



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1219

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale

Prof. Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE di SOMA'

- APPUNTI DA LEZIONE + SUDE
- LEZIONE RIASSUNTIVA DEL PROF
- POSSIBILI DOMANDE DI TEORIA (DETTE DAL PROF) SVOLTE
- FORMULARIO DA USARE ALL'ESAME
- TEMI D'ESAME
- SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI DI "RIEPILOGO" del libro di SOMA'

IPOTESI:

- VINCOLI IDEALI
- FORZE IDEALIZZATE E APPLICATE IN UN PUNTO
- DEFORMAZIONI PICCOLE RISPETTO AUE DIMENSIONI DEL SISTEMA, PER CUI SONO TRASCURABILI
 (→ IPOTESI DEI PICCOLI SPOSTAMENTI E DELLE PICCOLE ROTAZIONI)
- EQUILIBRIO STATICO O QUASI STATICO

SUI SISTEMI SONO APPLICATE DELLE FORZE (CARICHI):

[SONO I NOSTRI PUNTI DI DOMANDA, LE INCOGNITE, CHE BISOGNA DETERMINARE O ATTRAVERSO GLI OBBETTIVI DI PROGETTO O ATTRAVERSO ANALISI SPERIMENTALI]

- FORZE / COPPIE - MOMENTI
- FORZE DI SUPERFICIE / DI VOLUME
- FORZE DISTRIBUITE / CONCENTRATE
 su un'area solo su un punto

ESISTONO DELLE EQUIVALENZE TRA FORZE E MOMENTI:

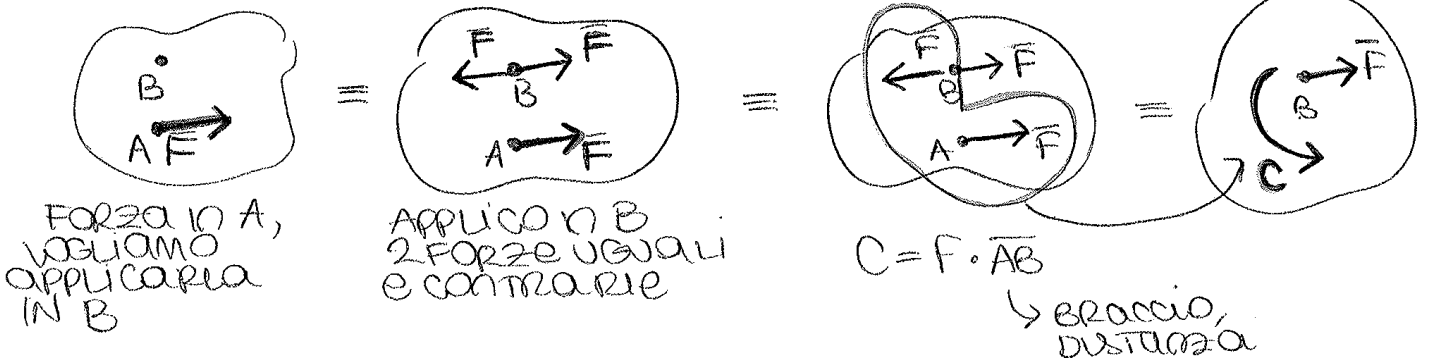
1) $C = F \cdot a$

C = COPPIA
 F = FORZA
 a = BRACCIO



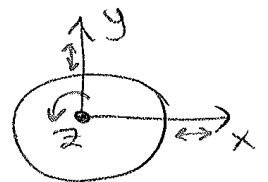
2) TRASLAZIONE DI UNA FORZA

QUESTI 4 SISTEMI SONO EQUIVALENTI TRA LORO

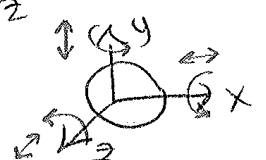


I GRADI DI LIBERTÀ DI UN CORPO RIGIDO SONO:

③: in un sistema 2D
 ↳ TRASLAZ. lungo x, y
 ↳ ROTAZ. su z



⑥: in un sistema 3D
 ↳ TRASLAZ. lungo x, y, z
 ↳ ROTAZ. su x, y, z

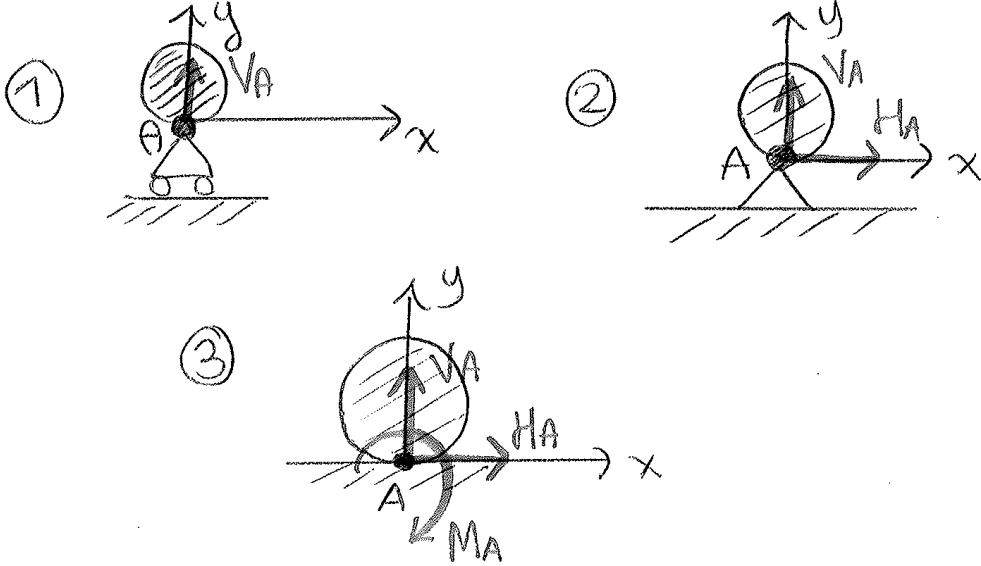


TIPICI DI VINCOLI:

<p>① APPOGGIO SEMPLICE / CARRELLI</p>	<p>TOGLIE 1 GdL</p>	<p>IMPEDISCE LA TRASLAZIONE LUNGO y</p>
<p>② CERNIERA FISSA</p>	<p>TOGLIE 2 GdL</p>	<p>IMPEDISCE LE DUE TRASLAZIONI LUNGO x e y</p>
<p>③ INCASTRO</p>	<p>TOGLIE 3 GdL</p>	<p>IMPEDISCE TUTTI E 3 I MOVIMENTI POSSIBILI NEL PIANO: 2 TRASLAZIONI LUNGO x e y e una ROTAZIONE LUNGO z</p>

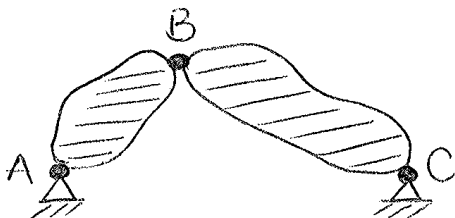
↓
IL NUMERO DI GdL TOLTI È = AL NUMERO DI REAZIONI VINCOLARI

REAZIONI VINCOLARI CONSEGUENTI:



ESISTONO ANCHE DEI VINCOLI INTERNI CHIAMATI GIUNTI, CHE COLLEGANO PIÙ CORPI RIGIDI TRA LORO. IL LORO MODELLO È QUELLO CERNIERA INTERNA.

ESEMPIO:



A, C: VINCOLI ESTERNI CERNIERE ESTERNE
B: VINCOLO INTERNO CERNIERA INTERNA

La struttura è staticamente determinata se il sistema di equazioni risultante è risolvibile (numero di incognite = numero di equazioni) altrimenti la struttura è detta staticamente indeterminata se il sistema è indeterminato (n.m. incognite > n.m. eq.)

Le equazioni di equilibrio sono:

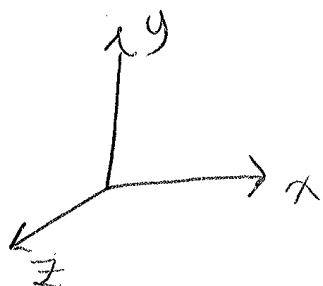
- 6 nello spazio:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum Z = 0$$

Sommarie delle componenti delle forze lungo i vari assi



$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

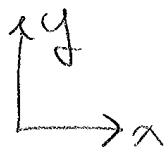
$$\sum M_z = 0$$

Sommarie dei momenti rispetto agli assi (e al polo scelto)

- 3 nel piano:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

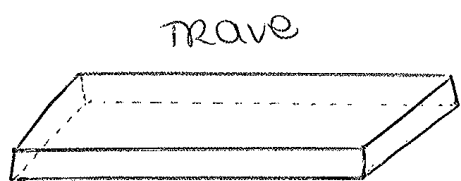
$$\sum M_z = 0$$


In particolare il sistema di equazioni viene scritto per ogni corpo rigido, cioè per ogni porzione di struttura se il sistema è articolato e non monolitico.

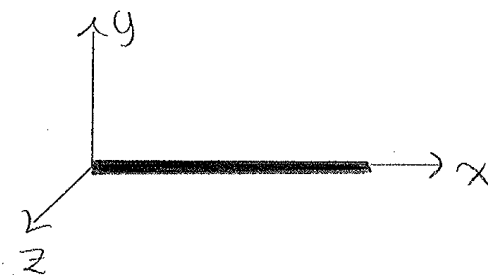
noi esaminiamo solo i sistemi isostatici (bisogna sempre controllare $G=0$)

ed esaminiamo le

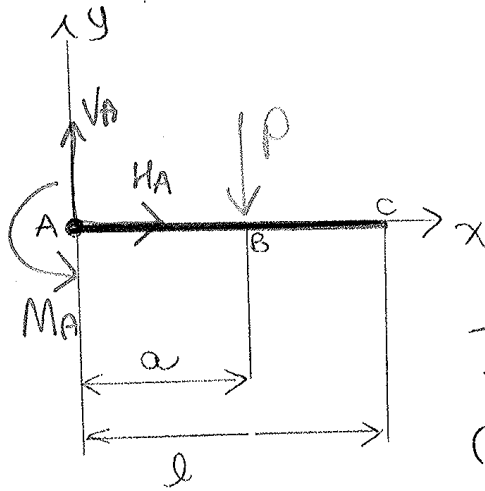
TRAVI = corpi in cui le dimensioni trasversali sono molto minori di quella longitudinale



semplificata in



②... con carico verticale in posizione qualsiasi



(DATI a, l, P)

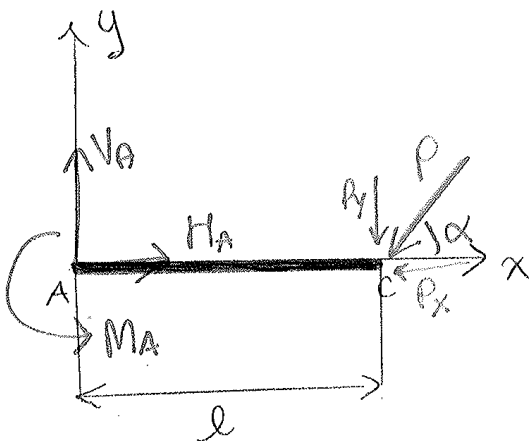
la trave è lunga $l = \overline{AC}$
 il carico non è applicato in C,
 bensì in B
 abbiamo $\overline{AB} = a$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{H} \quad HA = 0 \\ \uparrow^V \quad VA - P = 0 \\ \curvearrowright^{MA} \quad MA - Pa = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} HA = 0 \\ VA = P \\ MA = P \cdot a \end{array}$$

Valgono le stesse considerazioni di prima. e' solo cambiato il braccio di P che ora è a e non più l .

③... con carico concentrato qualsiasi (non verticale)



(DATI P, l, α)

la trave è lunga l .
 il carico P è applicato all'estremità
 ed è inclinato di α
 le sue due componenti orizz e vert
 sono:

$$\begin{array}{l} P_x = P \sin \alpha \\ P_y = P \cos \alpha \end{array}$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{H} \quad HA - P_x = 0 \\ \uparrow^V \quad VA - P_y = 0 \\ \curvearrowright^{MA} \quad MA - P_y \cdot l = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} HA = P_x = P \sin \alpha \\ VA = P_y = P \cos \alpha \\ MA = P_y \cdot l = P \cos \alpha \cdot l \end{array}$$

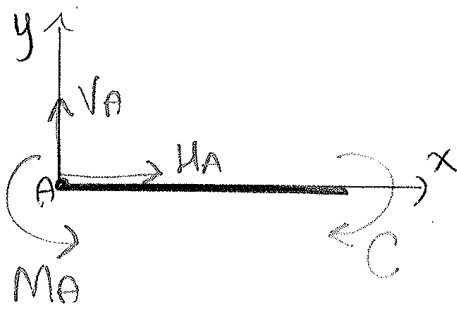
Neu' eq. di momento attorno al polo A abbiamo:

- MA antiorario
- P_y produce un momento orario con braccio l ($P_y \cdot l$)
- P_x non produce un momento perché è // al suo braccio!!

PER VERIFICARE L'ESATTEZZA DELL'EQUAZIONE, SI PU' PRENDERE UN DIVERSO POLO E RIFARLA:

$$\left. \begin{array}{l} \curvearrowright^{Mc} \quad MA - VA \cdot l = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} MA = VA \cdot l = P_y \cdot l = P \cos \alpha \cdot l \end{array} \quad \text{combaciano!!}$$

⑤... con una coppia concentrata all'estremità



non abbiamo nessun carico applicato, bensì una coppia, all'estremità

semplicemente le eq. sono:

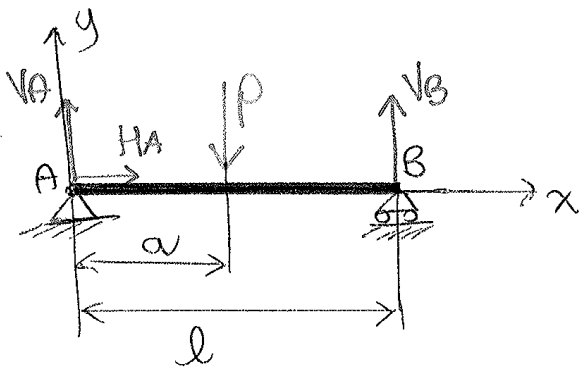
$$\begin{array}{l} \xrightarrow{H} \quad H_A = 0 \\ \uparrow \quad \quad V_A = 0 \\ \curvearrowleft \quad \quad M_A = C \end{array}$$

• TRAVE appoggiata:...

In questo caso, i vincoli efficaci per una trave appoggiata sono una cerniera e un appoggio semplice.

①... sovrasta ad un carico concentrato:

(Dati P, l)



In A abbiamo una cerniera, quindi abbiamo sostituito il vincolo con le corrispondenti reazioni vincolari H_A e V_A

mentre in B abbiamo un appoggio semplice, e la reazione vincolare è V_B .

LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO SONO:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{H} \quad H_A = 0 \\ \uparrow \quad \quad V_A + V_B - P = 0 \\ \curvearrowleft \quad \quad V_B \cdot l - P \cdot a = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P - V_B = P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \\ V_B = \frac{Pa}{l} \end{array}$$

Analizziamo l'equazione di momento attorno al polo A:

- V_A e H_A non producono momento perché hanno braccio nullo
- P produce un momento orario di braccio a ,
- V_B produce un momento antiorario di braccio l

Verifichiamo con l'equazione attorno al polo B:

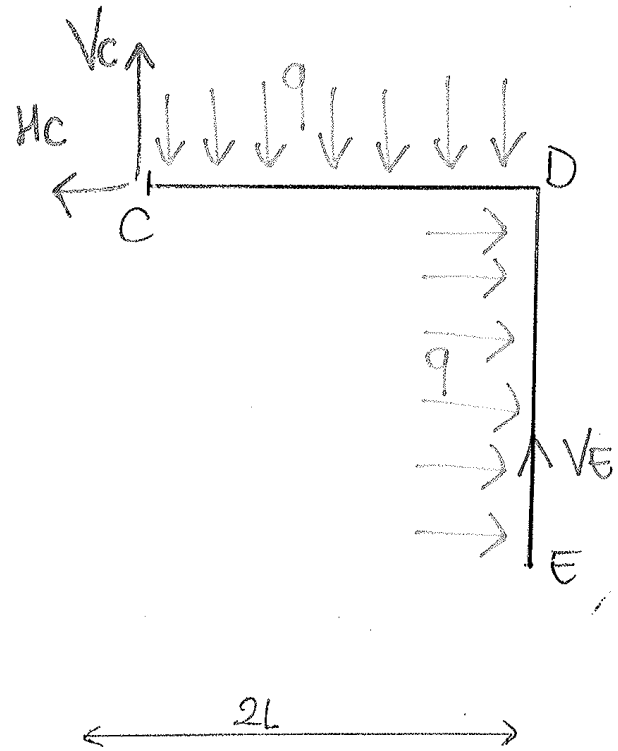
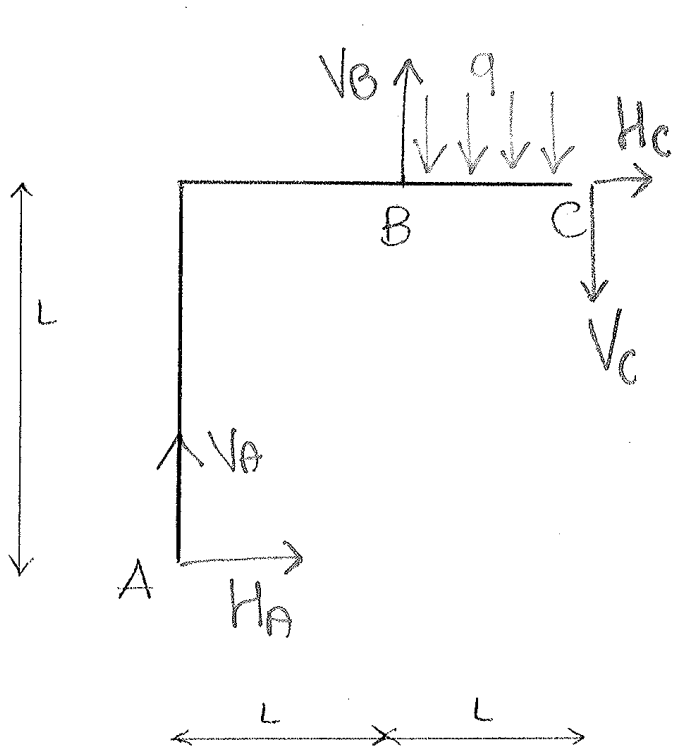
$$P(l-a) = V_A l$$

$$V_A = P \frac{(l-a)}{l} = P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \quad \text{uguale a quella precedente}$$

● CALCOLO LE REAZIONI VINCOLARI:

CI SONO 2 METODI PER RISOLVERE LE STRUTTURE COMPOSTE DA PIÙ CORPI RIGIDI CONNESSI

- ① DIVIDERE IL SISTEMA IN 2 SOTTOSTRUTTURE IN CORRISPONDENZA DELLA CERNIERA INTERNA C
 (AL POSTO DI ESSA, SI IMPONGONO, PER AZIONE E REAZIONE, DUE FORZE H_C e V_C , REAZIONI INCOGNITE DEL VINCOLO INTERNO)



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO
DELLA 1ª SEMISTRUTTURA:

$$H_A + H_C = 0 \quad \rightarrow$$

$$V_A + V_B - V_C - ql = 0 \quad \uparrow$$

$$H_A l - V_B l - V_A 2l + q \frac{l^2}{2} = 0 \quad \curvearrowright$$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO
DELLA 2ª SEMISTRUTTURA:

$$-H_C + ql = 0 \quad \rightarrow$$

$$V_E + V_C - q 2l = 0 \quad \uparrow$$

$$2V_E l + q \frac{l^2}{2} - 2ql^2 = 0 \quad \curvearrowright$$

E RISOLVO IL SISTEMA

RISULTATI:

$$H_C = -H_A = 2.000 \text{ N}$$

$$V_E = 1.500 \text{ N}$$

$$V_C = 2.500 \text{ N} \quad V_B = 10.000 \text{ N}$$

$$V_A = -5.500 \text{ N}$$

} CON QUESTO METODO TROVIAMO ANCHE V_C E H_C , CHE SONO DELLE REAZIONI INTERNE CHE NON COMPATONO SULLA STRUTTURA COMPLESSIVA

GEOMETRIA delle AREE

BARICENTRI e MOMENTI STATICI

TRAVI = STRUTTURE monodimensionali in cui le dimensioni longitudinali sono molto maggiori di quella trasversale

LINEA D'ASSE della trave = LUGO dei PUNTI che unisce i BARICENTRI delle sezioni RETTE

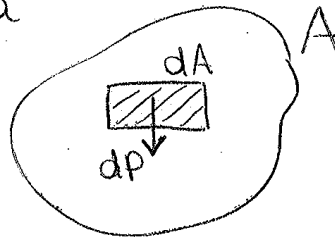
LA FORMA della sezione è importante per:

- DETERMINARE il BARICENTRO
- DETERMINARE la DISTRIBUZIONE degli SFORZI INTERNI e la RIGIDEZZA del SISTEMA

DETERMINAZIONE dei BARICENTRI e dei MOMENTI STATICI

PRENDIAMO:

- generica sezione A di forma qualsiasi
- corpo piano di area A
- densità costante ρ
- $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$
- area elementare dA



Calcoliamo la forza peso \times unità di lunghezza di dA

$$d\bar{P} = \bar{g} dm = \bar{g} \rho dA \quad \text{poiché} \quad \rho = \frac{dm}{dA} \quad \text{densità superficiale}$$

la risultante \bar{P} delle forze elementari dP è data dalla loro somma vettoriale, e' diretta verticalmente e ha modulo pari alla risultante scalare (= somma algebrica) di tutti i dP:

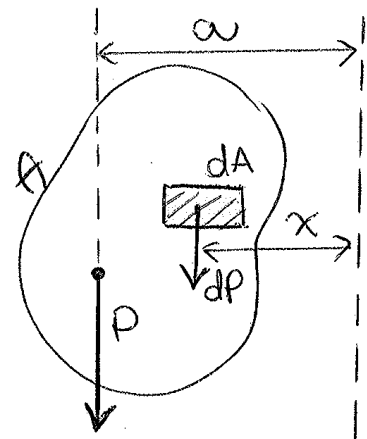
$$|\bar{P}| = \int_A dP = \int_A \bar{g} \rho dA = \bar{g} \rho \int_A dA = \bar{g} \rho A \rightarrow |\bar{P}| = \bar{g} \rho A$$

\times INDIVIDUARE il punto di applicazione di \bar{P} BISOGNA CALCOLARE il momento delle forze elementari dP rispetto ad un'asse \parallel a \bar{P}

$$\bar{M}_{dp} = \int_A x d\bar{P} = \int_A x \bar{g} \rho dA = \bar{g} \rho \int_A x dA$$

ORA CALCOLO il momento ottenuto da \bar{P} rispetto alla stessa asse (distanza a)

$$\bar{M}_p = \bar{P} \cdot a$$



Se prendo una linea // a r e passante x il baricentro G
 allora scrivo d come

$$d = d_G + \Delta d$$

scopro Δd proiettando sul riferimento cartesiano

$$d = d_G + x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

e sostituisco d nell'integrale:

$$S = \int_A d \cdot dA$$

$$S = \int_A (d_G + x \cos \alpha - y \sin \alpha) dA =$$

$$= \int_A d_G dA + \int_A x \cos \alpha dA - \int_A y \sin \alpha dA$$

ma $S' = \int_A x dA = 0$ se x è un'asse baricentrico (portante x G)

e $S' = \int_A y dA = 0$ se y " " " "

per cui rimane $S = \int_A d_G dA = d_G \int_A dA = d_G A$

la risultante \bar{P} passa per G indipendentemente dal valore dell'angolo α , cioè indipendentemente dall'inclinazione della retta r (sua direzione) !

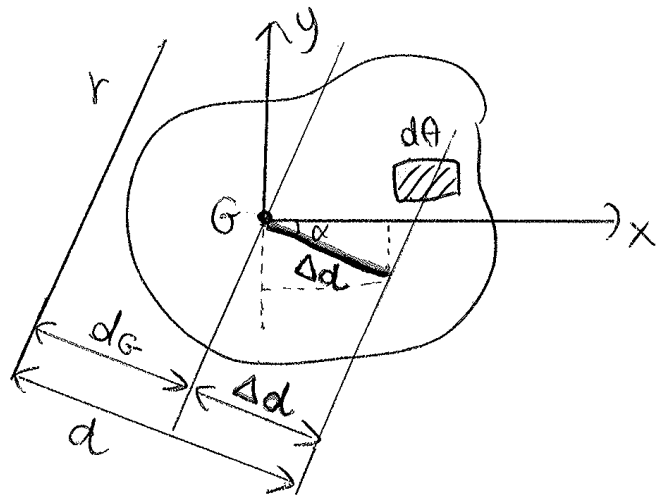
→ baricentro = centro di gravità del corpo piano

Le coordinate del baricentro rispetto ad un riferimento cartesiano (x, y) sono:

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A} \\ y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \end{cases}$$

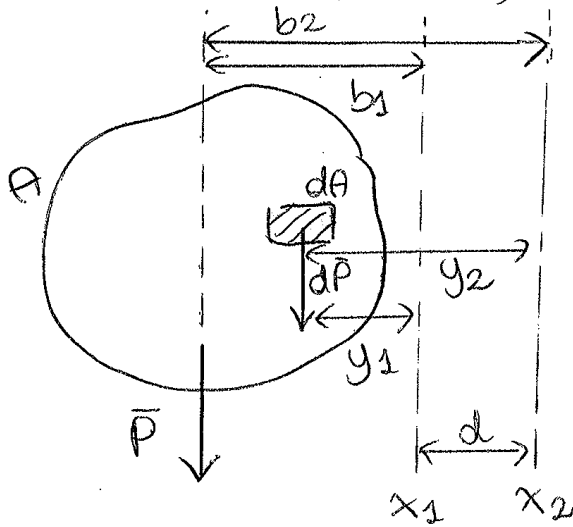
In particolare $G = (x_G, y_G) = (0, 0)$ se il baricentro coincide con l'origine del sistema di rif.

si vede che S_x e S_y (come qualsiasi S) sono nulli se riferiti ad un'asse baricentrico.



TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI STATICI

CONOSCO S_1 RISPETTO ALL'ASSE x_1 MA VOGLIO CALCOLARE S_2 RISPETTO A x_2 (\parallel A x_1)



d = distanza tra i 2 assi \parallel x_1 e x_2

b_1 = distanza tra x_1 e verticale di \bar{P} (braccio di S_1)

b_2 = distanza tra x_2 e verticale di \bar{P} (braccio di S_2)

$$b_2 = (b_1 + d)$$

$$S_1 = \int_A y_1 A = b_1 A$$

$$S_2 = \int_A y_2 A = b_2 A = (b_1 + d) A = b_1 A + dA = S_1 + dA$$

$$S_2 = S_1 + dA \quad \text{TEOREMA DI TRASPOSIZIONE}$$

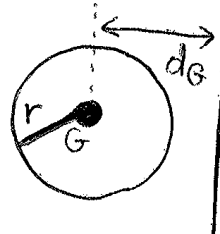
dA = momento statico di TRASPORTO

IN PARTICOLARE se $b_1 = 0$, x_1 è baricentrico, $S_1 = 0 \rightarrow S_2 = dA$
 con d_G = distanza di x_2 dal baricentro

IL MOMENTO STATICO DI QUALSIASI AREA RISPETTO A UNA RETTA QUALSIASI È DATO: $A d_G$
 DAL PRODOTTO DELL'AREA X LA DISTANZA DEL SUO BARICENTRO DALLA RETTA!

AD ESEMPIO PER UN CERCHIO:

$$S = A d_G = \pi r^2 d_G$$



scelgo il modo ① o ② più comodo, e uso l'altro x verifi-
carmi!

In conclusione, nel caso di figure elementari (A_1, A_2, \dots, A_n)
di cui si conoscono i baricentri, usiamo:

$$S = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} y dA_2 + \dots + \int_{A_i} y dA_i + \dots + \int_{A_n} y dA_n$$

scomposizione
di S di figure
semplici

$$\begin{cases} S_x = A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2} + \dots + A_i y_{Gi} + \dots + A_n y_{Gn} \\ S_y = A_1 x_{G1} + A_2 x_{G2} + \dots + A_i x_{Gi} + \dots + A_n x_{Gn} \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_{Gi} \\ S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_{Gi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Gi}}{A} \\ y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}}{A} \end{cases}$$

coordinate
del
baricentro
complessivo

x_G e y_G si ottengono come media pesata delle coordinate
dei baricentri delle aree parziali

MOMENTO D'INERZIA CENTRIFUGO (O MISTO)

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

MOMENTI D'INERZIA DEL RETTANGOLO

calcolo i momenti d'inerzia:

$$I_x = \int_A y^2 \, dA, \quad I_y = \int_A x^2 \, dA$$

$$\bullet I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_0^h y^2 b \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 b \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

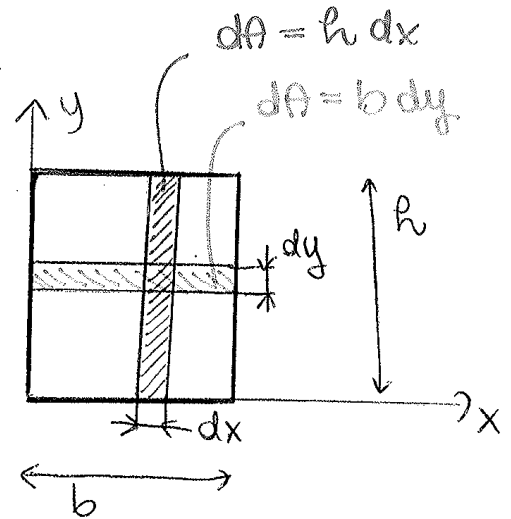
$$\bullet I_y = \int_A x^2 \, dA = \int_0^b x^2 h \, dx = \left[\frac{1}{3} h x^3 \right]_0^b = \frac{hb^3}{3}$$

il baricentro è $G = (x_G, y_G) = \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$.

calcolo i momenti d'inerzia baricentrici:

$$\bullet I_{x_0} = \int_A y^2 \, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 b \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bullet I_{y_0} = \int_A x^2 \, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 h \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$



MOMENTI D'INERZIA DEL CERCHIO

calcolo i momenti d'inerzia polare e diametrale:

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_0^R r^2 (2\pi r \, dr) = \left[2\pi \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

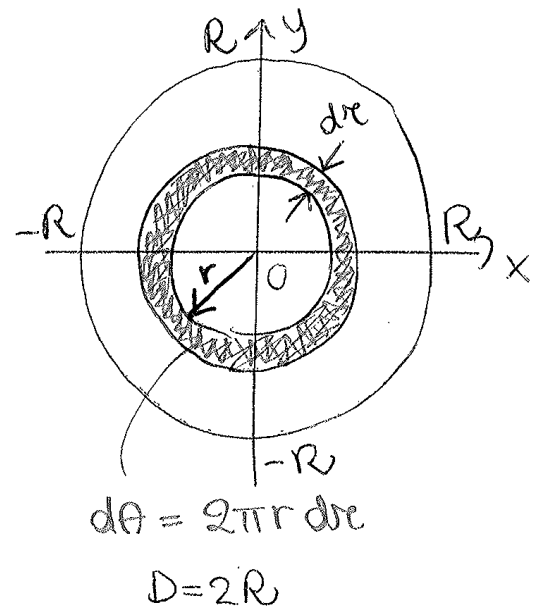
$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

il momento d'inerzia diametrale è uguale se calcolato rispetto a x o a y

$$I_D = I_x = I_y$$

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA = I_x + I_y = 2I_D$$

$$I_D = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$



esempio:

CERCO BARICENTRO e momenti d'inerzia.

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = 15 \cdot 20 = 300 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 30 = 300 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 600 \text{ mm}^2$$

GRAZIE agli assi di simmetria

$$G_1 = (x_1, y_1) = (15; 5)$$

$$G_2 = (x_2, y_2) = (7,5; 20)$$

CERCO QUINDI S_x e S_y !

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = A_1 d_{G1} + A_2 d_{G2} = A_1 \overset{(y_1)}{5} + A_2 \overset{(y_2)}{20} =$$

$$= 300 \cdot 5 + 300 \cdot 20 = 1500 + 6000 = 7500 \text{ mm}^3$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = A_1 d_{G1} + A_2 d_{G2} = A_1 \overset{(x_1)}{15} + A_2 \overset{(x_2)}{7,5} =$$

$$= 300 \cdot 15 + 300 \cdot 7,5 = 4500 + 2250 = 6750 \text{ mm}^3$$

così le coordinate del baricentro G sono $G = (x_G, y_G)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{6750}{600} = 11,25 \text{ mm} \\ y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{7500}{600} = 12,5 \text{ mm} \end{cases}$$

anche i momenti d'inerzia li calcolo come somma di 2 contributi di A_1 e A_2

sono importanti le coordinate del baricentro G e anche le distanze dei 2 baricentri G_1 e G_2 da G .

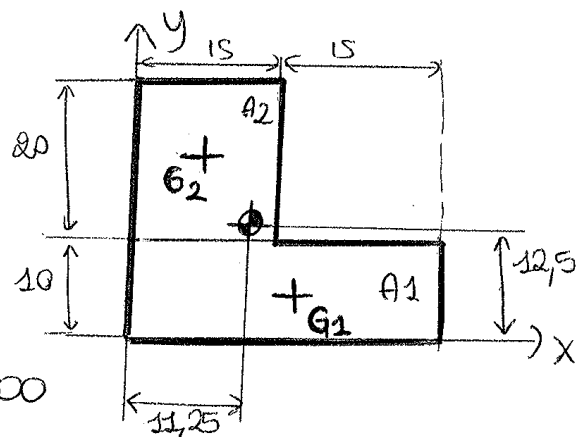
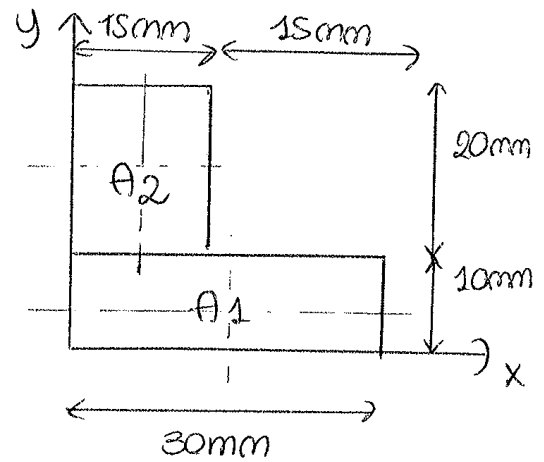
momento d'inerzia rispetto all'asse x :

$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_{x1} = \underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{\text{baricentrico}} + \underbrace{(d)^2}_{\text{distanza } GG_1} A_1 = \frac{10 \cdot 30^3}{12} + (12,5 - 5)^2 \cdot 300$$

$$I_{x2} = \frac{bh^3}{12} + \underbrace{(d)^2}_{GG_2} A_2 = \frac{15 \cdot 20^3}{12} + (20 - 12,5)^2 \cdot 300$$

$$\Rightarrow I_x = 46.250 \text{ mm}^4$$



$$I_a = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

se DERIVO RISPETTO a α

$$\frac{dI_a}{d\alpha} = -(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha$$

e IMPONGO LA DERIVATA UGUALE a ZERO

$$\frac{dI_a}{d\alpha} = 0$$

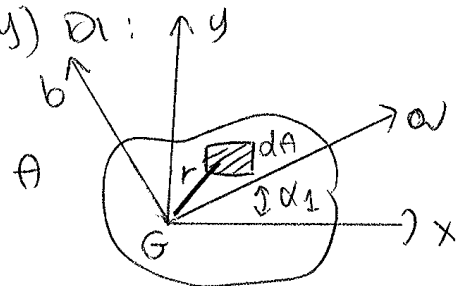
$$-(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = -2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y}$$

cioè HO TROVATO LA RELAZIONE PER CUI I_a È MASSIMO O MINIMO!! QST MI SERVE X TROVARE GLI ASSI IN CUI IL MOMENTO D'INERZIA È MASSIMO O MINIMO, CHE SONO QUINDI 2 ASSI ORTOGONALI (X LA NATURA DELLA FUNZIONE TANGENTE) E SONO CHIAMATI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA. QUESTI ASSI SONO ROTATI, RISPETTO A (xy) DI:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctan \left(-2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} \right)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$



I VALORI DEI MOMENTI D'INERZIA RELATIVI AGLI ASSI PRINCIPALI SONO CALCOLATI:

$$I_{a_1} = I_x \cos^2 \alpha_1 + I_y \sin^2 \alpha_1 - 2 I_{xy} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1$$

L'ipotesi della distribuzione uniforme delle tensioni non è verificata in corrispondenza di

- variazioni della geometria della trave
- punti di applicazione del carico

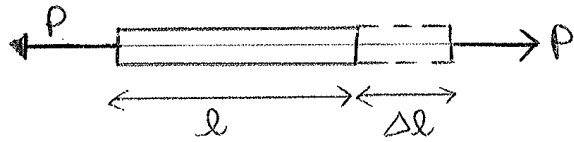
Le dimensioni della trave variano quindi in funzione dell'intensità del carico P :

* allungamento longitudinale:

Δl = allungamento assoluto

ϵ = allungamento relativo deformazione

l = lunghezza iniziale



$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} \quad [\text{adimensionale}]$$

legge di Hooke: $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ (valida x piccoli allungamenti)

E = modulo di Young
 modulo di elasticità normale
 è una costante fisica del materiale
 e' determinato sperimentalmente

$$\frac{[N]}{[mm^2]}$$

metto in relazione le formule:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}, \quad \epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

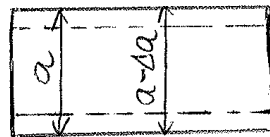
$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} \quad \text{dove } \frac{AE}{l} = \text{rigidezza assiale di una trave}$$

* contrazione trasversale:

$$\epsilon_{yy} = \Delta \frac{\Delta a}{a}$$



che si lega con ϵ_{xx}

$$\epsilon_{yy} = \nu \epsilon_{xx}$$

ν = coefficiente di Poisson
 $0,25 < \nu < 0,35$

$$[\text{adimensionale}]$$

COMPORAMENTO MECCANICO DEI MATERIALI

QUINDI θ e γ_1 SONO TRA LORO CORRELATI LINEARMENTE:

$$\gamma_1 = \frac{r\theta}{l}$$

LA LEGGE DI HOOKE LEGA LA TENSIONE TANGENZIALE τ ALLO SCORRIMENTO γ_1 IN MODO DIRETTAMENTE PROPORZIONALE

$$\tau = G\gamma \quad \text{con}$$

G = MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

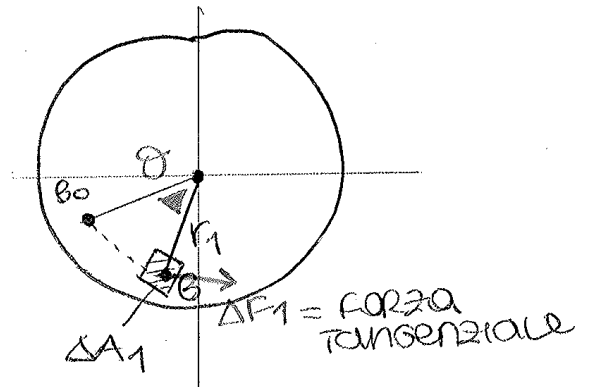
E = MODULO DI ELASTICITÀ LONGITUDINALE
 ν = COEFFICIENTE DI POISSON

NEHA SEZIONE POSSIAMO OSSERVARE CHE PER EFFETTO DI M_t , ABBIAMO UNA SOLLECITAZIONE UNITARIA τ_1 IN B

$$\tau_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta A_1} \rightarrow \Delta F_1 = \tau_1 \Delta A_1$$

E COSÌ PER TUTTI I PUNTI DELLA SEZIONE

$$\Delta F_{TOT} = \tau_1 \Delta A_1 + \dots + \tau_n \Delta A_n$$



SI FA L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE RISPETTO L'ASSE:

$$M_t = (\tau_1 \Delta A_1) r_1 + (\tau_2 \Delta A_2) r_2 + \dots \rightarrow \text{CONTRIBUTI } \propto$$

$$M_t = \int_A \tau r dA \quad \text{INTEGRALE ESTESO A TUTTA L'AREA DELLA SEZIONE}$$

SE MODIFICHIAMO LE FORMULE PRECEDENTI:

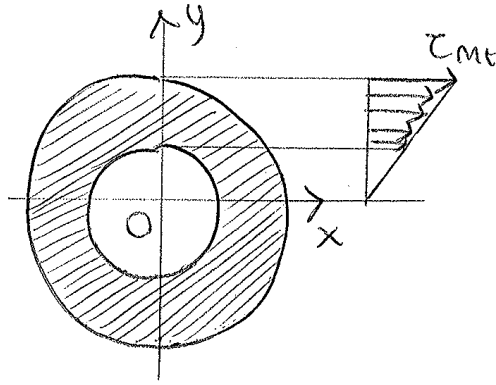
$$\gamma = \frac{r\theta}{l} \rightarrow \tau = G\gamma \rightarrow \tau = G \frac{r\theta}{l}$$

$$\text{PER CUI } M_t = \int_A \tau r dA = \int_A G \frac{\theta}{l} r^2 dA = G \frac{\theta}{l} \int_A r^2 dA$$

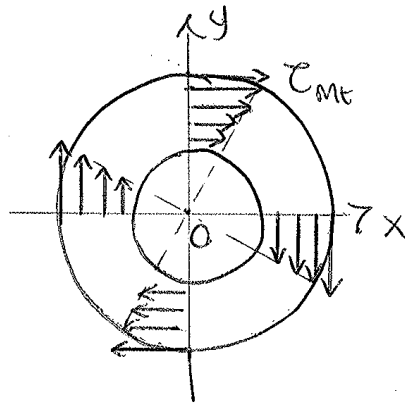
$$M_t = G \frac{\theta}{l} J_p \quad \text{con } J_p = \text{MOMENTO D'INERZIA POLARE DELLA SEZIONE CIRCOLARE}$$

$$J_p = \int_A r^2 dA$$

GRAFICAMENTE SI RAPPRESENTA:



FUORI LA SEZIONE



DEINTRO LA SEZIONE

IL LAVORO DI DEFORMAZIONE PER UNA TRAVE SOTTOPOSTA A TORSIONE PURA È:

$$L = \frac{1}{2} M_t \vartheta = \frac{1}{2} \frac{G J_p \vartheta^2}{l}$$

secondo la formula $L = \text{costante} \cdot \begin{matrix} \text{CARIATI} \\ \text{DI} \\ \text{SOLLECITI} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{SOLLECITAZIONE} \\ \text{CHE PRODUCE} \end{matrix}$

RIASSUNTINO FORMULE PER ESERCIZI:

$$\tau = G\gamma = \frac{G r \vartheta}{l} = \boxed{\frac{M_t r}{J_p} = \tau}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} \frac{d}{2} = \frac{M_t}{W_t}}$$

$$\boxed{\vartheta = \frac{M_t l}{G J_p}}$$

$$\boxed{W_t = \frac{\pi}{16} d^3 \text{ sezione piena}}$$

$$\boxed{W_t = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} \text{ sezione cava}}$$

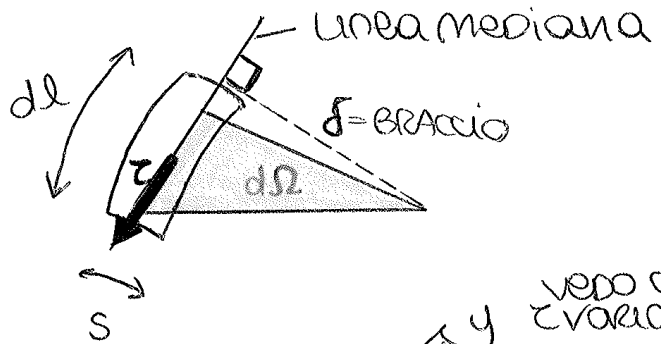
$$W_t = \frac{J_p}{d/2}$$

Ω = area sottesa alla linea mediana

considero un tratto dl , la risultante delle tensioni agenti su questo tratto

$$\tau = \frac{dF}{S dl}$$

$$dF = \tau \cdot S dl$$

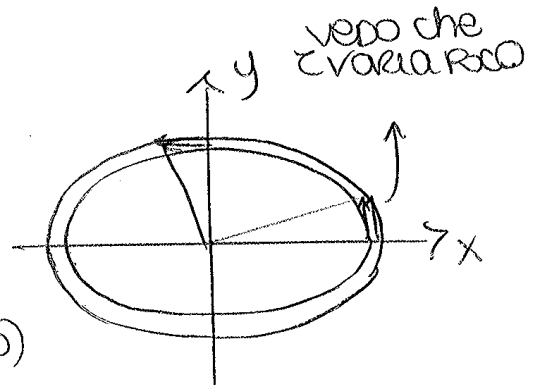


il momento della forza rispetto l'asse x della trave:

$$dM_t = dF \delta = \tau S (dl) \delta$$

ma abbiamo che l'area della sezione è

$$d\Omega = \delta \frac{dl}{2} \rightarrow \delta dl = 2 d\Omega \quad (\text{area triangolo})$$



$$dM_t = 2 \tau S (d\Omega)$$

ora integro su tutto il contorno:

$$M_t = \oint 2 \tau S (d\Omega) = 2 \tau S \oint (dl) = 2 \tau S \Omega$$

quindi: $\tau = \frac{M_t}{2 S \Omega}$ cioè dipende dalla sezione e dal suo corrispondente spessore considerati

$$\theta_u = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \int_l \frac{dl}{S}$$

parametro cinematico che vale per tutta la sezione

da cui:

• se S è costante a tratti:

$$\theta_u = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{S_i}$$

• se S è costante in tutta la sezione:

$$\theta_u = \frac{M_t}{4 G \Omega^2} \cdot \frac{l}{S}$$

più è piccola la parete (s piccolo) più τ è grande, più la parete è grande

$$\sigma_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta A_1}$$

$$\Delta F_1 = \sigma_1 \Delta A_1$$

PER L'EQUILIBRIO DEL TRONCONE ①

$$\begin{cases} \Delta F_1 + \Delta F_2 + \dots = 0 & \text{EQ. TRAZI (N=0)} \\ M_t = -\Delta F_1 y_1 - \Delta F_2 y_2 \dots & \text{EQ. ROTAZI} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 \Delta A_1 + \dots = 0 \\ M_f = -\sigma_1 \Delta A_1 y_1 + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_A \sigma dA = 0 \\ M_f = -\int_A \sigma y dA \end{cases}$$

ora richiamo:

$$\sigma = E \epsilon \quad \text{LEGGE HOOKE}$$

CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE:

$\triangle OAB$ = TRIANGOLO DEFORMATO
 $\triangle ODC$ = " " INDEFORMATO

x SIMILITUDINE

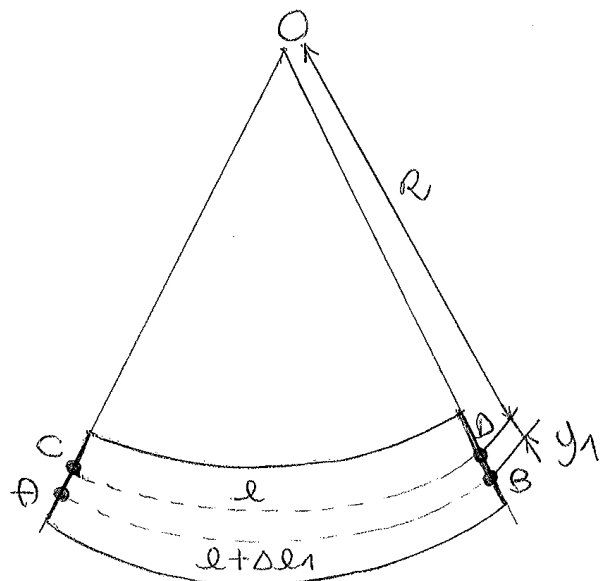
$$\left(\frac{\text{ARCO}}{\text{RAGGIO}} \right) \frac{l}{R} = \frac{l + \Delta l_1}{R - y_1}$$

$$\frac{l + \Delta l_1}{l} = \frac{R - y_1}{R}$$

$$1 + \frac{\Delta l_1}{l} = 1 - \frac{y_1}{R}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{y_1}{R}$$

PER L'AREA ELEMENTARE ΔA_1 . IN GENERALE $\epsilon = -\frac{y}{R}$



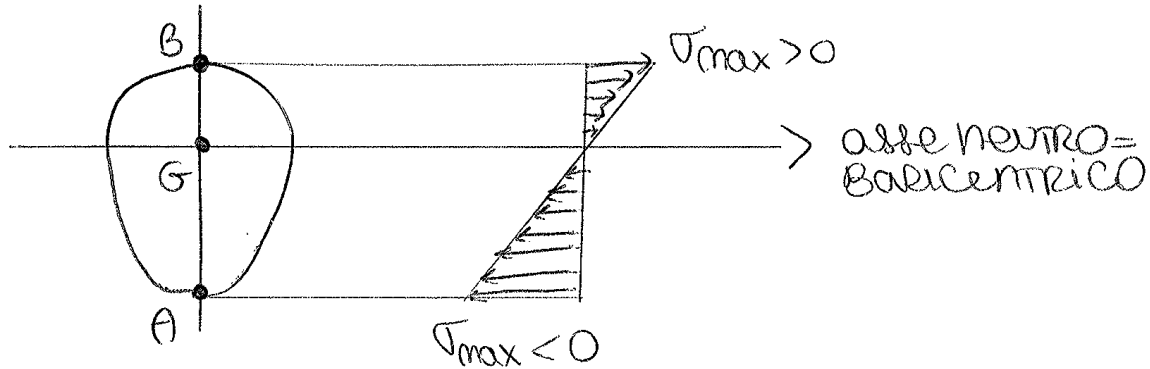
per trave di sezione rettangolare (bh)

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, y_{max} = \frac{h}{2}, W_z = \frac{bh^2}{6} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{2M}{bh^2}$$

per trave di sezione circolare (D)

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}, y_{max} = \frac{D}{2}, W_z = \frac{\pi D^3}{32} \rightarrow \sigma_{max} = \frac{32M}{\pi D^3}$$

Rappresentazione grafica = farfalla di tensione



considerazioni:

- sezioni migliori se
- σ piccolo
 - W_z grande (con minima quantità di materiale)
 - I_z grande

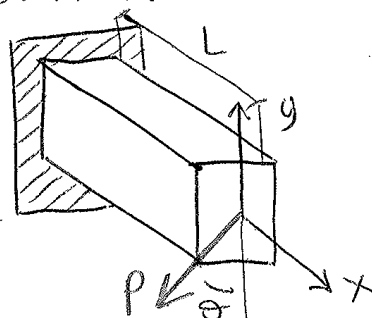
BISOGNA DISTRIBUIRE LA SUPERFICIE DELLA SEZIONE IL PIU' LONTANO POSSIBILE DALL'ASSE NEUTRO

il lavoro di deformazione è $L = \frac{M_f^2 l}{2EJ}$

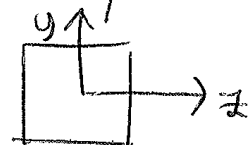
Flessione deviata ~ spiegare l'influenza della flessione deviata nelle travi

la flessione si dice deviata quando il momento flettente è rappresentato da un vettore non allineato con uno degli assi principali della sezione.

ESEMPIO: mensola con carico P inclinato di θ rispetto all'asse y e applicato al baricentro della sezione.



la sezione ha doppia simmetria rispetto agli assi y e z



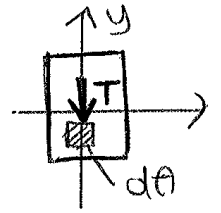
TAGLIO

la sollecitazione di TAGLIO è sempre accompagnata da quella di FLESSIONE, essendo il TAGLIO la derivata prima del momento flettente $(T = \frac{dM_f}{dx})$

quindi se $T=0 \rightarrow M_f = M_f \text{ max}$
 se $T=T_{\text{max}} \rightarrow M_f = 0$ } sono 2 contributi diversi che "vanno assieme"

le tensioni interne τ giacciono nel piano della sezione e la loro distribuzione non è uniforme

$$T = \int_A \tau dA = mA \rightarrow \tau_m = \frac{T}{A} \text{ (media) in } A$$



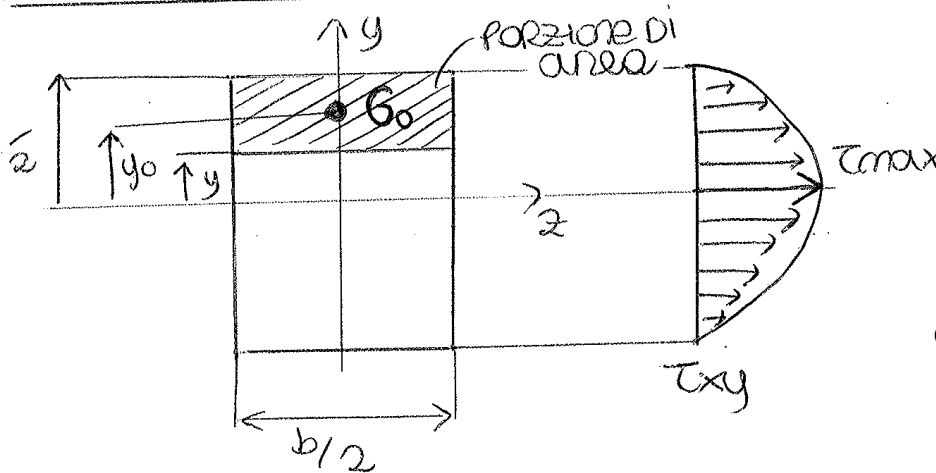
il valore della tensione τ in ogni punto è

$$\tau = \frac{TS}{b I_z}$$

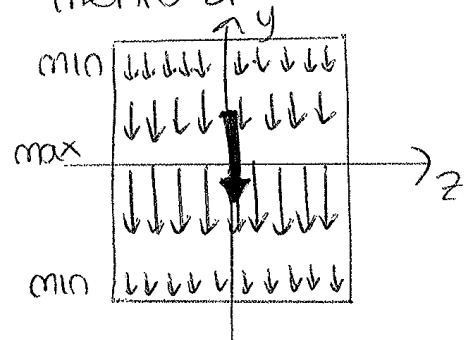
S = momento statico rispetto all'asse Z
 I_z = momento d'inerzia dell'intera sezione
 b = larghezza sezione

locale! deve essere calcolato punto x punto } costanti d'area

sezione rettangolare (bh)



graficamente ha un'andamento parabolico che sarebbe il ribaltamento di



τ_{xy} 1° pedice: normale
 2° pedice: direzione

G_0 = baricentro della porzione di area

$$S = \left(\frac{h}{2} - y\right)(b) y_0 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

S dipende in modo parabolico da $y \rightarrow$ lo stesso per τ

CONSIDERAZIONI FINALI

SOLLECITAZIONI:

TRAZIONE (N)

FLESSIONE (M_x, M_y, M_z)

} PRODUCANO σ

TORSIONE (M_t, M_x)

TAGLIO (T_y, T_z)

} PRODUCANO τ

TAGLIO LA COORDINATA z PER UN PROBLEMA BIDIMENSIONALE

RIGIDEZZA

ASSIALE : $\frac{EA}{l}$

TORSIONALE : $\frac{GIP}{l}$

FLESSIONALE : EI_z

DI TAGLIO : GA

LINEA ELASTICA

LO STUDIO DELLA DEFORMABILITÀ DELLE TRAVI PERMETTE DI VALUTARE I PUNTI DELLA STRUTTURA DOVE GLI SPOSTAMENTI ELASTICI RAGGIUNGONO I VALORI MASSIMI.

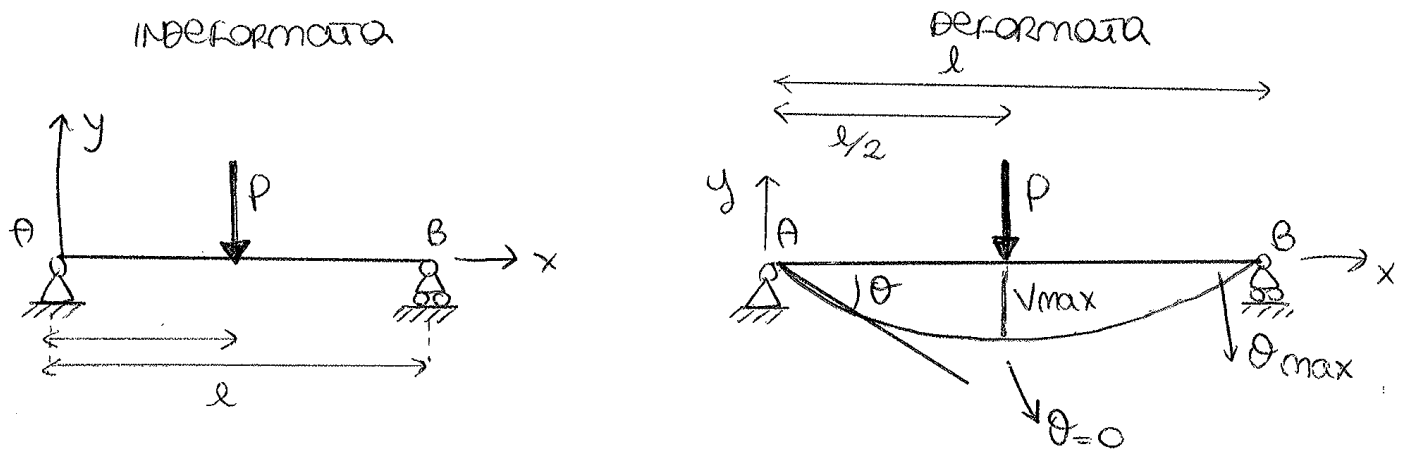
PER LE TRAVI INFLESSE SI ESEGUE IL CALCOLO DELLA LINEA ELASTICA.

È IMPORTANTE VALUTARE:

- LO SPOSTAMENTO ELASTICO MASSIMO (FRECCIA)
- LA ROTAZIONE MASSIMA

DI UNA SEZIONE, X EVITARE INTERFERENZE CHE POSSONO PREGIUDICARE IL CORRETTO FUNZIONAMENTO DELLA STRUTTURA.

METODO DELLA LINEA ELASTICA DELLA TRAVE



L'ASSE LONGITUDINALE DELLA TRAVE, INIZIAMENTE RETTILINEO, SI DEFORMA DISPONENDOSI SECONDO UNA CURVA, COMPATIBILE CON LA CONDIZIONE DI VINCOLO, CHE RAPPRESENTA LA CONFIGURAZIONE DEFORMATA DELLA TRAVE.

SI ASSUME UN SISTEMA DI RIFERIMENTO COME IN FIGURA. $\uparrow y$
 SI ASSUME PIANO xy = PIANO DI SIMMETRIA X LA SEZIONE E
 ASSE y = ASSE PRINCIPALE D'INERZIA X LA SEZIONE.

$V(x)$ = FRECCIA
 SPOSTAMENTO VERTICALE LUNGO y SUBITO DAL PUNTO QND
 PASSA DA CONF. INDEF. A CONF. DEF.
 > 0 SE SPOSTAMENTO VERSO ALTO \uparrow
 < 0 SE SPOSTAMENTO VERSO BASSO \downarrow

$\theta(x)$ = ANGOLO DI ROTAZIONE DELL'ASSE DELLA TRAVE
 ANGOLO TRA ASSE x E TANGENTE A $V(x)$
 > 0 SE IN SENSO ORARIO

EQUAZIONE VALIDA SOLO PER $\left\{ \begin{array}{l} \text{MATERIALI LINEARI ELASTICI} \\ \text{IPOTESI PICCOLA CURVATURA} \\ \text{TRASURO TAGLIO, SOLO } M_f \end{array} \right.$

LA SOLUZIONE DELL'EQ. È $v(x)$ CIOÈ LA CURVA NELLA QUALE SI TRASFORMA L'ASSE DELLA TRAVE SOTTO L'AZIONE DEI CARICHI ASSEGNATI.

$v(x)$ SI TROVA ATTRAVERSO UNA DOPIA INTEGRAZIONE.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} \quad \text{MOLTIPLICO } \times EJ$$

$$EJ \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \quad \text{INTEGRO RISPETTO A } x$$

$$EJ \int_0^x \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int_0^x M(x) dx \quad \text{RISOLVO}$$

$$EJ \frac{dv}{dx} = \left[\int_0^x (M(x) dx) \right] + C_1 \quad \text{INTEGRO UNA SECONDA VOLTA}$$

$$EJ \int_0^x \frac{dv}{dx} dx = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad \text{RISOLVO}$$

$$EJ v(x) = \int_0^x \left[\int_0^x M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2$$

C_1, C_2 SONO 2 COSTANTI DI INTEGRAZIONE, DETERMINATE DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO IN FUNZIONE DEI VINCOLI IMPOSTI.

IN PARTICOLARE, DATO UN CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO q

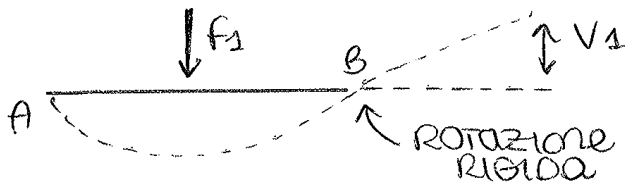
$$q = \frac{d^2M}{dx^2}$$

$$q = \text{cost}$$

$$M = \text{MAX } 2^{\circ} \text{ GRADO}$$

$$v(x) = \text{MAX } 4^{\circ} \text{ GRADO}$$

- (a) \overline{AB} = TRAVE INFLESSA A SINGOLA CAMPATA CARICATA IN MEZZERIA
 \overline{BC} = SCARICO, RUOTA RIGIDAMENTE



LA FRECCIA V_1 È POSIZIONATA ROTAZIONE IN B DOWTA AL CARICO F_1 PER LA DISTANZA a

CASO NOTEVOLE

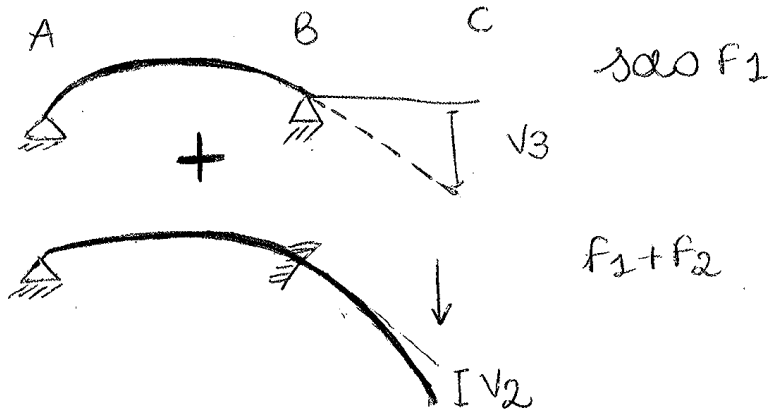
$f = \frac{Pl^3}{48EJ}$
 $\theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$

$$V_1 = \theta_B a$$

$$V_1 = \frac{F_1 (2a)^2}{16EJ} \cdot a = \frac{F_1 4a^3}{16EJ} = \frac{F_1 a^3}{4EJ}$$

- (b) \overline{BC} = MENSOLE INCASTRATA
 \overline{AB} = TRAVE APPOGGIATA

IPOTIZZO IN B UN INCONTRO INVECE DI UNA CERNIERA INTRODUCO UN MOMENTO DI INCASTRO PER $F_2 a$



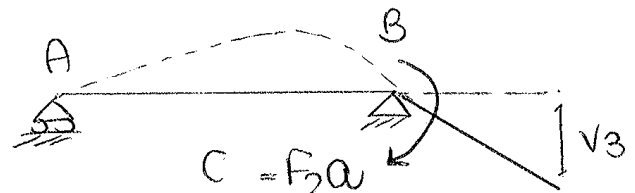
IL PEZZO \overline{BC} IN $F_1 + F_2$ PUO' ESSERE PRESO DAL

CASO NOTEVOLE

$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$

PER w_i $v_2 = \frac{F_2 a^3}{3EJ}$

- (c) AVENDO APPLICATO F_2 SU UN MOBBIO PARZIALE (\overline{BC}) BISOGNA RISTABILIRE L'EQUILIBRIO NELLO STRUTTURA APPLICANDO $C = F_2 a$ IN B.



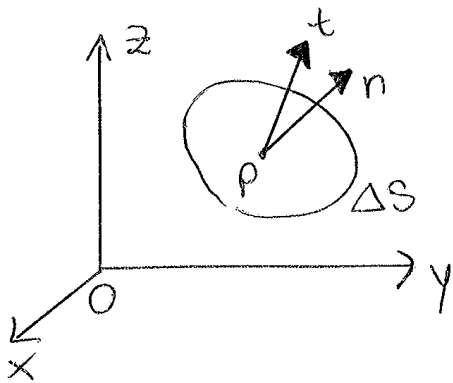
FONDAMENTI di MECCANICA del CONTINUO

STATO DI TENSIONE

- CONTINUO:
- omogeneo se HA UGUALI PROPRIETÀ IN TUTTI I PUNTI
 - isotropo " " " " PER TUTTE LE DIREZIONI NEL PUNTO
 - anisotropo se le PROPRIETÀ variano al variare della DIREZIONE del punto

DENSITÀ in un punto: $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \rho_m$

DATO un CONTINUO, si assume una SUPERFICIE per un punto P, si individua su di essa un elemento di superficie ΔS contenente il punto P:



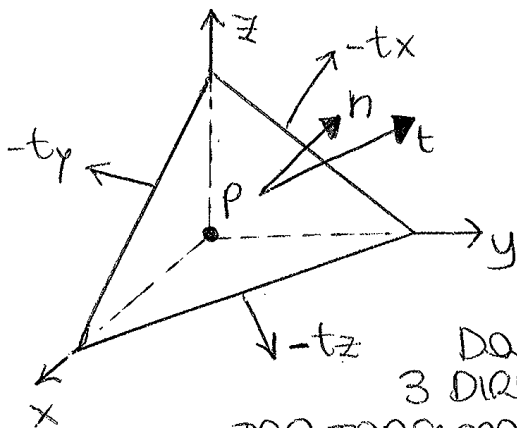
$\{n\}$ è la normale alla superficie in P

La tensione in un punto P, rispetto a una superficie con normale $\{n\}$ si definisce:

$$\{t\} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta F}{\Delta S} \right\}$$

t è sempre formato da 2 vettori $\{t\}$ e $\{n\}$
 t è un vettore accompagnato da una GLACIATURA = superficie rispetto alla quale cerchiamo t

t si calcola (congiunto a qualsiasi direzione n) se si conosce lo stato di tensione su 3 piani perpendicolari per P: tetraedro di Cauchy!

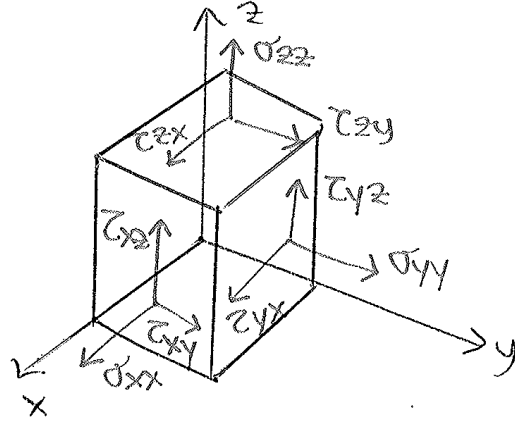


- in P una TERNA di assi di riferimento ortogonali
- elemento tetraedrico
- su ogni faccia perpendicolare agli assi sono definiti i vettori delle tensioni

Dall'equilibrio una traslazione nelle 3 direzioni (x,y,z) si individua il legame tra tensione e normale alla sezione, tramite la definizione di una matrice σ :

IN FORMA COMPATTA : $\{t\} = [\sigma] \{n\}$

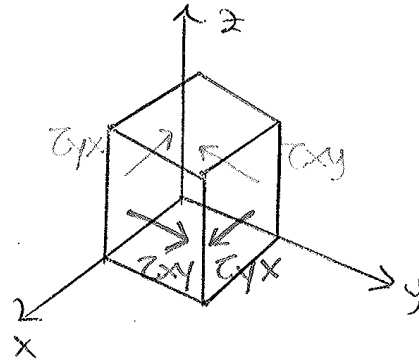
IL TENSORE DELLE TENSIONI NEL PUNTO P RISPETTO A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO SU UN CUBETTO ELEMENTARE $dV = dx dy dz$



ESEMPIO / DIMOSTRAZIONE : CASO SEMPLICE

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓
 Faccia con normale x
 ↓
 Faccia con normale y



VISTO COSÌ
NON SEMBRA
ESSERE IN
EQUILIBRIO!
(aggiungole
componenti
azzurre)

EQ. QUA TRASLAZIONE → mi mancano 2 componenti!
 xk il tensore è riferito alle 3 facce davanti, ma non devo dimenticare quelle posteriori.

EQ. QUA ROTAZIONE : $(\tau_{xy} dx dz) dy - (\tau_{yz} dy dz) dx = 0$
 $\tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yz} dx dy dz$
 $\tau_{xy} = \tau_{yz}$

TEOREMA DI MAXWELL
 ABBIAMO DIMOSTRATO IL TEOREMA DELLE RECIPROCA:

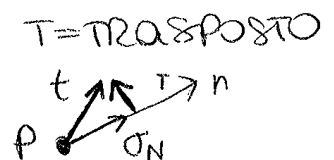
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \text{ cioè la matrice è simmetrica}$$

LE COMPONENTI SI RIDUCONO DA 9 A 6!

UN ALTRO MODO DI SCRIVERE IL TENSORE DELLE TENSIONI, È RIDURSI DA 6 COMPONENTI A 2, CIOÈ QUELLE NORMALI E TANGENZIALI

$$\sigma_n = \{t\}^T \{n\} = \{n\}^T \{t\} = \{n\}^T [\sigma] \{n\}$$

$$\sigma_t^2 + \sigma_n^2 = \{t\}^T \{t\}$$



SOSTITUENDO LA PRIMA TENSIONE PRINCIPALE σ_1

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_1 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(le direzioni principali della torsione sono inclinate di un angolo di 45° rispetto al sistema di riferimento della trave)

TENSORE DEVIATORE E SFERICO

DATO

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

si può calcolare la tensione media σ_m :

$$\sigma_m = \frac{I}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

il tensore delle tensioni può essere pensato come somma di:

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_D]$$

↓
TENSORE
SFERICO O
IDROSTATICO

↓ TENSORE
(DEVIATORE)
DEVIATORICO
DI DISTORSIONE

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_s] = \sigma - \sigma_D$$

$$[\sigma_D] = \sigma - \sigma_s$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

La definizione di stato di tensione in un punto P ha portato a definire un tensore delle tensioni con 6 componenti INDIPENDENTI

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

nell'intorno del punto P le funzioni componenti del tensore delle tensioni sono esprimibili come funzioni delle 3 coordinate cartesiane

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z)$$

Seguendo lo stesso procedimento di equilibrio lungo tutti e 3 gli assi x, y, z si ha il:

SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \phi_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \phi_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \phi_z = 0 \end{cases}$$

NOTAZIONE COMPATTA: $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \phi_j = 0 \quad (j=1,2,3)$

CERCHI DI MOHR

- sono una rappresentazione BIDIMENSIONALE nel piano σ_N, σ_T , dello stato di tensione TRIDIMENSIONALE in un punto
- è un'astrazione
- non rappresentano immediatamente la fisica del problema

MATEMATICAMENTE, IL SISTEMA DI EQUAZIONI CHE DEFINISCE IL PROBLEMA È

$$\begin{cases} \sigma_N = \{t\}^T \{n\} \\ \tau = \{n\}^T \{t\} \\ \sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \{t\} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{RISOLVENDO QUESTE} \\ \text{EQUAZIONI RISPETTO} \\ \text{AI COSENI DIRETTORI} \\ \text{DEI DUE DIREZIONI} \\ \text{PRINCIPALI DELL}' \\ \text{ORIENTAZIONE \{n\},} \\ \text{cioè } n_1, n_2, n_3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

ASSUMENDO PER CONVENZIONE L'ORDINE DECRESCENTE DELLE TENSIONI PRINCIPALI $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

abbiamo che il segno dei denominatori è:

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0 \\ (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \geq 0 \end{cases}$$

e invece il segno dei numeratori è:

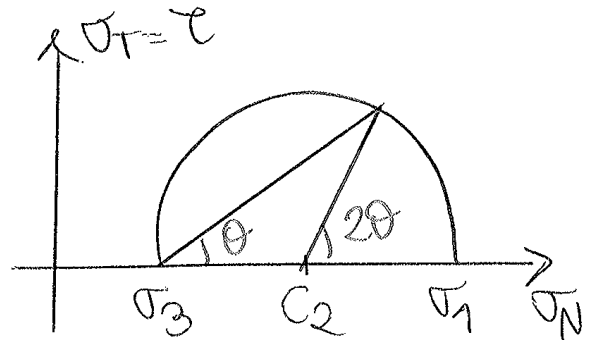
$$\begin{cases} (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_T^2 \geq 0 \\ (\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_T^2 \leq 0 \\ (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_T^2 \geq 0 \end{cases}$$

Le condizioni di uguaglianza rappresentano 3 circonferenze dette cerchi di MOHR nel piano σ_N, σ_T

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_3)^2}{(\sigma_N - \sigma_3)^2 + \tau_T^2} = \cos^2 \theta$$

IL COSENO DIRETTORALE n_1 SI RAPPRESENTA QUINDI IN FUNZIONE DELLA CIRCONFERENZA che ha per normale n_2

OSSERVANDO IL CERCHIO DI MOHR σ_1, σ_3 , L'ANGOLO θ E L'ANGOLO SOTTESO ALLA CORDA CHE UNISCE $\tau_T, \sigma_T, \sigma_3$, UO' CORRISPONDE AD ASSUMERE UN ANGOLO AL CENTRO PERLA 2θ .



MOVENDOMI SULLA CIRCO POSSO ARRIVARE AD AVERE:

$$\begin{aligned} \min \theta &= 0^\circ \\ \max \theta &= 45^\circ, 2\theta = 90^\circ \end{aligned}$$

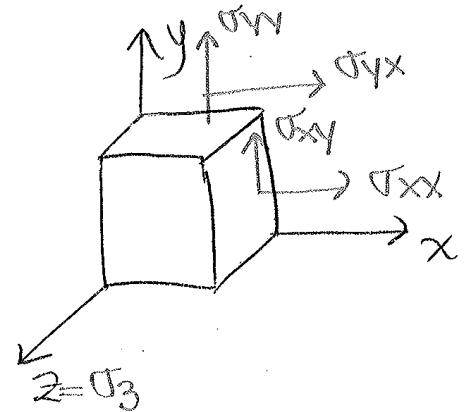
STATO DI TENSIONE PIANA

CASO TIPICO DI UNA PASTRA.

STATO DI TENSIONE PIANA = UNA DELLE 3 σ HA LE τ CORRISPONDENTI TUTTE UGUALI A ZERO PER CUI QUESTA σ E' GIÀ UNA DIREZIONE PRINCIPALE E COSI' SI POSSONO TRACCIARE DIRETTAMENTE I CERCHI DI MOHR E CALCOLARE LE ALTRE TENSIONI PRINCIPALI.

esempio

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$



E' NOTA A PRIORI LA DIREZIONE $n_3 = \sigma_{zz}$.

PER LE DIREZIONI DEGLI ASSI x E y VALGONO LE RELAZIONI:

$$\left. \begin{aligned} \text{asse } x &: \sigma_N = \sigma_{xx}, \tau_T = |\tau_{xy}| \\ \text{asse } y &: \sigma_N = \sigma_{yy}, \tau_T = |\tau_{yx}| \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{QUINDI SONO NOTI 2} \\ \text{PUNTI DI PASSAGGIO DI} \\ \text{UN CERCHIO DI MOHR} \\ \sigma_1 - \sigma_2, \text{ UOE} \end{array}$$

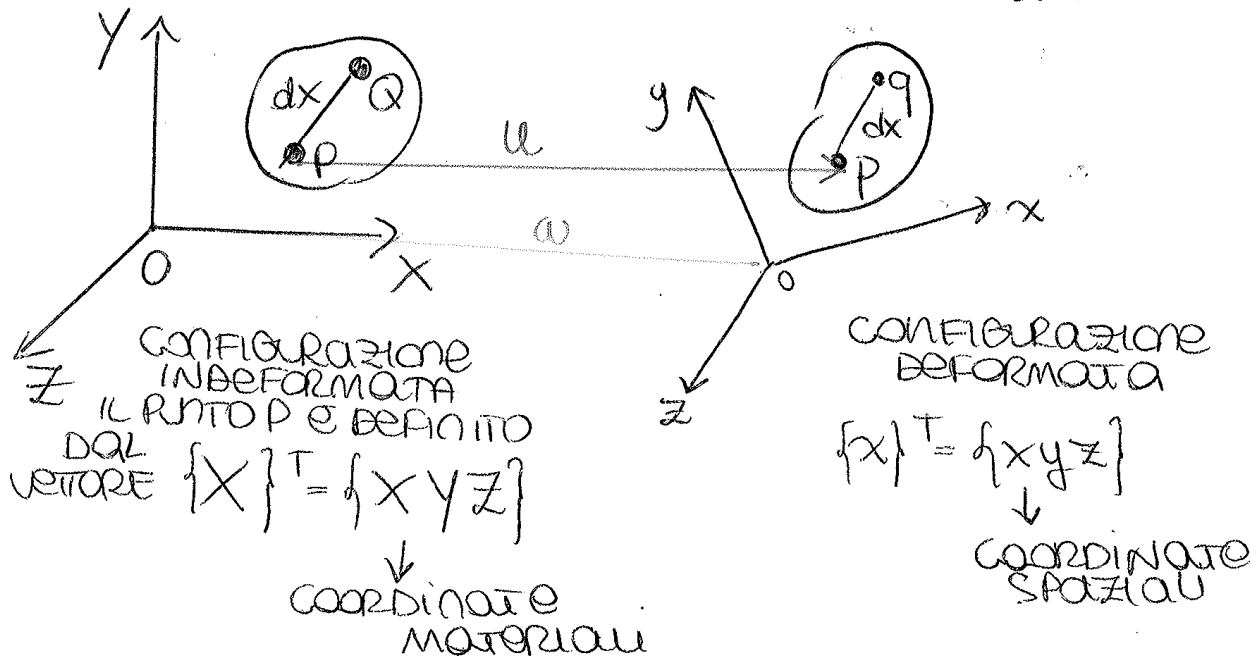
A (σ_{yy}, τ_{xy}) , B (σ_{xx}, τ_{xy}) PER CUI

$$C_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, R_3 = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$

STATO DI DEFORMAZIONE

(perché le tensioni non si vedono, ma si vedono gli spostamenti.)

Porzione di continuo dove sono individuati punti P e Q
distanti tra loro dx . Supponiamo di deformarlo:



Lo spostamento u è: $\bar{u} = (\bar{p}-o) - (\bar{P}-O) + (o-O)$

$$\text{cioè: } \{u\} = \{x\} - \{X\} + \{a\}$$

Sei sistemi di riferimento hanno la stessa origine: $\{u\} = \{x\} - \{X\}$ ($a=0$)

ci sono 2 modi x studiare un problema fisico.

Le leggi della meccanica si prefiggono di ottenere la posizione di un punto al tempo t conoscendo la posizione iniziale e la legge del moto:

$$\{x\} = f(\{X\}, t) = \text{modo di rappresentazione LAGRANGIANO}$$

consiste nel seguire uno stesso punto nel tempo partendo da una configurazione indeformata.

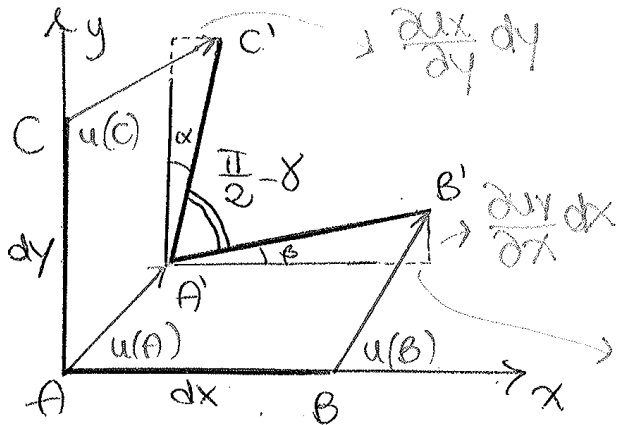
→ Mecc. strutturale (continuo si muove nello spazio)
un'altra rappresentazione (inversa) è:

$$\{X\} = g(\{x\}, t) = \text{modo di rappresentazione EULERIANO}$$

consiste nel seguire diversi punti materiali che passano per una determinata posizione spaziale nel tempo

→ Mecc. FWI di (i punti si muovono in forme geometriche def.)

IDEM PER LE ALTRE DIREZIONI y e z .
 CONSIDERIAMO LA FIGURA



$\overline{AB}, \overline{AC}$ 2 segmenti
 DEFORMAZIONE

$\overline{A'B'}, \overline{A'C'}$ nuovi segmenti

$u(A), u(B), u(C)$ vettori spostamento
 dei 3 punti

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

$$\gamma = \alpha + \beta$$

SE GLI SPOSTAMENTI SONO PICCOLI SI LIMITA AL 1° ORDINE LA VARIAZIONE DELLE FUNZIONI DI SPOSTAMENTO.

LA DISTANZA $\overline{A'B'}$ è:

$$dx'^2 = \left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2 \quad \text{PER PITAGORA}$$

$$dx'^2 = dx^2 + \frac{(\partial u_x)^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} dx^2 + \frac{(\partial u_y)^2}{\partial x^2} dx^2 =$$

$$dx'^2 = dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \quad \text{SVILUPPO QUADRATI E TRASCURO GLI INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE}$$

$$dx' = \sqrt{dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x}} \quad \text{SVILUPPO CON TAYLOR LA FUNZIONE RADICE QUADRATA}$$

$$dx' = dx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

SOSTITUISCO NELLA DEFINIZIONE DI DEFORMAZIONE:

$$\epsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \text{IDEM X L'ALTRA VARIAZIONE AC} \rightarrow \text{AC}'$$

NEL CASO 3D ABBIAMO:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

È DEFINITO RISPETTO A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO, QUINDI AMMETTE DUE DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE RISPETTO A CUI LE γ SONO NULLE.

PER CALCOLARE LE DEFORMAZIONI PRINCIPALI SI RISOLVE IL DETERMINANTE:

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \lambda & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} - \lambda & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e si trovano } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

L'INVARIANTE DEL 1° ORDINE È:

$$I = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

ED HA IL SIGNIFICATO DI DILATAZIONE CUBICA. TUTTE LE DEFORMAZIONI SONO ADIMENSIONALI.

LEGGI COSTITUTIVE DEI MATERIALI

PER LEGARE ASSIEME I 2 TENSORI $[\sigma]$ = STATO DI TENSIONE E $[\epsilon]$ = STATO DI DEFORMAZIONE, SI USA LA LEGGE DI HOOKE.

LE EQUAZIONI COSTITUTIVE PER UN SOLIDO IN CAMPO LINEARE ELASTICO, LEGANO $[\sigma]$ E $[\epsilon]$ TRAMITE LA SEGUENTE ESPRESSIONE TENSORIALE:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

TENSORE DI ELASTICITÀ
HA $9^2 = 81$ COMPONENTI

PER LE SIMMETRIE DI $[\sigma]$ E $[\epsilon]$, $[E]$ SI RIDUCE A $36 = 6^2$ COMPONENTI, NEL CASO DI UN MATERIALE ANISOTROPO.

MA ESSENDO ANCHE $[\epsilon]$ SIMMETRICO, SI RIDUCE A 21 IL NUMERO DELLE COSTANTI INDIPENDENTI NEL CASO DI UN MATERIALE ANISOTROPO QUALSIASI.

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\} \quad \{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad [D]^{-1} = [E]$$

LAVORO DI DEFORMAZIONE

elementino di volume $dx dy dz = dV$,
 si assegnano:

una DEFORMAZIONE INFINITESIMA: $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$
 un CAMPO DI TENSIONI: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Le tensioni agenti sulle facce dell'elementino compiranno un lavoro INTERNO che si ottiene come segue:

$$dL_i = (\epsilon_{xx} dx) \sigma_{xx} dy dz + (\epsilon_{yy} dy) \sigma_{yy} dx dz + (\epsilon_{zz} dz) \sigma_{zz} dx dy + (\gamma_{xy} dy) \tau_{xy} dx dz + (\gamma_{zy} dz) \tau_{zy} dx dy + (\gamma_{xz} dx) \tau_{xz} dy dz$$

EQUAZIONE
DI BILANCIO
DI UN
PROBLEMA
3D

$$dL_i = (\epsilon_{xx} \sigma_{xx} + \epsilon_{yy} \sigma_{yy} + \epsilon_{zz} \sigma_{zz} + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{zy} \tau_{zy} + \gamma_{xz} \tau_{xz}) dV$$

$$dL_i = \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz$$

INTEGRO PER AVERE IL LAVORO DI DEFORMAZIONE INTERNO COMPLESSIVO PER UNA DEFORMAZIONE FINITA

$$L_i = \int \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz$$

$$L_i = \int \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dx dy dz$$

$$L_i = \int \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dx dy dz$$

PROPRIETA' DEL
PRODOTTI SCALARE

LEGGI
HOOKE

IL LAVORO E' ESPRESSO TUTTO IN FUNZIONE DI ϵ O DI σ .

- Le soluzioni delle piastre sottili o di Kirchhoff
- Le soluzioni dei problemi assialsimmetrici

Le soluzioni analitiche di queste strutture, che sono caratterizzate da ipotesi geometriche semplificative, sono definite problemi semi-inversi.

Un problema matematico semi-inverso individua una soluzione di un problema matematico differenziale imponendo parte della soluzione al contorno. Grazie ad ipotesi semplificative, ad esempio ipotesi geometriche, così si semplifica il sistema di equazioni differenziali.

IL PROBLEMA SEMI-INVERSO DI SAINT VENANT: LA TEORIA DELLE TRAVI

una idealizzazione modellistica per lo studio dello stato di tensione delle travi reali e il solido di Saint Venant:

- forma cilindrica
- di materiale omogeneo e isotropo

Le ipotesi alla base della soluzione sono:

- dimensione longitudinale (x) preponderante rispetto alle altre
- materiale omogeneo e isotropo
- forze superficiali sulla superficie laterale nulle
- $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0$, cioè è caricato da forze superficiali sulle basi

(o meglio: sono approssimabili a zero in tutta la struttura)

abbiamo che:

$$t_i = [\sigma] n_j$$

$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0$$

$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z = 0$$

$$t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = 0$$

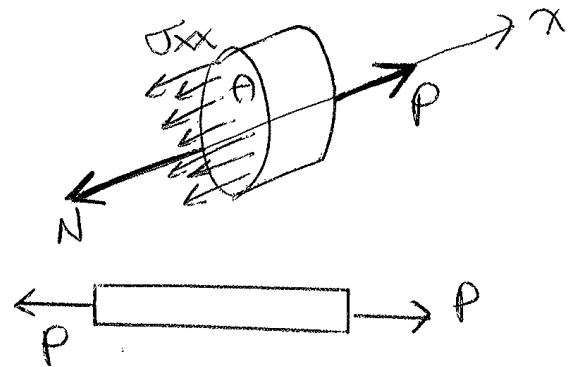
↑ I carichi superficiali sulle superfici laterali sono ipotizzati nulli

$$(n_x = 0)$$

PERCHÉ NEI MATERIALI DUTTI, LA SEZIONE DI ROTTURA È INCLINATA DI 45°?

SIAMO IN TRAZIONE PURA, PER CUI

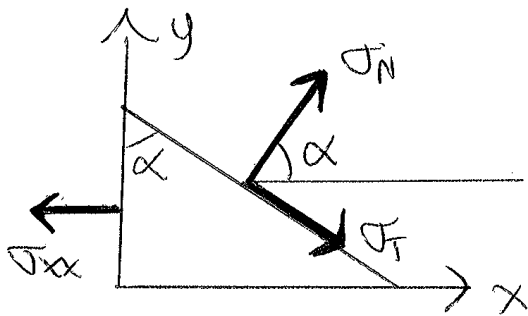
$$\{t\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$



È LA CONDIZIONE PIÙ SEMPLICE IN ASSOLUTO, E QUESTO È UTILIZZATA IN LABORATORIO

SE $\alpha = 0$, ABBIAMO: $\{t\} = \sigma_{xx} n_x$, $\sigma_N = \sigma_{xx}$, $\sigma_T = 0$

SE $\alpha = 45^\circ$



ABBIAMO:

$$\sigma_N = \sigma_{xx} n_x^2$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \sigma_{xx}^2 n_x^2$$

COSENI DIRETTORI:

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

RISOLVIAMO

$$\sigma_N = \sigma_{xx} n_x^2 = \sigma_{xx} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sigma_{xx} \frac{2}{4} = \frac{\sigma_{xx}}{2}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{xx}^2 n_x^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 \frac{1}{2} - \sigma_{xx}^2 \frac{1}{4}} = \sigma_{xx} \frac{1}{2}$$

$$\sigma_T = \sigma_{xx} \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_N = \sigma_T = \frac{\sigma_{xx}}{2}}$$

COME SI DIVIDE LA TRAVE?

$\alpha = 0$



$\alpha = 45^\circ \rightarrow$ VALORE PER CUI ABBIAMO σ_T MASSIMA!



CRITERI di CEDIMENTO STRUTTURALE STATICO

DEFINIZIONE: IL CEDIMENTO STRUTTURALE (O ROTTURA) PUÒ ESSERE DEFINITO COME:

"OGNI CAMBIAMENTO DI DIMENSIONE, FORMA O PROPRIETÀ DEL MATERIALE DI UNA STRUTTURA O SUO COMPONENTE CHE LI RENDE INADEGUATI AD ASSOLVERE LE FUNZIONI PER LE QUALI ERANO STATI PROGETTATI E COSTRUITI"

PER CONTROLLARE IL CEDIMENTO DI UN COMPONENTE SOGGETTO AD UN SISTEMA DI CARICHI È NECESSARIO CONSIDERARE:

- (a) TIPO DI CEDIMENTO
- (b) FATTORI INFLUENZANTI IL CEDIMENTO
- (c) LOCALIZZAZIONE DELLA ROTTURA

(a) TIPO DI CEDIMENTO:

- PER DEFORMAZIONE ELASTICA
- PER DEFORMAZIONE PLASTICA
- FRATTURA (FRAGILE)
- (MODIFICA DEL MATERIALE)
 - effetti metallurgici, chimici, nucleari etc.
 - protesi anca / biocompatibilità
 - treno

(b) FATTORI INFLUENZANTI IL CEDIMENTO:



Quelle _____ sono quelle studiate da noi.

- ambiente
NATURALE chimico nucleare

(c) LOCALIZZAZIONE DELLA ROTTURA:

- INTERNA
- SUPERFICIALE

OBBIETTIVO:
REGOLE O CRITERI MATEMATICI DI VERIFICA O PROGETTO

SI HA CEDIMENTO DI UN COMPONENTE QUANDO IL VALORE DEL "MODULO" SELEZIONATO NELLO STATO DI TENSIONE TRIASSIALE DIVENTA UGUALE O SUPERA IL CORRISPONDENTE "MODULO" CHE CAUSA IL COLASSO IN UNO STATO DI TENSIONE MONOASSIALE.



SI PREDICE IL CEDIMENTO QUANDO IL VALORE MASSIMO DEL "MODULO" IN UNO STATO DI TENSIONE MULTIASSIALE È MAGGIORE O UGUALE AL VALORE DELLO STESSO "MODULO" CHE PROVOCA IL CEDIMENTO IN UNA PROVA DI TRAZIONE.

MODULO = PARAMETRO, cioè DEVO POTER RICAVARE UN PARAMETRO DALLE MATRICI PER POTERLE CONFRONTARE (XK NON BASTA IL CONTRASTO DELLE 2 MATRICI)

IL MODULO SI IDENTIFICA SOLITAMENTE CON LA TENSIONE IDEALE EQUIVALENTE.

SONO STATE SVILUPPATE DIVERSE TEORIE SEMI-EMPIRICHE:

(FRAGILI) • IPOTESI DI RANKINE, o IPOTESI DELLA MASSIMA TENSIONE NORMALE σ_{max}

(DUTILI) • IPOTESI DI TRESCA (COULOMB - GUEST) o IPOTESI DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE τ_{max}

- IPOTESI DI DEW'ENERGIA DI DISTORSIONE U_D
- IPOTESI DI MOHR (CURVA INVILUPPO)
- IPOTESI

IPOTESI DELLA MASSIMA TENSIONE NORMALE σ_{max}
O IPOTESI DI RANKINE

(PER MATERIALI FRAGILI) ($A_r < 5\%$)

IL CEDIMENTO DI UN MATERIALE FRAGILE SOWECUTATO CON UNO STATO DI TENSIONE TRIASSIALE AVVIENE QUANDO LA MASSIMA TENSIONE PRINCIPALE UGUA O SUPERA LA TENSIONE LIMITE IN UNO STATO DI TENSIONE MONOASSIALE:

$$\sigma_{id} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq \sigma_l = \frac{\sigma_R}{S}$$

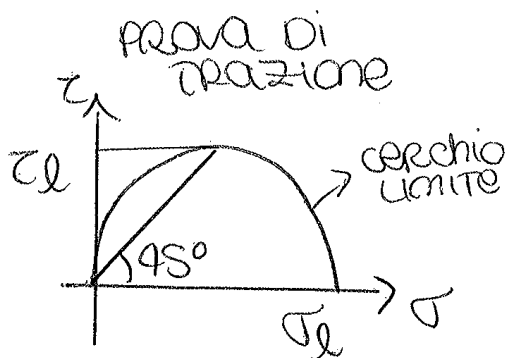
IPOTESI DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE τ_{max}

O IPOTESI DI TRESCA

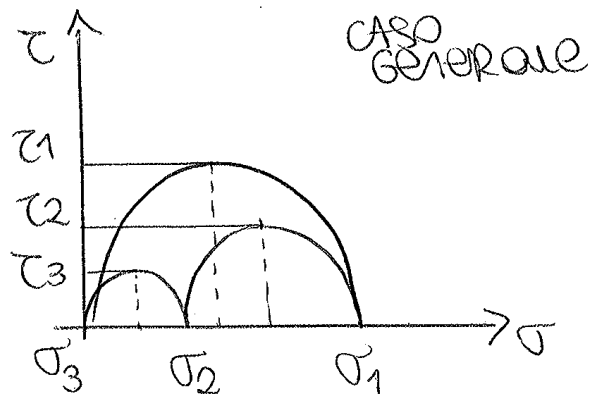
(PER MATERIALI DUTTI) ($A_r > 5\%$)

IL CEDIMENTO DI UNA STRUTTURA DUTTILE SOLLECITATA CON UNO STATO DI TENSIONE TRIASSIALE AVVIENE SE LA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE UGUAGLIA O SUPERA LA TENSIONE TANGENZIALE LIMITE DI ^{PRINCIPALE} ROTTURA IN UNO STATO DI TENSIONE MONOASSIALE

CONFRONTO I CERCHI DI MOHR DI UNO STATO DI TENSIONE TRIASSIALE CON IL CERCHIO LIMITE DI MOHR



$$\tau_l = \frac{\sigma_l}{2}$$



$$\tau_l = \max \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \end{array} \right.$$

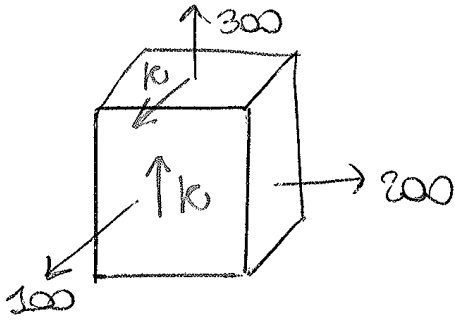
PIÙ I CERCHI DI MOHR SI ESTENDONO NELL'ASSE DELLE ORDINATE, PIÙ C'È CEDIMENTO

SI HA QUINDI CEDIMENTO SE È VERIFICATA UNA DELLE SEGUENTI:

$$\sigma_{id\ max} = \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_1 - \sigma_2| \geq \sigma_l = \frac{\sigma_s}{S} \\ |\sigma_2 - \sigma_3| \geq \sigma_l \\ |\sigma_3 - \sigma_1| \geq \sigma_l \end{array} \right.$$

ESEMPLO :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & k \\ 0 & 200 & 0 \\ k & 0 & 300 \end{bmatrix}$$



DUTTILE
 $\sigma_{s1} = 200 \text{ MPa}$
 $\sigma_{s2} = 500 \text{ MPa}$
 $S = 2$

TROVO k PER CUI
NON ABBIAMO
 CEDIMENTO

CERCO LE TENSIONI PRINCIPALI

$$(200 - \sigma_p) [(-100 - \sigma_p)(300 - \sigma_p) - k^2] = 0$$

$$(200 - \sigma_p) [\sigma_p^2 - 400 \sigma_p + 30'000 - k^2] = 0$$

$$\sigma_1 = 200 + \sqrt{10'000 + k^2}$$

$$\sigma_2 = 200 \rightarrow \text{si legge già dalla matrice}$$

$$\sigma_3 = 200 - \sqrt{10'000 + k^2}$$

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_3| \} = 2 \sqrt{10'000 + k_1^2} < \frac{\sigma_{s1}}{S} = 100$$

$$\sqrt{10'000 + k_1^2} < 50$$

$$10'000 + k_1^2 < 2500$$

$$k_1^2 < -7500$$

non $\exists k_1$ con σ_{s1} ABBIAMO
 SEMPRE CEDIMENTO

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_3| \} = 2 \sqrt{10'000 + k_2^2} < \frac{\sigma_{s2}}{S} = 250$$

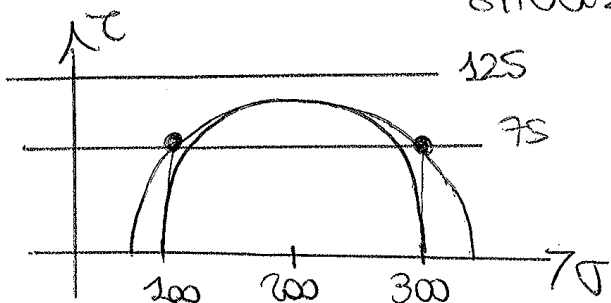
$$\sqrt{10'000 + k_2^2} < 125$$

$$10'000 + k_2^2 < 15'625$$

$$k_2^2 < 5625 \rightarrow -75 < k_2 < 75$$

max $k_2 = \pm 75$
 SITUAZIONE LIMITE

PER NON
 AVERE
 CEDIMENTO!



$\sigma_s = \text{DIAMETRO} (200)$
 $\frac{\sigma_s}{2} = \text{RAGGIO} (100)$
 $\frac{\text{RAGGIO}}{S} = (50)$

per σ_i , il "modulo" da controllare è un'energia.
 Cerchiamo l'energia volumica:

$$U_V = \frac{1}{2} \sigma_m^3 \epsilon_m$$

dove $\epsilon_m = \frac{1}{E} [\sigma_m - 2\nu \sigma_m] = \frac{1}{E} \sigma_m (1 - 2\nu)$

per cui $U_V = 3 \frac{1}{2} \sigma_m \frac{1}{E} \sigma_m (1 - 2\nu) = \frac{1}{2E} \sigma_m^2 (1 - 2\nu) \cdot 3$

ora sostituisco $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

per cui $U_V = \frac{1}{6E} \cdot (1 - 2\nu) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \cdot 3$

$$U_V = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

L'energia di distorsione si ottiene sempre per differenza di:

$$U_D = U_T - U_V \quad \text{scritte in un sistema principale}$$

$$U_D = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) \right] - \frac{(1 - 2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_D = \frac{1 + \nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

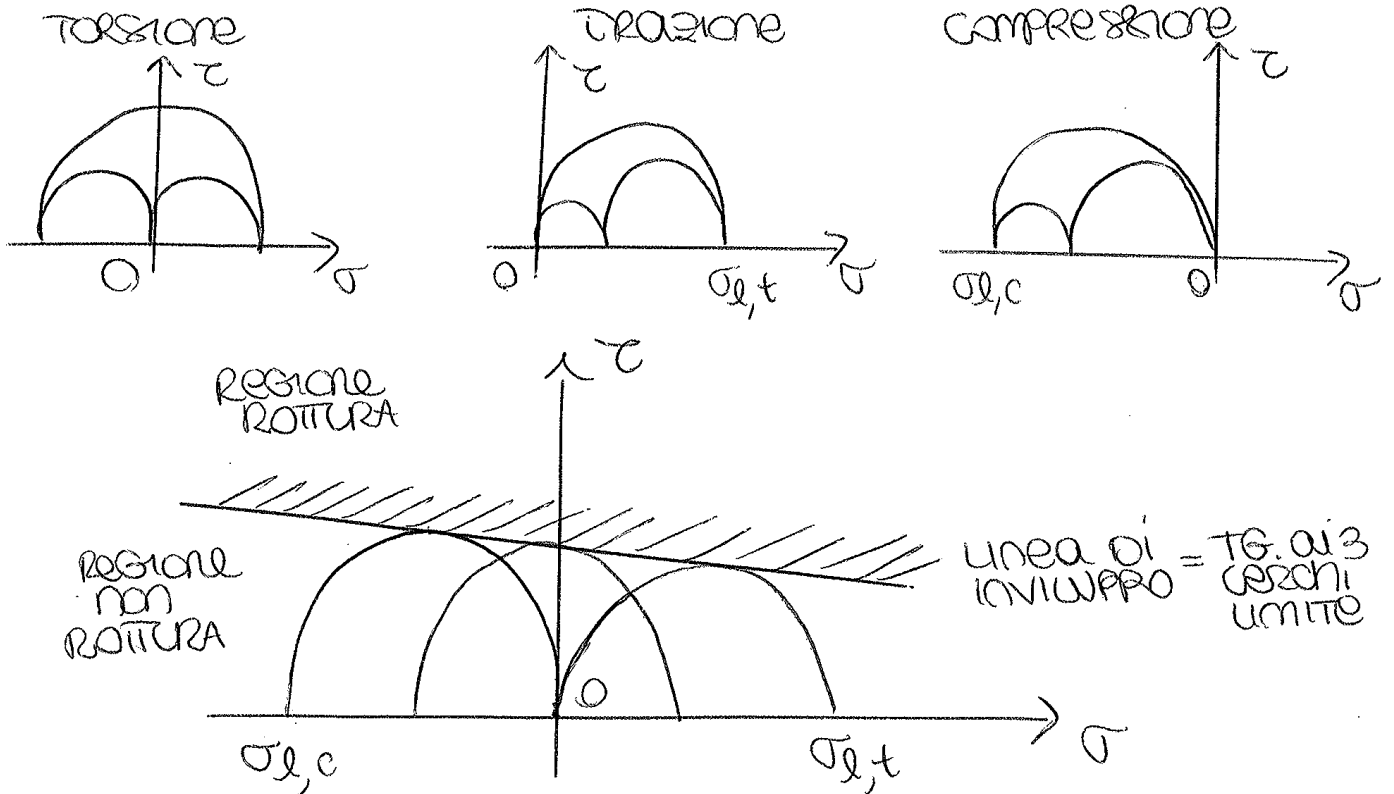
quindi si osserva che in un caso generale, U_D in un punto è pari alla somma dei quadrati dei diametri dei cerchi di Mohr. Questa formula si semplifica nella prova di trazione perché il provino ha 2 delle 3 tensioni principali nulle. per cui

energia
 limite = $U_{DL} = \frac{1}{2E} \sigma_l^2 - \frac{1 - 2\nu}{6E} \sigma_l^2 = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_l^2$

IPOTESI DI MOHR

(x MATERIALI DUTTI) ($A_r > 5\%$)

IL CEDIMENTO DI UNA STRUTTURA SOLLECITATA DA UNO STATO DI TENSIONE PURAMENTE AVIENE SE IL PUNTO GRANDE DEI CERCHI DI MOHR ASSOCIATO ALO STATO DI TENSIONE NEL PUNTO E' TANGENTE O ESTERNO ALO LINEA DI COLLASSO INDIVIDUATA DAL INVOLUPO DEI CERCHI DI MOHR ALO PROVE DI TRAZIONE, COMPRESSIONE, TORSIONE.



ESTENSIONE DEL CRITERIO DI TRESCA, CIOE' IL CEDIMENTO E' CONTROLLATO DALLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE, INDIVIDUATA DAL MAGGIORE DEI 3 CERCHI DI MOHR.

GRAFICI SPERIMENTALI pg. 190

APPLICAZIONE DEI CRITERI DI ROTTURA ALLA TEORIA DELLE TRAVI

IN QUALUNQUE SISTEMA DI TRAVI, LO STATO DI TENSIONE E', AL PUNTO, BIDIMENSIONALE (DE SAINT-VENANT)

QUINDI I CRITERI SI POSSONO SEMPLIFICARE CON

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_{1,3} = \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

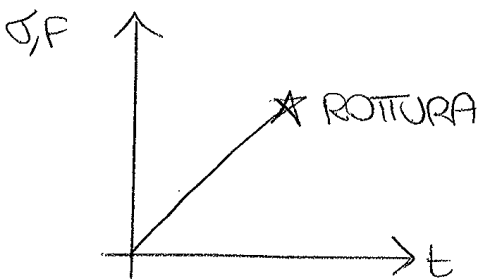
FATICA DEI MATERIALI

- DESCRIVERE LA NATURA E LE CONSEGUENZE DEL MECCANISMO DI ROTTURA A FATICA
- DETERMINARE IL NUMERO DI CICLI NECESSARIO PER,
 - SVILUPPARE E PROPAGARE UNA CRICCA DI FATICA
- DISCUTERE LE IMPLICAZIONI DELLA FATICA SUL PROGETTO E SULLE OPERAZIONI DI MANUTENZIONE

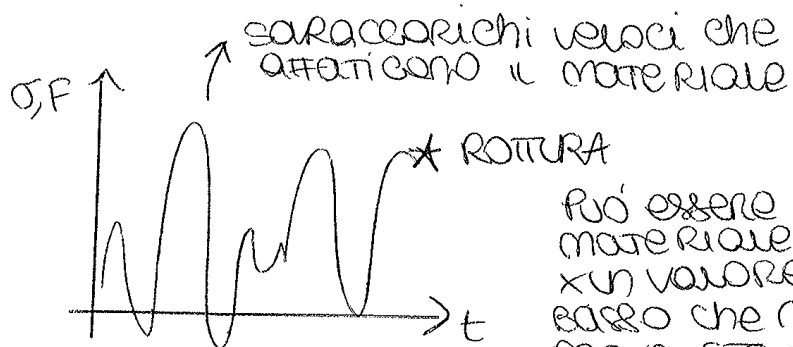
Ci sono molteplici modi di rottura:

- | | | |
|-------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1 ° eccessiva deformazione | < | elastica |
| 2 ° instabilità elastica | | plastica (σ_s o σ_p) |
| 3 ° snervamento | | 6 ° CREEP |
| 4 ° FRATTURA | | 7 ° USURA |
| 5 ° FATICA → che studiamo ora | | 8 ° CORROSIONE |

Si dividono genericamente in $\left\{ \begin{array}{l} \text{statici (1-4)} \\ \text{dipendenti dal tempo (5-8)} \end{array} \right.$



modo monotono statico
Progetto a resistenza



modo ciclico dinamico
Progetto a durata

Può essere che il materiale cede a un valore F_{m} basso che nella prova statica

- MODI DI ROTTURA DIPENDENTI DAL TEMPO SONO CARATTERIZZATI DA:
- DANNEGGIAMENTO AUMENTA COL TEMPO
 - EFFETTI DI INTERAZIONE
 - IMPORTANZA DEI DIFETTI, COMPORTAMENTO STATISTICO
 - SENSIBILITÀ A: MATERIALE, LIVELLI DI CARICO, TEMPERATURA, TEMPO DI ESPOSIZIONE, NUMERO E VELOCITÀ DEI CICLI DI CARICO, CONDIZIONI AMBIENTALI

- ① **SAFE LIFE** : LA ROTTURA NON PUÒ MAI AVVENIRE
(vecchia) IN UNO SPECIFICO INTERVALLO DI TEMPO NESSUN DIFETTO PREESISTENTE PUÒ CRESCERE FINO A UNA DIMENSIONE CRITICA
- ② **FAIL SAFE** : COMPONENTE SOSTITUITO PRIMA CHE AVVENGA LA ROTTURA
(molto conservativa) LA STRUTTURA POSSIEME DEB. COMPONENTI DA ASSICURARE CHE IN CASO DI ROTTURA DI UN ELEMENTO NON SI ABBA ROTTURA DELL'INTERA STRUTTURA
- ③ **DAMAGE TOLERANCE** : DEVO CONOSCERE IL TEMPO DI PROPAGAZIONE TRA SUBCRITICA E CRITICA E DEVO AVERE DEGLI STRUMENTI DI ISPEZIONE MOLTO AVANZATI → SI TENGONO SOTTO CONTROLLO I VARI COMPONENTI
(oggi)

PROVE DI FATICA DIAGRAMMA DI WÖHLER

FATICA AD < ^{ALTO}
_{BASSO} numero di cicli

INSTABILITA' elastica