)$
ⓐ $= (0, -9, 12)$ falsa !!

ⓑ $3\bar{u} = (3, -6, 15)$
$-2\bar{v} = (-4, -6, -2)$
$5\bar{w} = (0, -10, 15)$
ⓑ $= (-1, -22, 28)$ vera !!

ⓒ $3\bar{v} = (6, 9, 3)$
$\bar{w} = (0, -2, 3)$
ⓒ $= (6, 7, 6)$ falsa !!

ⓓ ⓓ $= (1, 3, -1)$ falsa !!

② una particella effettua tre spostamenti consecutivi dati da 3 vettori

ⓐ $\bar{a} = 1{,}5\,\bar{i} + 3\bar{j} - 1{,}2\,\bar{k} = (1{,}5\,;\ 3\,;\ -1{,}2)$
ⓑ $\bar{b} = 2{,}3\,\bar{i} - 1{,}4\,\bar{j} - 3{,}6\,\bar{k} = (2{,}3\,;\ -1{,}4\,;\ -3{,}6)$
ⓒ $\bar{c} = -1{,}3\,\bar{i} + 1{,}5\,\bar{j} = (-1{,}3\,;\ 1{,}5\,;\ 0)$

IL SEGNO DEL PRODOTTO SCALARE DIPENDE DAL COSENO

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \underbrace{\|\bar{u}\|}_{>0}\,\underbrace{\|\bar{v}\|}_{>0}\cos\widehat{\bar{u}\bar{v}} \in \mathbb{R}$$

$\bar{u}\cdot\bar{v} > 0 \iff 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\theta > 0$

$\bar{u}\cdot\bar{v} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ $\quad \cos\theta < 0$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \iff \theta = 0$ $\quad \cos\theta = 1$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = -\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| \iff \theta = \pi$ $\quad \cos\pi = -1$

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$$

$$= \bar{u}\cdot\bar{u} = u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z$$
$$= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = (\|\bar{u}\|)^2$$

$$\boxed{\bar{u}^2 = \|\bar{u}\|^2}$$

$$\bar{u}^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} = \|\bar{u}\|\|\bar{u}\|\cos 0 = \|\bar{u}\|^2$$

PER TROVARE L'ANGOLO:

$$\boxed{\cos\widehat{\bar{u}\bar{v}} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}}$$

* PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

$\forall\ \bar{u},\bar{v},\bar{w} \in V_3, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- P. COMMUTATIVA
  $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$
- P. DI OMOGENEITÀ (ASSOCIATIVA)
  $(a\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(\bar{v}a) = a(\bar{u}\cdot\bar{v})$
- P. DISTRIBUTIVA
  $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$

② TROVARE TUTTI I VERSORI $\perp$ a

ⓐ $\bar{a} = (1,1,2)$ e
ⓑ $\bar{b} = (0,1,-1)$

PRENDIAMO UN VETTORE INCOGNITO $\bar{x} = (x, y, z)$
DEVO APPLICARE LE CONDIZIONI CONTEMPORANEE

$$\begin{cases} \bar{a} \cdot \bar{x} = 0 \\ \bar{a} \cdot \bar{y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3z \\ y = z \end{cases}$$

IL VETTORE $\bar{x}$ DIVENTA $\bar{x} = (-3z, z, z)$
MA DEVE ESSERE UN VERSORE OVVERO
LA NORMA AL QUADRATO DEVE ESSERE $= 1$

$$\bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x}^2 = 1$$

$$9z^2 + z^2 + z^2 = 1$$
$$11z^2 = 1$$
$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}$$

AVRÒ QUINDI 2 VETTORI:

$$\bar{x}_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, +\frac{1}{\sqrt{11}}, +\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$
$$\bar{x}_2 = \left(+\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

③ TROVARE IL PRODOTTO SCALARE DEI 2 VETTORI $\bar{v}$ e $\bar{w}$ SAPENDO CHE:

$$\|\bar{v}\| = 3$$
$$\|\bar{w}\| = 1 \qquad \vartheta = 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cos \frac{\pi}{4} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

④ SAPENDO CHE $\bar{a} = (1,0,0)$, $\bar{b} = (3,0,2)$
TROVARE $\cos \hat{ab} = ?$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (3,0,0)$ $\quad \|\bar{a}\| = \sqrt{1+0+0} = 1$ $\quad \|\bar{b}\| = \sqrt{9+4} = 13$

OPERAZIONI

* PRODOTTO VETTORIALE (o ESTERNO)

SI PUÒ DEFINIRE SOLO NELLO SPAZIO → 3 COMPONENTI!

- $\bar{v}, \bar{w} \neq 0$ 2 VETTORI NON NULLI E NON PARALLELI
  $\bar{v} \nparallel \bar{w}$

$$\bar{v} \times \bar{w} = \bar{v} \wedge \bar{w}$$

MODULO : $\|\bar{v}\times\bar{w}\| = \|\bar{v}\|\,\|\bar{w}\| \operatorname{sen} \widehat{\bar{v}\bar{w}}$

VERSO : REGOLA MANO DESTRA (medio)

DIREZIONE : $\perp$ AL PIANO DI $\bar{v}$ e $\bar{w}$

v = indice
w = medio
v×w = pollice

- $\bar{v} \parallel \bar{w}$ oppure $\bar{v} = 0$ o $\bar{w} = 0$ ⟶ $\bar{v}\times\bar{w} = 0$

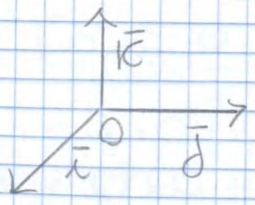
* PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE

- $\bar{v}, \bar{w} \neq 0$

  $\bar{v}\times\bar{w} = 0 \iff \bar{v} \parallel \bar{w}$

  CONDIZIONE DI PARALLELISMO

- $\bar{v}\times\bar{w} = -\bar{w}\times\bar{v}$ ANTICOMMUTATIVO
- $(a\bar{v})\times\bar{w} = a(\bar{v}\times\bar{w}) = \bar{v}\times(a\bar{w})$, $a \in \mathbb{R}$ ass. × il per scalare!
- $\bar{v}\times(\bar{w}+\bar{z}) = \bar{v}\times\bar{w} + \bar{v}\times\bar{z}$ DISTRIBUTIVA
  $(\bar{v}+\bar{w})\times\bar{z} = \bar{v}\times\bar{z} + \bar{w}\times\bar{z}$
- NO ASSOCIATIVA esempio:



$$\bar{i}\times(\bar{i}\times\bar{j}) = \bar{i}\times\bar{k} = -\bar{j}$$
$$(\bar{i}\times\bar{i})\times\bar{j} = \bar{0}\times\bar{j} = 0$$

- $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w} = (\bar{u}\cdot\bar{w})\cdot\bar{v} - (\bar{v}\cdot\bar{w})\bar{u}$!
  $\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w}) = (\bar{u}\cdot\bar{w})\cdot\bar{v} - (\bar{u}\cdot\bar{v})\cdot\bar{w}$

$$\bar{N}\times\bar{V} = \begin{pmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 0&0&1\\1&2&3\end{pmatrix} = \bar i\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix} - \bar j\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix} + \bar k\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix} =$$

$$= \bar i(0-2) - \bar j(0-1) + \bar k(0-0)$$

$$= -2\bar i + \bar j$$ (CAMBIA IL SEGNO! P. ANTICOMMUTATIVA!)

AMPITI

1) TROVARE $\bar x = (x,y,z)$ TALE CHE $\bar a\times\bar x = \bar b$
CON $\bar a = (1,0,-1)$, $\bar b(1,-2,1)$

$$\begin{cases}\bar x = (x,y,z)\\ \bar a = (1,0,-1)\\ \bar b = (1,-2,1)\\ \bar a\times\bar x = \bar b\end{cases}$$

2) SIANO $\bar u = (2,1,-1)$
$\bar v = (1,-1,2)$
$\bar w = (1,-2,1)$

!

TROVARE $\bar x = (x,y,z)$ TALE CHE

$$\bar u\times\bar x + (\bar v\cdot\bar x)\bar w = \bar w$$

VETTORIALE

SCALARE

PER SCALARE

VETTORE

---

1) $\bar a\times\bar x = \bar b$

$$\bar a\times\bar x = \begin{pmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\1&0&-1\\x&y&z\end{pmatrix} = \bar i\begin{pmatrix}0&-1\\y&z\end{pmatrix} - \bar j\begin{pmatrix}1&-1\\x&z\end{pmatrix} + \bar k\begin{pmatrix}1&0\\x&y\end{pmatrix}$$

$$\bar a\times\bar x = \bar i(0+y) - \bar j(z+x) + \bar k(y+0)$$

$$= \bar i y - \bar j(z+x) + \bar k(y)$$

$\bar b = (1,-2,1)$ TEOREMA DI SCOMPOSIZIONE

$$\bar b = \bar i - 2\bar j + \bar k$$

$$\bar i - 2\bar j + \bar k = \bar i y - \bar j(z+x) + \bar k(y) \nearrow$$

$y = 1$

$x = 1$ $\quad \bar x = (1,1,1)$

13 marzo 2012

Operazioni

★ PRODOTTO MISTO

$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \longmapsto \bar{u} \cdot \underbrace{\bar{v} \times \bar{w}}_{\times \text{ prima} = \text{vettore}}$ numero reale

$\cdot$ poi = numero

Come è definito?

- se uno dei vettori è nullo $\rightarrow$ il risultato è zero
  se $\bar{u} = 0 \lor \bar{v} = 0 \lor \bar{w} = 0 \rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = 0$
- se $\bar{v} \parallel \bar{w} \rightarrow$ il risultato è zero
- se $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sono complanari $\rightarrow$ il risultato è zero

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \left[\bar{i} \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} - \bar{j} \begin{pmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{pmatrix} + \bar{k} \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} \right] \cdot \bar{u}$$

$$= \left[v_y w_z - v_z w_y, -v_x w_z + v_z w_x, + v_x w_y - v_y w_x \right] \cdot \bar{u}$$

$$= u_x (v_y w_z - v_z w_y) + u_y (-v_x w_z + v_z w_x) + u_z (v_x w_y - v_y w_x)$$

oppure

$$\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}}$$

★ PROPRIETÀ DEL PRODOTTO MISTO

- scambiando due dei 3 vettori, il prodotto misto cambia segno (prop. dei determinanti)

Condizione di complanarità

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \neq \bar{0}$

e $\bar{v} \not\parallel \bar{w}$, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sono complanari $\Longleftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = 0$

③ $\bar{u} \times 2\bar{v} = 2(\bar{u} \times \bar{v})$

applicazione di $\bar{u} \times (a\bar{v}) = a(\bar{u} \times \bar{v})$

④ $\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w}$

$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$

$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$\bar{w} = (w_x, w_y, w_z)$

$$\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \bar{w} \cdot (u_y v_z - u_z v_y, -u_x v_z + u_z v_x, u_x v_y - u_y v_x) = w_x(u_y v_z - u_z v_y) + w_y(-u_x v_z + u_z v_x) + w_z(u_x v_y - u_y v_x) = u_y v_z w_x - u_z v_y w_x - u_x v_z w_y + u_z v_x w_y + u_x v_y w_z - u_y v_x w_z =$$

RACCOLGO IN MODO DIVERSO

$$= u_x(-v_z w_y + v_y w_z) + u_y(-v_x w_z + v_z w_x) + u_z(-v_y w_x + v_x w_y)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = \bar{u} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = \bar{u}(v_y w_z - v_z w_y, -v_x w_z + v_z w_x, v_x w_y - v_y w_x) =$$

$$= u_x(v_y w_z - v_z w_y) + u_y(v_z w_x - v_x w_z) + u_z(v_x w_y - v_y w_x)$$

e sono uguali!!! vera

⑤ $\bar{u} \times \bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{v} \times \bar{u} \cdot \bar{w}$

$(\bar{u} \times \bar{v})\bar{w} = (-\bar{v} \times \bar{u}) \cdot \bar{w} = -(\bar{v} \times \bar{u} \cdot \bar{w})$

falsa — anticommutativa — relazione tra prodotto per scalare e prodotto

⑥ $\bar{u}^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}$ vera per definizione

③ Dati $\bar{u} = (2, -1, \frac{1}{2})$, $\bar{v} = (\frac{1}{2}, 1, 1)$, $\bar{w} = (2, -4, -2)$ quale è vera?

ⓐ $\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = 0$ — falsa — ∇ 0

ⓑ $((\bar{u} - 2\bar{v}) \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\frac{27}{2}, 2, \frac{19}{2})$ — vera

ⓒ $\bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{w}$ — falsa

ⓓ $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{v} \times \bar{w}$ — falsa

COMPITO

1) TROVARE $\boxed{\text{TUTTI}}$ I VETTORI $\bar{x}$ TALI CHE

$$\bar{x} \cdot (\bar{k} \times \bar{v}) = 3$$

DOVE $\bar{k} = (0,0,1)$

$\bar{v} = (3,6,2)$

$$\bar{x} \cdot (\bar{k} \times \bar{v}) = \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \bar{x} \cdot \left[\bar{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \bar{j} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \bar{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \bar{x} \cdot \left[\bar{i}(-6) - \bar{j}(-3) + \bar{k}(0) \right] = \bar{x} \cdot \left[-6\bar{i} + 3\bar{j} \right]$$

$$= (x,y,z) \cdot (-6,3,0) = (-6x, 3y, 0)$$

$$\begin{cases} -6x = 3 \\ 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

- QUANDO $\|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}-\bar{b}\|$ SI HA UN QUADRATO (diagonali del rombo sono $\perp$ e $=$)

(3) SIANO $\bar{v}, \bar{w}$ 2 VETTORI, PROVARE che:

- $\bar{v}\bar{w} = \frac{1}{4}\left[(\bar{v}+\bar{w})^2 - (\bar{v}-\bar{w})^2\right]$
- DEDURRE che UN PARALLELOGRAMMA è UN RETTANGOLO SE E SOLO SE LE DIAGONALI SONO UGUALI

$\rightleftarrows$

$$(\bar{v}+\bar{w})^2 = (\bar{v}+\bar{w})(\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{v}+\bar{w})\cdot\bar{v} + (\bar{v}+\bar{w})\cdot\bar{w}$$
$$= \bar{v}\cdot\bar{v} + \bar{w}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{w} + \bar{w}\cdot\bar{w} = \rightarrow \text{DISTRIBUTIVA 2 VOLTE}$$
$$= \bar{v}^2 + \bar{w}^2 + 2\bar{v}\bar{w} \rightarrow \text{IL PRODOTTO SCALARE COMMUTA}$$

$$\boxed{(\bar{v}+\bar{w})^2 = \bar{v}^2 + 2\bar{v}\bar{w} + \bar{w}^2}$$

$$(\bar{v}-\bar{w})^2 = (\bar{v}-\bar{w})(\bar{v}-\bar{w}) \ldots$$
$$= \bar{v}^2 - 2\bar{v}\bar{w} + \bar{w}^2$$

$$\bar{v}\bar{w} = \frac{1}{4}\left[\cancel{v^2} + 2\bar{v}\bar{w} + \cancel{w^2} - \cancel{v^2} + 2\bar{v}\bar{w} - \cancel{w^2}\right] = \frac{1}{4}\left[(\bar{v}+\bar{w})^2 - (\bar{v}-\bar{w})^2\right]$$

$$\bar{v}\bar{w} = \frac{1}{4} 4\bar{v}\bar{w} = \bar{v}\bar{w}$$

$\bar{v}+\bar{w}$ e $\bar{v}-\bar{w}$ SONO LE DIAGONALI DI UN PARALLELOGRAMMA DI LATI $\bar{v}$ e $\bar{w}$

SE ABBIAMO UN RETTANGOLO ALLORA $\bar{v} \perp \bar{w} \Rightarrow \bar{v}\bar{w} = 0$! ALLORA anche:

$$\frac{1}{4}\left[(\bar{v}+\bar{w})^2 - (\bar{v}-\bar{w})^2\right] = 0 \quad \text{è UGUALE A ZERO}$$

$$(\bar{v}+\bar{w})^2 - (\bar{v}-\bar{w})^2 = 0$$
$$(\bar{v}+\bar{w})^2 = (\bar{v}-\bar{w})^2$$
$$\|\bar{v}+\bar{w}\|^2 = \|\bar{v}-\bar{w}\|^2$$
$$\rightarrow \|\bar{v}+\bar{w}\| = \|\bar{v}-\bar{w}\|$$

CON UN RETTANGOLO LE DIAGONALI SONO UGUALI ($\longrightarrow$)

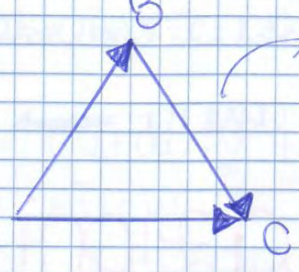
DENTRO UN PARALLELEPIPEDO CI SONO 6 TETRAEDRI

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\,|\bar{u}\cdot\bar{v}\times\bar{w}| = \text{VOLUME DEL TETRAEDRO}}$$

ESERCIZI

1) A, B, C VERTICI DI UN TRIANGOLO EQUILATERO DI AREA 1.
QUALE È VERO?

F ⓐ $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$
F ⓑ $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{CA}$
F ⓒ $\overline{AB}\times\overline{BC} = \overline{CA}$
V ⓓ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA} = \bar{0}$



SCOPRO VERSO VETTORI DA $\overline{AC}$ NO $\rightarrow$ $\overline{CA}$ ECC!

ⓐ FALSA: NON CI SONO LATI $\perp$ TRA LORO!
$\overline{AB}\,\overline{BC} = 0 \rightarrow \overline{AB}\perp\overline{BC}$

ⓑ FALSA: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ I LATI DI UN TRIANGOLO EQUILATERO SONO UGUALI! VEDO CON PUNTA CODA

$\rightarrow -\overline{CA} = \overline{AC}$

ⓒ $\overline{AB}\times\overline{BC} = \overline{CA}$: FALSA
IL PRODOTTO VETTORIALE ESCE DAL PIANO

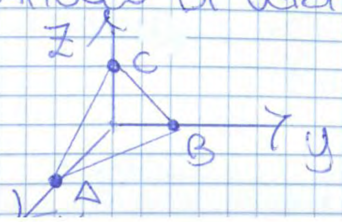
ⓓ VERA: $\underbrace{\overline{AB}+\overline{BC}}_{-\overline{CA}}+\overline{CA} = \bar{0}$

$-\overline{CA}+\overline{CA} = \bar{0}$

2) DATI $A = (1,0,0)$
$B = (0,1,0)$
$C = (0,0,1)$
PUNTI DELLO SPAZIO
VERSORI (FONDAMENTALI)

QUALE È CORRETTA?

a) A, B, C SONO ALLINEATI F
b) IL TRIANGOLO DI VERTICI A, B, C È EQUILATERO V
c) IL C È IL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO $\overline{AB}$ F
d) IL TRIANGOLO DI VERTICI A, B, C È RETTANGOLO F



20 MARZO 2012

CONDIZIONI di PARALLELISMO

TEORIA

$\bar{v} = \overline{OP}$

$\bar{w} = \overline{OQ}$ $\qquad \bar{v}, \bar{w} \neq 0$

- $\bar{v} \parallel \bar{w}$ se:

1) $\exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;/\; \bar{w} = t\bar{v}$ (DAPPERTUTTO)

QUANDO $\bar{v} \parallel \bar{w}$, $\bar{w} = t\bar{v}$, $t \neq 0$ (SONO PROPORZIONALI)

$t \begin{cases} \dfrac{\|\bar{w}\|}{\|\bar{v}\|} & \text{se } \bar{v}, \bar{w} \text{ HANNO LO STESSO VERSO} \\ -\dfrac{\|\bar{w}\|}{\|\bar{v}\|} & \text{se } \bar{v}, \bar{w} \text{ HANNO VERSO OPPOSTO} \end{cases}$

OVVIAMENTE $\bar{w} = t\bar{v} \longleftrightarrow \bar{v} = \dfrac{1}{t}\bar{w}$

se $\bar{v} \parallel \bar{w} \longrightarrow O, P, Q$ SONO ALLINEATI

2) $\bar{v} \times \bar{w} = \bar{0}$ (SOLO NELLO SPAZIO → 3 COMPONENTI)

3) $\bar{v} = (v_x, v_y)$ (SOLO NEL PIANO → 2 COMPONENTI)
$\bar{w} = (w_x, w_y)$

$v_x w_y - v_y w_x = 0 \iff \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} = 0$

ESERCIZI

1) DATI $\bar{v} = (2,3,7)$ e $\bar{w} = (4,6,14)$. $\bar{v}$ é $\parallel \bar{w}$?

$\bar{w} = 2\bar{v}$

$t = 2 = \dfrac{\|w\|}{\|v\|} = \dfrac{\sqrt{16+36+196}}{\sqrt{4+9+49}} = \dfrac{\sqrt{248}}{\sqrt{62}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{248}^{\cancel{124}\,4}}{\cancel{62}_{\cancel{31}\,1}}} = \sqrt{4} = 2$

(SI) SONO $\bar{v} \parallel \bar{w}$.

④ DATI $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$ e $\bar{w} = \bar{j} + \bar{k}$.
QUALE È VERA?

ⓐ $\bar{v} \perp \bar{w}$

ⓑ $\bar{v}, \bar{w}$ VERSORI

ⓒ $\bar{v}, \bar{w}$ FORMANO UN ANGOLO DI π

ⓓ $\bar{v}, \bar{w}$ FORMANO UN ANGOLO DI $\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} \bar{v} = (1, 1, 0) \\ \bar{w} = (0, 1, 1) \end{cases}$$

ⓐ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$?

$\bar{v} \cdot \bar{w} = 0 + 1 + 0 = 1 \neq 0$

FALSA

ⓑ $\bar{v}, \bar{w}$ VERSORI

$1 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$1 = 1 + 1$

$1 \neq 2$

FALSA

$1 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2$

$1 = 0 + 1 + 1$

$1 \neq 2$

ⓒ $\alpha = \pi$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|} = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

ⓒ FALSA

ⓓ VERA

$$\cos \hat{vy} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \hat{vz} = \frac{0}{\|\bar{v}\|} = 0$$

② SIANO a, b, c I COSENI DIRETTORI DI UN VETTORE $\bar{v}$.
MOSTRARE CHE $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

LA SOMMA DEI COSENI DIRETTORI DI UN VETTORE NELLO SPAZIO È UGUALE A 1

$$a = \cos \hat{\bar{v}x} = \frac{v_x}{\|\bar{v}\|}$$

$$b = \frac{v_y}{\|\bar{v}\|}$$

$$c = \frac{v_z}{\|\bar{v}\|}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{v_x^2}{\|\bar{v}\|^2} + \frac{v_y^2}{\|\bar{v}\|^2} + \frac{v_z^2}{\|\bar{v}\|^2} =$$

$$= \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\|\bar{v}\|^2} = \frac{\cancel{\|\bar{v}\|^2}}{\cancel{\|\bar{v}\|^2}} = 1$$

SPAZI VETTORIALI

$\mathbb{K}$ = CAMPO

SUL CAMPO $\mathbb{K}$ SI DEFINISCE $\bar{V}$ = SPAZIO VETTORIALE CON $+ \cdot$ SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE DEFINITI IN QUALUNQUE MODO AFFINCHÉ VALGANO LE OTTO PROPRIETÀ

$\emptyset$ L'INSIEME VUOTO NON È UNO SPAZIO VETTORIALE

$\{\bar{0}\}$ L'INSIEME CHE CONTIENE SOLO ZERO È UNO SPAZIO VETTORIALE

- ASSOCIATIVA

$\lambda \boxdot (\beta \boxdot x) = \lambda \boxdot (\sqrt[3]{\beta}\, x) = \sqrt[3]{\lambda}\,(\sqrt[3]{\beta}\, x) =$

$= \sqrt[3]{\lambda\beta}\, x = \lambda\beta \boxdot x$

- ELEMENTO NEUTRO (1)

$1 \boxdot x = \sqrt[3]{1}\, x = x$

- DISTRIBUTIVA

$(\lambda+\beta) \boxdot x = \sqrt[3]{\lambda+\beta}\, x = \sqrt[3]{\lambda x^3 + \beta x^3} =$

$= \sqrt[3]{\lambda}\, x \boxplus \sqrt[3]{\beta}\, x = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\beta \boxdot x)$

- DISTRIBUTIVA

$\lambda \boxdot (x \boxplus y) = \lambda \boxdot \sqrt[3]{x^3+y^3} = \sqrt[3]{\lambda}\,\sqrt[3]{x^3+y^3} =$

$= \sqrt[3]{\lambda x^3 + \lambda y^3} = \sqrt[3]{\lambda}\, x \boxplus \sqrt[3]{\lambda}\, y =$

$= (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$

è uno spazio vettoriale!

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$V = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$

$(x,y) \boxplus (z,t) = (x+z+1,\; y+t-2)$

$\lambda \boxdot (x,y) = (\lambda x + \lambda - 1,\; \lambda y - 2\lambda + 2)$

$\forall (x,y), (z,t) \in \mathbb{R}^2, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

verificare che non è uno spazio vettoriale.
(se una sola non funziona, non è uno spazio vettoriale)

verifico distributiva

$(\lambda+\beta) \boxdot (x,y) = \big((\lambda+\beta)x + (\lambda+\beta) - 1,\; (\lambda+\beta)y +$

$- 2(\lambda+\beta) + 2 \big) = \big(\lambda x + \beta x + \lambda + \beta - 1,\; \lambda y + \beta y +$

$- 2\lambda - 2\beta + 2 \big) = \big(\lambda(x+1) + \beta(x+1) - 1,\; \lambda(y-2) +$

3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}$

$x \boxplus y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$ $\qquad \forall x, y \in V = \mathbb{R}$

$\lambda \boxdot y = \lambda y$ $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} = \mathbb{K}$

è uno spazio vettoriale?

$(\lambda + \beta) \boxdot x = \lambda x + \beta x$

$\lambda x \boxplus \beta x = \sqrt[5]{\lambda^5 x^5 + \beta^5 x^5} = x \sqrt[5]{\lambda^5 + \beta^5}$

non funziona! non è uno spazio vettoriale!

4) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}^2$

V è un K - spazio vettoriale?

non è detto! dipende dalle operazioni!!!

MATRICI

$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

$\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

ESERCIZI

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}^{2,2}$

verificare se $\exists \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

faccio il prodotto per scalare e la somma

$$\begin{pmatrix} \lambda + 0 & 0 - \beta \\ 0 & \lambda + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

SOTTOSPAZI

$\mathbb{K}$ = CAMPO $\quad V$ = SPAZIO VETTORIALE

$W \subseteq V$

W è un SOTTOSPAZIO se è uno SPAZIO VETTORIALE RISPETTO ALLE RESTRIZIONI DELLE OPERAZIONI DI V

PER VERIFICARE SE È UNO SOTTOSPAZIO: (2 MODI)

- $\bar{v}, \bar{w} \in W \Rightarrow \bar{v}+\bar{w} \in W$
  $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda\bar{w} \in W, \bar{w} \in W$ • $0 \in W$
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall \bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$
  $\lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 \in W$

ESERCIZI

1) SIA DATO $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ (CON LE USUALI OPERAZIONI) } V è uno SPAZIO VETTORIALE

QUALI SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI?

a) $W_1 = \{(0,0,0)\}$

b) $W_2 = \{(x,y,z) / x-2y+z=1\}$

c) $W_3 = \{(x,y,z) / x+y-5z=0, 2(x+y)=0$

d) $W_4 = \{(t,t,t) / 0 \le t \le 1\}$

a) $\boxed{\text{SI}}$ PERCHÉ $W_1 = \langle \bar{0} \rangle = \mathcal{L}(\bar{0}) = \{\bar{0}\}$ è UNO SPAZIO DELLE COMBINAZIONI LINEARI DEL VETTORE NULLO

b) $\boxed{\text{NO}}$ PERCHÉ W_2 NON CONTIENE IL VETTORE NULLO, E PERCHÉ È UN'EQUAZIONE LINEARE NON OMOGENEA (1)

$x=0, y=0, z=0$ NON RISOLVE L'EQUAZIONE $1=0$

TERMINE NOTO = 1

OPERAZIONE con i SOTTOSPAZI

$\mathbb{K}$, W SPAZIO VETTORIALE

$U, V \subseteq W$ SOTTOSPAZI

INTERSEZIONE

$U \cap V$

SOMMA

$U + V = \{ \bar{v} + \bar{u} \;/\; \bar{u} \in U, \bar{v} \in V \}$

SOMMA DIRETTA

$U \oplus V \rightarrow \bar{u} + \bar{v}$ SCRITTO IN MODO UNICO

CRITERIO

$U + V = U \oplus V \iff U \cap V = \{ \bar{0} \}$ SOLO SE HO 2 SPAZI!!

ESEMPIO DEL CRITERIO: QUANDO NON VALE

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$V_1 = \{ (x,0) \;/\; x \in \mathbb{R} \}$

$V_2 = \{ (x,x) \;/\; x \in \mathbb{R} \}$

$V_3 = \{ (0,y) \;/\; y \in \mathbb{R} \}$

SONO 3 SOTTOSPAZI (VERIFICO SE VOGLIO)

$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{ (0,0) \}$ $\longrightarrow$ MA LA SOMMA NON È DIRETTA!

NO STESSO VETTORE DI $V_1 + V_2 + V_3$ SI PUÒ SCRIVERE IN MODI DIVERSI, LA SCRITTURA NON È UNICA!

$(2,2) = (1,0) + (0,1) + (1,1) =$

$= (3,0) + (-1,-1) + (0,3)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 488

$* \ \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}A + \cancel{\frac{1}{2}}A^t + \frac{1}{2}A - \cancel{\frac{1}{2}}{}^tA =$
$= A$

OVVERO A PUÓ ESSERE SCRITTO COME

$\frac{1}{2}$(cosa simmetrica) + $\frac{1}{2}$(cosa antisimm)

ORA HO BISOGNO DELLA SOMMA DIRETTA $\oplus$

PER FAR VEDERE CHE LA SOMMA È DIRETTA, CONSIDERO L'INTERSEZIONE $\cap$:

CHI È $S(\mathbb{R}^{n,n}) \cap A(\mathbb{R}^{n,n}) = ?$

A tale che $\left\{ \begin{array}{l} A = {}^tA \\ A = -{}^tA \end{array} \right\}$ ovvero ${}^tA = -{}^tA$

esempio: $A = (a_{ij})$

${}^tA = (a_{ji}) = (-a_{ji}) = -A^t$

$a_{ji} = -a_{ji}$

TUTTI GLI ELEMENTI DEVONO X FORZA ESSERE TUTTI NULLI!!!

$$S(\mathbb{R}^{n,n}) \cap A(\mathbb{R}^{n,n}) = \{0\}$$

QUINDI LA SOMMA È DAVVERO DIRETTA

QUINDI $\mathbb{R}^{n,n} = S(\mathbb{R}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{R}^{n,n})$ È VERA!!!

ESERCIZIO

① DATI $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$

$U = \mathcal{L}((1102, 2310))$

$W = \mathcal{L}((0114, 1322))$

TROVARE UNA BASE E LA DIMENSIONE DI $U \cap W$

ESSENDO $\mathcal{L}$ ... ABBIAMO I GENERATORI!

DOBBIAMO VEDERE CHE SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI!

$$\begin{cases} \cancel{4\delta = 4\delta} \\ \lambda = -\delta \\ \beta = \lambda + 2\delta \\ \alpha = 2\lambda + \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{2\delta = 2\delta} \\ \lambda = -\delta \\ \beta = \delta \\ \alpha = -\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{\delta = \delta} \\ \lambda = -\delta \\ \beta = \delta \\ \alpha = -\delta \end{cases}$$

$$\bar{v} = \bar{u} = (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \beta, 2\alpha)$$
$$= (\delta, 2\delta, \delta, -2\delta) \qquad \delta \in \mathbb{R}$$
$$= \delta(1, 2, 1, -2) \qquad \delta \in \mathbb{R}$$
$$= \mathcal{L}(1, 2, 1, -2) = U \cap W$$

$U \cap W$ è generato da un solo vettore non nullo, allora è linearmente indipendente ed è anche una base (xk sapevo già che era un generatore)

Dimensione = numero degli elementi della base = 1

POLINOMI = vettori ⇓

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

→ insieme dei polinomi nella variabile x

$V = \mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale con somma $f+g$ e prodotto αf

Sottospazio di $\mathbb{K}[x]$:

$W = \mathbb{K}_n[x]$ insieme di tutti i polinomi nella variabile x di grado $\leq n$

esempio:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_2[x] \rightarrow ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

verifico il grado
- del prodotto (ovvio)
- della somma ?

27 MARZO 201

POLINOMI

$K[x]$

la base $(1, x, x^2 \dots)$
non è finitamente generato

$1 = x^0$

$K_r[x]$

la base $(1, x, x^2, \dots x^r)$
è finitamente generato

$\dim K_R[x] = r+1$

ESERCIZIO:

1) consideriamo $\mathbb{R}_2(t)$, quali dei seguenti sono
 • L.I, • basi, • generatori dello spazio?

a) $A = \{1+t,\ 2t+t^2,\ 1+3t+t^2\}$

$\dim \mathbb{R}_2(t) = 3$

b) $B = \{2t+1,\ 3+t^2,\ 1+t+t^2\}$

c) $C = \{3-2t-t^2,\ 2-t+t^2\}$

d) $D = \{3-2t+t^2,\ 5+t,\ 2-3t-t^2,\ 2+4t^2\}$

i polinomi devono stare in $\mathbb{R}^2$ (mai grado 3)

a) L.I. → combinazione lineare = 0

$a(1+t) + b(2t+t^2) + c(1+3t+t^2) = 0 = 0_{\mathbb{R}^2[t]}$

$a + at + 2bt + bt^2 + c + 3ct + ct^2 = 0$

$t^2(b+c) + t(a+2b+3c) + (a+c) = 0$

$\begin{cases} b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ \longrightarrow \\ a=-c \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ -c-2c+3c=0 \\ a=-c \end{cases} \quad \begin{cases} b=-c \\ 0c=0 \\ a=-c \end{cases}$

sono L.D. xké $\forall c$ abbiamo una soluzione

le componenti non sono proporzionali →
sono L.I.
non sono una base xk sono solo 2.

) la dimensione è 3.
allora 4 vettori sono L.D. quindi non sono
una base, e non sono un sistema di generatori.

MEMORIZZO

$\bar{V}, \mathbb{K}$

$\dim \bar{V} = n$ = numero elementi di una base qualsiasi

$\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m \in \bar{V}$

- se scopriamo che $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ sono L.I $\Rightarrow$ allora $m \leq n$
- se $m > n$, allora $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ sono L.D.
- se $\bar{V}$ è lo spazio delle C.L di $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$
  $\bar{V} = \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)$ allora $\Rightarrow m \geq n$
- se $m < n$, allora $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ non generano $\bar{V}$.

un insieme libero è più piccolo o uguale a una base

un sistema di generatori è più grande o uguale a una base

$\dim \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) < 4 \Rightarrow \neq \mathbb{R}^4$

falsa

c) $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = (0, 1, -1, 0)$

$\bar{v}_3 - \bar{v}_4 = (0, 1, -1, 0)$

questo vettore è C.L. di entrambi, quindi sta nell' $\cap$

sennò

$(a, a, 0, 0) + (b, 0, b, 0) = (0, c, 0, c) + (0, 0, d, d)$

$(a+b, a, b, 0) = (0, c, d, c+d)$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=c \\ b=d \\ c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-a \\ a=c \\ d=-a \\ c=-d \end{cases} \quad \begin{cases} b=-a \\ c=a \\ d=-a \end{cases}$$

falsa

d) $(0, 1, -1, 0)$ sta nell' $\cap$

uso la formula di Grassmann

$$\boxed{\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V}$$

$\dim \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 2$ xk non hanno le componenti in proporz → sono L.I.

$\dim \mathcal{L}(\bar{v}_3, \bar{v}_4) = 2$

$\dim \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = 3$ non può essere 1, 4 .. non può essere 2 ...

- 0 non può essere
- 1 perché già v_1 e v_2 sono L.I.
- 2 xk coinciderebbe con uno dei 2, visto che $\bar{v}_4 \notin \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$
- 4 visto nella b)

uso formula:

$3 = 2 + 2 - \dim U \cap V$

$\dim U \cap V = 1 = \dim(\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(v_3, v_4))$

$$\begin{cases} 2a+2b=0 \\ 3a+b=2 \\ a-b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

A_3 LA TOLGO! XK È C.L. DELLE PRECEDENTI!

una BASE È (A_1, A_2) E LA DIM È 2

- $A = \mathcal{L}(A_1, A_2)$
- $\dim A = 2$
- PRENDO $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = x A_1 + y A_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3x \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & y \\ 0 & -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y & 3x+y \\ 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x+y=1 \\ x-y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y-4+2y=3 \\ 3y-6+y=1 \\ x=y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{y=\frac{7}{4}} \\ y=\frac{7}{4} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{componenti}$$

COMPONENTI (RISPETTO ALLA MIA BASE CHE HO TROVATO!)
BASE (A_1, A_2) DI A

METODO del COMPLETAMENTO

DA UN INSIEME LIBERO

$\mathbb{K}$, V FINITAMENTE GENERATO

$\forall$ INSIEME LIBERO (= L.I) ORDINATO DI ELEMENTI DI V È CONTENUTO IN UNA BASE

$L = \{\bar{w}_1, \dots \bar{w}_h\}$ CI AGGIUNGO LA BASE CANONICA E PROCEDO CON IL METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

v_1, v_2 + VETTORI BASE CANONICA

$(0,1,-1,0), (2,0,-2,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$

TROPPI! USO IL METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI!

$\bar{v}_2, \bar{v}_1$ LI POSSO TENERE

$$e_1 = (1,0,0,0) = a(0,1,-1,0) + b(2,0,-2,1)$$
$$(1,0,0,0) = (0,a,-a,0) + (2b,0,-2b,b)$$
$$(1,0,0,0) = (2b, a, -a-2b, b)$$

$$\begin{cases} 2b = 1 \\ a = 0 \\ -a-2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases} \quad \emptyset \text{ INCOMPATIBILI}$$

e_1 LO TENGO! XK NON È COMBINAZIONE LINEARE DI v_1, v_2.
e_1 È L.I.

$$e_2 = (0,1,0,0) = a e_1 + b v_2 + c v_1$$
$$= a(1,0,0,0) + b(2,0,-2,1) + c(0,1,-1,0)$$
$$= (a,0,0,0) + (2b,0,-2b,b) + (0,c,-c,0)$$
$$= (2b+a, c, -2b-c, b)$$

$$\begin{cases} 2b+a = 0 \\ c = 1 \\ -2b-c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \quad \emptyset \text{ INCOMPATIBILI}$$

e_2 TENGO! XK NON È COMBINAZIONE LINEARE DI e_1, v_2, v_1.
e_2 È L.I.

MI FERMO! HO 4 VETTORI, MI BASTANO!

(v_1, v_2, e_1, e_2) È UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$ (dim 4)

[VERIFICO e_3, e_4 SONO L.DIP.]

$(-k, 0, -k, 1) = (2b - ck, a + c, -a - 2b - ck, b)$

$$\begin{cases} 2b - ck = -k \\ a + c = 0 \\ -a - 2b - ck = -k \\ b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - ck + k = 0 \\ a = -c \\ c - 2 - ck + k = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

metto il c qui

$$\begin{cases} c = \dfrac{2+k}{k} = \dfrac{2}{k} + 1 \\ a = -\dfrac{2}{k} - 1 \end{cases} \qquad \frac{2}{k} + 1 - 2 - 2 - \cancel{k} + \cancel{k} = 0 \qquad b = 1$$

$k = 2/3$

soluzione solo se $k = \dfrac{2}{3}$

$v_1\ v_2\ w_1\ w_2$ sono:

LD se $k = \dfrac{2}{3}$

LI se $k \neq \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow \dim(V+W) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 2/3 \\ 4 & \text{se } k \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

GRASSMANN:

$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$

$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W)$

$$\dim(V \cap W) = \begin{cases} 2+2-3 \ (\text{se } k = \tfrac{2}{3}) = 1 \\ 2+2-4 \ (\text{se } k \neq \tfrac{2}{3}) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

non è commutativo!!

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO RxC

ASSOCIATIVA

$(AB)C = A(BC)$

DISTRIBUTIVA (2)

$(A+B)C = AC + BC$ (SX)

$A(B+C) = AB + AC$ (DX)

CON PRODOTTO SCALARE

$a(AB) = (aA)B = A(aB)$

TRASPOSTA

$AB = {}^tB\,{}^tA$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$B \in \mathbb{K}^{n,p}$

$m \neq p$

${}^tA \in \mathbb{K}^{n,m}$

${}^tB \in \mathbb{K}^{p,n}$

non posso più matricare

ci sono i IDEMPOTENTI

$\exists A \neq I, O \; / \; A^2 = A$

esiste una matrice diversa da quella identica o quella nulla il cui quadrato è uguale a se stesso.

non si può più:

$$\left.\begin{aligned} AB &= AC \\ AB - AC &= 0 \\ \cancel{A}(B-C) &= 0 \\ B - C &= 0 \\ B &= C \end{aligned}\right\} \text{NO}$$

no la legge di cancellazione

ESERCIZIO

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ moltiplico:

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☆ ci sono i NILPOTENTI (propri):

$A \,/\, \exists n \in \mathbb{N},\ A^n = 0$ (uno o più n)

(zero sempre) sono sempre degli ZERODIVISORI!!!

ESERCIZIO

1) verifico che A è nilpotente

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+2 \\ -1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

GUARDO C_{1J} OVVERO LA PRIMA RIGA DI C

$$C_{1J} = a_{11}b_{1J} + a_{12}b_{2J} + a_{13}b_{3J}$$

OVVERO I 2 ELEMENTI SONO:

$$C_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \qquad (J=1)$$

$$C_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \qquad (J=2)$$

B_1: PRIMA RIGA DI B $\qquad$ B_2: SECONDA RIGA DI B $\qquad$ B_3: TERZA RIGA DI B

$$C_{1J} = a_{11}(b_{11}, b_{12}) + a_{12}(b_{21}, b_{22}) + a_{13}(b_{31}, b_{32})$$

$$= (C_{11}, C_{12})$$

LA PRIMA RIGA DI C è LA C.L. DELLE RIGHE DI B CON COEFFICIENTI LA PRIMA RIGA DI A.

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ 5} \\ 0 \ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{PRIMA RIGA DI C}$$

$$(1,5) = 1(1,1) + 0(0,1) + 2(0,2)$$

PRIMA RIGA DI A $\qquad$ RIGHE DI B

ESERCIZI

① TROVARE LE MATRICI $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ / $XA = 0$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

una matrice tale che $XA = 0$ è anche tale che $AX = 0$?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 488

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 2x-2z & 2y-2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = XA = \begin{pmatrix} x+2y & -x-2y \\ z+2t & -z-2t \end{pmatrix}$$

$$AX = XA$$

$$\begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 2x-2z & 2y-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & -x-2y \\ z+2t & -z-2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x}-z = \cancel{x}+2y \\ y-t = -x-2y \\ 2x-2z = z+2t \\ 2y-\cancel{2t} = -z-\cancel{2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -2y \\ t = x+3y \\ \cancel{2x+4y = -2y+2x+6y} \\ \cancel{z = -2y} \end{cases}$$

$$z = -2y$$
$$t = x+3y$$

la matrice è

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+3y \end{pmatrix} \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

COMPITO

trovare tutte le matrici $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ / $AXA = X$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix}$$

$$AXA = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z+2y+4t & 2x+4z+y+2t \\ 2x+z+4y+2t & 4x+2z+2y+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x}+2z+2y+4t = \cancel{x} \\ 2x+4z+\cancel{y}+2t = \cancel{y} \\ 2x+\cancel{z}+4y+2t = \cancel{z} \\ 4x+2z+2y+\cancel{t} = \cancel{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -z-2t \\ x = -2z-t \\ -4z-\cancel{2t}-4z-8t+\cancel{2t} = 0 \\ -8z-4t+\cancel{2z}-\cancel{2z}-4t = 0 \end{cases}$$

INVERTIBILITÀ delle MATRICI

PRENDO A MATRICE QUALSIASI:

- A è INVERTIBILE a DX se c'è un'altra matrice tale che $AB = I$
- A è INVERTIBILE a SX se $\exists B \,/\, BA = I$

PRENDO A matrice QUADRATA:

- A è INVERTIBILE sia a DX che a SX se $\exists B \,/\, AB = BA = I$

(I: matrice IDENTICA: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0\,1 \end{pmatrix}$)

esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cerchiamo l'inversa a DX:

$X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & w & h \end{pmatrix}$

$$AB = \underset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{(2,3)}{\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & w & h \end{pmatrix}} = \underset{(3,3)}{\begin{pmatrix} x+t & y+w & z+h \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

PER QUESTO ZERO, LA MATRICE NON SARÀ MAI IDENTICA I, QUINDI A NON È INVERTIBILE A DX

cerchiamo l'inversa a SX:

$$BA = \underset{(2,3)}{\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & w & h \end{pmatrix}} \underset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{(2,2)}{\begin{pmatrix} x+2y & x \\ t+2w & t \end{pmatrix}} = I$$

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ x = 0 \\ t+2w = 0 \\ t = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ w = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} h = \\ z = \end{matrix}$$

$AX = I$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AX = \begin{pmatrix} 3x_1 & 3x_2 & 3x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ 6x_7 & 6x_8 & 6x_9 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{cases} x_1 = 1/3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \\ x_6 = 0 \\ x_7 = 0 \\ x_8 = 0 \\ x_9 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

A è invertibile e la sua inversa A^{-1} è ancora una matrice diagonale; in più gli elementi di A^{-1} sono l'inverso degli elementi di A.

2) Trovare, se esiste, l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad AX = I$$

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_4-x_7 & 2x_2+x_5-x_8 & 2x_3+x_6-x_9 \\ -x_1+x_7 & -x_2+x_8 & -x_3+x_9 \\ -x_4 & -x_5 & -x_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_7 - x_7 = 0 \\ x_6 = -1 \\ x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_9 = x_3 \\ x_8 = 1 + x_2 \\ x_7 = x_1 \\ 2x_9 - 1 - x_9 = 0 \\ 2x_2 - 1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = x_5 = x_7 = x_1 = 0 \\ x_6 = -1 \\ x_2 = 1 = x_9 = x_3 \\ x_8 = 2 \end{cases}$$

$x_1 = x_7 = 1$

COMPITO

Trovare, se $\exists$, l'inversa di

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}6&4\\2&3\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&3\\2&4&1\end{pmatrix}$$

$$AX=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\2x_4&2x_5&2x_6\\3x_7&3x_8&3x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=x_3=x_4=x_6=x_7=x_8=0\\x_5=\frac{1}{2}\\x_9=\frac{1}{3}\end{cases}\qquad \det A=1\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=6$$

$$X=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$BX=I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\x_4&x_5&x_6\\-x_1+x_4&-x_2+x_5&-x_3+x_5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_4=x_6=0=x_1=x_3\\x_5=1\\x_2=1\end{cases}\qquad X=B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$$

$$CX=I=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+3x_3&2x_2+3x_4\\4x_1+7x_3&4x_2+7x_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_3=1\\2x_2+3x_4=0\\4x_1+7x_3=0\\4x_2+7x_4=1\end{cases}\quad\begin{cases}2x_1=1-3x_3\\2x_2=-3x_4\\2-6x_3+7x_3=0\\-6x_4+7x_4=1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{7}{2}\\x_2=-\frac{3}{2}\\x_3=-2\\x_4=1\end{cases}$$

$$X=C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\\-2&1\end{pmatrix}$$

a) $ABA^{-1}B^{-1} = I$

$AB(BA)^{-1} = I$ moltiplico a DX per BA

$AB(BA)^{-1}BA = IBA$

$ABI = IBA$

$AB = BA$ IL PRODOTTO COMMUTA?

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA \rightarrow$ a) falsa

b) $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$ moltiplico a DX per AB

$A^{-1}B^{-1}AB = (AB)^{-1}AB$

$(BA)^{-1}AB = I$ moltiplico a SX per BA

$BA(BA)^{-1}AB = BA$

$AB = BA$

ma $AB \neq BA \rightarrow$ b) falsa

c) $(AB)^{-1}A^{-1}B^{-1} = 0$ (è più rapido con i determinanti)

$(AB)^{-1}(BA)^{-1} = 0$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ -x+z & -y+t \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{cases} z = 1 = x \\ t = 0 \quad y = -1 \end{cases} \qquad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -x & -y \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad t = 1 \\ y = -1 \quad z = 1 \end{cases} \qquad (BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(AB)^{-1}(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \ldots \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$

$X = 0$

(b) FALSO

(c) CERCO L'INVERSA DI ABBA

$(ABBA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$(ABBA)(ABBA^{-1}) = I$

$(ABBA)(A^{-1}B^{-1}B^{-1}A^{-1}) = I$

$ABB(AA^{-1})B^{-1}B^{-1}A^{-1} = I$

$AB(BB^{-1})B^{-1}A^{-1} = I$

$A(BB^{-1})A^{-1} = I$

$AA^{-1} = I$

$I = I$

ABBA è INVERTIBILE!

(c) FALSO

(d) $\nexists x \,/\, XAB = (1,1,1)$

$X = (x_1, x_2, x_3)$

QUESTO X POTREBBE ESSERE

$X = (1,1,1)\, B^{-1} A^{-1}$

$(1,3) \quad (1,\cancel{3})\ (\cancel{3},3)$

$= (1,\cancel{3})\ (\cancel{3},3)$

$(1,3)$

LECITO!

CONTROLLIAMO SOSTITUENDO X.

$XAB = (1,1,1)$

$(1,1,1)B^{-1}A^{-1}AB = (1,1,1)$

$(1,1,1)B^{-1}(A^{-1}A)B = (1,1,1)$

$(1,1,1)(B^{-1}B) = (1,1,1)$

$(1,1,1) = (1,1,1)$

SI ESISTE X

(d) FALSO

→ TUTTI GLI elementi non nulli dell'ultima riga sono speciali

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

è ridotta per righe

□ elementi speciali

rank(A) = 3

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

non è ridotta per righe

PER UNA MATRICE RIDOTTA PER RIGHE IL RANGO È IL NUMERO DELLE RIGHE NON NULLE!

Le operazioni / trasformazioni elementari che si possono fare sulle righe e non cambiano lo spazio delle righe sono:

E_1 : $R_i \rightarrow R_i + aR_J$ $a \neq 0$

E_2 : $R_i \leftrightarrow R_J$ (scambio righe)

E_3 : $R_i \rightarrow aR_i$ $a \neq 0$ (elimino frazioni)

(E_2, E_3 possono servire x determinare i ranghi, ma è meglio non utilizzarle x i determinanti)

Riduzione:

- si prende la prima riga non nulla
- si cerca un suo elemento non nullo
- uso E_1 (più volte) x annullare gli elementi sotto l'elemento scelto
- faccio lo stesso nelle seguenti righe non nulle ecc...

$R_3 \to R_3 - 2k R_1 = (0 \quad 1 \quad -2k^2+2 \quad 1+2k)$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & -3k & 3+k \\ 0 & 1 & -2k^2+2 & 1+2k \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & -3k & 3+k \\ 0 & 0 & 2+3k-2k^2 & -2+k \end{pmatrix}$$

PARTO DA RANK A = 0 FINO A n = NUMERO RIGHE

- RANK A = 0 NO
- RANK A = 1 NO
- RANK A = 2 se $\begin{cases} 2+3k-2k^2=0 \\ k-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8-8=0 \\ k=2 \end{cases}$

se $k=2$

- RANK A = 3 se $k \neq 2$

$$\text{RANK } A = \begin{cases} 2 & \text{se } k=2 \\ 3 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}$$

COMPITO

CALCOLO IL RANGO DI A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 13 & 12 & 1 & 14 \\ 1 & 17 & 15 & 19 & 1 & 16 \\ 1 & 7 & 1 & 21 & 21 & 9 \end{pmatrix}$$

COSA HA DI SPECIALE QUESTA MATRICE?

RIDUCO LA MATRICE A

$R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1 \quad (1,17,15,19,1,16) + \left(-1, -\frac{19}{2}, -\frac{13}{2}, -6, -\frac{1}{2}, -7\right)$

$R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1 \quad (1,7,1,21,21,9) + \left(-1, -\frac{19}{2}, -\frac{13}{2}, -6, -\frac{1}{2}, -7\right)$

17 MARZO 2012

RIDUZIONI e APPLICAZIONI AI SOTTOSPAZI VETTORIALI

TEST

PRENDIAMO:

$C \in \mathbb{R}^{3,4}$,

QUALE AFFERMAZIONE È CORRETTA?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

a) $\text{rank}\, C = 4$
b) $\text{rank}\, C = 3$
c) $\text{rank}\, C = 2$
d) $\text{rank}\, C = 1$

- $\text{rank}\, C \leq 3$ — 3 = NUMERO RIGHE, RANK = RIGHE L.I.

  (a) FALSA.

- C'È UNA RIGA NULLA (NO L.I.)

  $\text{rank}\, C \neq 3$

  $\text{rank}\, C \leq 2$

  (b) FALSA

- USO LA RIDUZIONE:

  $R_3 \to R_3 - 5R_1$

  $(5\ 6\ 7\ 8) + (-5\ -10\ -15\ -20)$

$$C'_{RID} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ ELEMENTO SPECIALE INSIEME A QUELLI DELL'ULTIMA RIGA (TRANNE ZERO)

RANK C = NUMERO RIGHE NON NULLE!

$\text{rank}\, C = 2 \to$ (c) VERA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 488

ESERCIZIO

1) Dato:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ sottospazio} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$$

trovare una base e la dimensione.

Base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4 \}$$

Scrivo le componenti delle 2 matrici rispetto a questa base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + 0\bar{e}_3 + 1\bar{e}_4$$

le componenti della prima matrice rispetto alla base canonica sono $(1,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0\bar{e}_1 + 1\bar{e}_2 + 0\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4$$

le componenti sono $(0,1,0,3)$

la matrice delle componenti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ è ridotta

$\text{rank} B = 2$

$\Rightarrow$ le 2 matrici iniziali sono una base!

Dato un sottospazio formato da generatori scrivo le compo. dei generatori rispetto a 1 base canonica. Riduco la matrice. Trovo una base e la dimensione del sottosp

DOPO IL PRIMO PASSO:

$A \to A'$ $\quad \begin{pmatrix} x & \\ 0 & \dots \\ 0 & \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \dots \\ 0 & \end{pmatrix}$

STUDIO A':
TROVA B CANCELLANDO LA PRIMA RIGA E LA PRIMA COLONNA, E RIPETI IL PRIMO PASSAGGIO SU B ... ECCETERA!!
(RIPORTA SU A' LE TRASFORMAZIONI)

ESERCIZIO

① RIDURRE A FORMA TRIANGOLARE LA MATRICE A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1 \neq 0!$
ANNULLO LE COSE SOTTO!

$R_2 \to R_2 + 2R_1 \qquad R_3 \to 2R_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\longrightarrow \quad R_3 \to R_3 - R_1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

TROVO B CANCELLANDO PRIMA RIGA E COLONNA

$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ RIPETO IL PRIMO PASSAGGIO

$b_{11} = -2 \neq 0$ (RIDUCO)

$R_2 \to R_2 + \frac{3}{2} R_1$

$(3, 4) \quad (-3, +\frac{23}{2})$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & +\frac{23}{2} \end{pmatrix}$ $\quad R_2 \to 2R_2$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & +23 \end{pmatrix}$

SISTEMI LINEARI

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

SOLUZIONE $(c_1 \dots c_n)$ CHE LA VERIFICA!

SISTEMA <
- COMPATIBILE : RANK(A) = RANK(A|B)
- INCOMPATIBILE : RANK(A) ≠ RANK(A|B)

ESERCIZIO

1) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + z = -1 \\ \frac{1}{2}x + y + 3z = 0 \end{cases}$ SCRIVO IL SISTEMA IN FORMA MATRICIALE!

COSTRUISCO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

E VETTORE COLONNA O MATRICE DEI TERMINI NOTI:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ CON $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ SISTEMA IN FORMA MATRICIALE

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

OVVERO:

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B È COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DI A = ?

$B \in C_A$, B È UN ELEMENTO DELLO SPAZIO DELLE COLONNE DI A = ?

SE IL SISTEMA È RISOLUBILE, SÌ!

dalla matrice ridotta

$$\begin{cases} x = \frac{12}{23} \\ z = -1 + 2x = \frac{1}{23} \\ y = -1 + x + 2z = -\frac{9}{23} \end{cases}$$

$$S = \left(\frac{12}{23}, \frac{-9}{23}, \frac{1}{23} \right)$$

2) Studiare la risolubilità di

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - t = 1 \\ x - 4y + 2z + t = 3 \\ x - 3y + z + 3t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \end{cases} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Riduco $(A|B)$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$R_4 \to R_4 - R_1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_2$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right) \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$R_4 \to R_4 + 2R_2$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

$R_4 \to R_4 - 3R_3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$\text{rank}\, A = 3$

$\text{rank}(A|B) = 4$

$\text{rank}\, A \neq \text{rank}(A|B)$

$\Rightarrow$ il sistema non è risolubile!

1) DATI $h, k \in \mathbb{R}$.
DATO IL SISTEMA, DISCUTERE LA RISOLUBILITÀ:

$$\begin{cases} kx + 2hy + hz = 1 \\ kx - 2y - z = k \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2h & h & 1 \\ k & -2 & -1 & k \end{array}\right)$$ RIDUCO

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2h & h & 1 \\ 0 & -2-2h & -1-h & k-1 \end{array}\right)$$

se $k \neq 0$ la matrice è ridotta!

- $h \neq -1$
  rank A = rank $(A|B) = 2$
  il sistema è risolubile
  soluzioni: ∞^1
- $h = -1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

  - se $k \neq 1$
    rank $A = 1$
    rank $(A|B) = 2$
    il sistema non è risolubile
  - se $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

    rank A = rank $(A|B) = 1$
    il sistema è risolubile
    soluzioni: ∞^2

$\infty^3 = \infty^{n-p} = \infty^{4-2} = \infty^2$

doveva essere rank $A = 1$

(b) falsa

(c) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

rank A = rank $A|B = 2$

ci sono soluzioni! (c) falsa

(d) $\infty^{n-p} = \infty^{4-2} = \infty^2$ (d) vera

(6) risolvere (con la riduzione)

$$\begin{cases} x+2y+3z+2t+u=3 \\ x+3y-z+t+2u=4 \\ 2x+5y+z+2t+2u=4 \\ x+3y-z+2t+3u=1 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

FORTEMENTE RIDOTTO!

(elementi speciali con zeri sopra e sotto)

$R_2 \to R_2 - R_1$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$

$R_4 \to R_4 - R_1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$R_4 \to R_4 - 2R_2$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$R_4 \to R_4 + R_3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

rank A = rank $A|B = 4$

il sistema è risolubile $S: \infty^1$

c) la colonna di y non dipende dalle altre.
($y = 0$)

d) falsa

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad S = (0,0,0)$$

$\exists!$ soluzione

) Risolvere:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ riduco}$$

$R_2 \to R_2 - R_1 \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ridotta

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -3y + 5z = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} \rho(A) = 2 \\ n = 3 \end{array}\right\} \infty^{n-\rho} = \infty^1 \text{ soluz}$$

$$\begin{cases} x + 2y - \frac{9}{5}y = 0 \\ z = \frac{3y}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}y \\ z = \frac{3}{5}y \end{cases} \qquad sol = \left(-\frac{1}{5}y, y, \frac{3}{5}y\right) = S$$

∞^1 sol dipendenti da un parametro libero

$\dim S = 1$

$$S = \{ \underbrace{\left(-\tfrac{1}{5}y, y, \tfrac{3}{5}y\right)}_{} \;/\; y \in \mathbb{R} \}$$

$$S = \left\{ y\left(-\tfrac{1}{5}, 1, \tfrac{3}{5}\right) \;/\; y \in \mathbb{R} \right\}$$ tutti i multipli possibili del vettore

$$S = \mathcal{L}\left(\left(-\tfrac{1}{5}, 1, \tfrac{3}{5}\right)\right)$$ insieme delle combinazioni lineari del vettore

é uno spazio vettoriale!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 99 di 488

esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = 0$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

soluzione immediata $(1,-2,0)$ di $AX = B$

verifico: $\begin{cases} 2 + 0 = 2 \\ 4 - 4 + 0 = 0 \end{cases}$ ✓

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ridurre $R_1 \leftrightarrow R_2$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ridotta

$\rho(A) = 2 \quad n = 3 \rightarrow \infty^1$ soluzioni

$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

soluzione $(x, 0, -x)$ di $AX = 0$ sistema omogeneo associato

$y_0 = (1,-2,0)$

$z = (x, 0, -x)$

$y = y_0 + z$

$y =$ soluzione $AX = B \Rightarrow (1+x, -2, -x)$

★ COMBINAZIONE LINEARE DELLE RIGHE **METODO 2**

$$\begin{cases} 1(x,y) + 2(z,t) = (-1,4) \\ 3(x,y) + 1(z,t) = (-1,2) \end{cases}$$

DA DOVE ARRIVA?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$ RIGA = OGGETTO UNICO

$$\begin{cases} R_1 + 2R_2 = B_1 \\ 3R_1 + R_2 = B_2 \end{cases}$$ R_1, R_2 RIGHE DELLE INCOGNITE; B_1, B_2 RIGHE DEI TERMINI NOTI

SCRIVO LA MATRICE COMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = (A|B)$$ RIDUCO

$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $$(A|B)' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -10 \end{array}\right)$$ RIDOTTA

$$\begin{cases} R_1 + 2R_2 = B_1 \\ -5R_2 = B_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x,y) + 2(z,t) = (-1,4) \\ -5(z,t) = (2,-10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 = (-1,4) - 2R_2 = (1,4) - 2(-\frac{2}{5}, 2) = (-\frac{1}{5}, 0) \\ R_2 = (-\frac{2}{5}, 2) \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 \\ -2/5 & 2 \end{pmatrix}$$ = SOLUZIONE

COMPITO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ RISOLVERE $AX = B$

USO I 2 MODI:

$$AX = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z = 1 \\ y+2t = 3 \\ x+z = 2 \\ y+t = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -1 \\ t = 2 \\ x = 2-z \\ y = 1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ t = 2 \\ x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

E SE HO $XA = B$?

TRASPONGO

$$^t(XA) = {}^tB$$

$$^tA\,^tX = {}^tB \longrightarrow$$ RISOLVO QUESTO E TROVO ^tX

ALLA FINE RIFACCIO LA TRASPOSTA!

ESERCIZIO:

1) $XA = B$ DOVE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

RISOLVO:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad XA = B$$

TRASPONGO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^tA\,^tX = {}^tB$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$ RIDUCO $R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$(A|B)' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 4 \end{array}\right)$$ RIDOTTA

$$\begin{cases} R_1 + 3R_2 = (-1, -1) \\ -5R_2 = (6, 4) \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 = \left(\frac{13}{5}, \frac{7}{5}\right) \\ R_2 = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right) \end{cases}$$

$$^tX = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - 3R_1$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \text{RIDOTTA}$$

$$\begin{cases} 2R_1 + R_2 = (1,0) \\ -3R_1 = (-3,1) \end{cases} \qquad \begin{cases} R_2 = \left(-1, +\frac{2}{3}\right) \\ R_1 = \left(1, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{3}$$

L'inversa ha determinante $\frac{1}{\det A}$.

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

INVERSA (3): "VARIAZIONE SUL TEMA"

ESERCIZIO:

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{TROVARE } A^{-1}$$

$AX = I$ RISOLVERE IL SISTEMA

La matrice completa è: $\qquad AA^{-1} = I$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

FORTEMENTE RIDOTTO!
TRANNE QUI I

$R_3 \to R_3 + 3R_1$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

PROVARE L'INVERTIBILITÀ:

CERCO B / $AB = I$

$B = A^2 \to A \cdot A^2 = A^3 = I$

A è INVERTIBILE E LA SUA INVERSA A^{-1} è A^2.

$$(A^7)^{-1} = (A^{-1})^7 = (A^2)^7 = A^{14}$$

$$\overbrace{(A \cdots A)}^{7\text{ volte}}{}^{-1} = (A^{-1} \cdots A^{-1})$$

$14 = 3 \cdot 4 + 2$ DIVISIONE CON RESTO .3

$$A^{14} = (A^3)^4 \cdot A^2 = I^4 \cdot A^2 = I \cdot A^2 =$$

$$(A^7)^{-1} = A^2$$

INVERSA (4) TEOREMA

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (QUADRATA) $A = (a_{ij})$

A INVERTIBILE $\Longleftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow \rho(A) = n$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ji})}$$

con $A_{ji} = (-1)^{j+i}$(MINORE OTTENUTO CANCELLANDO LA RIGA E LA COLONNA DI a_{ij})

ji non ij xk è trasposta!

ESERCIZIO:

① CALCOLARE SE $\exists$ L'INVERSA DI $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(-1)^3(-1)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^4(-2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^5(4)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$\Longrightarrow \det C = 3 \neq 0$ (SI INVERTE!)
$\exists$ INVERSA

$$\boxed{X = A^{-1} B = \frac{1}{\det A} (A_{ji}) B}$$

PER IL TEOREMA DI LAPLACE LE SOLUZIONI SONO:

$$\boxed{\frac{\Delta_1}{\det A} \quad \dots \quad \frac{\Delta_n}{\det A}}$$

$\Delta_1 = \det$ A CON UNA COLONNA SOSTITUITA DA B

ESERCIZIO:

① RISOLVERE CON KRAMER:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - y + 7z = 1 \\ 2x + y - 4z = 2 \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

è QUADRATA, è anche INVERTIBILE?

MATRICE TRIANGOLARE:

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

è TRIANGOLARE

$\det A = 24 \neq 0 \implies$ SI è INVERTIBILE!

APPLICO CRAMER: (XK A è < QUADRATA 3X3, INVERTIBILE $\det A \neq 0$)

$$X = \frac{\Delta_1 \; \Delta_2 \; \Delta_3}{\det A}$$

COMPITO:

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, trovare $X, Y \in \mathbb{R}^{n,n}$ / $\begin{cases} AX = A^2 \\ YA = X^{-1} \end{cases}$

$$\cancel{\det A} \det X = \cancel{\det A} \det A$$

$$\det X = \det A$$

$$\det Y \det X = \det(X^{-1})$$

$$\det Y \det X = \frac{1}{\det X}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$ TROVATA LA SOLUZIONE.

è sempre vero che $\boxed{\det(AB) = \det(BA)}$ = ?

SI PER IL TEOREMA DI BINET (se posso applicarlo su A e B)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA)$$

ESERCIZI

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det AB = 3$ XR RIDOTTA

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det BA = (-1)^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

$$0 \neq 3$$

vale se sono quadrate A, B
e dello stesso ordine
(NON POSSO APPLICARE BINET)

$= \lambda(2x_1 - y_1, y_1 - 3z_1) + \beta(2x_2 - y_2, y_2 - 3z_2) =$

$= \lambda f(\bar{v}_1) + \beta f(\bar{v}_2)$

x il criterio, f è lineare.

MATRICE ASSOCIATA ALLA FUNZIONE

$\mathbb{K}$ $\quad f: V \to W$

$\dim V = n \quad \dim W = m$

Base di E $\quad$ Base di F

$E = (e_1, \dots e_n) \quad F = (f_1, \dots f_m)$

$$\boxed{\mathbb{K}^{m,n} \longleftrightarrow \mathscr{L}(V,W)}$$

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA L'INSIEME DELLE APPLICAZIONI LINEARI E LE MATRICI

Prendo: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad$ Data la matrice cerco l'applicazione lineare

$z_1, \dots z_m \in W$ $\quad$ elementi di W che rispetto a F hanno come componenti le colonne di A

$f: V \to W$

$\bar{e}_1 \to \bar{z}_1$

$\vdots$

$\bar{e}_n \to \bar{z}_n$

Prendo: $f: V \to W$ $\quad$ Data l'applicazione cerco la matrice associata

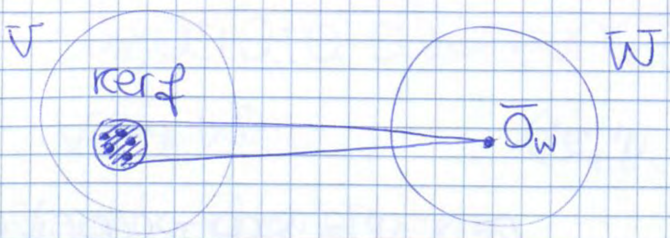
$\left.\begin{array}{l} e_1 \Rightarrow f(e_1) = \bar{w}_1 \\ \vdots \\ e_n \Rightarrow f(e_n) = \bar{w}_n \end{array}\right\}$ $\in W$, ne scrivo le componenti rispetto ad F, e le metto sulle colonne di una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

STUDIO DELLA MATRICE x CONOSCERE L'A.L.

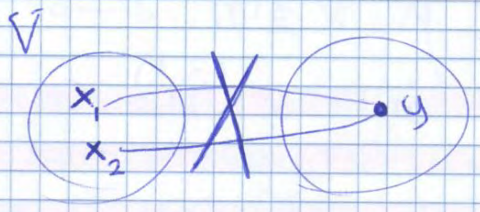
NUCLEO E IMMAGINE

- $\ker f = \{ \bar{x} \in \bar{V} \ / \ f(\bar{x}) = \bar{0}_W \}$



serve x stabilire se f è iniettiva:

iniettività $\longrightarrow \underset{\in V}{\bar{x} \neq \bar{y}} \Longrightarrow \underset{\in W}{f(\bar{x}) \neq f(\bar{y})}$

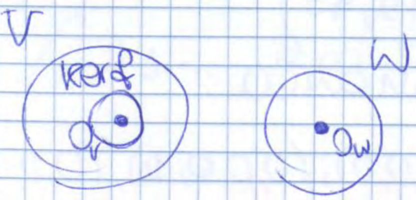


mai

$\boxed{\dim \ker f = 0}$

$\Updownarrow$

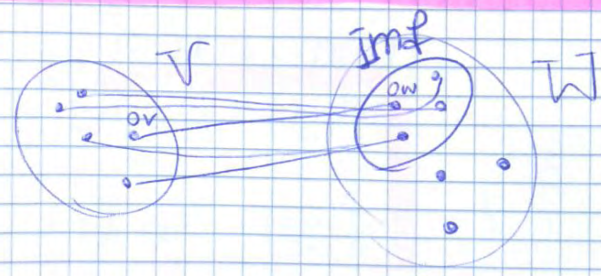
$\boxed{f: \bar{V} \to \bar{W} \text{ a.l. è iniettiva} \Leftrightarrow \ker f = \{ \bar{0}_V \}}$



$f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ sì!

$f(\bar{e} \neq \bar{0}_V) = \bar{0}_W$ NO!

- $\mathrm{Im} f = \{ \bar{y} \in \bar{W} \ / \ \exists \ \bar{x} \in \bar{V} \text{ con } f(\bar{x}) = \bar{y} \}$



serve x stabilire se f è suriettiva:

$\boxed{f: \bar{V} \to \bar{W} \text{ a.l. è suriettiva} \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \bar{W}}$

$\boxed{\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim \bar{W} = \rho(A)}$

$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-z+t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=-x-2y \\ z=x+t \end{cases}$ $\begin{cases} z=-x-2y \\ -x-2y=x+t \end{cases}$

$\begin{cases} z=-x-2y \\ t=-2x-2y \end{cases}$

$s: (x, y, -x-2y, -2x-2y)$
vettore generico del nucleo

Prendo $x=1, y=0$ (considero solo la x)

$s_1 (1, 0, -1, -2)$

sto separando i parametri

Prendo $x=0, y=1$ (considero solo la y)

$s_2 = (0, 1, -2, -2)$ → un vettore generico del nucleo si scrive come C.L. di ogni 2 elementi

Base del nucleo: $\ker f = \mathcal{L}(s_1, s_2)$ → s_1, s_2 sono generatori

s_1, s_2 sono anche L.I. → sono una base

$B = (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = ((1,0,-1,-2), (0,1,-2,-2))$

La dimensione di $\ker f$ è 2. (numero elementi della base)

Se dovevamo trovare solo la dimensione:

$\boxed{\dim \ker f = \text{numero di parametri liberi}}$!!

- $\mathrm{Im} f = \{ \bar{y} \in W \,/\, \exists \bar{x} \in V \text{ con } f(\bar{x}) = \bar{y} \}$

$\boxed{\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f}$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$

$\boxed{\dim \mathrm{Im} f = \rho(A)$}

$\mathrm{Im} f \overset{\text{è generato su}}{=}$ colonne di $A = M_f^{E,F}$

x trovare una base:

① scarti successivi sulle colonne di A
② riduzione sulle colonne di A

Metodo 2 ($M_f^{E,F}$ rispetto alle basi canoniche)

$$M_f^{E,F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$\quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$

riduzione x colonne

METODO 2:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+2y+t=0 \end{cases}$$

SOSTITUISCO LE COMPONENTI DI $\bar{v}$

$$\begin{cases} 1+2(k-2)+1=0 \\ 2+2(k-2)+1-k=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k-4+2=0 \\ 2+2k-4+1-k=0 \end{cases} \quad \begin{cases} k=1 \\ 2+2-4+1-1=0 \ \checkmark \end{cases}$$

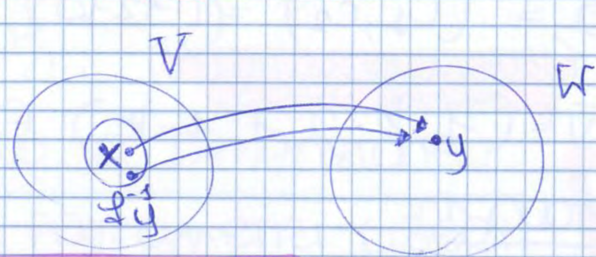
SOLUZIONE: per $k=1$, $\bar{v} \in \ker f$.

CONTROIMMAGINE E INVERSA

$f: V \to W$

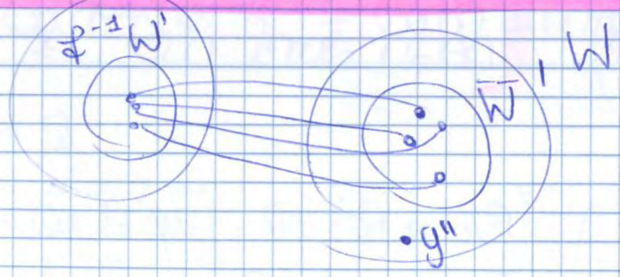
PRENDO $W' \subseteq W$

PRENDO $\bar{y} \in \bar{W}$



$f^{-1}(\bar{y}) = \{\bar{x} \in V \ / \ f(\bar{x}) = y\}$ CONTROIMMAGINE DI UN ELEMENTO

$f^{-1}(W') = \{\bar{x} \in \bar{V} \ / \ f(\bar{x}) \in W'\}$ CONTROIMMAGINE DI UNO SPAZIO



$f^{-1}(y'') = \emptyset$ → se f è suriettiva questo non succede

LA FUNZIONE INVERSA è l'a.l. (se f è invertibile) $f^{-1}: W \to V$ che porta ogni elemento alla sua controimmagine.

(Id = FUNZIONE IDENTICA)

$$\boxed{\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= Id_W \\ f^{-1} \circ f &= Id_V \end{aligned}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 123 di 488

- $f: V \to W$

$$P \left(\begin{matrix} E \\ E' \end{matrix} \right. \qquad \left. \begin{matrix} F \\ F' \end{matrix} \right) Q$$

E, E' : due basi di V
F, F' : due basi di W

$$A = M_f^{EF}$$

PROBLEMA $\quad A' = M_f^{E'F'} = ?$

Qual è la matrice associata alla funzione rispetto alle 2 nuove basi

$$\Rightarrow \boxed{A' = Q^{-1} A P}$$

ESERCIZIO:

(1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\bar{v}_1 = (1,-1,0) \longrightarrow (1,1,1) = \bar{w}_1$$
$$\bar{v}_2 = (0,-1,2) \longrightarrow (1,0,1) = \bar{w}_2$$
$$\bar{v}_3 = (1,0,-1) \longrightarrow (0,1,0) = \bar{w}_3$$

Trovo la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

METODO 1

$$\bar{v}_1 = (1,-1,0) = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \quad , \quad \bar{w}_1 = (1,1,1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

$$f(\bar{v}_1) = f(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = f(\bar{e}_1) - f(\bar{e}_2) = \bar{w}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow f(\bar{e}_1) - f(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

$$v_2 = -\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \quad , \quad \bar{w}_2 = (1,0,1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow -f(\bar{e}_2) + 2 f(\bar{e}_3) = e_1 + e_3$$

$$v_3 = (1,0,-1) = e_1 - e_3 \quad , \quad \bar{w}_1 = (0,1,0) = \bar{e}^2$$

$$\Rightarrow f(e_1) - f(\bar{e}_3) = \bar{e}_2$$

Scrivo tutti i vettori $\bar{v}$ e le loro immagini $\bar{w}$ rispetto alla base canonica $\rightarrow$ poi applico la funzione
[illegible] equazioni che metto a sistema

P HA SULLE COLONNE LE COMPONENTI DEGLI ELEMENTI DI E RISPETTO A $\mathcal{B}$.

$\bar{e}_1 = (1\,0\,0) = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$

a, b, c = PRIMA COLONNA DI P

$$\begin{cases} a+c=1 \\ -a-b=0 \\ 2b-c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

$\bar{e}_2 = (0\,1\,0) = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$

a, b, c = SECONDA COLONNA DI P

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -a-b=1 \\ 2b-c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

$\bar{e}_3 = (0\,0\,1) = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3$

a, b, c = TERZA COLONNA DI P

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -a-b=0 \\ 2b-c=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = BP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

TROVATA!

(d) $f((0,1)) = ?$ $f(\bar{v}) = ?$

$\bar{v}$ COMBINAZIONE LINEARE DI V_1 E V_2

$(0,1) = a(1\,1) + b(1\,2)$

$(0,1) = (a,a) + (b,2b)$

$(0,1) = (a+b,\ a+2b)$

$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=+1 \end{cases}$

TROVATE LE COMPONENTI DI $\bar{v}$ RISPETTO A $\bar{v}_1$ E $\bar{v}_2$, APPLICO LA FUNZIONE!

$(0,1) = -1(1,1) + 1(1,2)$

$f((0,1)) = -f(1,1) + f(1,2)$

$(0,1) \neq -(1,2) + (2,1) \neq (1,-1)$

(d) FALSA

ESERCIZIO

① CALCOLO AUTOVALORI E AUTOSPAZI DI

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (SE PARTO DALLA FUNZIONE, PER PRIMA COSA MI TROVO LA MATRICE ASSOCIATA $A = M_f^{cc}$)
- $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{POLINOMIO CARATTERISTICO}}$ → STUDIO LE RADICI

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 0 + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda \left[(1-\lambda) \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right] +$$

$$-(1-\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \left[(1-\lambda) \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -\lambda \left[(1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2) - (1-\lambda) \right] - (1-\lambda)(1-\lambda)$$

$$+ (1-\lambda)(\lambda) - \lambda =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda) \left[(-\lambda + \lambda^2 - 1) \right] - (1-\lambda) \left[1 - \lambda - \lambda \right] - \lambda =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda) \left[-\lambda + \lambda^2 - 1 - 1 + 2\lambda \right] - \lambda =$$

$$= (-\lambda + \lambda^2)(\lambda^2 + \lambda - 2) - \lambda = -\lambda - \cancel{\lambda^3} - \lambda^2 + 2\lambda + \lambda^4$$

$$+ \cancel{\lambda^3} - 2\lambda^2 = \lambda^4 - 3\lambda^2 + \lambda =$$

$$= \lambda(\lambda^3 - 3\lambda + 1)$$

$$= \lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2)$$

$$\begin{cases} -2x+z+t=0 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=z \\ y=z \\ x=z \end{cases} \quad v=(z,z,z,z)=z(1,1,1,1)$$

$$V_2=\mathcal{L}((1,1,1,1)), \quad \dim V_2 = 1$$

* $\lambda=\sqrt{2}$, $V_{\sqrt{2}}$

$$A-\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

RISOLVO $(A-2I)x=0$
RIDUCO LA MATRICE

$R_4 \to R_4-(1-\sqrt{2})R_1$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 0 & \sqrt{2}-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to R_4-(\sqrt{2}-1)R_2$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1-\sqrt{2}} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

LA TOLGO XK UGUALE ALLA PRECEDENTE

$$\rho(A-\sqrt{2})I=3$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x+z+t=0 \\ x+y-\sqrt{2}z=0 \\ (1-\sqrt{2})y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=-y \\ x=-z=(1-\sqrt{2})y \\ z=-y(1-\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)y \end{cases}$$

$$v=((1-\sqrt{2})y, y, (\sqrt{2}-1)y, -y) = $$
$$= y(1-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}-1, -1)$$

$$V_{\sqrt{2}}=\mathcal{L}((1-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}-1, -1)) \quad \dim V_{\sqrt{2}}=1$$

* $\lambda=-\sqrt{2}$, $V_{-\sqrt{2}}$ (DEVE x FORZA AVERE $\dim V_{\sqrt{2}}=1$)

$$A+\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

RISOLVO
$(A+\sqrt{2}I)X=0$
RIDUCO LA MATRICE

$$\partial = t(4,-4,1,1)$$

★ V_2

$$A'' = \begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x = y = 0 \\ y - \cancel{3t} + \cancel{3t} = 0 \\ z = 3t \end{cases}$$

$$\partial = t(0,0,3,1)$$

★ V_{-2}

$$A''' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A''' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3x = -y = 0 \\ \cancel{8}y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$$\partial = t(0,0,-1,1)$$

ESERCIZIO

① VERIFICARE CHE A È DIAGONALIZZABILE E DIAGONALIZZARLA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A DEVE ESSERE NECESSARIAMENTE QUADRATA (PARLO DI ENDOMORFISMI)

- CERCO AUTOVALORI

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = 0$ POLINOMIO CARAT. E RADICI

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(-\lambda)(3-\lambda) - 2\right] - 2\left[9 - 3\lambda - 2\right] + 2\left[3+\lambda\right] =$$

$$= (1-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 - 2) - 14 + 6\lambda + 6 + 2\lambda =$$

$$= -3\lambda + \lambda^2 - 2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2\lambda - 8 + 8\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0$$

$$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda + 10) = 0 \qquad (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+2) = 0$$

$\star\ \lambda = 1$, $\star\ \lambda = 5$, $\star\ \lambda = -2$

OGNI $\lambda \in \mathbb{R} \to$ A È DIAGONALIZZABILE!
(HANNO TUTTI $m = 1$) TROVO GLI AUTOSPAZI!

$\star\ \lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -y \\ x = y \end{cases} \quad \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

$v = (-z, -z, z)$
$v = z(-1, -1, 1)$

$$\boxed{V_1 = \mathcal{L}((-1, -1, 1))}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 137 di 488

TEST

(2) $A \in \mathbb{K}^{2,2}$ / A HA SOLO L'AUTOVALORE 2. QUALE DELLE AFF. È CORRETTA?

(a) $\det A = 2$
(b) $A = 2I$
(c) $\operatorname{Tr} A = 2$
(d) se A è DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow A = 2I$

(Tr = TRACCIA = SOMMA DEGLI ELEMENTI DELLE DIAGONALE)

(a) $\boxed{\det A = \text{PRODOTTO DEGLI AUTOVALORI}}$

$2 \cdot 2 = \det A = 4$ (HA SOLO L'AUTOVALORE 2, MA È RIPETUTO 2 VOLTE)

a - FALSA

(b) NON È DETTO. ESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I)^2 = (2-\lambda)^2$

$\lambda = 2$ DOPPIO

$A \neq 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b - FALSA

(c) TRACCIA = SOMMA DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE DI UNA MATRICE QUADRATA

MINORI PRINCIPALI = OTTENUTI CANCELLANDO RIGHE E COLONNE DELLO STESSO INDICE (PRENDO ELEMENTI DELLA DIAGO)

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 9 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$

- MIN. PRINC. DI ORDINE 3 = $\det A$
- MIN. PRINC. DI ORDINE 2 = $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$
- MIN. PRINC. DI ORDINE 1 = 1, 2, 10

MATRICI SIMILI

$A, B \in K^{n,n}$

$A \sim B$ (A è simile a B) se $\exists\, P \in K^{n,n}$, P invertibile / $B = P^{-1}AP$

PROPRIETÀ DELLE MATRICI SIMILI

- $\rho(A) = \rho(B)$
- $\det A = \det B$

} 2 matrici simili hanno rango e determinanti uguali

ESERCIZIO

① Stabilire se A e B sono simili

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$
  $\det B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

} hanno lo stesso determinante $\rightarrow$ potrebbero essere simili

- $D = P^{-1}AP$
  $D = Q^{-1}BQ$

sono simili se sono diagonalizzabili con la stessa D!

$Q^{-1}BQ = P^{-1}AP$ moltiplico a sx $\times Q$

$QQ^{-1}BQ = QP^{-1}AP$ moltiplico a dx $\times Q^{-1}$

$BQQ^{-1} = QP^{-1}APQ^{-1}$

$B = QP^{-1}APQ^{-1}$

faccio l'inversa di (PQ^{-1})

$(PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1}$ è uguale a QP^{-1}

$\Rightarrow$ A e B sono simili

$$H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$AH = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$AH = HB$

$$HB = \begin{pmatrix} a & b & b+c \\ d & e & e+f \\ g & h & h+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{a = a} \\ \cancel{b = b} \\ \cancel{c} = \cancel{c} + b \\ \cancel{d} = a + \cancel{d} \\ \cancel{e} = \cancel{e} + b \\ c + \cancel{f} = e + \cancel{f} \\ \cancel{g = g} \\ \cancel{h = h} \\ \cancel{i} = h + \cancel{i} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = e \\ h = 0 \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ d & e & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$$

ma

H deve essere INVERTIBILE!

$\Rightarrow \det H \neq 0$

$$\det H = e \begin{pmatrix} d & e \\ g & 0 \end{pmatrix} = -e^2 g \neq 0$$

$e \neq 0, \; g \neq 0$

A e B sono simili

$(B = H^{-1} A H)$

$HB = AH$

$AH = HB$

$\det(B - \lambda I) = (1-\lambda^2)(3-\lambda)$

$\lambda = 1 \quad m = 2$

$\lambda = 3$

GLI AUTOVALORI SONO = → POTREBBERO ESSERE SIMILI

CONTROLLO LE MOLTEPLICITÀ SOLO X $\lambda = 1$

$\rho(A - \lambda I) = ?$

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \quad \rho(A - I) = 1$

n

$3 - 1 = 2 = m!$

A è DIAGONALIZZABILE.

$\rho(B - \lambda I) = ?$

$B - I = \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \quad \rho(B - I) = 1$

$3 - 1 = 2 = m!$

B è DIAGONALIZZABILE!

E HANNO LA STESSA DIAGONALE XK HANNO GLI STESSI AUTOVALORI!

$\Rightarrow \boxed{A \sim B}$

PRODOTTO SCALARE IN UNO SPAZIO VETTORIALE REALE

V, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

PRODOTTO SCALARE = FUNZIONE

$V \times V \to \mathbb{R}$

$(\bar{v}, \bar{w}) \to (\bar{v} \cdot \bar{w})$

PROPRIETÀ:

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V, \forall a \in \mathbb{R}, \bar{z} \in V$

1. COMMUTATIVA: $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$
2. ASSOCIATIVA X IL PRODOTTO PERSCALARE: $(a\bar{v}) \cdot \bar{w} = a(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \bar{v} \cdot (a\bar{w})$
3. DISTRIBUTIVA X LA SOMMA: $(\bar{v} + \bar{w}) \cdot \bar{z} = \bar{v} \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot \bar{z}$
4. $\bar{v}$ AL QUADRATO: $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$, $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$

$\boxed{(V, \cdot)}$ SONO GLI SPAZI VETTORIALI CON PRODOTTO SCALARE (SVPS)

QUELLO FATTO PRIMA (4-) È IL PRODOTTO SCALARE STANDARD = EUCLIDEO

CE NE POSSONO ESSERE TANTISSIMI ALTRI!

ESERCIZI:

1) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)$

DIMOSTRO CHE È UN PRODOTTO SCALARE (VERIFICO LE 4 PROPRIETÀ)

- COMMUTATIVA:

$(x_1, x_2) \cdot (y_1 y_2) = (2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)$

$(y_1, y_2) \cdot (x_1, x_2) = (2y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + y_2x_2)$

ESEMPIO:

$\mathbb{R}^2$, PRENDO LA BASE CANONICA:

$B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2) = ((1,0),(0,1))$

$\bar{v} = (2,1)$, $\bar{w} = (0,1)$

PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO:

$\star$ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 1$

NUOVA BASE: $B' = (\bar{f}_1, \bar{f}_2) = ((1,1),(-1,0))$

SCRIVO $\bar{v}$ E $\bar{w}$ IN FUNZIONE DELLA NUOVA BASE:

$\bar{v} = (2,1) = f_1 - f_2 = (1,-1)$

$\bar{w} = (0,1) = f_1 + f_2 = (1,1)$

$\star$ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$

NORMA

V, $\mathbb{R}$

LA NORMA È UNA FUNZIONE

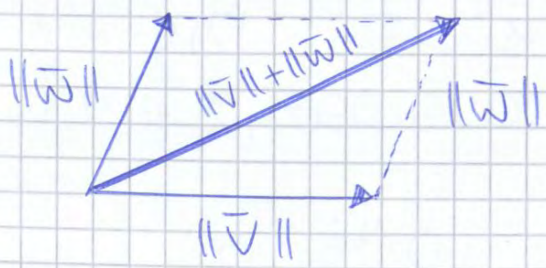
$f: V \to \mathbb{R}$

$(\bar{v}) \to (\|\bar{v}\|)$ A OGNI VETTORE ASSOCIA IL SUO MODULO

PROPRIETÀ:

1. $\|\bar{v}\| \geq 0$, $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$
2. $|a| \, \|\bar{v}\| = \|a\bar{v}\|$
3. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$$



ORTOGONALITÀ

$$\boxed{\bar{v} \perp \bar{w} \iff \bar{v} \cdot \bar{w} = 0}$$

ESEMPIO:

(1) TROVARE IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI

$$\bar{V} = \mathcal{L}((1,2,0,-1),(0,1,1,2)) = \mathcal{L}((\bar{v}_1, \bar{v}_2))$$

$$\bar{x} \,/\, \bar{x} \perp \bar{v} \quad (\forall \bar{v} \in V)$$

- PRENDO UN VETTORE GENERICO $\bar{x} = (x,y,z,t)$
- E IMPONGO SIA $\perp$ AL SISTEMA DI GENERATORI/BASE

$$\begin{cases} (x,y,z,t)\cdot(1,2,0,-1) = 0 \\ (x,y,z,t)\cdot(0,1,1,2) = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \bar{x}\cdot\bar{v}_1 = 0 \\ \bar{x}\cdot\bar{v}_2 = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ y + z + 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2z - 4t - t = 0 \\ y = -z - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2z + 5t \\ y = -z - 2t \end{cases}$$

$$(5t + 2z,\ -z - 2t,\ z,\ t)$$

$$t(5,-2,0,1) + z(2,-1,1,0)$$

(BASE) GENERATORI DELLO SPAZIO VETTORIALE CHE CERCAVO

$$V^{\perp} = \mathcal{L}((5,-2,0,1),(2,-1,1,0))$$

(2) $V, W \in \mathbb{R}^4$, VERIFICO SE SONO ORTOGONALI.

$$V = \mathcal{L}((1,1,0,0),(0,1,1,-1)) = \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$$

$$W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{matrix} 2x - y - 3z + 3t = 0 \\ x + 3y + 2z - 2t = 0 \end{matrix} \right\}$$

noi dobbiamo avere

$$\boxed{\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}}$$

ortonormalizzazione: (vedo quaderno teoria)

- v_1, lo lascio fisso, ma lo normalizzo:

$$\bar{v}_1 = \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- $$\boxed{\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}_2 - [(\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1]}{\|\bar{v}_2 - (v_2 \cdot v_1) \cdot v_1\|}}$$

→ forzo il prodotto scalare avere zero

→ poi normalizzo

infatti:

$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1$ $\quad$ [v_2 nuovo]

$$[\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1] \cdot \bar{v}_1 =$$
$$= \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 \cdot 1 = 0$$

- normalizzo $v_1 = e$
- $e_2 = \alpha e_2 + \beta e_1$

$e_2 \cdot e_1$

$(\alpha e_2 + \beta e_1) \cdot e_1 = 0$

$\alpha e_2 \cdot e_1 + \beta e_1 \cdot e_1 =$

$\alpha =$

$\beta = 1$

$$\bar{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- $$\boxed{\bar{v}_3 = \frac{\bar{v}_3 - [(\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_1)\bar{v}_1 + (\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_2)\bar{v}_2]}{\|\bar{v}_3 - [(\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_1)\bar{v}_1 + (\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_2)\bar{v}_2]\|}}$$

$$\bar{v}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

matrici ortogonali

$P \in \mathbb{K}^{n,n}$ è ortogonale se

$$\boxed{P\,{}^tP = {}^tP\,P = I \iff {}^tP = P^{-1}}$$

$\det P = \pm 1$

* se prendo una certa base $(\bar{u}, \bar{v})$ è antioraria

(ex) $B = (\bar{i}, \bar{j})$

$\bar{i}$ ruota in modo antiorario di $\pi/2$ x andare su $\bar{j}$

* le matrici ortogonali con determinante uguale a 1 sono dette speciali

- $\boxed{\text{ROTAZIONI} : O_{\bar{i}\bar{j}} \to O I J}$

centro fisso
cambio gli assi

CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO = = CAMBIAMENTO DI BASE

! P ortogonale, speciale
con sulle colonne le componenti di I, J rispetto a $\bar{i}, \bar{j}$

le relazioni sono:

$$\boxed{\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}}$$

$x = Py \quad y = {}^tPx$

- x componenti del vettore nel vecchio riferimento
- y componenti del vettore nel nuovo rif.

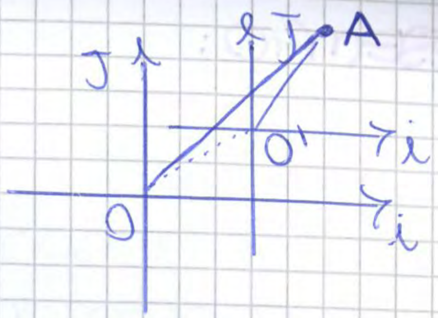
ESEMPIO

data $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ verificare che è ortogonale-speciale

ovvero verificare che è la matrice di una rotazione e

trovare le equazioni del cambio di

- TRASLAZIONE



$$\boxed{O\bar{i}\bar{j} \to O'\bar{i}\bar{j}}$$

- $O' = (a,b)$

- $A = (x,y)$ RISPETTO A $O\bar{i}\bar{j}$
- $A = (x',y')$ " " $O'\bar{i}\bar{j}$

$(A-O) = (A-O') + (O'-O)$ (x la somma di vettori)

in componenti:

$(x,y) = (x',y') + (a,b)$

$$\boxed{\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}}$$

MATRICI SIMMETRICHE REALI

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica

$\Rightarrow \exists P$ ortogonale (e invertibile) /

$P^{-1}AP$ è diagonale

(A è sempre diagonalizzabile)

${}^tPAP$ è diagonale

$\Rightarrow$ gli autospazi sono tra loro ortogonali

(gli autovettori di autovalori diversi sono $\perp$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 157 di 488

$$\bar{w}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

LA MATRICE DIAGONALE SARÀ NATURALMENTE:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

FORME QUADRATICHE

FORME = POLINOMI OMOGENEI

QUADRATICHE = DI GRADO 2

$$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

SI ESPRIME COME UN POLINOMIO OMOGENEO DI GRADO 2:

$$\boxed{q(x_1, x_2 \dots x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots a_{nn}x_n^2}$$

POSSO ANCHE SCRIVERLO IN FORMA MATRICIALE:

$$\boxed{(x_1 \dots x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^tX \cdot AX}$$

DOVE A È LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA (COEFFICIENTI)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{nn} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{nn} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

RICORDO $\frac{a_{12}}{2}$

TERMINI MISTI

A È SIMMETRICA!

TERMINI AL QUADRATO

ESERCIZIO:

1. DATA $q = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + \frac{2}{3}x_2x_3 - 3x$
   STABILIRE IL SEGNO:

- SCRIVO LA MATRICE A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 5 & \frac{1}{3} & -3 \end{pmatrix}$$ è una matrice simmetrica reale

- CERCO AUTOVALORI:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 5 \\ -1 & -\lambda & \frac{1}{3} \\ 5 & \frac{1}{3} & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)\left[(-\lambda)(-3-\lambda) - \frac{1}{9}\right] + 1\left[3+\lambda - \frac{5}{3}\right]$$
$$+5\left[-\frac{1}{3} + 5\lambda\right] = (2-\lambda)\left(3\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{9}\right) + 3 + \lambda - \frac{5}{3}$$
$$-\frac{5}{3} + 25\lambda = \left(6\lambda + 2\lambda^2 - \frac{2}{9} - 3\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{1}{9}\lambda - \frac{10}{3}\right.$$
$$\left.+3 + \lambda + 25\lambda\right)$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{289}{9}\lambda - \frac{5}{9}$$ non riesco a trovare gli autovalori

USO LA REGOLA DI CARTESIO:

> CONTO I CAMBI DI SEGNO = 2 ! = numero autovalori positivi

$\Rightarrow$ $p = 2$

0 non può essere una radice del polinomio
$\Rightarrow$ $z = 0$ = numero delle volte che posso raccogliere λ

allora $n = 1$ (se dovrei avere 3 radici)

QUESTA FORMA È NON DEFINITA!

29 Maggio 2012

TEOREMA DI SILVESTER e SEGNATURA

DATE $q, r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ IN FORMA CANONICA

q È EQUIVALENTE A r $\Leftrightarrow$ SE IL NUM DEI COEFF. POSITIVI E IL NUM. DEI COEFF. NEGATIVI SONO UGUALI X q E r

$\sigma(q) = P - N$	SEGNATURA

FORMA NORMALE: $\longrightarrow$ I PRIMI COEFF SONO = A 1 E GLI ALTRI SONO = A −1

$$q(z_1, \dots z_n) = a_{11} z_1^2 + \dots + a_n z_n^2$$

$a_1, a_2, \dots a_i > 0$

$a_{i+1}, \dots a_n < 0$

LA FORMA NORMALE DIVIDE COEFF POS E/ NEG

POSITIVI NEGATIVI

$$q'(y_1, \dots y_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_n^2$$

CAMBIAMENTO LINEARE DI VARIA z_i BIU X = OTTENERE LA FORMA NORMALE

$$\begin{cases} y_i & \text{se } a_i = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{|a_i|}} y_i & \text{se } a_i \neq 0 \end{cases}$$

SE IL COEFF È UGUALE A ZERO LO LASCIO STARE

SENNÒ LO DIVIDO X AVER COEFF = 1

ex $\quad a_1 z_1^2 = a_1 \left(\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} x_1 \right)^2 = \dfrac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}} x_1^2$!!

q e r (CON STESSI P e N)

$q \to q'$, $r \to q'$ $\Longrightarrow$ $q \equiv q'$, $q' \equiv r$ $\Rightarrow q \equiv r$

X LA PROPRIETÀ TRANSITIVA

DUE FORME QUADRATICHE SONO UGUALI $\Leftrightarrow$ HANNO LA STESSA FORMA NORMALE

METODO 2

$q(x_1, \dots x_n)$ FORMA QUADRATICA

MATRICE ASSOCIATA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

CALCOLO I MINORI DI NORD-OVEST

- $d_1 = a_{11}$
- $d_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\vdots$

- $d_n = \det A$

HO ASSOLUTAMENTE BISOGNO CHE

$d_1 \overset{\neq 0}{=} d_2 \overset{\neq 0}{=} d_n \neq 0$ DEVONO ESSERE TUTTI DIVERSI DA ZERO

SE È COSÌ, METTO IN LINEA:

- $1, d_1, d_2, \dots d_n$ E CONTIAMO I LORO CAMBI DI SEGNO

ESSI DANNO IL NUMERO DI $\boxed{\text{COEF. NEGATIVI}}$ IN UNA QUALUNQUE FORMA CANONICA DI q.

VUOL DIRE CHE $d_n = \det A \neq 0$

DIAGONALIZZANDO A, TROVO UNA MATRICE DIAGONALE CON GLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE SICURAMENTE NON NULLI.

$\Rightarrow P = n - N$

COEF POSITIVI = NUMERO AUTOVALORI − COEF NEGATIVI

$\partial(q) = P - N$ → NUMERO $d_{(n)}$

$$y^2 - 2y + 1 - 1 - 2x - 5 = 0$$
$$(y-1)^2 - 2x - 6 = 0$$
$$(y-1)^2 - 2(x+3) = 0$$
$$\underbrace{(y-1)^2}_{Y} = 2\underbrace{(x+3)}_{X}$$

QUADRATI COMPLETATI DA UNA PARTE, DALL'ALTRA TUTTI IL RESTO

$$\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = y - 1 \\ X = x + 3 \end{cases}$$

CAMBIO DI VARIABILI DELLA TRASLAZIONE

$$Y^2 = 2X \qquad X = \frac{Y^2}{2}$$ PARABOLA

CONICHE IN FORMA CANONICA

UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO RAPPRESENTANTE UNA CONICA IN FORMA CANONICA È DI 2 TIPI:

1. $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$
2. $\beta y^2 = 2\gamma x \;/\; \beta x^2 = 2\gamma y$

CLASSIFICAZIONE (1)

- TUTTI I COEFFICIENTI CHE COMPAIONO NELL'EQ. SONO TUTTI DIVERSI DA ZERO

COEFF $\neq 0$

(1) ELLISSE / IPERBOLE

NEX SOLUZ. REALE: α, β CONCORDI E γ DI SEGNO OPPOSTO

ex $3x^2 + 2y^2 = -11$

ELLISSE IMMAGINARIA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow q(x,y)$$

MATRICE DEI TERMINI DI SECONDO GRADO DELLA CONICA

IN FORMA MATRICIALE:

$$f(x,y) = (x,y,1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$ COME X LE FORME QUADRATICHE

SOLO TERMINI DI 2° GRADO:

$$(x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DELLE MATRICI

COSA CAPITA ALLE MATRICI SE CAMBIO LE COORDINATE?

$$Oxy \rightarrow O'XY$$

$$\bar{i}\bar{j} \qquad \bar{I}\bar{J}$$

BASI ORTONORMALI E ARBITRARIE

CI SONO DELLE ROTOTRASLAZIONI:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

$x = PY + O'$

$\rightarrow y = {}^tP(X - O')$

P: MATRICE ORTOGONALE SPECIALE
MATRICE DEL CAMBIO DI BASE DA ij A $\rightarrow IJ$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = COORDINATE DI O' NEL SISTEMA VECCHIO

DEFINIAMO $Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

CON $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$ ROTAZIONE DEL PIANO

TROVO:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \text{BASI DEGLI AUTOSPAZI ORTONORMALIZZATE!}$$

e se $\det P = -1 \Rightarrow$ SCAMBIO ~~RIGHE~~/COLONNE

$$P = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{11} \\ p_{22} & p_{12} \end{pmatrix}$$

anche senza scambio colonne se $\det P = 1$

$\downarrow \bar{I}$ (1° colon) $\quad \downarrow \bar{J}$ (2° colon)

NUOVA BASE ORTONORMALE ANTIORARIA

SOSTITUISCO $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ in $f(x,y)=0$

USO COMPLETAMENTO DEI QUADRATI

$\Downarrow$

$f(X,Y)=0$

CLASSIFICAZIONE (2)

se non conosco le equazioni canoniche

$f(x,y)=0$ con A, B matrici associate

* $\det B$ < $=0$ CONICA DEGENERE; $\neq 0$ CONICA NON DEGENERE

se $\det B \neq 0$

* $\det A$ <
  - $=0$: PARABOLA
  - >0 : ellisse o ellisse immaginaria
    - $\mathrm{Tr}A \cdot \det B < 0$ E. REALE (CIRC
    - $\mathrm{Tr}A \cdot \det B > 0$ E. IMMAGINARIA
  - <0 : IPERBOLE

$\det B = 2(-1)^4 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$

non è degenere

$\det A = 0 \Rightarrow$ PARABOLA

(se $x^2 + 2xy + y^2$ è un quadrato perfetto $\Rightarrow$ è una parabola)

$(x+y)^2 + 4x = 0$

asse della parabola è // a

$x + y = 0$ $(1,1)$

se trovo il vertice è come se avessi O'

la tangente nel vertice è $\perp$ all'asse:

$-x + y = h$ $(-1,1)$

$$\begin{cases} x + h = y \\ x^2 + y^2 + 2xy + 4x = 0 \end{cases}$$

metto a sistema tang. vertice con la conica

$x^2 + (x+h)^2 + 2x(x+h) + 4x = 0$

$4x^2 + 4xh + 4x + h^2 = 0$

$4x^2 + x(4h+4) + h^2 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow 4(h+1)^2 - 4h^2 = 0$

$\cancel{4h^2} - \cancel{4h^2} + 4 + 8h = 0$

$h = -\frac{1}{2}$

la tangente nel vertice è

$y = x - \frac{1}{2}$

la sostituisco nella conica:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 173 di 488

- PER $\lambda = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} \cancel{-x+y=0} \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$x = y$

VETT. GENERICO : $(x, x) = \bar{w}$

GENERATORE : $x(1,1) = \bar{w}$

$$\|\bar{w}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

NORM $\bar{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

HO TROVATO $\boxed{P}$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ \bar{v} & & \bar{w} \end{matrix}$$

$\det P = 1$ (NON SCAMBIO)

P È ORTOGONALE SPECIALE !!

È LA MIA MATRICE DELLA ROTAZIONE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to O' = \text{VERTICE}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{Y} - \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{Y} - \frac{3}{4} \end{cases}$$

SOSTITUISCO POI NELL'EQ. VECCHIA

RIPRENDO:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y \end{cases}$$

EQUAZIONI DELLA ROTAZIONE

SOSTITUISCO QUELLE APPENA TROVATE IN FUNZIONE DI X' e Y'

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' - \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' - \frac{3}{4} \end{cases}$$

EQUAZIONI DELLA FORMA CANONICA (SOSTITUISCO NELLA INIZIALE)

2) STUDIO LA CONICA

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$$

CERCO LE MATRICI ASSOCIATE

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det B =$ RISPETTO ALLA TERZA RIGA x LAPLACE

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) - 1\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0$$

LA CONICA È DEGENERE

$$\det A = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \rho(B) = 2$$

SONO 2 RETTE REALI INCIDENTI

SCELGO UNA VARIABILE CHE COMPARE AL SECONDO GRADO E VEDO L'EQ COME IN FUNZIONE DI ESSO: ex (x)

$$x^2 + x(3y+1) + (2y^2 + 2y) = 0$$

* passa per $P_0(x_0,y_0)$
ed è // a $\bar{w}(l,m)$ con $(l,m) \neq (0,0)$

$P - P_0 = t\bar{w}$ deve essere un multiplo

$P = P_0 + t\bar{w}$ l,m sono i parametri direttori

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$$

ex $P_0(1,1)$ // $\bar{v} = (3,-1)$

$$\begin{cases} x = 1 + t3 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

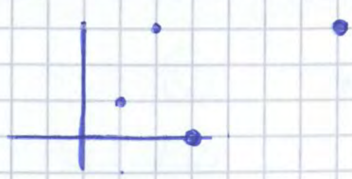
x passare alla forma cartesiana esplicito t e la elimino

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ t = 1 - y \end{cases} \Rightarrow x = 4 - 3y$$

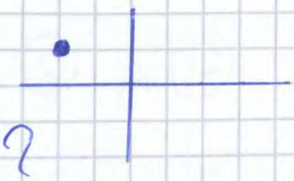
Possiamo avere $\bar{v}$ $\perp$ alla retta, ma anche i suoi versori: $norm(\bar{v}) = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$

* passa per 2 punti

COMPITO: pg 54 volume 2



- $P_1(1,1)$, $P_2(2,3)$, $P_3(4,5)$
- $P_1(2,4)$, $P_2(-2,1)$, $P_3(6,7)$



La terna di punti è allineata?

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - x_2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$= \frac{+4}{\ldots} = \frac{4}{\ldots}$$

PERPENDICOLARITÀ

* ① ⊥ ① ⟺ $\boxed{\bar{v} \perp \bar{w}}$
* ① ⊥ ② ⟺ $\boxed{\bar{v} \parallel \bar{z}}$
* ② ⊥ ② ⟺ $\boxed{\bar{z} \perp \bar{z}'}$
* ③ ⊥ ③ ⟺ $mm' = -1$ — m e m' antireciproci

RETTE COMPLESSE

hanno come coeff dei numeri complessi e vivono nel piano complesso $\mathbb{C}^2$, dove ogni punto è individuato dalla coppia $(a+ib, c+id)$

RETTE EQUIVALENTI

$ax + by + c = 0 \longrightarrow$ eq. retta

$\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ||

$\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0 \longrightarrow$ eq. stessa retta

ESERCIZIO:

① Trovare l'∩ delle 2 rette complesse

$a: (2-i)x + iy - (3+i) = 0$

$b: (2i-1)x + y - 3i - 1 = 0$

complesse coniugate = coeff. rette complessi coniugati

moltiplico x una costante apposita.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 488

2) DETERMINARE IL CENTRO DEL FASCIO

$$(\lambda - 2\mu)x + (2\lambda - \mu)y + 3\lambda = 0$$

FASCI DI RETTE

CENTRO DEL FASCIO = PUNTO x CUI PASSANO TUTTE LE RETTE DEL FASCIO

- ANNULLO x, POI ANNULLO y:

$\lambda - 2\mu = 0$ | $2\lambda - \mu = 0$
$\lambda = 2\mu$ | $2\lambda = \mu$
$3\mu y + 6\mu = 0$ | $-3\lambda x + 3\lambda = 0$
$3y + 6 = 0$ | $-3x + 3 = 0$
$y = -2$ | $x = 1$
ORDINATA DEL CENTRO DEL FASCIO | ASCISSA DEL CENTRO DEL FASCIO

$$C = (1, -2)$$

CIRCONFERENZA

EQ. CANONICA

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

CENTRO $= (\alpha, \beta)$

RAGGIO $= r$

EQ. CARTESIANA:

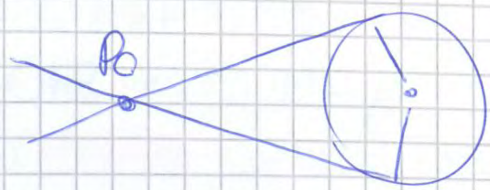
$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

- NO TERMINE MISTO
- x^2 e y^2 HANNO LO STESSO COEFF

COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = l$$

* TANGENTE x UN PUNTO ESTERNO ALLA CIRCO



ESERCIZIO:

1) SI CONSIDERI L'EQ. DELLA CIRCO $\rho = 3$ IN COORDINATE POLARI. SCRIVO CENTRO EQ. CARTE, EQ. PARA E DISEGNARLA.

$C = (0,0) \longrightarrow$ NEL POLO

$\rho = r \longrightarrow r = 3$

EQ. PARA:

$$\begin{cases} x = 0 + 3\cos t \\ y = 0 + 3\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos t = \frac{x}{3} \\ \sin t = \frac{y}{3} \end{cases}$$

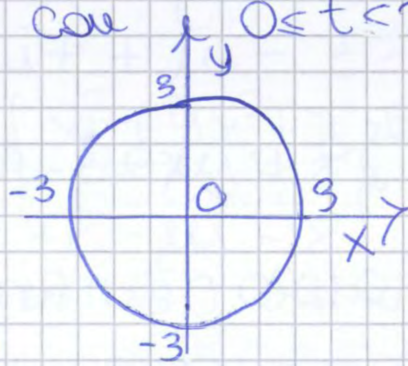
EQ. CARTE:

TOLGO IL PARAMETRO DALLE EQ. PARA

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ CON $0 \le t \le 2\pi$

$$1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$



2) QUALE DELLE SEGUENTI EQUAZIONI RAPPRESENTA UNA CIRCO?

1 - $2x^2 + y^2 - 3x + 6y - 3 = 0$ ×

2 - $3x^2 + 3y^2 - 6y - 27 = 0$ ✓

3 - $x^2 + y^2 + xy - 6x - 4 = 0$ ×

STUDIO LA 2 - :

nel fascio di circonferenze individuato da $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ trovare l'eq. dell'asse radicale, le coordinate degli eventuali punti base, l'eq. dell'asse centrale e l'eq. della circ. del fascio avente raggio minimo.

Fasci di circonferenze

Eq. fascio: $\lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2 = 0$

$$\lambda(x^2+y^2-2y-9) + \mu(x^2+y^2+3x-y-10) = 0$$

- asse radicale = unica retta del fascio

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-9=0 \\ x^2+y^2+3x-y-10=0 \end{cases}$$

faccio la differenza

$$// \quad // \quad 3x+y-1=0 \; : \; r$$

- coordinate punti base = eventuali punti comuni alle circonferenze del fascio

$\mathcal{C}_1 \cap r$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-9=0 \\ y=-3x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+9x^2+1\cancel{-6x} \\ \cancel{+6x}-2-9=0 \\ y=-3x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x^2 \quad -10=0 \\ y=-3x+1 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A(1,-2) \\ B(-1,4) \end{matrix}$$

$$C = M_{AB} = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (0,1)$$

$$r = d(A,M) = \sqrt{(0-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow \partial_1$$

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

* Retta

- per P_0 // $\bar{v}$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$\bar{v} = (l, m, n)$ = parametri direttori

- esplicito t:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-x_0}{l} \\ t = \dfrac{y-y_0}{m} \\ t = \dfrac{z-z_0}{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} \\ \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

ESEMPIO:

$P_0(1,2,3)$ // $\bar{v} = (1,1,-1)$

$$r \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad Q = (2,3,5) \in r?$$

$$\begin{cases} 2 = 1 + t \\ 3 = 2 + t \\ 5 = 3 - t \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow Q \notin r$$

ESERCIZIO:

1) Date le rette:

$$r \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

② DATE LE 3 RETTE:

$r: \begin{cases} x-2y=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ $\qquad t \begin{cases} x-9z-1=0 \\ x-y-2z-3=0 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases}$

STUDIARE LA MUTUA POSIZIONE

$\boxed{rs}$ • PARALLELE • INCIDENTI • SGHEMBE

!
r : IN UNA EQ. COMPAIONO SOLO 2 VARIABILI
→ PASSO ALLA RAPPR. PARAMETRICA

$\begin{cases} x=2y \\ y-2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y \\ z=\frac{y}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=2t \\ z=\frac{t}{2} \\ y=t \end{cases} \qquad // \bar{r}\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

$s : // \bar{s} = \bar{v} \times \bar{w}$

$\begin{cases} \perp \pi : (1,-1,1)=\bar{v} \\ \perp \pi'' : (1,-1,-2)=\bar{w} \end{cases}$

$// \bar{s} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = (3,3,0)$

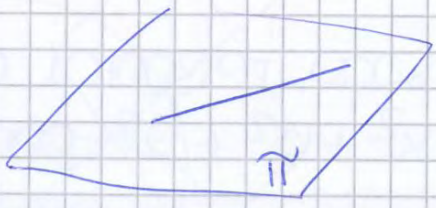
$\bar{r}, \bar{s}$ NON SONO PROPORZIONALI
* r e s NON SONO //
$\bar{r} \cdot \bar{s} = 0 \neq 9$
* r e s NON SONO $\perp$

③ Trovare gli eventuali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ tali che la **retta**

$$r \begin{cases} x + ky + z = h \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

è contenuta nel piano $\pi \quad 2x + y = 3$

$r \subseteq \pi$



se metto a sistema le 3 equazioni ottengo **∞^1** soluzioni

$$\boxed{\rho(A) = \rho(A,B) = 2}$$

$$\begin{cases} x + ky + z = h \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & h \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & h \\ 2 & k-1 & 0 & 2+h \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & h \\ 2 & k-1 & 0 & 2+h \\ 0 & 2-k & 0 & 1-h \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} k = 2 \\ h = 1 \end{array}$$

Kronecker:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \rho(A) \geq 2 \\ \rho(A,B) \geq 2 \end{array}$$

Tutti i minori di ordine magg. devono essere uguali a zero

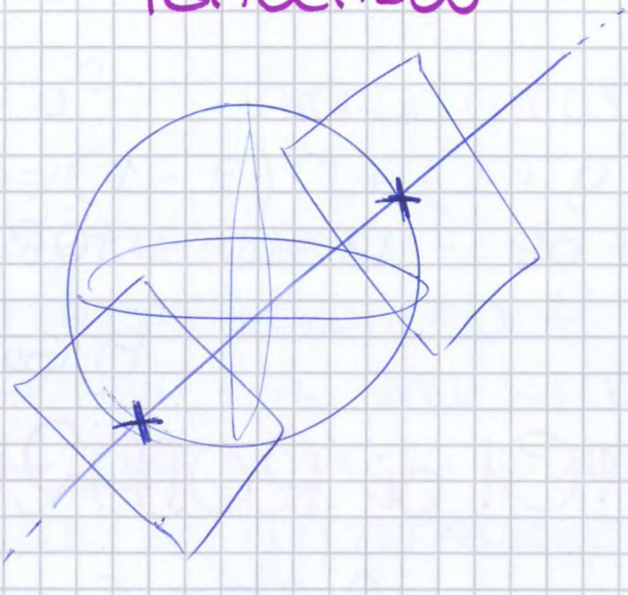
$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad k = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & h \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad h = 1$$

Se fosse stata in forma param. sostituivo le eq nel piano, e dovevano essere verificate $\forall t$

$$s \begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 5t - 11 \\ z = -4t + 9 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

TANGENZA



$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49$$

$\cap$ con la retta s

$$(3t-3)^2 + (5t-12)^2 + (-4t+14)^2 = 49$$

$$50t^2 - 250t + 300 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{array}$$

PUNTO P_1

$$\begin{cases} x = 9 - 5 = 4 \\ y = 15 - 11 = 4 \\ z = -12 + 9 = -3 \end{cases}$$

$P_1(4, 4, -3)$

PUNTO P_2

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$P_2(1, -1, 1)$

STESSE REGOLE x (RETTA - CERCO) tg:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 10$$

$\cap P_1$ $\cap P_2$

ESERCIZIO:

1. SCRIVERE LE EQUAZ. PARAMETRICHE E LE EQUAZ. CARTESIANE DELLA SUPERFICIE S OTTENUTE DALLA ROTAZIONE DI

$$L \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases} \quad \text{INTORNO ALL'ASSE } x$$

CURVA = MERIDIANO

PRENDO UN PUNTO GENERICO $\in S$ STA SULLA SUPERFICIE $\iff$ STA SU UNA CIRCO (DEL PIANO $\perp$ ALL'ASSE x) CON CENTRO SULL'ASSE x E INCONTRA L (UN MERIDIANO)

- PIANI $\perp$ ALL'ASSE x

  $x = u$

- C SULL'ASSE x : $C = (u, 0, 0)$

- $d(P,C) = \sqrt{(u-u)^2 + (u^2-0)^2 + (u^3-0)^2}$

  $(P \in L)$ GENERICO

$d(P,C) = \sqrt{u^4 + u^6}$ = RAGGIO CIRCO

$$\Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{u^4+u^6}\cos v \\ z = \sqrt{u^4+u^6}\sin v \end{cases} \quad \text{EQUAZIONI PARAMETRICHE}$$

- x PASSARE ALLE CARTESIANE

$$\begin{cases} x^2 = u^2 \\ y^2 = (u^4 + u^6)\cos^2 v \\ z^2 = (u^4 + u^6)\operatorname{sen}^2 v \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = (u^4 + u^6)(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 197 di 488

★ $\det A = 0$ Q. DEGENERE (ALLORA NON HA RANGO 4)

$\rho(A) = 2$: • 2 PIANI DISTINTI ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ coniug)

$\rho(A) = 1$: • PIANO DOPPIO

$\rho(A) = 3$: • CONO : $\det B \neq 0$
• CILINDRO : $\det B = 0$
(CON PUNTI $\mathbb{R}$ O $\mathbb{C}$)

★ $\det A \neq 0$ Q. NON DEGENERE

$\det B \neq 0$: • $\det A < 0$
- AUTOVALORI B CONCORDI: ELLISSOIDE
- AUTOVALORI B DISCORDI: IPERBOLOIDE ELLITTICO (1 falda)

• $\det A > 0$
- AUTOVALORI B CONCORDI: ELLISSOIDE IMMAGINARIO
- AUTOVALORI B DISCORDI: IPERBOLOIDE IPERBOLICO (2 falda)

$\det B = 0$: • $\det A > 0$
PARABOLOIDE IPERBOLICO

• $\det A < 0$
PARABOLOIDE ELLITTICO

FORMA CANONICA (NON DEGENERI)

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \\ \alpha x^2 + \beta y^2 = 2\delta z \end{array}}$$

★ α, β, δ SONO GLI AUTOVALORI DI B

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha\beta\gamma\delta = -d \\ \alpha\beta\delta^2 = -d \end{array}}$$

$(d = \det A)$

COMPITI

CLASSIFICO LE QUADRICHE E SCRIVO LA FORMA CANONICA

1. $x^2 - xy + xz - yz - x + y = 0$
2. $x^2 - 2xy - 3xz + y - 4z = 0$

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = +\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = +\frac{1}{16} \neq 0$$

QUADRICA NON DEGENERE:

$$\det B = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e $\det A > 0 \Rightarrow$ PARABOLOIDE IPERBOLICO!

AUTOVALORI B:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\lambda\left((\lambda)(1-\lambda) + \frac{1}{2}\right) = \lambda\left(\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

CONI CILINDRI PROIEZIONI

CILINDRO

Una superficie S è un cilindro se è unione di rette // ad una stessa retta (o ad uno stesso vettore)

- le rette // sono le **generatrici** del cilindro
- la curva contenuta in S che incontra tutte le generatrici del cilindro, è la **direttrice**

ESERCIZIO

① • Calcolare l'equazioni del cilindro che ha come direttrice la circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

circo come $\cap$ di sfera e piano

e generatrici // asse z.

• Studiare la curva intersezione del cilindro con piano $x = 0$

generatrici // z → bisogna togliere z dall'equazione della circo

- $x^2 + y^2 = 9$ eq. cartesiana del cilindro

- Interseco con $x = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 203 di 488

COMPITO: EQ CIL. CON CURVA PARA

Consideriamo la curva $\mathcal{L}$ e la retta r

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \qquad r = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

e trovare l'equazione che ha $\mathcal{L}$ come direttrice e generatrice // a r.

- $/\!/ \bar{r} = \bar{\pi} \times \bar{\pi}'$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-3, 1, 2) \;/\!/\; \bar{r}$$

- $$\begin{cases} x = x(t) - 3s \\ y = y(t) + s \\ z = z(t) + 2s \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t^2 - 3s \\ y = 2t + s \\ z = 2s \end{cases}$$

EQ CILINDRO:
- data L param $\Rightarrow$ EQ. PARA
- data L carte $\Rightarrow$ EQ. CARTE

(idem x i coni)

EQUAZIONE PARAMETRICA DEL CILINDRO

$$\begin{aligned} x &= x(t) + s\ell \\ y &= y(t) + sm \\ z &= z(t) + sn \end{aligned} \qquad /\!/ \bar{r}\ (\ell, m, n) \qquad L \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

CONO = UNIONE DELLE RETTE PASSANTI X IL VERTICE E PER UN PUNTO VARIABILE DELLA CURVA

EQ. CONO CON L CARTE

$P_0 \in \mathcal{L}$ (PUNTO VARIABILE)

P_0 DEVE SODDISFARE L'EQUAZIONE

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 2y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

UNICO SISTEMA

EQUAZIONE VP_0:

$$\begin{cases} x = 0 + x_0 t \\ y = 0 + y_0 t \\ z = 5 + (z_0 - 5)t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = 5 + (z_0 - 5)t \end{cases}$$

eliminare i parametri x_0, y_0, z_0, t: come x il cilindro

$$\begin{cases} x = x_0 t & \longrightarrow x_0 = x / 1 - \frac{z}{5} \\ y = y_0 t & \longrightarrow y_0 = y / 1 - \frac{z}{5} \\ z = 5 + (z_0 - 5)t & \longrightarrow t = 1 - \frac{z}{5} \\ x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 2y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

SOSTITUISCO

$$\left(\frac{5x}{5-z}\right)^2 + \left(\frac{5y}{5-z}\right)^2 - 4\left(\frac{5x}{5-z}\right) - 2\left(\frac{5y}{5-z}\right) = 0$$

$$\frac{25x^2}{(5-z)^2} + \frac{25y^2}{(5-z)^2} - \frac{20x}{5-z} - \frac{10y}{5-z} = 0$$

$$\frac{25x^2 + 25y^2 - 20x(5-z) - 10y(5-z)}{(5-z)^2} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 20xz - 50y + 10z = 0$$

FUNZIONI VETTORIALI

in $\mathbb{R}^3$

$$f : I \to \mathbb{R}^3 \qquad I \subseteq \mathbb{R}$$

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

FUNZIONE VETTORIALE

un luogo $\mathcal{L}$ di punti $P = (x, y, z)$ / le coordinate di P sono funzioni di un parametro reale t si dice
CURVA PARAMETRICA (retta, cerchio)

in generale:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

LIMITI DI FUNZIONI VETTORIALI

$$\lim_{t \to t_0} P(t) = P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0$$

= i limiti si calcolano x componenti

CURVA REGOLARE

una funz. vett. $P = P(t)$, $t \in I$ è regolare se
- iniettiva $(\forall t_1, t_2 \in I,\ t_1 \neq t_2 \Rightarrow P(t_1) \neq P(t_2))$
- C^∞
- $P'(t) \neq 0,\ \forall t \in I$

ESERCIZI: verifico sia una curva regolare

$P(t) = (\cos t, -\sin t, 10t)$
- C^∞ ok (seni, coseni, polinomi... sono C^∞)
- $t_1 \neq t_2 \rightarrow 10t_1 \neq 10t_2$ è iniettiva
- $P'(t) = (-\sin t, -\cos t, 10) \neq 0$

è una curva regolare

LUNGHEZZA D'ARCO

$I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$\gamma : I[a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

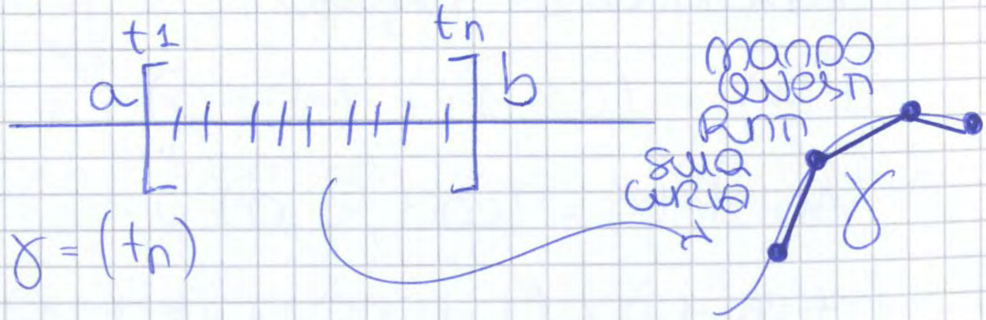
suddivisione di $I = [a,b]$ è un insieme di punti $a = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = b$

e faccio l'immagine

$\gamma = (t_1)$,

$\gamma = (t_2)$, ...

$\gamma = (t_n)$



unisco i punti della curva e ottengo una poligonale!

ad ogni suddivisione di $[a,b]$ associo una poligonale: corrispondenza biunivoca

ESERCIZIO:

$$\gamma : [-2\pi, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (\cos t, \sin t, t)$$

$$L_\gamma t = \int_{-2\pi}^{t} \|\gamma'(u)\| du =$$

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$
$$\gamma'(u) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 1)$$

$$L_\gamma t = \int_{-2\pi}^{t} \sqrt{\underbrace{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}_{1} + 1}\, du = \int_{-2\pi}^{t} \sqrt{2}\, du$$

$$= \sqrt{2}\, t + 2\sqrt{2}\, \pi$$

SE VOGLIO LA LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO, SOSTITUISCO $t = 4\pi$

$$L_\gamma([-2\pi, 4\pi]) = 6\sqrt{2}\,\pi$$

PRENDIAMO UNA SUDDIVISIONE (SCELTA DA ME, FACILE!)

$-2\pi < 2\pi < 4\pi$ CALCOLO I PUNTI DELLA CURVA

$\gamma(-2\pi) = (1, 0, -2\pi)$
$\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$
$\gamma(4\pi) = (1, 0, 4\pi)$

P_1 = POLIGONALE ASSOCIATA

$$L(P_1) = \|\gamma(2\pi) - \gamma(-2\pi)\| + \|\gamma(4\pi) - \gamma(2\pi)\| =$$
$$= \|(0, 0, 4\pi)\| + \|(0, 0, 2\pi)\| =$$
$$= 6\pi < 6\sqrt{2}\pi$$

12 Giugno 2012

GEOMETRIA DIFFERENZIALE delle CURVE

ascissa curvilinea

curva regolare $P = P(t)$

$P_0 = P(t_0) =$ origine

L'ascissa curvilinea di $P = P(t)$ è $L(P_0, P)$ dove P è un punto generico.

$\Longrightarrow$ parametrizzazione intrinseca

ESERCIZIO:

① Data $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ definita per $t \in I = [0, 2\pi]$, essa è parametrizzata con l'ascissa curvilinea?

$$\boxed{\|\gamma'(t)\| = 1, \ \forall t}$$

allora la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$ SI

$L_\gamma(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \int_0^t 1 = t$

② Date le curve $(t \in \mathbb{R})$ $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $\beta(t) = (t^2, t^3, t^4)$

Rette tangenti

$$\Gamma_2 = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{(2t, 3t^2, 4t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4 + 16t^6}}$$

– REGOLARI SE
- C^∞, • INIETTIVE (SÌ → POLINOMI)
- $\alpha'(t) \neq 0$ e $\beta'(t) \neq 0$

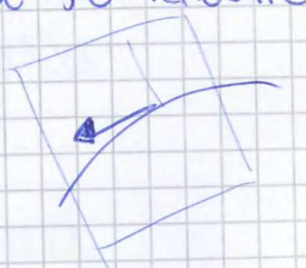
$(1, 2t, 3t^2) \neq 0$ xk c'è 1

$(2t, 3t^2, 4t^3) \neq 0$ non è detto!!

PIANO NORMALE (ALLA CURVA IN 1 PUNTO)

π PIANO NORMALE PER P_0, $\perp$ a rt TANGENTE

$$\boxed{(P - P_0) \cdot P'(t_0) = 0}$$



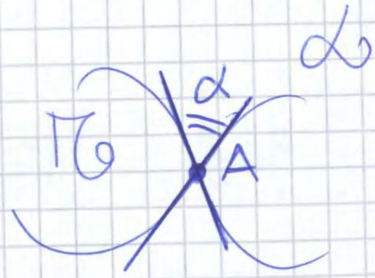
ESERCIZIO:

1) $\alpha = (t, t^2, t^3)$ $t = 1$ $P_1 = (1,1,1)$

CERCO IL PIANO NORMALE:

$$((x,y,z) - (1,1,1)) \cdot (1,2,3) = 0$$
$$((x-1, y-1, z-1)) \cdot (1,2,3) = 0$$
$$x - 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0$$
$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

ANGOLO TRA 2 CURVE



2 TRAIETTORIE CHE PASSANO X LA STESSA POSIZIONE

$\mathcal{L}: P = P(t)$

$\mathcal{M}: Q = Q(t)$ 2 CURVE

PASSANO PER IL PUNTO $A = P(t_1) = Q(t_2)$

ANGOLO TRA 2 CURVE: ANGOLO ACUTO TRA LE 2 TANGENTI ALLE 2 CURVE NEL PUNTO A

② DATA

$\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3), \quad a \in \mathbb{R}$

a) PER QUALE VALORE DI a LA CURVA È PIANA? 2 METODI

* CALCOLO IL PIANO OSCULATORE E VEDO CHE CI APPARTIENE
* TORSIONE: NUMERO X SAPERE QUANTO LA CURVA SI DISCOSTA DALL'ESSERE PIANA

$$\boxed{\alpha'(t) \times \alpha''(t) \cdot \alpha'''(t) = 0}$$ IMPONGO TORSIONE $= 0$

$\alpha'(t) = (a - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2)$

$\alpha''(t) = (-6t, 6, 6t)$

$\alpha'''(t) = (-6, 0, 6)$

$$\begin{pmatrix} a-3t^2 & 6t & 3+3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$-6\cancel{(-1)^4}\begin{pmatrix} 6t & 3+3t^2 \\ 6 & 6t \end{pmatrix} + 6\cancel{(-1)^6}\begin{pmatrix} a-3t^2 & 6t \\ -6t & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$-6\left[\cancel{36t^2} - 18 - \cancel{18t^2}\right] + 6\left[6a - \cancel{18t^2} + \cancel{36t^2}\right] = 0$$

$+108 + 36a = 0$

$a = -3$ LA CURVA È PIANA

b) ASSEGNATO AD α TALE VALORE a, CERCARE IL PIANO CHE LA CONTIENE:

* CURVA È PIANA $\Leftrightarrow$ STA SUL PIANO OSCULATORE $\forall$ PUNTO (XKÈ È UNA CURVA BIREGOLARE)

$\alpha(t) = (-3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

$$\boxed{\bar{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}}$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (t^2-1, -2t, t^2+1) \cdot 18$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 18\sqrt{2}(t^2+1)$$

$$\bar{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)} \cdot (t^2-1, -2t, t^2+1)$$

$$\boxed{\bar{n}(t) = \bar{b}(t) \times \bar{T}(t)} = \frac{1}{(1+t^2)}(-2t, -t^2+1, 0)$$

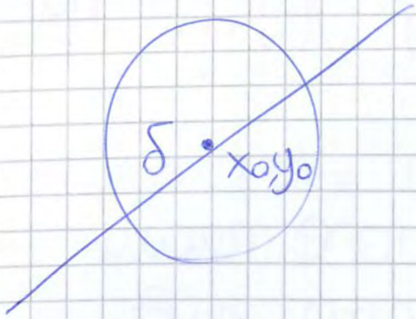
$$\boxed{k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}} \quad \text{CURVATURA}$$

$$\boxed{T(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}} \quad \text{TORSIONE}$$

IL RAGGIO DI CURVATURA È L'INVERSO DELLA CURVATURA.

$$k(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2} \qquad T(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$$

SONO UGUALI XKE È UN'ELICA



BASTA CONTROLLARE USANDO LA RETTA X IL CENTRO!!

$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad , m \in \mathbb{R}$$

CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DEL LIMITE:

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0)) = l$$

(LIMITI DIVERSI → NON $\exists$)
(LIMITI UGUALI → ALTRI CONTROLLI)

$x = x_0$, $y = y_0$

ESEMPIO:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{(2 MODI)}$$

1) PASSO $x = 0$ → $\lim_{y \to 0} \frac{-\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = -1$ $\neq$

PASSO $y = 0$ → $\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$

SONO DIVERSI → IL LIMITE NON $\exists$.

2) $y = mx$ XE $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} =$$ SOSTITUISCO LA y

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}(1 - m^2)}{\cancel{x^2}(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$ → IL LIMITE NON ESISTE XE m PUÒ ASSUMERE

(SE m SI CANCELLA)

$\alpha = \widehat{rs}$

$$\boxed{f_{\bar{u}}(P_0) = tg\,\alpha}$$

DERIVATE PARZIALI = DERIVATE LUNGO I VERSORI FONDAMENTALI

GRADIENTE

$\nabla : f : I \to \mathbb{R}^n \qquad (n = 2,3)$

$P_0 \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla f \cdot \bar{u} = grad\, f_P \cdot \bar{u}}$$

$I \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO DI $\mathbb{R}^n$

$V = \{ f : I \to \mathbb{R}$, FUNZIONI DERIVABILI $\}$

$W = \{ f : I \to \mathbb{R}^2$, FUNZIONI GENERICHE $\}$

V e W SONO SPAZI VETTORIALI
(SE DEFINISCO LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO)

$\varphi : V \to W$
$f \to grad\, f = \nabla f$ $\Rightarrow$ φ è un'applicazione lineare

$\star\ \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

$\star\ \varphi(af) = a\varphi(f)$

SVILUPPO DI TAYLOR in $P=(a_1, \dots a_n)$

$$f(P) = f(P_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0}(x_1-a_1) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{P_0}(x_n-a_n)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_{P_0}(x_1-a_1)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{P_0}(x_1-a_1)(x_2-a_2)\right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right)_{P_0}(x_n-a_n)^2\right] + o\left(\|P-P_0\|^2\right)$$

ESERCIZIO

① $f(x,y) = \text{sen}(x+2y)$

SVILUPPO in $P=\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}\right)$

$$x+2y = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(P) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2}\left(y-\frac{\pi}{16}\right) + \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + (-2\sqrt{2})\left(y-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\left(y-\frac{\pi}{16}\right)\right] + o\left(\|P-P_0\|\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+2y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos(x+2y)$$

in P

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = \sqrt{2}$$

$$f''_{xx} = -\text{sen}(x+2y) \quad , \quad f''_{yy} = -4\text{sen}(x+2y)$$

$$f''_{xy} = -2\text{sen}(x+2y)$$

in P

$$(f''_{xx})_P = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad (f''_{yy})_P = -2\sqrt{2} \quad , \quad (f''_{xy}) = -\sqrt{2}$$

x le MATRICI 2x2 !

- $\det H < 0$: sella
- $\det H > 0$: $\begin{cases} f_{xx} > 0 & \text{minimo} \\ f_{xx} < 0 & \text{massimo} \end{cases}$
- $\det H = 0$: ?

ESERCIZIO:

$f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

DOMINIO: $\mathbb{R}^2$

PUNTI STAZIONARI:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(9y^4) + y = 0 \\ x = -3y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y(1 + 27y^3) = 0 \\ x = -3y^2 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad ② \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad P_1(0,0) \quad P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

DERIVATE SECONDE:

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{yy} = 6y \qquad f''_{xy} = 1$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix} \quad (H_f)_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (H_f)_{P_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$ sella

infatti $\det (H_f)_{P_1} = -1$

) L'insieme $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;/\; x_1+x_4 = x_2+x_3 = 0 \right\}$

a) " , $\dim V = 3$

b) non è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$

c) è sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$, $\dim V = 2$

d) è generato da $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$x_1 + x_4 = x_2 + x_3$

$x_2 + x_3 = 0$

$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Sottospazio xk sono i polinomi omogenei, contiene il 0 e chiuso x somma e prodotto

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\rho(A) = \rho(A,B) = 2$

$\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni

le soluzioni di un sistema lineare omogeneo formano 1 sottospazio di $\dim = n - \rho = 2$

$x_2 = -x_3$

$x_1 + \cancel{x_3} - \cancel{x_3} + x_4 = 0$

$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_4 \end{cases}$

S $(-x_4, -x_3, x_3, x_4) =$

$= x_4(-1,0,0,1) + x_3(0,-1,1,0)$

$S = \mathcal{L}\left(\underbrace{(-1\,0\,0\,1)}_{s_1}\underbrace{(0\,-1\,1\,0)}_{s_2}\right)$

Una base di S è (s_1, s_2) . Giusta C.

) A, B matrici quadrate di ordine n

) se $\exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \exists (A+B)^{-1}$

) " " e $(A+B) \neq 0 \Rightarrow \exists (A+B)^{-1}$

) $AX = 0$ con $X \neq 0 \Rightarrow A = 0$

) $\det(A^t A) \geq 0 \wedge \det(A^t A) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$

$\dim Im f = \rho(A) = 2 \neq 3 = \dim \bar{W}$

...on è suriettivo

...m $\bar{V} = \dim Ker f + \dim Im f$

$3 = d K f + 2$

...m $Ker f = 1$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I$$

$\lambda[\lambda^2 + 1] + 2[-2\lambda + 1] - 1[2 + \lambda] = 0$

$\lambda^3 - \lambda - 4\lambda + \cancel{2} - \cancel{2} - \lambda = 0$

$\lambda(-6 - \lambda^2) = 0$

$\lambda = 0 \quad m = 1$

$6 + \lambda^2 = 0 \quad \lambda^2 = -6$ NO AUTOVALORI REALI

...on è semplice, xk $\lambda \in \mathbb{K}$.

...n particolare, $f(\bar{v})$ è $\perp$ a $\bar{v}$

...a essere semplice $\Rightarrow f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

...ndizione di $\parallel$

...unico che soddisferebbe sarebbe il vettore nullo!

...a linearità si guarda anche:

$f(\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) \times (\bar{v} + \bar{w}) =$

$= (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) \times \bar{v} + (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) \times \bar{w} =$

$= f(\bar{v}) + f(\bar{w})$

$f(a\bar{v}) = (\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) \times (\lambda \bar{v}) = \lambda((\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) \times \bar{v})) =$

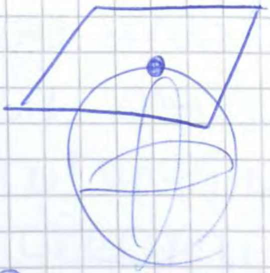
$= \lambda f(\bar{v})$

...iosta C

la curva è piana e sta nel piano $x-z=0$, $x=z$.

c) l'$\cap$ di una sfera con un suo piano tangente è un solo punto!

il piano che la contiene è $x=z$ e non è tangente



d)
$$\gamma'(t)=\begin{cases} x'=\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ y'=-\operatorname{sen} t \\ z'=\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

è impossibile annulla contemporaneamente cost e sent

$$\begin{cases} \cos t=0 \\ \operatorname{sen} t=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

e) vera.

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}+\cos^2 t+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}=R^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t=1=R^2$$

sfera con centro in $(0,0,0)$ e $r=1$

7) $f\in End(\bar{v})$, $g\in End(\bar{v})$

a) λ autovalore di f e $g \Rightarrow \lambda$ autovalore $g\circ f$

b) $\bar{v}$ autovettore " " $\Rightarrow \bar{v}$ " " "

c) 0 autovalore di $f \Leftrightarrow 0$ autovalore $g\circ f$

d) λ autov. f, μ autov. $g \Rightarrow \lambda+\mu$ autov. $f+g$

a) $f(\bar{v})=\lambda\bar{v}$, $g(\bar{v})=\lambda\bar{v}$

$$(g\circ f)(\bar{v})=g(f(\bar{v}))=g(\lambda\bar{v})=\lambda g(\bar{v})=$$
$$=\lambda^2\bar{v}$$

ex) $f=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad g\circ f=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

autoval $f \Rightarrow 1,2 \sim f=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

autoval $g \Rightarrow 3,5 \sim g=\begin{pmatrix}3&0\\ \end{pmatrix}$

8) in $\mathbb{R}_4[x]$

$p = 3x^3 + 2x$

$q = 2x^4 - 2x$

$r = 2x^4 + 3x^3$

a) $\exists$ base di $\mathbb{R}_4[x]$ che li contiene

b) $\forall$ c.l. di p e q è multiplo di r

c) $\forall$ vettore di $\mathbb{R}_4[x]$ è c.l. di p, q, r

d) ogni multiplo di r è c.l. di p, q

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \Rightarrow R_3 = R_1 + R_2 \end{array}$$

$\rho(A) = 2$

a) p, q, r sono L.D.! no base

$a(3x^3 + 2x) + b(2x^4 - 2x) = (2x^4 + 3x^3)$

$x(2a - 2b) + x^3(3a) + x^4(2b) = $ " "

$$\begin{cases} 2b = 2 \\ 3a = 3 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

b) $p + 0 \cdot q \neq r$

c) $\dim \mathbb{R}_4[x] = 5$,
solo 2 (p e q) sono L.I.
$\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, almeno!

d) giusto

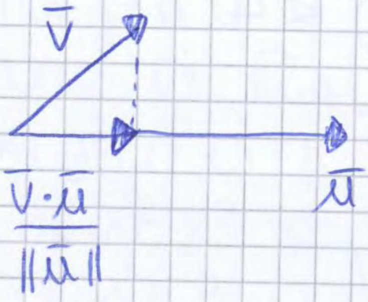
a) $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

$1 + 0 + 2 = 3 = \bar{u} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono L.I.

c) $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono L.I. (dim = 2)

d)



$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

proiezione

$$\left(\bar{v} \cdot \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}\right) \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}(1, 0, -1)$$

numero · vettore

vettore proiezione

a) $\mathbb{R}^{10}$ visto come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

a) $\dim \mathbb{R}^{10} = 10$

b) // $= 5$

c) non esiste

d) // $= 20$

$(v_1, v_2, \dots v_{10})$

moltiplicato x un numero complesso

$(v_1, v_2, \dots v_{10})(a + ib) = av_1 + iv_1 \dots$

non è più un numero reale, ma complesso!

MATRICI 2X2

- det H < 0 Sella
- det H > 0 $\begin{cases} f''_{xx} < 0 \text{ max} \\ f''_{xx} > 0 \text{ min} \end{cases}$

es:

$f(x,y) = (x^3 + y^3 + xy)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$

il (∇f) si annulla in?

$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 & y = -3x^2 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases}$

$3(-3x^2)^2 + x = 0$

$3(9x^4) + x = 0$

$x(27x^3 + 1) = 0 \qquad x = 0$

$\frac{\cancel{27}x^3}{\cancel{27}} = \frac{-1}{27} \qquad x = -\frac{1}{3}$

Punti critici:

$P_0 = (0,0)$

$P_1 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$f''_{xx} = 6x$

$f''_{xy} = 1$

$f''_{yx} = 1$

$f''_{yy} = 6y$

$Hf = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix} \xrightarrow{P_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$

$\lambda = \pm 1$ Sella

det $= -1 < 0$ Sella

> 0 e < 0

$t=3$ → ho un minimo.

$x-y=3$ retta insieme di punti di minimo.

ES:

A, B matrici quadrate di ordine n

- a) Se $\exists\ A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \exists (A+B)^{-1}$ NO
- b) Se $\exists\ A^{-1}, B^{-1}$ e $(A+B) \neq 0 \Rightarrow \exists (A+B)^{-1}$ NO
- c) $A\bar{x}=\bar{0}$ con $\bar{x}\neq\bar{0} \Rightarrow A=0$ NO

non vale la legge di annullamento del prodotto x le M

- d) $\det(A\,{}^tA) \geq 0$ e $\det(A\cdot {}^tA)=0 \Leftrightarrow \det A=0$ SI

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix} = -2$$

$\det(A\cdot {}^tA) = \det A \cdot \det {}^tA$

$\boxed{\det A = \det {}^tA}$!

PROPRIETÀ DETERMINANTI

$$ {}^tA=\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix} = -2$$

$\Downarrow$

$\det A=0$ ma anche $\det {}^tA=0$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=A \qquad {}^tA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

a - es. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

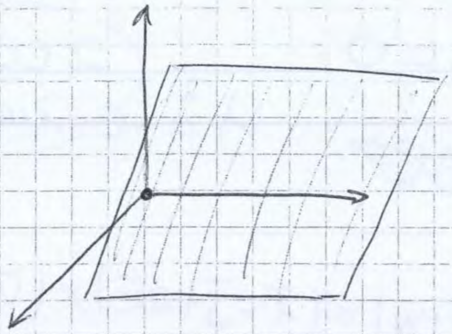
$\qquad A \qquad\qquad B$

b - e $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}$ $A+B=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$

c - $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \neq 0$

direz. reciproca di $P'(t)$ e $P''(t)$



ES: V = spazio vettoriale ordinario

$f: V \longrightarrow V$

$\bar{v} \longrightarrow (i - j + 2k) \wedge \bar{v}$

_a f è suriettiva NO

_b f semplice NO

_c la dim Ker $f = 1$ SI

_d non è lineare NO

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & -j & 2k \\ xi & yj & zk \end{pmatrix} = i(-z-2y) - j(z-2x) + k(y+x)$$

$$f(\bar{v}) = (-2y-z,\ 2x-z,\ x+y)$$

$$(Mf)^c = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim Ker$f$ = 3−2=

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$-\lambda(\lambda^2+1) + 2(-2\lambda+1)$

$-1(2+\lambda)$

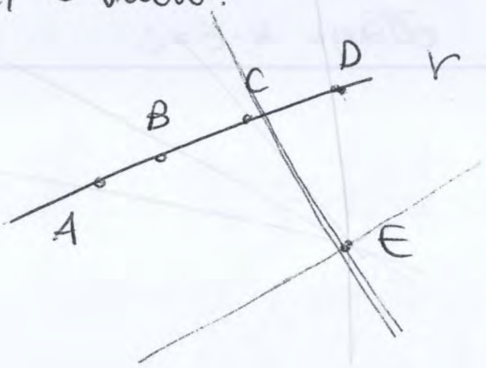
$-\lambda^3 - \lambda - 4\lambda + \cancel{2} - 2 - \lambda = 0$

$-\lambda^3 - 6\lambda = 0 \quad \lambda(-\lambda^2 - 6) = 0$

f semplice $\Rightarrow$ autovalori tutti nel campo e dim V_1 = molteplicità ch

ES Nel piano consideriamo 4 punti distinti di una retta r e (1)
A, B, C, D e un punto $E \notin r$.
L'insieme delle coniche passanti per ABCDE:

- a) contiene una retta doppia.
- b) contiene un'iperbole non degenere. $\Rightarrow$ non è prodotto di rette.
  NON POSSO AVERE 4 PUNTI ALLINEATI
- c) è un fascio (SI)
- d) è vuoto.



$r: ax + by + c = 0$

Devo trovare una curva di grado 2.

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0$$

la mia curva sarà il prodotto di

$$(\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0)) \cdot (ax + by + c) = 0$$

è una conica degenere.

ES: La curva:

$$\gamma: \begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ y = \cos t \\ z = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

a - non è piana NO

b - è contenuta in una sfera di centro (0,0,0) SI

c - è l'intersezione di una sfera con un piano tg alla sfera NO
= OVVERO 1 PUNTO

d - ha vettore tg nullo in almeno 2 punti. NO

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y' = -\sin t \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t \end{cases}$$

$ax + by + cz + d = 0$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t + b \cos t + \frac{c}{\sqrt{2}} \sin t + d = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = f \qquad g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 1$, $\lambda = 2$ autovalori

$g = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = 3$, $\lambda = 5$ autovalori

$$(g \circ f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$, $\lambda = 2$ $\quad \mu = 3$, $\mu = 5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. vera

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \qquad g(\bar{v}) = \mu \bar{v}$$

$$(g \circ f)(\bar{v}) = g(f(\bar{v})) = g(\lambda \bar{v}) = \lambda\, g(\bar{v}) = \lambda \mu (\bar{v})$$

è autovettore

c. falsa

è vero $\Rightarrow$

$f(\bar{v}) = \bar{0} \quad \bar{v} \neq \bar{0}$

$g \circ f(\bar{v}) = g(\bar{0}) = \bar{0}$

$\forall$ 0 è autovalore anche per ...

5

falsa: perché sono dipendenti

falsa: $p + 0q \neq r$

c. falsa: dim $\mathbb{R}_4[x] = 5$ ne ho solo 2 lin. ind.

es:

C. circonferenza sul piano xy di eq $x^2+y^2+4x+2y+1=0$

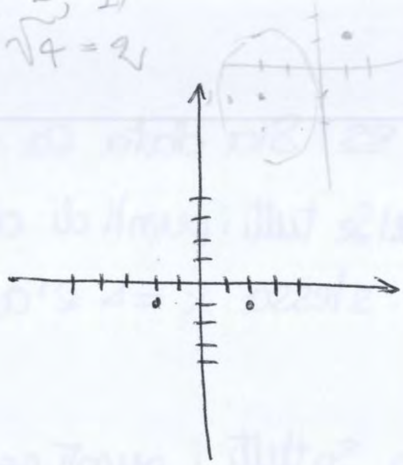
$(x+2)^2+(y+1)^2=4$

$C(-2,-1)$

$r=\sqrt{4}=2$

a. $p=(1,1)$ è interno a C NO

b. il centro di C sta su $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \end{cases}$ SI



c. L'equazione di C in forma canonica è $x^2+y^2+4=0$

non é un cerco ma ch'esisse immaginaria

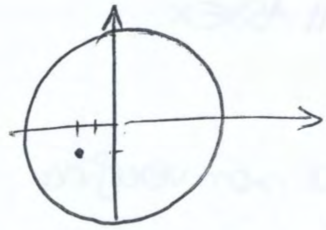
d. $P, Q \in C \Rightarrow d(P,Q) < 4$ NO

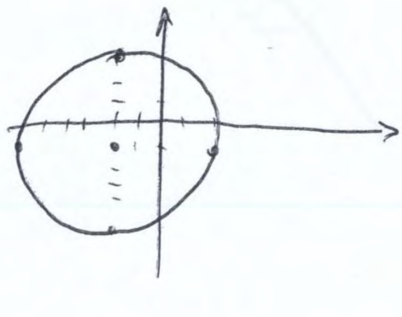
$$x^2+2(2x)+4-4+y^2+2y+1-\cancel{1}+\cancel{1}=0$$

$$(x+2)^2+(y+1)^2=4$$

$$C=(-2,-1) \quad R=\sqrt{4}=2$$

$$\begin{cases} -2=1+t \\ -1=2+t \end{cases} \quad \begin{cases} t=-3 \\ t=-3 \end{cases}$$





$$d(P,C)=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}$$

$$R=\sqrt{13}$$

$$R=\sqrt{4}=2$$

(7)

$\bar{u} = \bar{i} - \bar{k}$

$\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ nello spazio di vettori ordinari: S

a. $\bar{u} \perp \bar{v}$ NO

b. $\bar{u}, \bar{v}$ non fanno parte di alcuna base di S NO

c. generano 1 sottosp. di dim 1 NO

d. la proiezione di $\bar{v}$ su $\bar{u}$ è $\frac{3}{2}\bar{u}$ SI

$\bar{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\bar{v} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$u \perp v \rightarrow u \cdot v = 0$

$u \cdot v = 3$

$\bar{u} = (1, 0, -1)$

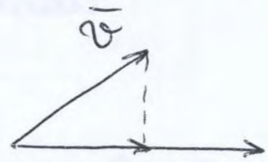
$\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$ non sono $\perp$

$\bar{v} = (1, -2, -2)$

sono L.I

possono essere 1 base

NO 2 dim



$\frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|}$ $\bar{u}$

→ PROIEZIONE DI $\bar{v}$ SU $\bar{w}$

$\frac{\bar{V} \cdot \bar{U}}{\|\bar{U}\|}$

$\cancel{\frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}}$

a. falsa.

$\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$

b. falsa → perché sono indipendenti.

c. falsa

d. PROIEZIONE. $\|\bar{u}\| = \sqrt{2}$

$(\bar{V} \cdot \text{norm}(\bar{u}))\ \text{norm}\ \bar{u}$

$= \cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\ \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}(1, 0, -1)$

FORMA NON CANONICA

$\det B \neq 0$ non degenere

$\det A$

FORMA CANONICA

TERMINI SOLO DI SECONDO GRADO

(1) $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

* $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$

- IPERBOLE
- ELLISSE (CERCO)
- ELLISSE IMMAGINARIA SE α, β CONCORDE, γ OPPOSTO

* $\gamma = 0$

- 2 RETTE DISTINTE

* $\alpha = 0$ o $\beta = 0$

- 2 RETTE // DISTINTE

$y = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \quad = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$

1 TERMINE DI SECONDO GRADO e 1 DI PRIMO

(2) $\beta y^2 = 2\gamma x$, $\beta x^2 = 2\gamma y$

* $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$

PARABOLA

* $\gamma = 0$

COPPIA DI ASSI (x e y) DOPPI

$\gamma = 0$ e $\alpha = 0$ / $\gamma = 0$ e $\beta = 0$

- COPPIA DI ASSI (x e y) DOPPI

- DIREZIONE : RETTA PASSANTE PER OP
- VERSO : VERSO DA O a P (FRECCIA)
- MODULO : NUMERO REALE NON NEGATIVO CHE MISURA LA LUNGHEZZA DEL SEGMENTO OP $\rightarrow |\vec{v}| = |\vec{OP}|$

$\|\vec{OP}\|$ = norma

VETTORI UGUALI { APPLICATI in O, STESSA DIREZIONE, " VERSO, " MODULO } ≠ dai vettori liberi

SOMMA DI VETTORI (su Q. ESERCITAZIONI)

- ≠ DIREZIONE (PARALL o PUNTA CODA)
- = DIREZIONE
  - STESSO VERSO
  - VERSO OPPOSTO < MODULI ≠ ; MODULI = : VETTORE NULLO O

VETTORE NULLO $\vec{O}$ < MODULO = 0 ; VERSO, DIREZIONE } INDETERMINATI

DIFFERENZA DI VETTORI

$-V \rightarrow V$ CON VERSO OPPOSTO

SOMMA : DIAGONALE MAX PARALLELOGRAMMA

DIFF : DIAGONALE MIN " "

PROPRIETÀ DELLA SOMMA

- COMMUTATIVA $a+b=b+a$
- ASSOCIATIVA $(a+b)+c = a+(b+c)$
- ∃ ELEMENTO NEUTRO $a+0 = 0+a = a$
- ∃ " OPPOSTO $a-a = -a+a = 0$

PRODOTTO NUMERO PER VETTORE (P. PER SCALARE)

$a \in \mathbb{R}, \bar{v} \in V$

$a\bar{v}$ = < MODULO $|a|\|\bar{v}\|$; DIREZIONE $\bar{v}$; VERSO $\bar{v}$ se $a>0$, $-\bar{v}$ se $a<0$

OPPOSTO av è $-av$ $\forall a \neq 0, \forall v$

OPPOSTO v è $-v = -1v$ con $a=-1$