



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1217

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Fisica II riassunti + domande + Eserc.

Prof. Barbero

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

- Conservazione di un campo conservativo in una
integrale linea di " " " " come $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ (potenziale)
- Condizioni conservatività $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B du$
- Stokes (rot, $\nabla \times$, tridim)
- Gauss ($\nabla \cdot$, ∇)
- Divergenza \vec{F} ; \vec{F} , \vec{B} , \vec{R} (rotore) / ROTORE DEL ROTORE

Il flusso attraverso una superficie aperta dipende solo dal bordo della superficie se il vettore è irrotazionale

- Coordinate sferiche e suo gradiente ($\vec{F} = -\nabla U$)
- ogni forza centrale e conservativa \rightarrow coord. sferiche
- l'energia potenziale di 1 forza centrale dipende solo da r
- Campo 2 cariche E asse x costante L

- Campo filo omogeneo
- Campo disco omogeneo \rightarrow piano / tra 2 piani / condensatore
- Campo anullo " "

MOTO PARTICELLA con v_0 che entra in E (parabolo)

- Conservatività $E \leftarrow$
- Potenziale 1 carica, 1 distribuzione di carica, ma 2 piani
- Velocità particella ma 2 piani
- Energia propria $W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k \frac{q_i q_j}{r_{i,j}}$ $i \neq j$ (2.3 usbro) \leftarrow
- E L superfici equipot.

DIPOLI: Potenziale, campo, forza, momento, energia
 \downarrow
cariccate e paia

Potenziale di un corpo (x)

- Gauss \leftarrow 1 carica / tante cariche } legge integrale, \checkmark legge locale EQ POISSON

in E non ci sono punti di eq stabile o instabile

GAUSS \rightarrow campo piano unif / piano non unif (discontinuità campo e potenziale di uno strato)

~~SITUAZ. INCONDUZIONE~~

Campo e pot condut. sferico e in regime di induz. cond.

Capacità C. sferico / C. Piano / C. cilindrico

Energia propria (condensatore) \leftarrow (4.7 usbro)

Forza e momento 1,2,3 \leftarrow (4.8 usbro) $W_{ext} = \int F_{ext} dx = - \int F_c dx = dU$

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

LUNTIME TEORIA FISICA II (BARBERO)

POTENZIALE ELETTRICO E CAMPO ELETTRICO DI UN DIPOLO IN PUNTI LONTANI

DATO UN DIPOLO, POSSO CALCOLARE IL POTENZIALE ELETTRICO IN UN PUNTO QUALSIASI $P=(x,y,z)$

$$V(x,y,z) = kq \frac{1}{r_+} - kq \frac{1}{r_-} =$$

$$= kq \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\}$$

SE CONSIDERO PUNTI MOLTO LONTANI, $r \gg \frac{a}{2}$ E CON QUESTA APPROSSIMAZIONE, $r_+ \parallel r_- \parallel r$.

ORA ABBIAMO CHE

$$r - r_+ = \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$r_- - r = \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$r_+ = r - \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$r_- = r + \frac{a}{2} \cos \theta$$

PER CI:

$$V(x,y,z) = kq \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos \theta} \right\} kq =$$

$$= \left\{ \frac{r + \frac{a}{2} \cos \theta - r + \frac{a}{2} \cos \theta}{(r - \frac{a}{2} \cos \theta)(r + \frac{a}{2} \cos \theta)} \right\} kq = kq \frac{a \cos \theta}{r^2 + (\frac{a}{2} \cos \theta)^2}$$

MA SE X IPOTESI $P \gg \frac{a}{2}$, ORA ANCHE $r \gg \frac{a}{2}$

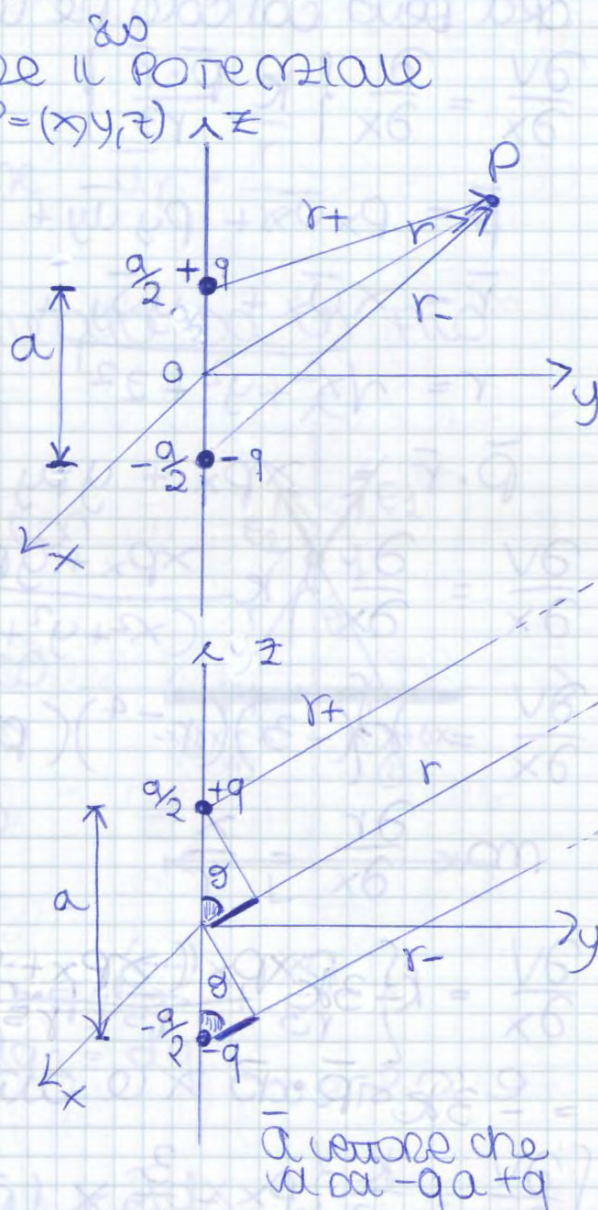
$$V(x,y,z) = kq \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

X DEFINIZIONE DI MOMENTO DI DIPOLO $\vec{p} = \vec{a}q$, $|\vec{p}| = aq$

$$V(x,y,z) = k \frac{p \cos \theta}{r^2} = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = k \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

PER CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO DI QUESTO DIPOLO,

$$\text{SO CHE } \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

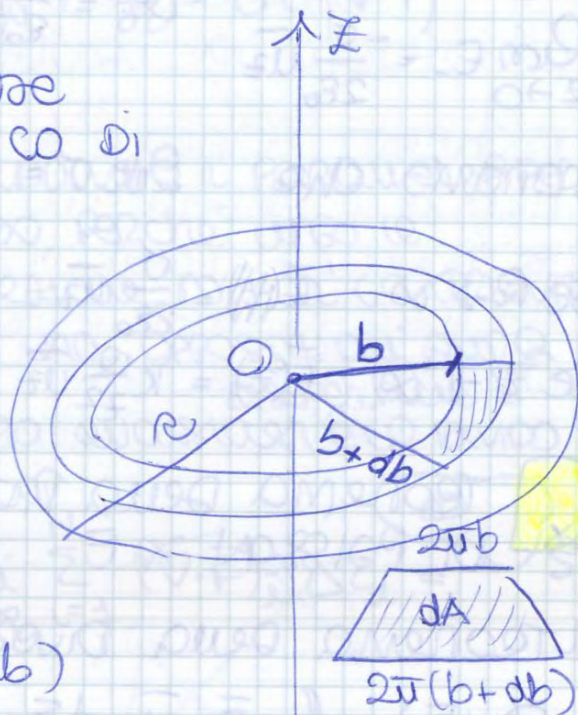


⌘ Campo elettrostatico creato da un disco uniformemente carico

Calcolo il campo E. lungo l'asse passante per il centro del disco di raggio R

consideriamo il disco come somma di anelli di raggio b e spessore b+db

essendo unif. carico, la carica è distribuita con densità superficiale



$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad dA = 2\pi b (db) \quad dQ = \sigma 2\pi b (db)$$

prendo il campo di un anello

$$d\vec{E} = k dQ \frac{\vec{z}}{(z^2+b^2)^{3/2}} \quad \vec{E}_z = k \sigma 2\pi b db \frac{z}{(z^2+b^2)^{3/2}} \vec{z}$$

Per tutto il disco

$$\vec{E} = \int_0^R k \sigma 2\pi b db \frac{z}{(z^2+b^2)^{3/2}} \vec{z} = k \sigma 2\pi \vec{z} \int_0^R \frac{b db}{(z^2+b^2)^{3/2}}$$

Calcolo l'integrale

$$\int_0^R \frac{b db}{(z^2+b^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(b^2)}{(z^2+b^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{facco un camb. di variabili} \\ \eta = z^2 + b^2 \\ d\eta = d(b^2) + d(z^2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \eta(R) = R^2 + z^2 \\ \eta(0) = z^2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\eta(0)}^{\eta(R)} \frac{1}{(\eta)^{3/2}} d(\eta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} \right] \left[\eta^{-\frac{3}{2}+1} \right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} = \frac{1}{2} (-2) \left[\eta^{-\frac{1}{2}} \right]_{z^2}^{R^2+z^2} = - \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right]$$

$$= - \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{|z|} \right] \quad \text{per cui}$$

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} k \sigma 2\pi z \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{z} \right] & z > 0 \\ -k \sigma 2\pi \left[1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] \vec{z} = -k \sigma 2\pi |z| \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] & z < 0 \end{cases}$$

QUINDI, x EFFETTO DEL CAMPO ELETTRICO E ASSUNTO \vec{v}_d NEL METALLO ACQUISTA UNA VELOCITÀ \vec{v}_d NELLA DIREZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, CHE È PROPORZIONALE AL CAMPO ELETTRICO STESSO! AVERO SI CREA UN MOTO ORDINATO CON DENSITÀ ~~...~~ ^{INCORRENTE}

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \text{ sostituisco } \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m} z \text{ e OTTENGO}$$

$$\vec{J} = nq \frac{q\vec{E}}{m} z = n \frac{q^2}{m} z \vec{E}$$

della conduzione elettrica

PER LA LEGGE LOCALE DI OHM $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, PER CUI

$$\sigma = n \frac{q^2}{m} z, \text{ che è la CONDUCTIVITÀ DEI METALLI (GRANDEZZA COSTANTE DEL CONDUTTORE)}$$

OTTENIAMO LA LEGGE DI OHM SCRITTA ANCHE $E = \rho J$ dove ρ è la RESISTIVITÀ

~~xxx~~ EQUAZIONE CONTINUITÀ DELLA CARICA ELETTRICA = SERVE A ESPRIMERE IN MODO DINAMICO LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA

CONSIDERO ~~una~~ SUPERFICIE Σ , CHE DELIMITA UN VOLUME $\mathcal{V}(\Sigma)$ ALL'INTERNO ABBIAMO DELLE CARICHE CHE SI DISTRIBUISCONO CON DENSITÀ ρ CHE DIPENDE DA UNA POSIZIONE CHE CAMBIA NEL TEMPO, $\rho = \rho(x, y, z, t)$, ($\rho = \frac{dQ}{dt}$)



CALCOLO LA CARICA CONTENUTA IN Σ IN UN ISTANTE DI TEMPO dt

$$Q_c = \iiint_{\mathcal{V}(\Sigma)} \rho d\mathcal{V} \text{ ora derivo rispetto al tempo}$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_c = \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{\mathcal{V}(\Sigma)} \rho d\mathcal{V} \right\} = \iiint_{\mathcal{V}(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

CALCOLO LA CARICA USCENTE DA Σ IN UN ISTANTE DI TEMPO dt

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_u = - \iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{U}_n d\Sigma$$

ORA EGUAGHO CARICA CONTENUTA E CARICA USCENTE, x LA CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA

$$0 = \frac{q}{C} dq + Ri dq$$

$$0 = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Ri^2$$

$$0 = \int_0^\infty \frac{1}{2C} \frac{d(q^2)}{dt} + \int_0^\infty Ri^2$$

$$P = - \frac{1}{2C} q^2(\infty) + \frac{1}{2C} q^2(0) = \frac{1}{2C} q_0^2 = \text{PARI ALL'ENERGIA INIZIALE DEL CONDENSATORE}$$

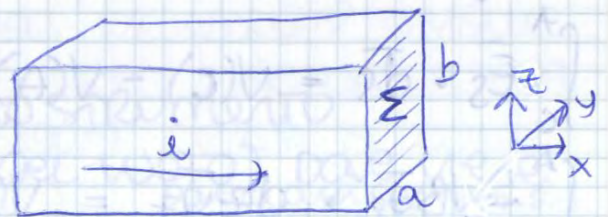
IN CONCLUSIONE, TUTTA LA ^{energia} ~~energia~~ DEL CONDENSATORE IMMAGAZZINATA DURANTE IL PROCESSO DI CARICA, VIENE DISSIPATA IN CALORE DURANTE IL PROCESSO DI SCARICA

★ NELLA CARICA DI UN CONDENSATORE IL 50% DELL'ENERGIA FORNITA DAL GENERATORE VA IN ENERGIA ELETTROSTATICA, MENTRE L'ALTRA METÀ VIENE DISSIPATA IN CALORE.

EFFETTO HALL

DATO UN CONDUTTORE A FORMA DI NASTRO SOTTILE, DI SEZIONE $\Sigma = ab$, PERCORSO DA CORRENTE $i \parallel \bar{u}_x$ e $\bar{j} = nq\bar{v}$

SE NON APPLICHIAMO UN CAMPO MAGNETICO, LE PARTICELLE PERCORRONO UNA TRAIETTORIA RETTILINEA $\parallel \bar{u}_x$



$$\bar{B} = B \bar{u}_y$$

QUANDO APPLICHIAMO UN CAMPO MAGNETICO ~~ESISTENTE~~ LE PARTICELLE IN MOTO SUBISCONO LA FORZA DI LORENTZ (SU CIASCUN PORTATORE AGISCE LA F. DI LOR)

$$F = q\bar{v} \times \bar{B} = q(v\bar{u}_x) \times (B\bar{u}_y) = qvB\bar{u}_z$$

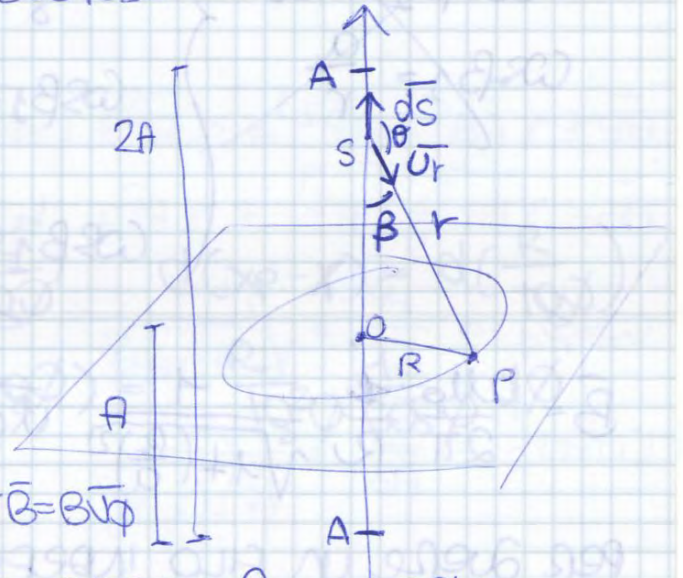
QUESTA FORZA DIRETTA LUNGO L'ASSE Z, DETERMINA LA TRAIETTORIA DELLE PARTICELLE (VERSO L'ALTO)!

88 CAMPO MAGNETICO DI UN FILO
(INDEFINITO) → BIOT-SAVART

CERCA IL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UN CONDUTTORE PIU' UNIFORME LUNGO ZA, IN UN PUNTO P (E' AL PIANO PERPENDICOLARE PER O E I AL FILO) E DISTANTE R DA O. IL CONDUTTORE E' PERCORSO DA CORRENTE I CONTINUA.
SOLUZIONE:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

QUANDO MI SPOSTO LUNGO LA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R, r, θ, β NON VARIANO E RIMANGONO COSTANTI. IL CAMPO HA ANCHE SIMMETRIA CILINDRICA ED E' // A \vec{u}_ϕ (IL VETTORE TANGENTE ALLA CIRCOLO DI RAGGIO R, E CON DIREZIONE SECONDO LA REGOLA DELLA MANO DESTRA).



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds \sin\theta}{r^2} \vec{u}_\phi$$

$$\theta = \pi - \beta \quad \beta = \pi - \theta$$

$$\vec{B} = B \vec{u}_\phi$$

$$R = r \sin\beta = r \sin\theta \rightarrow r = \frac{R}{\sin\theta}$$

$$R = s \cos\beta = -s \cos\theta \rightarrow s = -\frac{R}{\cos\theta}$$

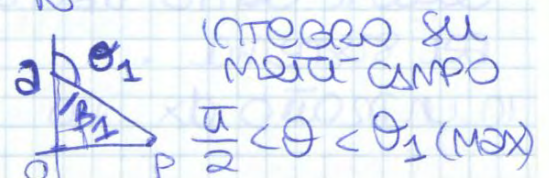
$$ds = -R d\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = R \frac{1}{\cos^2\theta} d(\cos\theta) = \frac{R}{\cos^2\theta} \sin\theta d\theta$$

$$ds = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta \sin\theta \frac{\sin^2\theta}{R^2} \vec{u}_\phi =$$

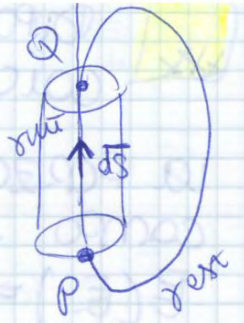
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{R} \sin\theta d\theta \vec{u}_\phi = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{R} d(\cos\theta) \vec{u}_\phi$$

$$\vec{B}_{1/2} = \int_{\theta/2}^{\theta_1} -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{R} d(\cos\theta) \vec{u}_\phi$$



$$\text{infatti } \oint M \cdot ds = \int_{\rho, \text{int}} M \cdot ds + \int_{\rho, \text{ext}} M \cdot ds =$$

$$= \int_{\rho, \text{int}} M \bar{u}_z \cdot dz \bar{u}_z = M \int_{\rho, \text{int}} dz = ML$$



per cui $\mathcal{L}_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$ e abbiamo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s} = i + \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{s} - \oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = i$$

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{s} = i, \text{ definisco il campo } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i \quad \text{perché } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

questa è la forma integrale della quarta legge di Maxwell,

se usiamo la forma locale, si scrive

$$i = \iint_{\Sigma(\gamma)} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad \text{e per il teorema di Stokes}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma(\gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma \quad \text{allora}$$

$$\iint_{\Sigma(\gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \iint_{\Sigma(\gamma)} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

$$\iint_{\Sigma(\gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma - \iint_{\Sigma(\gamma)} \vec{j} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\iint_{\Sigma(\gamma)} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{j}) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad \text{di Maxwell}$$

le equazioni del campo magnetico in un mezzo magnetizzato

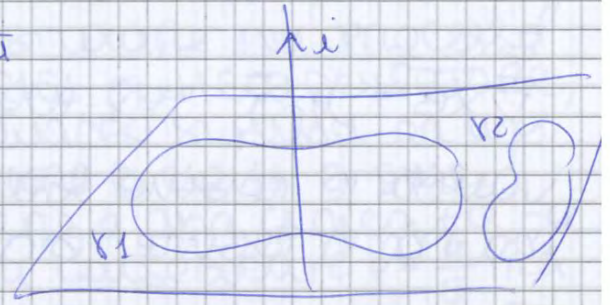
$$\text{divergenza nulla} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0 \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i \end{cases}$$

LEGGI DI AMPÈRE

CONSIDERIAMO UN FILO RETTILINEO INDEFINITO, PERCORSO DA CORRENTE i CONTINUA, CHE PRODUCE IL CAMPO \vec{B}

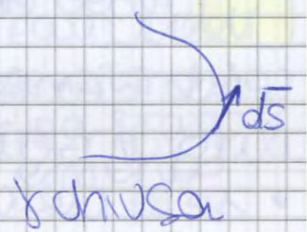
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \vec{u}_\varphi \quad \text{BIOT-SAVART}$$

ORA CERCO LA CIRCULAZIONE DI \vec{B} NEL CASO γ_1 E γ_2 CON $i \in \gamma_1$ E $i \notin \gamma_2$



$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \vec{u}_\varphi \cdot (dr \vec{u}_r + r d\varphi \vec{u}_\varphi) =$$

$$= \oint_{\gamma} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} R d\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} i \oint_{\gamma} d\varphi = \Gamma(\gamma)$$



se $i \in \gamma \rightarrow \gamma_1 \quad \oint_{\gamma_1} d\varphi = 2\pi$

e quindi $\oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0}{2\pi} i 2\pi = \mu_0 i$

se $i \notin \gamma \rightarrow \gamma_2 \quad \oint_{\gamma_2} d\varphi = 0$

e quindi $\oint_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

in totale $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \mu_0 i & \text{se } i \in \gamma \\ 0 & \text{se } i \notin \gamma \end{cases}$
se γ contiene il conduttore
 se γ non contiene il conduttore

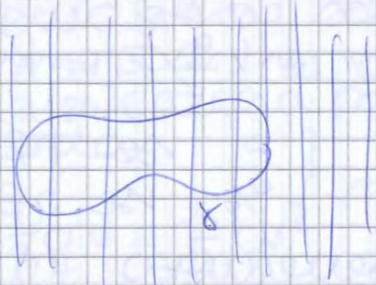
ORA GENERALIZZIAMO. ABBIAMO TANTISSIMI FI
 CHE PRODUCONO TANTI CAMPI \vec{B}_k , X NOI PER IL PRINCIPIO DI SUPERPOSIZIONE

$$\vec{B}_{TOT} = \sum_{k=1}^N \vec{B}_k$$

PRENDIAMO UN γ GENERICO

$$\int_{\gamma} \vec{B}_{TOT} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \sum_{k=1}^N \vec{B}_k \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma} \vec{B}_k \cdot d\vec{s} =$$

$$= \sum_{k=1}^N \Gamma_k(\gamma) = \sum_{k=1}^N \mu_0 i_k = \mu_0 i(\gamma)$$



LA CIRCULAZIONE DEL CAMPO TOTALE DATO A TUTTI I FI
 E UGUALE ALLA SOMMA DI TUTTE LE CORRENTI CARENTI IN γ
 (CONTATE CONTE)

 ONDE ELETTROMAGNETICHE PIANE
(DA EQ. MAXWELL A EQ. ONDE PIANE)

ONDE PIANE SONO SPAZIALMENTE UNIDIMENSIONALI
DEL TIPO $\xi(x,t)$ CIOE' DIPENDONO DAL TEMPO
E DALLA SOLA COORDINATA SPAZIALE x

SI PARLANO PIANE PERCHE' LA PERTURBAZIONE IN UN
CERTO ISTANTE t_0 ASSUME LO STESSO VALORE
 $\xi(x_0, t_0)$ IN TUTTI I PUNTI DEL PIANO $x = x_0$,
PERPENDICOLARE ALL'ASSE x , OUNDO IL SUO
FRONTE D'ONDA E' UN PIANO

$$\psi = \psi(x, t)$$

PER DERIVARE ANL'EQ. DELLE ONDE PIANE,
PARTO DALL'EQ. DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO
NEL VUOTO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \\ \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \left(\bar{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$$

SUPPONGO CHE NON CI SIANO NE CARICHE NE
CORRENTI: $\rho = 0, \bar{J} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0 \\ \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \\ \bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad 0 = 0$$

UNA DELLE SOLUZIONI BANALI DI QUESTO SISTEMA
E' $\bar{E} = \bar{B} = 0$, MA NON E' SEMPRE COSI' CHE BISOGNA
TENERE CONTO DELLE CONDIZIONI AI CONFINI

ONDE



DIMOSTRO che i campi elettromagnetici soddisfano l'equazione delle onde

$$\text{calcolo } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

onde elettromagnetiche piane (pa eq maxwell a eq. onde piane)

$$\text{nel vuoto } \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

ipotesi che non ci siano né cariche né correnti

$$\rho = 0, \vec{J} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

risolvo il sistema!

$\vec{E} = \vec{B} = 0$ è una soluzione banale, ma sempre ammessa ma non è l'unica soluzione perché posso trovare anche conto delle soluzioni di corrente

$$\text{calcolo } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\text{oppure } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equazione vettoriale} \\ \text{delle onde x un campo} \\ \text{elettromagnetico nel} \\ \text{vuoto con } \rho = 0, \vec{J} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right\} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ E_y^2 + E_z^2 \right\} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(E_y \frac{\partial E_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) \\ &= \epsilon_0 \left\{ E_y \left(-\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + E_z \left(\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ -E_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + E_z \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_B}{\partial t} &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} (B^2) = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ B_y^2 + B_z^2 \right\} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ B_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - B_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u_B}{\partial t} + \frac{\partial u_E}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ E_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - E_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - B_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (E_z B_y) - \frac{\partial}{\partial x} (E_y B_z) \right\} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} (E_y B_z - E_z B_y) \end{aligned}$$

TORNO ALL'INTEGRALE

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -A \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} (E_y B_z - E_z B_y) dx = \\ &= +A \left\{ \left(\frac{E_y B_z - E_z B_y}{\mu_0} \right)_{x_1} - \left(\frac{E_y B_z - E_z B_y}{\mu_0} \right)_{x_2} \right\} \end{aligned}$$

se introduco il vettore di Poynting per le onde piane

$$\vec{S} = \frac{E_y B_z - E_z B_y}{\mu_0}$$

$$\frac{du}{dt} = A [S(x_1) - S(x_2)] = -\oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

dove il bilancio energetico è uguale alla quantità entrante al flusso di \vec{S} meno la quantità uscente dal flusso di \vec{S}

dove il vettore di Poynting in generale è

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

(MAX λ \Rightarrow $\theta_{max} = \sin^{-1} \frac{a}{\lambda}$ cioè (minimo zero)

$$d_{max} = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \approx \frac{\pi}{\lambda} a \frac{y}{L} = 2m\pi$$

$$y_{max} = 2m \frac{\lambda}{a} L$$

min λ \Rightarrow $d_{min} = (2m+1)\pi$ cioè (minimo massimo)

$$d_{min} = \frac{\pi}{\lambda} a \frac{y}{L} = (2m+1)\pi$$

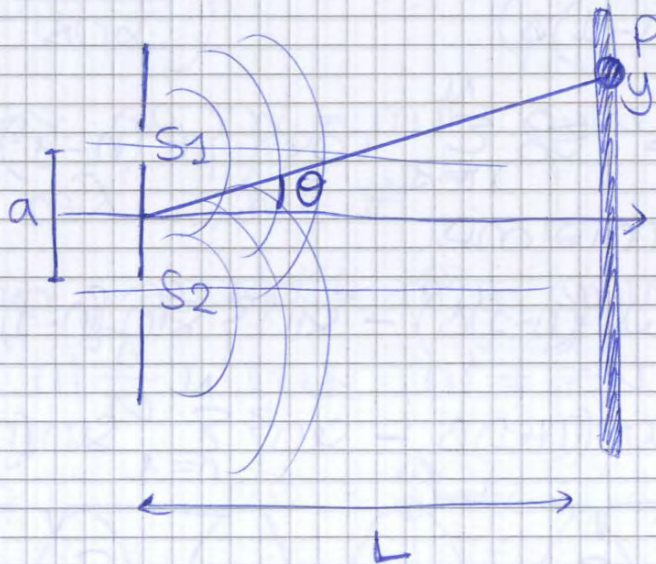
$$y_{min} = \frac{(2m+1)\lambda L}{a}$$

TEMA 11

Lo strumento infatti analizza con uno schermo posto a distanza L dove si genera ($L \gg a$) dove la luce ~~parallela~~ emessa da S_1 e S_2 produce una figura visibile (figura di interferenza) formata da strisce chiare (max di intensità) e strisce scure (min di intensità)

↓ int. costrutt.

↓ int. distrutt.



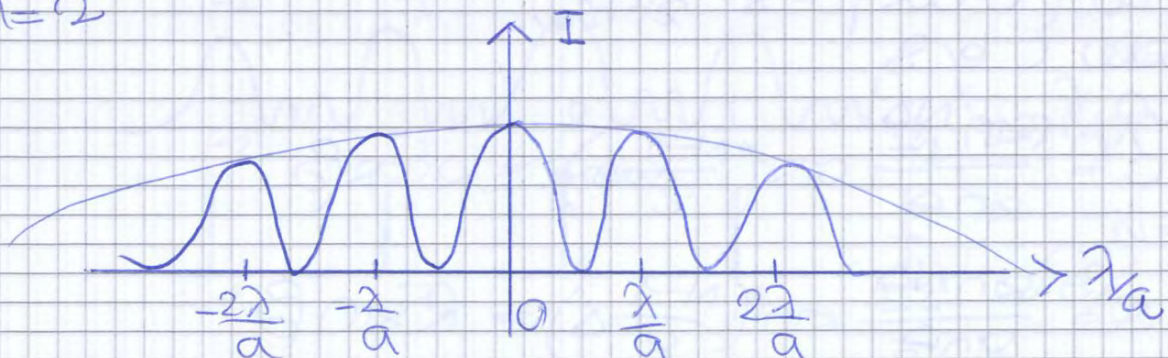
$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$\approx y \ll L$

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \frac{y}{L}$$

angolo θ molto piccolo

$N =$ numero
strisce = 2



$$dE_+ = \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t - ky \sin \theta) dy$$

$$dE_- = \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t + ky \sin \theta) dy$$

$$dE = dE_+ + dE_- = \frac{A}{\sqrt{r}} (\sin p + \sin q) dy$$

$$p = kr - \omega t - ky \sin \theta$$

$$q = kr - \omega t + ky \sin \theta$$

x PRODOTTO FEELSI

$$dE = \frac{A}{\sqrt{r}} \left(2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \right) dy$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{r}} (\sin(kr - \omega t)) (\cos(ky \sin \theta)) dy$$

$$p+q = 2(kr - \omega t)$$

$$p-q = -2ky \sin \theta$$

ora integrato ma 0 e $b/2$

$$E(r, \theta) = \int_0^{b/2} 2 \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \cos(ky \sin \theta) dy$$

$$= 2 \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \frac{1}{k \sin \theta} \int_0^{b/2} \cos(ky \sin \theta) k \sin \theta dy$$

$$= 2 \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \frac{\sin(k \frac{b}{2} \sin \theta)}{k \sin \theta}$$

$$= \frac{Ab}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \frac{\sin(u)}{u} \quad \checkmark \quad u = k \frac{b}{2} \sin \theta$$

$$= \frac{Ab}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \frac{\sin(u)}{u}$$

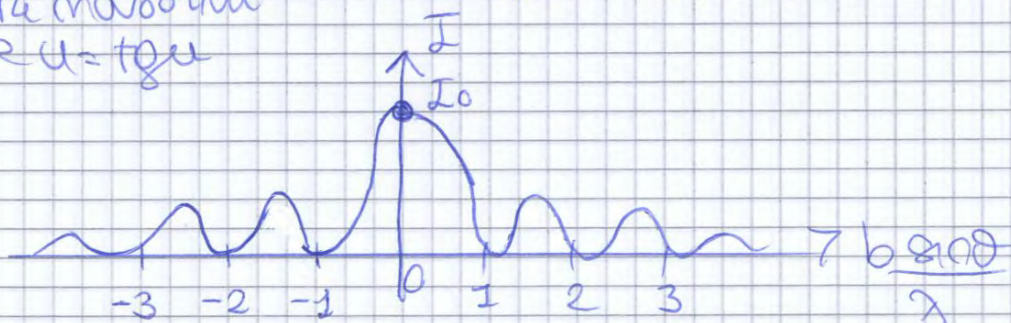
$$I = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \frac{(Ab)^2}{r} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad u = k \frac{b}{2} \sin \theta$$

$$I_{\max} \approx I = I_0 \approx u=0, \theta=0 \quad u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$

$$I_{\min}) \approx I = 0 \approx u \rightarrow \infty, \mu = m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

su altri massimi $\approx u = \pm \mu$ cioè $b \sin \theta = m \lambda$



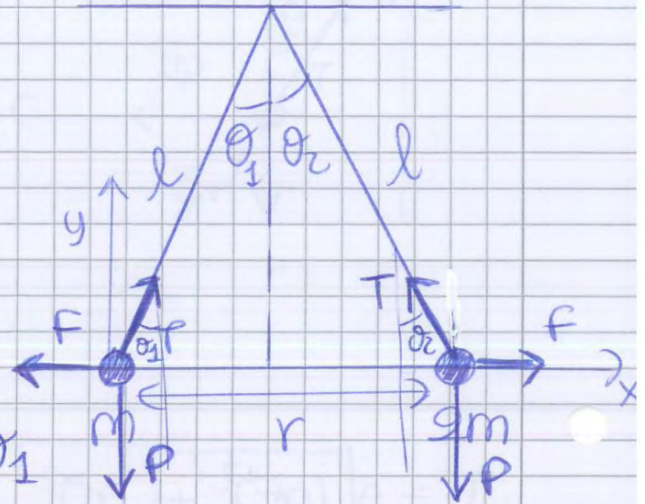
$$q = \sqrt{\frac{r^3 mg}{4lk}} \quad \checkmark$$

1.11 $q_1 = q_2 = q$
 $m_1 = m, m_2 = 2m$

caso 1

$$\begin{cases} x & T \sin \theta_1 - F = 0 \\ y & T \cos \theta_1 - mg = 0 \end{cases}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{F}{mg} = k \frac{q^2}{r^2 mg} \approx \theta_1$$



caso 2

$$\begin{cases} x & -T \sin \theta_2 + F = 0 \\ y & T \cos \theta_2 - 2mg = 0 \end{cases} \quad \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{F}{2mg} = k \frac{q^2}{2mgr^2}$$

tra θ e moto raccolto :

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(k \frac{q^2}{mgr^2} \right) = \frac{1}{2} \theta_1$$

$$\theta_1 = 2\theta_2 \quad @ \quad \checkmark$$

$$l(\theta_1 + \theta_2) = r$$

$$l\left(\theta_1 + \frac{\theta_1}{2}\right) = r$$

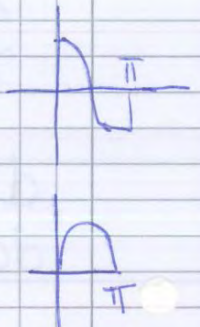
$$l\left(\frac{3}{2}\right)\theta_1 = r$$

$$\theta_1 = r \frac{2}{3l} = k \frac{q^2}{r^2 mg}$$

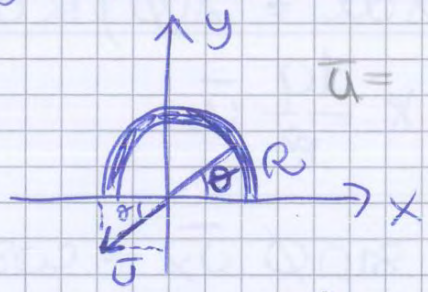
$$\frac{r^3 mg 2}{3l} = kq^2$$

$$m = \frac{kq^2 3l}{2gr^3} \quad \checkmark \quad \textcircled{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k \frac{\lambda_0}{R} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\phi d\phi \bar{u}_x - \cos\phi d\phi \bar{u}_y) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin\phi d\phi \bar{u}_x - \cos\phi d\phi \bar{u}_y) \right] \\ &= k \frac{\lambda_0}{R} \left[-\cos\phi \bar{u}_x - \sin\phi \bar{u}_y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[+\cos\phi \bar{u}_x + \sin\phi \bar{u}_y \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \\ &= k \frac{\lambda_0}{R} \left[0 - 1 + (\cancel{1}) + 0 - 1 + 0 - 0 - 1 \right] \\ &= -k \frac{2\lambda_0}{R} \bar{u}_y \quad \text{⑭} \quad \begin{array}{l} \bar{u}_x \text{ si annulla e} \\ \bar{u}_y \text{ si raddoppia} \end{array} \end{aligned}$$

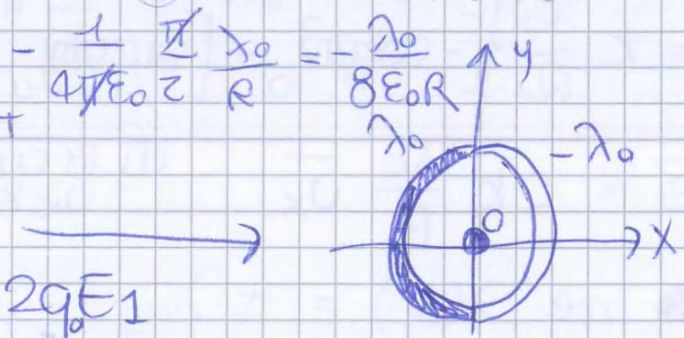


● $\lambda = \lambda_0 \sin\phi$
 cambia anche \bar{u}



$$\begin{aligned} E &= k \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi} \sin\phi (-\sin\phi \bar{u}_y - \cos\phi \bar{u}_x) d\phi \\ E &= -k \frac{\lambda_0}{R} \left[\int_0^{\pi} (\sin^2\phi \bar{u}_y + \sin\phi \cos\phi \bar{u}_x) d\phi \right] \\ E &= -k \frac{\lambda_0}{R} \left\{ \left[\frac{1}{2}(\phi - \cos\phi \sin\phi) \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin^2\phi \right]_0^{\pi} \right\} \\ E &= -k \frac{\lambda_0}{R} \left\{ \frac{1}{2} \pi \right\} = -k \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{R} \quad \text{⑮} \end{aligned}$$

- (b.B) $F_1 = q_0 E_1 = \text{TOT}$
- (c.B) $E = 2E_1$
- (d.B) $F = q_0 E = 2q_0 E_1$



$$dQ = \lambda dx$$

$$d\vec{F} = dQ \vec{E}(x) \rightarrow \text{FORZA ① SU ②} \rightarrow \text{CAMPO DI FORZA}$$

$$dF = \lambda dx k \lambda \frac{L}{x(x-L)} \bar{u}_x$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \int_{L+D}^{2L+D} \frac{dx}{x(x-L)} \bar{u}_x$$

$$\frac{1}{x(x-L)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-L)} = \frac{Ax - AL + Bx}{x(x-L)} \quad \begin{matrix} A+B=0 \\ -AL=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} B = \frac{1}{L} \\ A = -\frac{1}{L} \end{matrix}$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \int_{L+D}^{2L+D} \left[\left(-\frac{1}{L} \right) \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{L} \right) \frac{1}{x-L} \right] dx \bar{u}_x =$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \left[-\frac{1}{L} \log(x) \right]_{L+D}^{2L+D} + \left[\frac{1}{L} \log(x-L) \right]_{L+D}^{2L+D} \bar{u}_x =$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \bar{u}_x \left\{ -\frac{1}{L} \log\left(\frac{2L+D}{L+D}\right) + \frac{1}{L} \log(2L+D-L) - \frac{1}{L} \log(D) \right\}$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \bar{u}_x \left\{ -\frac{1}{L} \log\left(\frac{2L+D}{L+D}\right) + \frac{1}{L} \log\left(\frac{L+D}{D}\right) \right\}$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \bar{u}_x \left\{ \log\left(\frac{2L+D}{L+D}\right) \left(\frac{D}{L+D}\right) \right\}$$

$$\bar{F} = k\lambda^2 L \bar{u}_x \log \frac{(L+D)^2}{D(2L+D)}$$

mi viene il congegno

campo in P E orae y

$$\boxed{L.16} \quad dQ = \lambda dl = \lambda dx$$

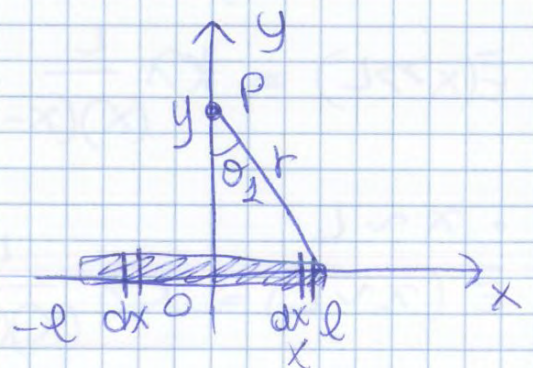
$$dx_1 = dx_2 \quad dE_1 = dE_2 = k \frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$dE = dE_1 + dE_2 = 2k \frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$d\vec{E} = 2k \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\theta \bar{u}_y$$

$$d\vec{E} = 2k \frac{\lambda dx y}{r^3} \bar{u}_y$$

$$\bar{E} = 2k \frac{\lambda dx y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \bar{u}_y$$



$2L$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r \cos\theta$$

CAPITOLO 2

2.4) e^- a distanza h da piano infinito carico con σ
 @ E_k ve con cui e^- deriva sul piano di un campo
 libero

conservazione energia

$$E_t(A) = E_t(B)$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV(B)$$

$$E_k = q(V(A) - V(B)) = q\Delta V$$

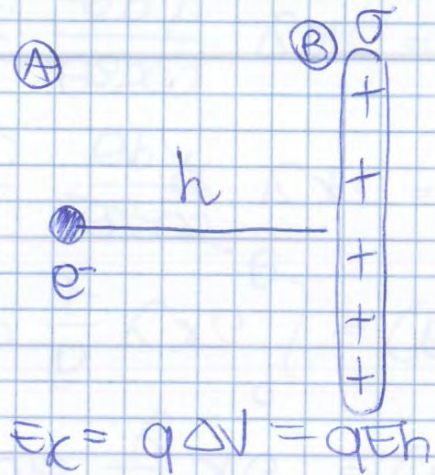
$$\Delta V = Eh = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} h$$

$$E_k = qEh = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} h$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} h$$

$$v_B = \sqrt{\frac{q \sigma}{m \epsilon_0} h} = \sqrt{\frac{q}{m} 2Eh} = \sqrt{\frac{2q}{m} \Delta V} = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

q, m carica e massa dell'elettrone



2.6) anello raggio R carica q nel centro P
 posizione $O =$ EQUILIBRIO INSTABILE

calcolo la velocità a $x_2 = 2R$ dal centro dell'anello

$$dl = R d\phi, \quad dq = \lambda dl = \lambda R d\phi$$

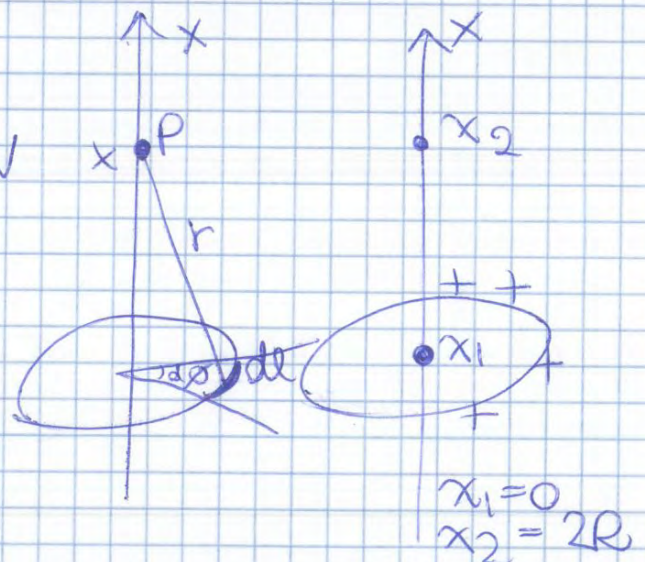
conservazione energia

$$\text{L'energia potenziale è } E = qV$$

cerco V in P

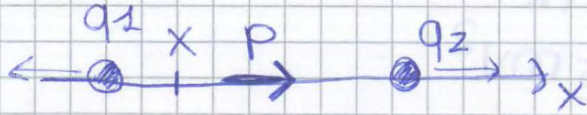
$$V = \int_{\text{anello}} k \frac{dq}{r} = \int_{\text{anello}} k \frac{\lambda R d\phi}{r}$$

$$= k \frac{\lambda R}{r} \int_0^{2\pi} d\phi = k \frac{\lambda R}{r} 2\pi$$



$$\bar{F} = Q\bar{E} = 2\pi \frac{Qp}{x^3} \bar{u}_x$$

uguale e opposta alla forza di prima



$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$p = p \bar{u}_x$$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \Rightarrow \bar{E}_1 = -k \frac{Q_1}{(\frac{d}{2})^2} \bar{u}_x, \quad \bar{E}_2 = k \frac{Q_2}{(\frac{d}{2})^2} \bar{u}_x$$

$$u_1 = -\bar{p} \cdot \bar{E}_1 = kp \frac{Q_1}{(\frac{d}{2})^2}$$

$$u_2 = -\bar{p} \cdot \bar{E}_2 = -kp \frac{Q_2}{(\frac{d}{2})^2}$$

$$\bar{F} = -\nabla u$$

$$\bar{u} = -\bar{p} \cdot \bar{E} \rightarrow \bar{E} = \left(k \frac{q}{x^2} - k \frac{q}{(d-x)^2} \right) \bar{u}_x$$

$$\bar{F} = p \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{q}{x^2} - k \frac{q}{(d-x)^2} \right) \right] \text{ con } x = \frac{d}{2}$$

$$\bar{F} = p \left[\frac{d}{dx} \left(kqx^{-2} - kq(d-x)^{-2} \right) \right]$$

$$\bar{F} = p \left(\frac{-2kq}{x^3} - \frac{2kq}{(d-x)^3} \right)$$

$$\bar{F} = -2kqp \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(d-x)^3} \right) \text{ con } x = \frac{d}{2}$$

$$\bar{F} = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qp \left(\frac{1}{(\frac{d}{2})^3} + \frac{1}{(\frac{d}{2})^3} \right)$$

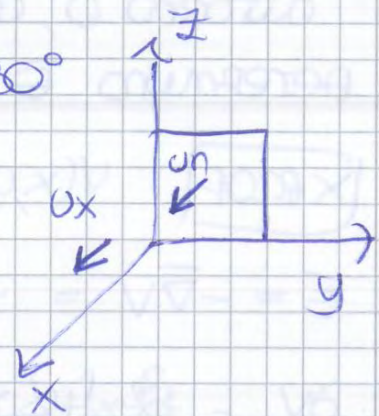
$$\bar{F} = \frac{-qp}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{8}{d^3} + \frac{8}{d^3} \right) = -\frac{16^8 qp}{2\pi\epsilon_0 d^3} = -\frac{8pq}{\pi\epsilon_0 d^3}$$

CAPITOLO 3

3.1 $\Phi(\vec{E})$ con $\vec{E} = \cos t \vec{u}_x$

Ⓐ \square \perp yz Ⓑ $\square \perp \alpha = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Ⓐ } \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) &= \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} E \cdot \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x d\Sigma \quad (\vec{u}_x = \vec{u}_n) \\ &= \int_{\Sigma} E d\Sigma = E \Sigma = E l^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$



Ⓑ $(\vec{u}_n = \cos \alpha \vec{u}_x)$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E \cos \alpha \Sigma = E \cos \alpha l^2 \quad \checkmark$$

3.2 $\vec{E} = a \vec{u}_x + b \vec{u}_y$, Σ

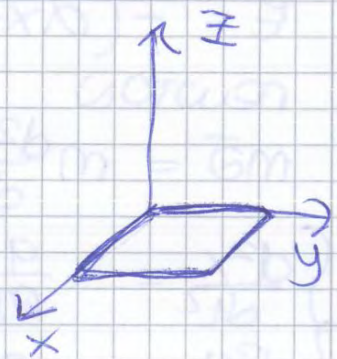
$\Phi_{\Sigma}(\vec{E})$ re Σ $\frac{E_x}{\vec{u}_z}$, $\frac{E_x}{\vec{u}_y}$, $\frac{E_y}{\vec{u}_x}$

$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) =$ cambia la normale a Σ

$$\text{Ⓐ } \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} (a \vec{u}_x + b \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_z d\Sigma = 0 \quad \checkmark$$

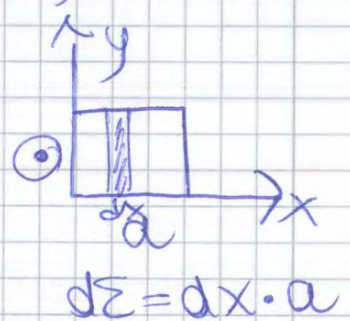
$$\text{Ⓑ } \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} (a \vec{u}_x + b \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_y = b \Sigma \quad \checkmark$$

$$\text{Ⓒ } \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} (a \vec{u}_x + b \vec{u}_y) \cdot \vec{u}_x = a \Sigma \quad \checkmark$$



3.3 $\Phi(\vec{E})$ $\vec{E} = x \vec{u}_z$, $\square l = a$, $\vec{u}_n = \vec{u}_z$
 $\vec{E} = E(x) \vec{u}_z$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) &= \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} E(x) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z d\Sigma = \\ &= \int_0^a x dx \cdot a = a \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$



« campo varia con la x! »

X GAUSS

$$\Phi_E(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0}$$

$$Q(\Sigma) = \epsilon_0 \beta c \tau \checkmark$$

$$\rho = \frac{Q}{\tau} = \epsilon_0 \beta c \checkmark \text{ uniform. distribuita } \begin{matrix} \text{a la carica } \vec{E} \\ \text{uniform. distribuita} \end{matrix}$$

altro metodo

$$\Phi_E(\vec{E}) = \iiint_{\tau(\Sigma)} (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau$$

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau = \iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{dE}{dx} d\tau =$$

$$= \iiint_{\tau(\Sigma)} 2\beta x \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^c 2\beta x \, dx \int_0^a dy \int_0^b dz = ab \frac{2}{2} \beta c^2 = (abc) c \beta = \tau \beta c$$

e poi applico GAUSS...

3.6 $\vec{E} = (5x\vec{u}_x - 4y\vec{u}_y + 3z\vec{u}_z)$

@ $\Phi_E(\vec{E})$ su $a \times b \times c$ @ $Q(\Sigma)$ @ ρ (pot. costante)

$$\Phi_E(\vec{E}) = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z$$

uso teorema di divergenza

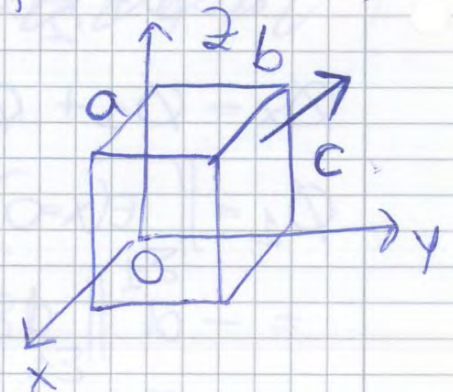
$$\Phi_E(\vec{E}) = \iiint_{\tau(\Sigma)} \text{div} \vec{E} \, d\tau =$$

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} (5 - 4 + 3) d\tau = \int_{\tau} 4 \, dx \, dy \, dz$$

$$\tau(\Sigma) = 4abc = 4\tau \checkmark$$

X GAUSS $\Phi_E(\vec{E}) = 4\tau = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0}$ $Q = 4\epsilon_0 \tau \checkmark$

$$\rho = \frac{Q}{\tau} = 4\epsilon_0 \checkmark$$



X GAUSS $\Phi_E(E) = \frac{Q(E)}{\epsilon_0}$, $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

$Q(x) = \sigma \Sigma = \sigma \pi r^2 = \sigma \pi (R^2 - x^2)$

QST FORMULA HA SENSO SOLO SE $0 < x < R$,
 cioè se Q è POSITIVA

$\Phi_E(E) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi (R^2 - x^2) \checkmark$

se $x > R$ il
 piano non interseca
 la sfera e non
 abbiamo Q

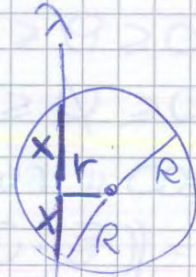
3.19 tutto uguale ma sfera che interseca
 un filo infinito con λ

a) $\Phi_E(E)$ b) $\Phi_E(E)$ se $r > R$ (il filo
 non interseca la sfera)

USO GAUSS, CERCO

$Q(\Sigma) = \lambda l = 2\lambda x$

lunghezza di filo che
 interseca sfera $l = 2x$



$\Phi_E(E) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = \frac{2\lambda x}{\epsilon_0} = \frac{2\lambda}{\epsilon_0} \sqrt{R^2 - r^2} \checkmark$ a)

b) in QST CASO $l = 0$! cioè il filo non interseca
 la sfera

IL FILLO ATTRAVERSA LA SFERA E NULLO x K PERÒ
 NON C'È NEUNTE NUMERO UNITÀ CARICA. \checkmark

3.20 dentro sfera R carica q distribuita UNIF con
 $\rho(r) = br$, $b = \text{cost}$, r distanza dal centro O

a) b) $E(r)$ c) ΔV tra il centro e la sup.

la carica è distribuita con simm. sferica

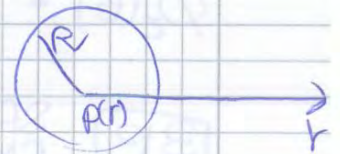
$Q = \iiint_{\Sigma} \rho(r) d\tau$ prendo un elemento

$d\tau = 4\pi r^2 dr$

$Q = \iiint_{\Sigma} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^R br 4\pi r^2 dr =$

$= 4\pi b \int_0^R r^3 dr = 4\pi b \frac{1}{4} R^4 = \pi b R^4$

$Q = \pi b R^4 \rightarrow b = \frac{Q}{\pi R^4} \checkmark$ a)



3.15



$d \rightarrow \infty$ uniform carico con ρ
 $Q = \rho \tau = \rho \pi R^2 d$

a) $E(r)$ b) ΔV tra sup e centro

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r d\Sigma = E(r) \Sigma = E(r) 2\pi r d = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0}$$

Casi $r > R$

$$Q(\Sigma) = Q$$

$$E(r > R) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r d}$$

, $r < R$

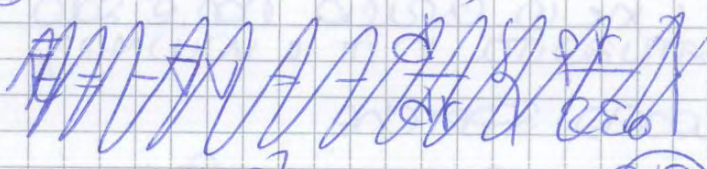
$$Q(\Sigma) = \rho \tau = \rho \pi r^2 d$$

$$\phi(\vec{E}) = E(r) 2\pi r d = \frac{\rho \pi r^2 d}{\epsilon_0}$$

$$V = \int_0^R \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} \quad E(r) = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 2r} = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 2r} = \frac{\rho R}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

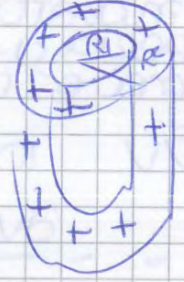
(anche senza la divisione in casi)

b) $\Delta V = V(R) - V(0)$



$$\Delta V = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

~~$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$~~



$E(r) = ?$

3.19

$$Q = \rho \tau = \rho \pi [R_2^2 - R_1^2] d$$

3.18



ρ, R_1, R_2
 $E(r) = ?$

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r d\Sigma = E(r) \Sigma = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Casi

$r < R_1 \quad Q(\Sigma) = 0 \quad E(r) = 0$

$$Q = \rho \tau = \rho \frac{4}{3} \pi [R_2^3 - R_1^3]$$

$R_1 < r < R_2 \quad Q(\Sigma) = \rho \pi (r^2 - R_1^2) d$

$$\phi(E) = E(r) \Sigma = E(r) 4\pi r^2$$

$$E(r) = \frac{\rho \pi (r^2 - R_1^2) d}{\epsilon_0 2\pi r d} = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{\epsilon_0 2r}$$

Casi

$r \leq R_1 : Q(\Sigma) = 0, E(r) = 0$

$r > R_2 \quad Q(\Sigma) = \rho \pi [R_2^2 - R_1^2] d$

$R_1 \leq r \leq R_2 : Q(\Sigma) = \rho \frac{4}{3} \pi [r^3 - R_1^3]$

$$E(r) = \frac{\rho [R_2^2 - R_1^2]}{3\epsilon_0 2r}$$

$r \geq R_2 : Q(\Sigma) = \rho \frac{4}{3} \pi [R_2^3 - R_1^3]$

$$E(r < R_2) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)}{\epsilon_0 3 \cdot 4\pi r^2} = \frac{\rho (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$E(r > R_2) = \frac{\rho [R_2^3 - R_1^3]}{\epsilon_0 3 r^2}$$

4.23 C_1 e C_2 caricate tramite BATTERIA a V_0 . Poi vengono collegate \oplus con \ominus

a) V' b) ΔU_e

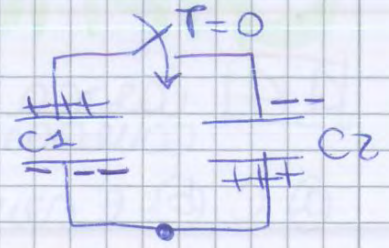
PRIMA

$$C_1 = \frac{q_1}{V_0} \rightarrow q_1 = C_1 V_0$$

$$C_2 = \frac{q_2}{V_0} \rightarrow q_2 = C_2 V_0$$

$$C_2 > C_1$$

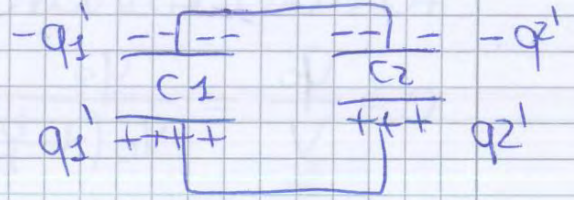
$$q_2 > q_1$$



una volta collegato la carica positiva si mette tutta sotto x_2 q_2 vince su q_1

$$C_{EQ} = C_1 + C_2 \text{ (non cambia)}$$

$$Q_{TOT} = q_1 - q_2 = V_0(C_1 - C_2) < 0$$



$$V' = \frac{Q_{TOT}}{C_{EQ}} = \frac{V_0(C_1 - C_2)}{C_1 + C_2}$$

$$U_i = \frac{1}{2} C_{EQ} V_0^2 \quad U_f = \frac{1}{2} C_{EQ} V'^2$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2} C_{EQ} (V'^2 - V_0^2) = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) (V'^2 - V_0^2) < 0$$

4.24 sfere conduttrici C_1 e C_2 di raggi R_1 e R_2

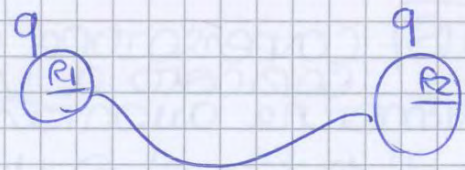
hanno la stessa carica $q = q_1 = q_2$ molto vicine collegate con un filo sottile

a) q_1 e q_2 b) Ne trasferita da un conduttore all'altro

$$Q_{TOT} = q_1 + q_2 = 2q$$

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q$$

$$q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q$$



sistema equipotenziale

$$V_1 = k \frac{q_1}{R_1} = k \frac{q_2}{R_2} = V_2$$

$$\begin{cases} q_1 = q_2 \frac{R_1}{R_2} \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$$

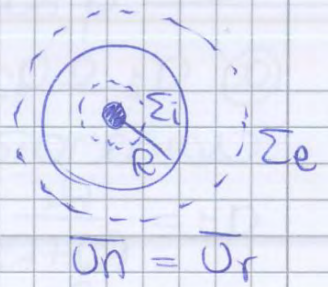
$$q_2 = q \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad q = q_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)$$



● $r < R$ traccia una sup. Σ_i
 $\Phi_{\Sigma}(E) = \iint_{\Sigma_i} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = E(r) \Sigma_i = E(r) 4\pi r^2$

ma $Q(\Sigma) = q$ quindi x GAUSS

$$E_i(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \checkmark$$



● $r > R$ traccia una sup. Σ_e

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{D}) = \iint_{\Sigma_e} \vec{D} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = D(r) 4\pi r^2$$

ma $Q_{\text{lib}} = q$ quindi

$$D_o(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \quad \checkmark$$

cerco anche il campo nel dielettrico

$$\vec{D}_e = \epsilon \vec{E}_e \quad D_e(r) \vec{u}_r = \epsilon E_e(r) \vec{u}_r = \kappa \epsilon_0 E_e(r)$$

$$E_e(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa} \frac{q}{r^2}$$

in totale

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = E_i & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa} \frac{q}{r^2} = E_e & r > R \end{cases}$$

E è discontinuo all'interfaccia
 $E_{1n} \neq E_{2n}$

$$D(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} = D_i & r < R \\ \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} = D_e & r > R \end{cases}$$

D è continuo all'interfaccia
 $D_{1n} = D_{2n}$

BASTA CALCOLARLO A $r=R$

cerco \vec{D} con 2 metodi

usando il vettore \vec{P} polarizz. all'interno e all'esterno

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \rightarrow \quad \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

● $r < R$, $E = E_0$, $\vec{P}_i = 0$

$$C_1 = \epsilon \frac{\Sigma}{h} = \epsilon_0 k_1 \frac{\Sigma_1}{d}$$

$$C_2 = \epsilon_0 k_2 \frac{\Sigma_2}{d}$$

$$C_{EQ} = C_1 // C_2 = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0}{d} (k_1 \Sigma_1 + k_2 \Sigma_2)$$

$$\text{con } \Sigma_1 = \Sigma_2 = \frac{\Sigma}{2} \rightarrow C_{EQ} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{2d} (k_1 + k_2)$$

$$C_{EQ} = \epsilon_0 k \frac{\Sigma}{d} \text{ con } k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \textcircled{a}$$

$$Q_{TOT} = q_1 + q_2 = C_{EQ} V_0 \quad \textcircled{c}$$

$$q_1 = C_1 V_0, \quad q_2 = C_2 V_0$$

$$E = \frac{V_0}{d} \quad \textcircled{b}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} C_{EQ} V_0^2 \quad \textcircled{d}$$

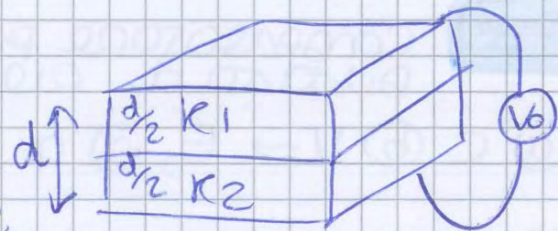
abbiamo $E_1 = \frac{V_0}{d} = E_2$ il \vec{E} per 2 mezzi e' lo stesso e non e' un' discontinuita' alla interfaccia la componente del campo e' continua, mentre $D_1 \neq D_2$, $D_1 = \epsilon_1 E_1$, $D_2 = \epsilon_2 E_2$

A.36

TUTTO UGUALE MA

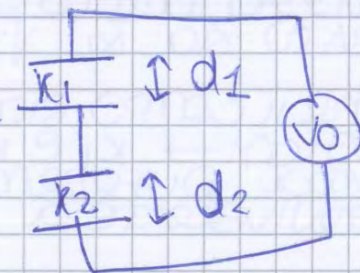
IPOTIZZO CHE LO STRATO SIA $\infty \sqrt{\epsilon} \gg d$

IL SISTEMA E' EQUIVALENTE



$$\text{CAPACITA': } C_1 = \epsilon \frac{\Sigma}{d_1} = \epsilon_0 k_1 \frac{\Sigma}{d_1}$$

$$C_2 = \epsilon_0 k_2 \frac{\Sigma}{d_2}$$



S.S | Conduttore cilindrico cavo lungo di
 Raggio a e b con ρ

$V_0 = E$ applicata x FOR ρ wire i

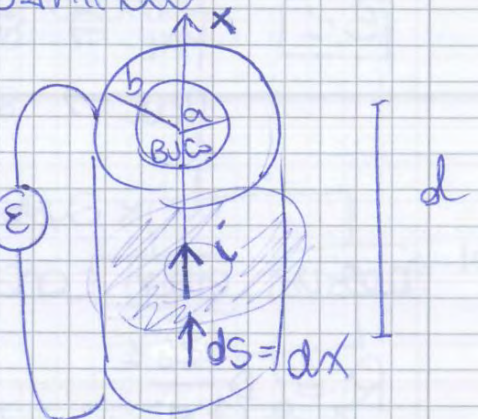
ⓐ i ⓑ P ⓒ J sul superficie terminali

CASO 1

$$R = \int_0^d \rho \frac{ds}{\Sigma} = \int_0^d \rho \frac{dx}{\Sigma} = \int_0^d \rho \frac{dx}{\pi(b^2 - a^2)} \epsilon$$

$\Sigma = \pi(b^2 - a^2)$ area sezione (cavallo)

$R = \rho \frac{d}{\pi(b^2 - a^2)}$ ρ è costante



i passa solo nel cilindro pieno

$i = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{\rho L} \pi(b^2 - a^2)$

$P = iR = \frac{V_0}{\rho d} \pi^2 (b^2 - a^2)^2 \frac{\rho d}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{V_0^2}{\rho d} \pi(b^2 - a^2)$

$J = \frac{i}{\Sigma} = \frac{V_0}{\rho L} = \frac{E}{\rho} = \sigma E$

CASO 2

V_0 collegato dalla sup. interna a quella esterna → corrente radiale

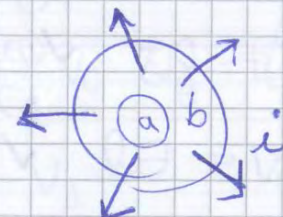
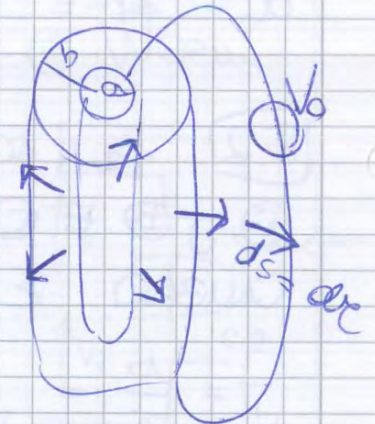
$\Sigma(r) = 2\pi r \cdot d$ area superficie laterale

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{\Sigma} = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r \cdot d} =$$

$$= \rho \frac{1}{2\pi d} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi d} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$i = \frac{V_0}{R}$) $J = \frac{i}{\Sigma} = \frac{V_0}{\rho r \log\left(\frac{b}{a}\right)}$

$J(r) < \max$ $r = a$
 $J(r) < \min$ $r = b$



5.3 2 fili collegati in serie

$p_{cu} = p_1, l_1, \Sigma_1$

$p_{cu} = p_2, l_2, \Sigma_2$

ai capi del V

a) V_1 e V_2 b) J_1 e J_2

$R_1 = p_1 \frac{l_1}{\Sigma_1}, \quad R_2 = p_2 \frac{l_2}{\Sigma_2} \quad \checkmark$

$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad \checkmark$

$i = \frac{V}{R_{eq}} \quad V_1 = R_1 i, \quad V_2 = R_2 i \quad \checkmark$

$V_1 = p_1 \frac{l_1}{\Sigma_1} i, \quad V_2 = p_2 \frac{l_2}{\Sigma_2} i$

$J_1 = \frac{i}{\Sigma_1}, \quad J_2 = \frac{i}{\Sigma_2} \quad \checkmark$

5.4 Filo $p_{cu} r=a$ ricoperto da una guaina $p_{cu} r=b$
 Filo percorso da i

a) i_1 e i_2 che percorrono i 2 materiali

b) E_1, E_2

$r=a, \Sigma_1 = \pi a^2 \quad R_1 = p_1 \frac{l_1}{\Sigma_1}$

$r=b, \Sigma_2 = \pi b^2 \quad R_2 = p_2 \frac{l_2}{\Sigma_2}$

$\Sigma_{corona} = \pi(b^2 - a^2) \rightarrow l_1 = l_2$

$i = i_1 + i_2$

$\frac{i_2}{i_1} = \frac{p_1 (b^2 - a^2)}{p_2 a^2} = \frac{p_1 \Sigma}{p_2 \Sigma_1} = R_1 \frac{\Sigma}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}$

$E_1 = J_1 p_1 = \frac{i_1}{\Sigma_1} p_1 = \frac{i_1}{\pi a^2} p_1$

$E_2 = J_2 p_2 = \frac{i_2}{\Sigma_2} p_2 = \frac{i_2}{\pi(b^2 - a^2)} p_2$

$E_1 = E_2$
 COSTANTE
 SU TUTTO IL
 FILO



$$dE = dx dy$$

$$d\vec{m} = i dE \vec{u}_z = i dx dy \vec{u}_z \quad \text{momento magnetico elementare}$$

$$dU = - d\vec{m} \cdot \vec{B} = - (i dx dy \vec{u}_z) \cdot (\alpha \times \vec{u}_z) = - i dx dy \alpha x$$

ora integro sulle 2 variabili (integrale doppio)

$$U_m = - \int_{x_0}^{x_0+a} \int_{y_0}^{y_0+a} i \alpha x dx dy = - i \alpha \int_{x_0}^{x_0+a} x dx \int_{y_0}^{y_0+a} dy =$$

$$= - i \alpha \frac{1}{2} [(x_0+a)^2 - x_0^2] [y_0+a - y_0] =$$

$$= - i \alpha \frac{a}{2} [x_0^2 - x_0^2 + a^2 + 2ax_0]$$

$$= - i \alpha \frac{a^2}{2} [a + 2x_0] = U_m(x_0, y_0)$$

questa formula è una generica espressione e

$$U_m(x, y) = - i \alpha \frac{a^2}{2} (a + 2x)$$

ora cerco $\vec{F} = - \vec{\nabla} U_m$

$$\vec{F} = - \vec{u}_x \frac{\partial U_m}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial U_m}{\partial y} - \vec{u}_z \frac{\partial U_m}{\partial z}$$

ma U dipende soltanto da x

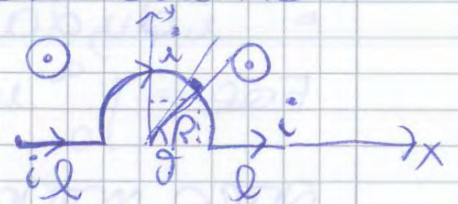
$$\vec{F} = - \vec{u}_x \frac{dU_m}{dx} = - \vec{u}_x \frac{d}{dx} \left[- i \alpha \frac{a^2}{2} (a + 2x) \right]$$

$$= i \alpha \frac{a^2}{2} \vec{u}_x \frac{d}{dx} (a + 2x) = i \alpha \frac{a^2}{2} 2 \vec{u}_x = i \alpha a^2 \vec{u}_x$$

uguale alla forza trovata con Laplace.

~~6.20~~ $l = R = 10$ percorso da $i = 0.5A$ e sottoposto a $B = 0.4T \perp$ uscente dal piano

calcolo F , $B \perp$ sempre, $\theta = \frac{\pi}{2}$



TRATTO -

$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B} = i dx \vec{u}_x B$$

$$F = i l B \vec{u}_x$$

$$F_{TOT} = 2 i l B \vec{u}_x$$

da $B = \vec{u}_z$ la forza è \vec{u}_x

$$\vec{m} = i \sum U_z \quad U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

6.25 | $N, R, xy, i, B = \alpha \bar{u}_x - \beta \bar{u}_y + \delta \bar{u}_z$

(a) \vec{m} , (b) \vec{M} , (c) U_m

$$\begin{aligned} u_x \times u_y &= u_z \\ u_y \times u_z &= u_x \\ u_z \times u_x &= u_y \end{aligned}$$

(a) $\vec{m} = Ni \sum \vec{U} = Ni \pi R^2 \bar{u}_z \checkmark$

(b) $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = (Ni \pi R^2 \bar{u}_z) \times (\alpha \bar{u}_x - \beta \bar{u}_y + \delta \bar{u}_z)$
 $= Ni \pi R^2 (\alpha \bar{u}_y + \beta \bar{u}_x) \checkmark$

(c) $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -(Ni \pi R^2 \bar{u}_z) \cdot (\alpha \bar{u}_x - \beta \bar{u}_y + \delta \bar{u}_z)$
 $= -Ni \pi R^2 \delta \checkmark$

(2)

7.2 2 fili conduttori ^{indefiniti} ~~indefiniti~~ i_1 e i_2 // asse x
 separati da $2a$

① calcolo \vec{B} su asse y in parti ($\vec{B}(y=0)$)

i_1 e i_2 sono entranti

se i fili sono indefiniti \rightarrow Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \vec{u}_\phi$$

in generale $\vec{u}_\phi \perp \vec{u}_r$ (magia)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

x trovare i vettori \vec{u}_{ϕ_1} e \vec{u}_{ϕ_2}

$$\vec{u}_{\phi_1} = -\cos\beta \vec{u}_x - \sin\beta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_{\phi_1} = -\sin\alpha \vec{u}_x - \cos\alpha \vec{u}_y$$

se voglio essere sicuro sia giusto cerco \vec{u}_r e faccio $\vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_r = 0$

quindi

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r} \vec{u}_{\phi_1}$$

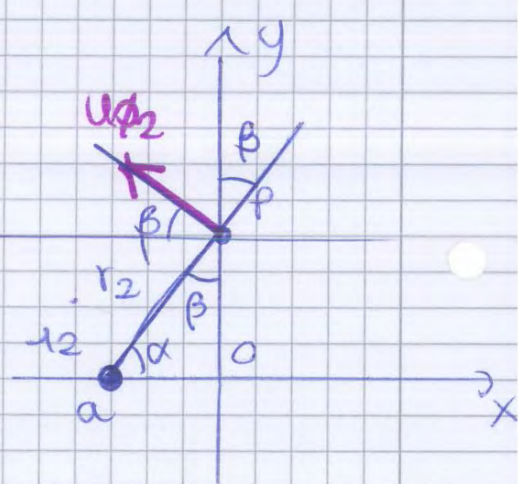
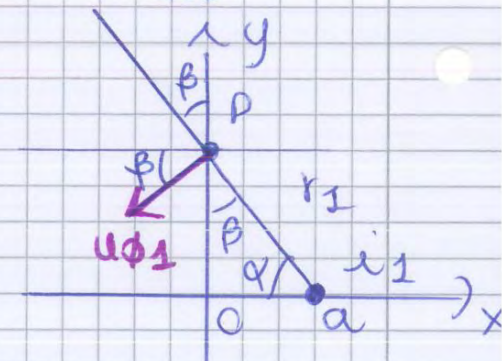
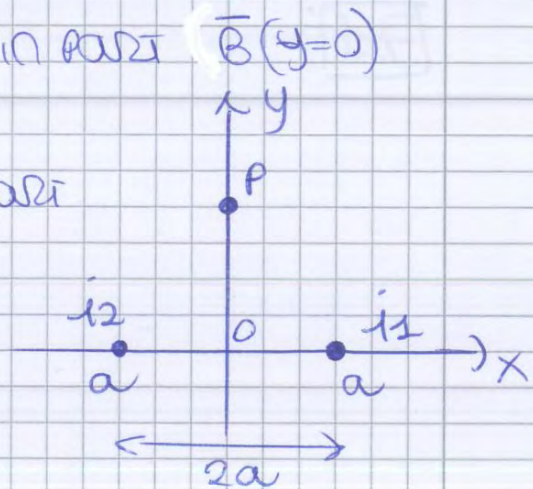
ora

$$\vec{u}_{\phi_2} = -\cos\beta \vec{u}_x + \sin\beta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_{\phi_2} = -\sin\alpha \vec{u}_x + \cos\alpha \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_2}{r} \vec{u}_{\phi_2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \{ i_1 \vec{u}_{\phi_1} + i_2 \vec{u}_{\phi_2} \}$$



$$r = r_1 = r_2$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

7.10 ✓

7.9

calcolo \vec{B}_0 e \vec{m} = momento magnetico del circuito

da fare con LAPLACE

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{U}_r}{r^2}$$

CONSIDERO I VARI PEZZETTI

VP ∈ SP: $d\vec{s} \parallel \vec{U}_r \rightarrow d\vec{s} \times \vec{U}_r = 0$

VP ∈ RQ: $d\vec{s} \perp \vec{U}_r \rightarrow d\vec{s} \times \vec{U}_r = 0$

VP ∈ RS: $d\vec{s} = R_2 d\phi \vec{u}_\phi$ quindi

$$d\vec{B}_{RS} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{U}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i R_2 d\phi \frac{\vec{u}_\phi \times \vec{U}_r}{R_2^2}$$

esce dal foglio

$$d\vec{B}_{RS} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R_2} d\phi \vec{u}_\odot \text{ uscente}$$

VP ∈ PQ: $d\vec{s} = -R_1 d\phi \vec{u}_\phi$ (\vec{u}_ϕ senso orario, $-\vec{u}_\phi$ senso antiorario)

$$d\vec{B}_{PQ} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R_1} d\phi \vec{u}_\odot \text{ uscente}$$

SE INTEGRO SU L'ANGOLO

$$\vec{B}_{RS} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R_2} \phi \vec{u}_\odot, \quad \vec{B}_{PQ} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R_1} \phi \vec{u}_\odot$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{RS} + \vec{B}_{PQ} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \phi \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \vec{u}_\odot = \frac{\mu_0}{4\pi} i \phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{u}_\otimes$$

parentesi è negativa!

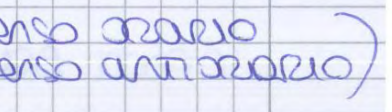
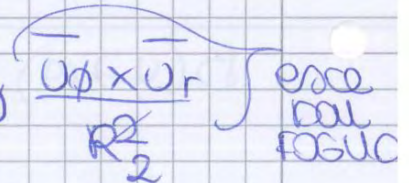
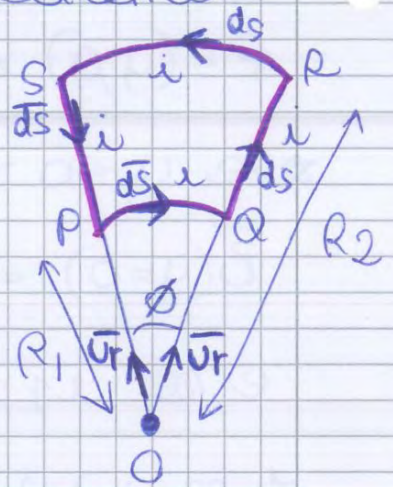
IL MOMENTO DI DIPOLLO MAGNETICO $\vec{m} = i \sum \vec{U}_\odot$ uscente

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} \phi R_1^2, \quad \Sigma_2 = \frac{1}{2} \phi R_2^2, \quad \Sigma = \frac{1}{2} \phi (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\rightarrow m = \frac{i}{2} \phi (R_2^2 - R_1^2)$$

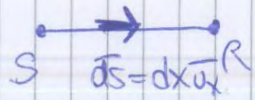
se non so la formula dell'area, integro:

$$\Sigma = r \phi dr \rightarrow \Sigma = \int_0^R r \phi dr$$



Prendo \boxed{RS}

$$d\vec{F}_{SR} = I_S d\vec{s} \times \vec{B} = I_S (dx \vec{u}_x) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{u}_z \right) =$$



6

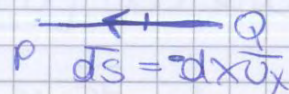
$$= I_S I \frac{\mu_0}{2\pi y} dx (-\vec{u}_y) \text{ ora integro}$$

$$\vec{F}_{SR} = -\frac{\mu_0}{2\pi y} I_S I \int_{x_0}^{x_0+a} dx \vec{u}_y = -\frac{\mu_0}{2\pi y} I_S I a \vec{u}_y$$

In particolare $y = y_0 + a$

$$\vec{F}_{SR} = -\frac{\mu_0}{2\pi(y_0+a)} I_S I a \vec{u}_y$$

Prendo \boxed{PQ}



$$d\vec{F}_{PQ} = \frac{\mu_0}{2\pi y} I_S I dx \vec{u}_y \text{ in part } y = y_0$$

$$\vec{F}_{PQ} = \frac{\mu_0}{2\pi y_0} I_S I a \vec{u}_y$$

$$\textcircled{a} \vec{F}_{TOT} = F(y) \vec{u}_y = \frac{\mu_0}{2\pi} I_S I a \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_0+a} \right) \vec{u}_y$$

forza che agisce sulla spira, e cerca di allontanarla dal filo (x il solenoidale, multiplo della forza x N)

in generale, al variare di y :

$$F_{TOT} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_S I a \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \vec{u}_y$$

considero $y \gg a$ (spira molto lontana dal filo)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) &= \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y(1+\frac{a}{y})} \right) = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{1}{1+\frac{a}{y}} \right) = \frac{1}{y} \left(1 - \left(1 - \frac{a}{y} \right) \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(\frac{a}{y} \right) = \frac{a}{y^2} \quad \text{per Taylor } \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\star F(y) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_S I a^2 \frac{1}{y^2} \vec{u}_y, \quad \boxed{\text{metodo 2}}:$$

$$\vec{M}_{spira} = I_S \vec{\tau} = I_S a^2 \vec{u}_z = -I_S a^2 \vec{u}_z \text{ entrante}$$

8

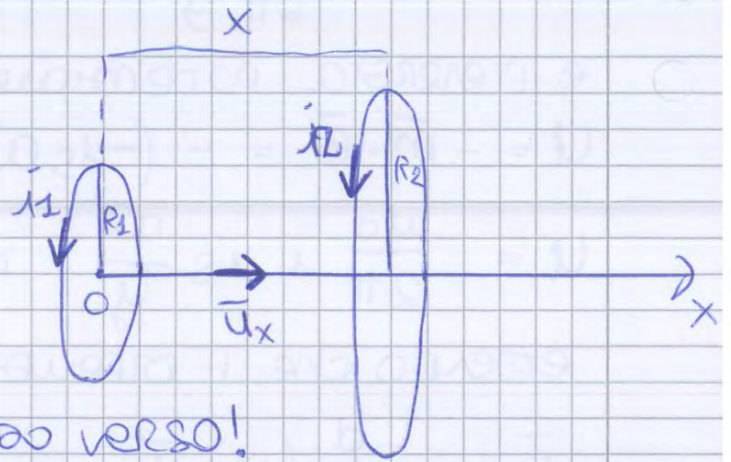
avendo 2 spire:

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \vec{u})(\vec{m}_2 \cdot \vec{u})}{r^3}$$

come U_e , isentrica!

e' importante che le 2

correnti vadano nello stesso verso!



SPIRA ①

$$\vec{m}_1 = i_1 \Sigma_1 \vec{u}_x = i_1 \pi R_1^2 \vec{u}_x = m_1 \vec{u}_x$$

SPIRA ②

$$\vec{m}_2 = i_2 \Sigma_2 \vec{u}_x = i_2 \pi R_2^2 \vec{u}_x = m_2 \vec{u}_x$$

nella formula $r=x$, $\vec{u}=\vec{u}_x$ e $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1$

\vec{u}_x ROTAZIONE
PRELIMINARE
IN UNA DIREZIONE
O NELL'ALTRA,
NON E' IMPO

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2 - 3m_1 m_2}{x^3} = - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{x^3} = U_m(x) \quad \text{a}$$

L'ENERGIA POTENZIALE DIPENDE SOLO DA x !

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla} U = - \frac{d}{dx} U \vec{u}_x = - \frac{d}{dx} \left\{ - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{x^3} \right\} \vec{u}_x = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \frac{d}{dx} \left\{ x^{-3} \right\} \vec{u}_x = - \frac{3\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \frac{1}{x^4} \vec{u}_x \end{aligned}$$

x il segno meno abbiamo che i 2 dipoli, avendo le 2 spire, si attraggono!

campo magn. di una superficie piana

7.18 conseguenza delle considerazioni sul 7.2

molte fili infiniti // percorsi da i , disposti l'uno accanto all'altro su una superficie piana

densità di fili n (numero fili x unità di lunghezza)

uso Biot-Savart e dimo che \vec{B} e // piano dei fili.

con ampiezza calcolata $|\vec{B}|$.

ora x la legge di amperè

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = -2B(y)l = nli\mu_0 = \mu_0 i(r)$$

10

$$B(y) = -\frac{n i \mu_0}{2}$$

≅ campo creato da una distribuzione piana di cariche

(mota solenoide lungo e stretto)

$$B(y > 0) = -\frac{n i \mu_0}{2}$$

$$B(y < 0) = \frac{n i \mu_0}{2}$$

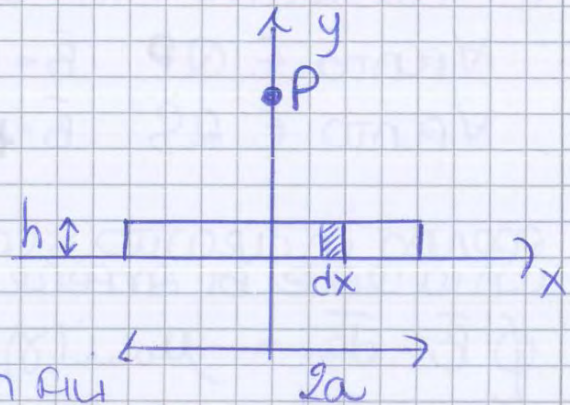
MAZZOLDI FISICA II (no elementi)

87) lamina conduttrice = piastrina di lunghezza $2a$ e spessore h percorsa da i con j uniforme

calcolo \vec{B} su area y .

$$j = \frac{i}{\Sigma} = \frac{i}{2ah} = \text{cost}$$

$$i = 2ahj$$



Divido la piastrina in tanti fili di spessore dx e distanza x dall'area y

ne prendo 2 simmetrica, x mi

$$di = j d\Sigma = j h dx$$

uso allora la formula del (7.2)

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{\pi} i \frac{y}{a^2 + y^2} \vec{u}_x \rightarrow d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{\pi} di \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{u}_x$$

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{\pi} j h dx \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{u}_x$$

ora integro su x , contributi

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{\pi} j h \int_0^a \frac{y dx}{x^2 + y^2} \vec{u}_x$$

integrale arcotangente

$$\int_P^Q dV = \int_P^Q v B dy \quad V(Q) - V(P) = v B b$$

$$\Delta V = +v B b = v b \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{r} = V(r)$$

se invece lo voglio dipendente dal tempo

per $t=0$, $r=r_0$

$$\text{per } t, r(t) = r_0 + vt \quad \left. \vphantom{\text{per } t} \right\} V(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} i v b \frac{1}{(r_0 + vt)}$$

$$V(0) = \frac{\mu_0}{2\pi} i v b \frac{1}{r_0}, \quad V(\infty) = 0$$

Caso 2

X BIOT-SAVART

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{d}{r} \vec{I} \vec{e}_\phi \quad (\vec{u}_\phi = \vec{u}_z) \text{ entrante } \otimes$$

le parentesi si muovono di v e
sussistono

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \text{ diretta verso } x \text{ (} \vec{u}_x \text{)}$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_y \quad (\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x)$$

abbiamo un accumulo di carica \oplus
su Q e carica \ominus su P, si crea E

\vec{F} agisce fino a quando

$$q\vec{E} + \vec{F} = 0 \quad q\vec{E} = +q\vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{E} = +vB \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \text{ ma dipende solo da } x! \quad +vB \vec{u}_x = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x$$

$$dV = -vB dx$$

$$\int_P^Q dV = \int_{x=r_0}^{x=r_0+b} -vB dx \quad V(P) - V(Q) = -vBb$$

$$\Delta V = -vBb$$

forse \vec{F} e \vec{E} sono scambiati

che sono messi come la
scrivita e invertiti

$$P = F \cdot v$$

$$i = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

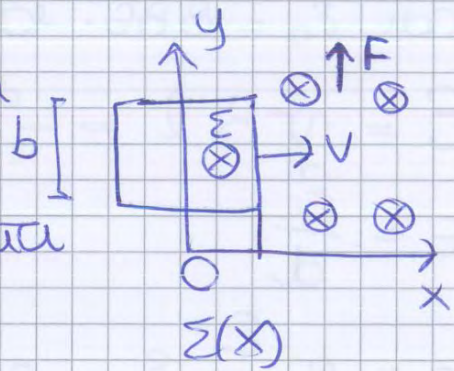
? **8.4** SPIRA CONDUTTRICE □ lato b , massa m , R si muove senza attrito su asse xy con $v_0 = \text{cost}$

$x > 0 \rightarrow$ campo \vec{B} unif. e cost. ed esterna in $t=0$ *entrante*

a) \vec{v} SPIRA, $v(x)$

b) $v_1(x)$ quando è u. entrata cioè $x=b$

c) W dissipata nella SPIRA tra $t=0$ e OND e u. entrata



prima che incontra \vec{B} moto rett. unif.

$$\begin{cases} dx = x_0 + vt \\ v_0 = \text{cost} \end{cases}$$

Dopo che incontra $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $\vec{v} = v\vec{u}_x$

~~$F_L = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \vec{u}_y$ in funzione di x~~

~~$F_L = qv(x)B$~~

$$\phi(\vec{B}) = B\epsilon(x) = Bbx$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = Bbv$$

~~$m \frac{dv}{dx} = qvB$~~

$$\vec{F}_B = \int i d\vec{s} \times \vec{B} = i\vec{b} \times \vec{B} = ibB = \frac{(bb)^2}{R} v$$

con $i = \frac{Bbv}{R}$ da $\phi = Bbx$ e $\mathcal{E} = Bbv$

Newton $m \frac{dv}{dx} = - \frac{(bb)^2}{R}$

$$v(x) = v_0 - \frac{B^2 b^2}{mR} x$$

$$v_1(x=b) = v_0 - \frac{B^2 b^3}{mR}$$

$$W = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2)$$

$$W = \Delta E_k$$

8.6 SPIRA rettangolare massa m resistenza R e dimensioni a per l cade da ferma in regione dove agisce \vec{B} costante e \perp (verso)

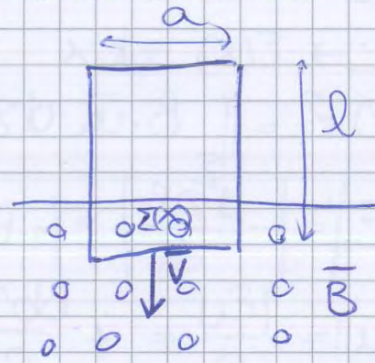
- SPIRA accelera finché raggiunge v_{∞}
- a) v_{∞} a regime se solo il lato inferiore spira è immerso in B
 - b) come prosegue il moto se π spira è immersa in B

Parte da ferma, moto

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = gt$$

$$a = g$$



$$\Sigma \rightarrow \Sigma(x) = ax \text{ fino a } al$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{u} d\Sigma = B\Sigma = Bax$$

$$E_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Ba\frac{v}{dt}, \quad i = \frac{|E_i|}{R} = \frac{Bav}{R}$$

$$\vec{F}_B = \int i d\vec{s} \times \vec{B} = \frac{Bav}{R} aB = \frac{(Ba)^2 v}{R}$$

forza magnetica avviene solo per la spira e che la fa accelerare

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_B = mg - \frac{(Ba)^2 v}{R}$$

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2 v}{R} = mg$$

a) $v_{\infty} = \text{cost} \rightarrow \frac{dv_{\infty}}{dt} = 0 \rightarrow v_{\infty} = \frac{mgR}{(Ba)^2}$

quando è entrato solo il lato inferiore

b) Quando la spira è completamente entrata il moto diventa uniformemente accelerato con accelerazione \vec{g}

28

$$b) v_{\infty} = \frac{mg \sin \alpha}{(Bbc \cos \alpha)^2} = mg \sin \alpha \frac{R}{(Bbc \cos \alpha)^2}$$

$$\frac{(Bbc \cos \alpha)^2}{R} v_{\infty} = mg \sin \alpha$$

$$v_{\infty} Bbc \cos \alpha = F_B = P_x \quad \text{ma} \quad \frac{dv_{\infty}}{dt} = 0$$

$$c) P = Ri^2$$

$$v_{\infty} = \frac{Bb v_{\infty} \cos \alpha}{R} \quad \text{e sostituisco}$$

ESEMPIO DI GENERAZIONE!

8.8
8.9

RUOTA DI BARLOW, RAGGIO a , RUOTA
ATTORNO ASSE PARALLELO \times IL CERCHIO P
COLLEGATO A R CON 2 CONTATTI IN O E
IN P .

NEL RAGGIO OP CAMPO MAGN $\vec{B} \perp$ AL DISCO
E USCENTE

DISCO MANTENUTO A $\omega = \text{cost}$

a) \mathcal{E} nel circuito b) P elettrica fornita

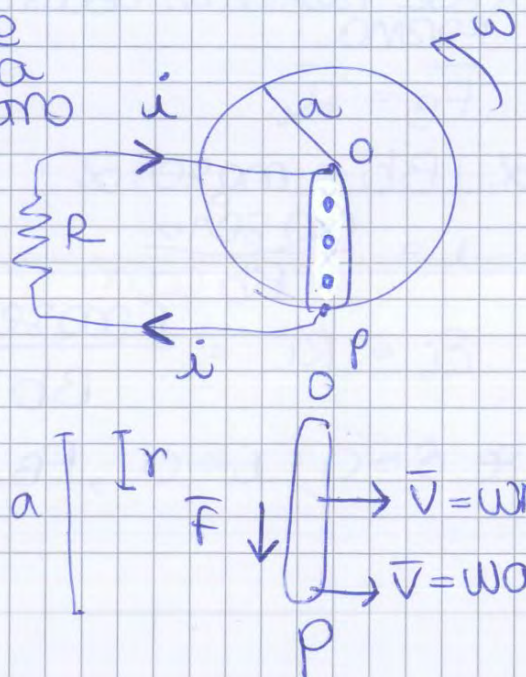
c) momento meccanico \times mantenere in
rotazione il disco con $\omega = \text{cost}$

d) P meccanica necessaria

OGNI PUNTO DI OP SI MUOVE
CON $v = \omega r$ DIPENDENTE DA
 r DISTANZA DAL PUNTO DI CENTRO

~~una carica~~ una carica
generica e sottoposta

a $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ DIRETTA
VERSO P !!



QUINDI \vec{F} manda le cariche
positive in P ma \times il circuito
esse vanno a finire in O
ma mentre la RUOTA GIRA
le cariche sono riportate
in P ecc ecc...

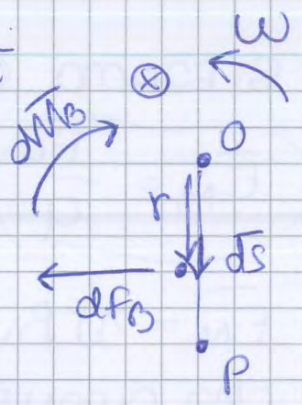
20

Il momento di questa forza \vec{F}_B è

$$d\vec{M}_B = \vec{r} \times d\vec{F}_B = r dF_B = r i dr B$$

braccio x forza

↪ enzante fa girare la ruota in senso opposto a ω !!
 $r = a$



$$\vec{M}_B = \int_{r=0}^a i B r dr = i B \int_0^a r dr =$$

$$= i B \frac{1}{2} a^2$$

ora scrivo l'eq. meccanica cioè eq. di rotazione di un corpo attorno ad un'asse

$$I \alpha = I \frac{d\omega}{dt} = M_{TOT} = M_{est} - M_B$$

↓ momento di inerzia ↓ accelerazione angolare ↓ momento totale del corpo ↓ momento esterno ↓ mom. magnetico
 si contrastano

$$I_{corpo} = \frac{1}{2} M a^2$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_{est} - \frac{1}{2} i B a^2$$

ma il testo dice che $\omega = \text{cost!} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0!$

$$M_{est} = \frac{1}{2} i B a^2 = M_B \quad \text{sostituisco anche } i$$

$$M_{est} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2R} \omega B a^2 \right) B a^2 = \frac{\omega}{4R} (B a^2)^2$$

e la potenza meccanica

$$P = F \cdot v \rightarrow \text{diventa } P = M \cdot \omega$$

$$P = \frac{\omega}{4R} (B a^2)^2 \omega = \frac{1}{4R} (\omega B a^2)^2 = R^2 \left(\frac{\omega B a^2}{2R} \right)^2 \frac{1}{R}$$

= $R i^2$ cioè la potenza meccanica fornita viene tutta dissipata in calore!

a regime $v_{\infty} = \text{cost} \rightarrow \frac{dv_{\infty}}{dt} = 0$

$$0 = \frac{E b B}{R} - \frac{v_{\infty}}{R} (B b)^2$$

b) $v_{\infty} = \frac{E b B R}{R (b B)^2} = \frac{E}{b B} \checkmark$

ORA SOSTITUISCO

a) $i_{\infty} = \frac{E}{R} - \frac{B b v_{\infty}}{R} = \frac{E}{R} - \frac{B b}{R} \left(\frac{E}{b B} \right) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} = 0 \checkmark$

c) $E_{K_{\infty}} = \frac{1}{2} m (v_{\infty})^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{E}{b B} \right)^2 \checkmark$

se invece voglio $v(t)$ e $i(t)$ cioè dipendenti dal tempo

* $m \frac{dv}{dt} + \frac{(B b)^2}{R} v = \frac{E b B}{R}$

$\frac{dv}{dt} + \frac{(B b)^2}{R m} v = \frac{E b B}{R m}$ RISOLVO QUESTA EQ. DIFFERENZIALE

$v(t) = v_{om}(t) + v_p(t)$

$i(t) = \text{cost}, \frac{dv_p(t)}{dt} = 0$

$\frac{(B b)^2}{R m} v_p = \frac{E b B}{R m}$

$v_p = \frac{E b B R m}{R m (B b)^2} = \frac{E}{B b}$

$\frac{dv_{om}}{dt} = - \frac{(B b)^2}{R m} v_{om}$

$\frac{dv_{om}}{v_{om}} = - \frac{(B b)^2}{R m} dt$

$v_{om}(t) = A e^{-\frac{(B b)^2}{R m} t}$

Condizione iniziale

$v(0) = 0$
 $v(t) = A e^{-\frac{(B b)^2}{R m} t} + \frac{E}{B b}$

$0 = A + \frac{E}{B b}$

$A = - \frac{E}{B b}$

Quindi $v(t) = \frac{E}{B b} (1 - e^{-\frac{(B b)^2}{R m} t})$

e $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{B b}{R} v(t) = \frac{E}{R} - \frac{B b}{R} \frac{E}{B b} (1 - e^{-\frac{(B b)^2}{R m} t})$

$i(t) = \frac{E}{R} [1 - 1 + e^{-\frac{(B b)^2}{R m} t}] = \frac{E}{R} e^{-\frac{(B b)^2}{R m} t}$

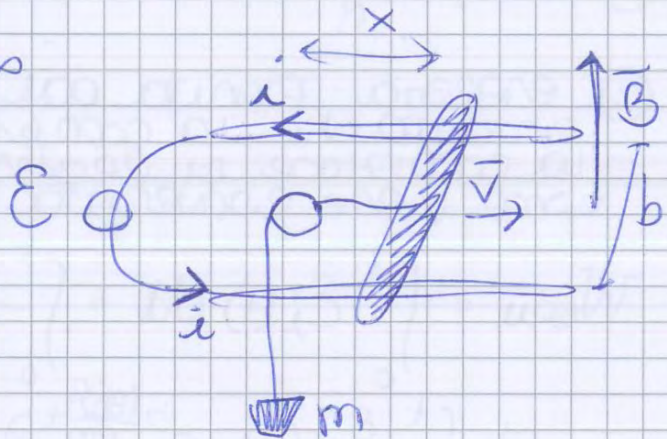
$i(0) = \frac{E}{R}, i(\infty) = 0, \checkmark \rightarrow$ posso ricavare $q = \int i dt$!! integrando

2h

8.12 Spazzola conduttrice appoggiata su 2 rotaie distanti b , collegata a generatore di \mathcal{E} , il circuito formato ha R ed è

immerso in $B \perp$ al piano. a regime la spazzola si muove di v_∞ allontanandosi e solleva tramite un filo e una carrucola una massa m

(a) a regime (b) v_∞



EQ CIRCUITALE

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = iR$$

CAVITÀ RICAMPO

$$i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R}$$

ora cerco \mathcal{E}_i

$$\Phi(B) = \int \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = B\Sigma = Bbx$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = -Bbv, \text{ per cui}$$

$$i = \frac{\mathcal{E} - bBv}{R}$$

EQ MECCANICA

$$m \frac{dv}{dt} = F_B - P$$

$$F_B = i \int ds \times \vec{B} = ibB$$

$$P = mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = ibB - mg \text{ sostituisco } i$$

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} bB - \frac{(bB)^2}{R} v - mg$$

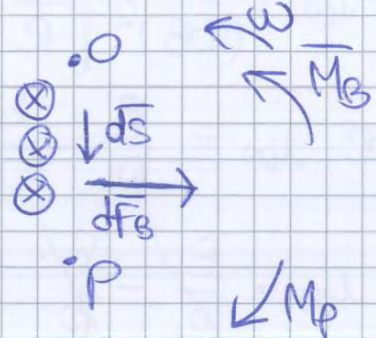
ora come sempre a regime $v_\infty = \text{cost} \rightarrow \frac{dv_\infty}{dt} = 0$

ora nuove considerazioni:

chiudo l'interruttore e passa i nel circuito

$d\vec{F}_B = i d\vec{s} \times \vec{B}$ ha una direzione diversa da prima!

quindi il momento che nasce \vec{M}_B mette in movimento la ruota facendola girare con ω e contrastando M_p momento della forza peso della molla m che spinge nuova eq. meccanica!



$$I \alpha = I \frac{d\omega}{dt} = \vec{M}_B - \vec{M}_p$$

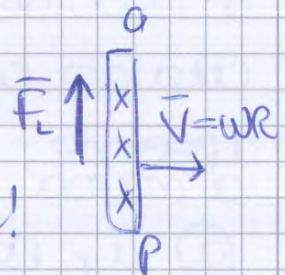
$$\vec{M}_B = \frac{1}{2} i B a^2 \quad \text{e} \quad \vec{M}_p = r \times F_p = a m g$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} i B a^2 - m g a$$

nuova eq. elettrica

$$\vec{V}_0 + \vec{E} = R i$$

$$\downarrow E = \frac{1}{2} \omega B a^2 \quad \text{ricavata prima da } \vec{F}_L \rightarrow \vec{E}_M \rightarrow \oint \vec{E}_M \cdot d\vec{s} \dots \text{ ecc!}$$



$$\vec{V}_0 - \frac{1}{2} \omega B a^2 = R i \quad \text{reale } i$$

$$i = \frac{V_0}{R} + \frac{1}{2R} \omega B a^2$$

~~circuito equivalente con induttanza e resistenza~~

a regime $\frac{d\omega}{dt} = 0$ $\times \times \omega r = \omega a t$

$$0 = \frac{1}{2} i r B a^2 - m g a \rightarrow i r = \frac{2 m g a}{B a^2} = \frac{2 m g}{B a} \checkmark$$

e quindi ωr $\vec{V}_0 - \frac{1}{2} \omega r B a^2 = R i r \checkmark$

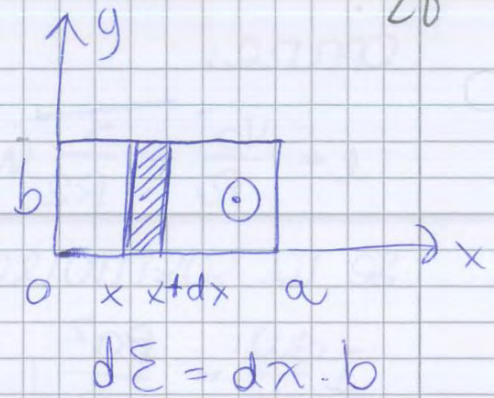
$$\omega r = -\frac{2R}{B a^2} \frac{2 m g}{B a} + \frac{2 V_0}{B a^2} = \frac{2 V_0}{B a^2} - \frac{4 R m g}{B^2 a^3}$$

non so
sicura
sia
GWSTO

$$\vec{B} = \alpha x^2 (t^2 - \beta) \vec{u}_z$$

$$[B] = S^2$$

$$[\alpha] = \frac{T}{m^2 S^2}$$



a) CERCO $\mathcal{E}_i = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{B}) &= \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \iint_{\Sigma} B d\Sigma = \iint_{\Sigma} \alpha x^2 (t^2 - \beta) dx \cdot b \\ &= \int_0^a \alpha (t^2 - \beta) b x^2 dx = \alpha (t^2 - \beta) b \int_0^a x^2 dx = \\ &= \alpha (t^2 - \beta) b \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

$$\phi(\vec{B}) = N \phi_1(\vec{B}) = \frac{\alpha}{3} N b a^3 (t^2 - \beta)$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\alpha}{3} N b a^3 (t^2 - \beta) \right\} =$$

a) $= - \frac{d}{dt} \left\{ - \frac{\alpha}{3} N b a^3 \beta + \frac{\alpha}{3} N b a^3 t^2 \right\} = - \frac{2}{3} \alpha N b a^3 t$

b) $i(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = - \frac{2}{3} \alpha \frac{N}{R} b a^3 t$

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{t_0=0}^{t^*} i(t) dt = \int_{t_0=0}^{t^*} - \frac{2}{3} \alpha \frac{N}{R} b a^3 t dt = \\ &= - \frac{2}{3} \alpha \frac{N}{R} b a^3 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{t_0=0}^{t^*} = - \frac{2}{3} \alpha \frac{N}{R} b a^3 \frac{1}{2} (t^*)^2 \end{aligned}$$

c) $Q = - \frac{1}{3} \alpha \frac{N}{R} b a^3 (t^*)^2$ oppure uso
 $Q = \frac{\phi(0) - \phi(t^*)}{R}$ FELICI

30

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{2}{3} \pi B_0 N R^2 \frac{d}{dt} (\sin(\omega t)) = \\ &= -\frac{2}{3} \pi B_0 N R^2 \omega \cos(\omega t) \end{aligned}$$

\mathcal{E}_i è max se $\cos(\omega t) = -1$, $\omega t = \pi$
coe'

$$\mathcal{E}_{i \max} = \frac{2}{3} \pi B_0 N R^2 \omega$$

AUTOMINIZIONE

8.26 una linea elettrica lunga L è costruita da 2 fili rettilinei // percorsi da i opposte.

Fili con raggio r e distanza d .
Calcolo il coefficiente di autoinduzione L nella parte centrale della linea elettrica (P)

$$\Phi = L i$$

x BIOT-SAVART

$$\vec{B}_1(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{x} \vec{u}_{\text{entrante}}$$

$$\vec{B}_2(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{d-x} \vec{u}_{\text{entrante}}$$

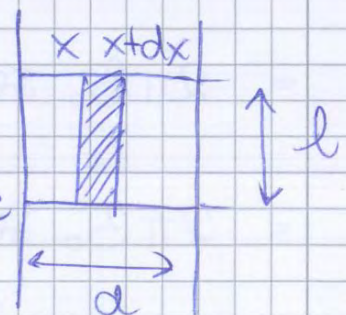
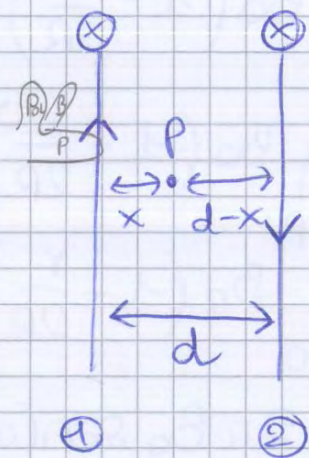
$$\vec{B}_{\text{TOT}}(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} i \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \vec{u}_{\text{entrante}}$$

ora calcolo il flusso

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} B d\Sigma = \int_{\Sigma} B dx l = d\Sigma = dx l$$

$$\int_{r}^{d-r} \frac{\mu_0}{2\pi} i \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx l = l \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_{r}^{d-r} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$



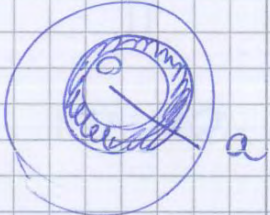
$$q = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{2NB\Delta}{R} = \frac{\phi(0) - \phi(\infty)}{R} \quad \text{legge Faraday}$$

8.19 SPIRA CIRCOLARE DI RAGGIO a e resistenza R e immersa in \underline{B} uniforme e \perp

$$B(t) = \underline{\alpha} + \underline{\beta}t$$

- (a) $\phi_0(\underline{B})$ a $t=0$ (b) \underline{E}_i (c) P_R dissipata

calcolo flusso

$$\begin{aligned} \phi(\underline{B}) &= \iint_{\Sigma} \underline{B} \cdot \underline{u}_n d\Sigma = \iint_{\Sigma} B \cdot d\Sigma = \\ & \iint_{\Sigma} B \cdot 2\pi r dr = \int_0^a (\alpha + \beta t) 2\pi r dr = \\ & = (\alpha + \beta t) 2\pi \int_0^a r dr = (\alpha + \beta t) 2\pi \frac{1}{2} a^2 = \\ & = (\alpha + \beta t) \pi a^2 \end{aligned}$$


$d\Sigma = 2\pi \cdot dr$

(a) $\phi_0(\underline{B}(t=0)) = \alpha \pi a^2 \checkmark$

$$\underline{E}_i = - \frac{d\phi(\underline{B})}{dt} = -\pi a^2 \left[\frac{d}{dt} (\alpha + \beta t) \right] =$$

(b) $= -\pi a^2 \beta \checkmark$

$$i = \frac{E_i}{R} = - \frac{\pi a^2 \beta}{R}$$

(c) $P = Ri^2 = R \frac{(\pi a^2 \beta)^2}{R^2} = \frac{(\pi a^2 \beta)^2}{R} \checkmark$

8.20 $q = c(V) \rightarrow V = - \frac{d\phi(\underline{B})}{dt} \quad \phi(\underline{B}) = \iint_{\Sigma} \underline{B} \cdot \underline{u}_n d\Sigma$

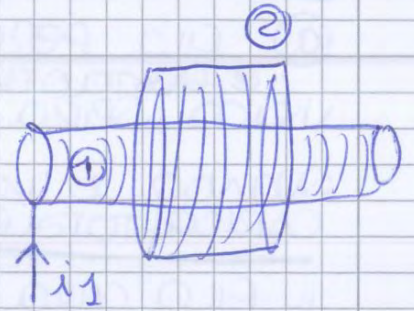
34

6.38) b) solenoide lungo e stretto ① dentro al solenoide ②

calcolo il coeff. di mutua induzione

$$n_1 = \frac{N_1}{l_1}, \quad n_2 = \frac{N_2}{l_2}$$

N : numero spire
 l : lunghezza solenoide



$$\text{① crea } B_1 = \mu_0 n_1 i_1$$

QUINDI IL FLUSSO DI ① concatenato con ②

$$\Phi_{12} (\text{SPIRA}) = B_1 \Sigma_1 = B_1 \pi R_1^2$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12} (\text{TOT}) &= N_2 \Phi_{12} (\text{SPIRA}) = N_2 B_1 \pi R_1^2 = \\ &= N_2 \mu_0 n_1 i_1 \pi R_1^2 = (N_2 \mu_0 n_1 \pi R_1^2) i_1 \end{aligned}$$

$$\Phi_{12} (\text{TOT}) = M_{12} i_1$$

$$M_{12} = N_2 \mu_0 n_1 \pi R_1^2 = M_{21} = M.$$



Il campo è continuo da dentro a fuori!

CILINDRO

6.35

★ conduttore ricoperto da una guaina la corrente è superficiale!

CERCO il campo e L coeff. di autoinduzione! e energia magnetica associata al sistema γ

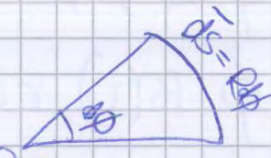
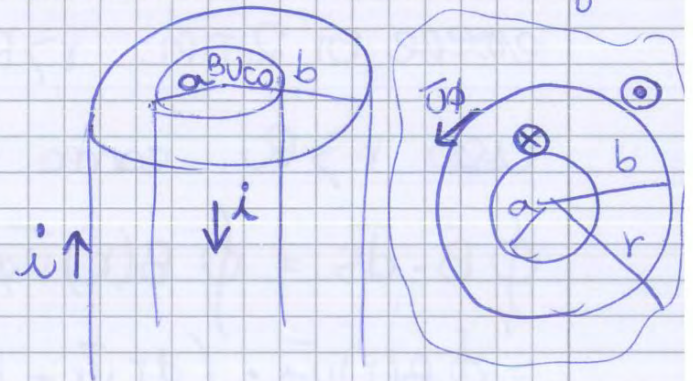
se riduciamo a un filo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\phi = B(r) \vec{u}_\phi$$

cerco $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

con $d\vec{s} = r d\phi \vec{u}_\phi$

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \oint B(r) \vec{u}_\phi \cdot r d\phi \vec{u}_\phi = \\ &= \oint B(r) r d\phi = r B(r) \int_0^{2\pi} d\phi = B(r) \cdot r \cdot 2\pi \end{aligned}$$



il campo è costante qualunque sia γ anche circolare (formula valida \times le simmetrie circolari)

applico ampère e suddivido in casi

- $r < a$, $i(\gamma) = 0$ (la corrente forma una superficie non chiusa)
 $B(r < a) = 0$
- $a < r < b$, $i(\gamma) = i$
 $B(a < r < b) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$
- $r > b$, $i(\gamma) = 0$, $B(r > b) = 0$

Fuori e dentro al buco non c'è corrente

$$U_B = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\mu_0} B^2(r) \cdot 2\pi r l dr = \quad 38$$

$$= \underbrace{\int_0^a \frac{B^2(r)}{2\mu_0} 2\pi r l dr}_{\text{per } B(r < a) = 0} + \int_a^b \frac{B^2(r)}{2\mu_0} 2\pi r l dr + \underbrace{\int_b^{\infty} \frac{B^2(r)}{2\mu_0} 2\pi r l dr}_{\text{per } B(r > b) = 0}$$

$$U_B = \int_a^b \frac{B^2(r)}{\mu_0} \pi r l dr = \int_a^b \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi r} \right)^2 \pi r l dr =$$

$$= \int_a^b \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l dr = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l \int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l \cdot \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$U_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} l \cdot \log\left(\frac{b}{a}\right) \right) i^2 = \frac{1}{2} L i^2$$

★ ORA non più buco ma filo pieno di raggio a rivestito sempre da una guaina con raggio b

NEL FILO LA CORRENTE i è distribuita uniformemente,

$$\text{cioè } j = \frac{i}{\Sigma} = \frac{i}{\pi r^2} = \text{cost} = \frac{i}{\pi a^2} \text{ sempre!}$$

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\phi$$

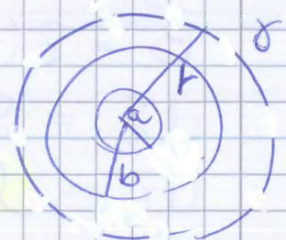
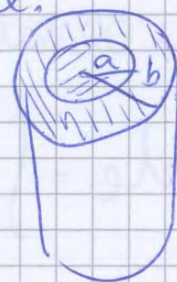
$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r)$$

DINAMO APPLICO AMPÈRE!

$$\bullet r < a \rightarrow i(r) = j \Sigma = j \pi r^2 =$$

$$i(r) = \frac{i}{\pi a^2} \pi r^2 = \frac{i r^2}{a^2}$$

$$\rightarrow B(r < a) = \mu_0 \frac{i r^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i r}{a^2}$$



FORZA

È una grandezza che su una particella ne provoca un'accelerazione

Dipende dalla posizione occupata dalla particella, rispetto al sistema di riferimento scelto $\vec{F}(\vec{r})$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

In un sistema cartesiano
3 componenti = 3 equazioni

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

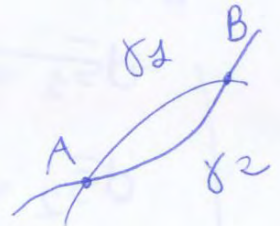
LAVORO

Integrale della forza x lo spostamento

Integrale di linea

$$W_{A \rightarrow B}(\gamma) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dati 2 percorsi diversi da A → B
si possono verificare 2 diverse situazioni



$$\textcircled{1} W_{A \rightarrow B}(\gamma_1) = W_{A \rightarrow B}(\gamma_2), \quad \forall \gamma$$

Il lavoro non dipende dal percorso
la forza/campo è conservativo

$$\textcircled{2} W_{A \rightarrow B}(\gamma_1) \neq W_{A \rightarrow B}(\gamma_2)$$

Il lavoro dipende dal percorso
la forza/campo non è conservativo

Deve scomparire la differenza da 0

ma $\boxed{f(x,y) = u(x) - u(y)}$

$$f(A,B) = f(O,B) - f(O,A) = u(O) - u(B) - [u(O) - u(A)] =$$

$$= \cancel{u(O)} - u(B) - \cancel{u(O)} + u(A) =$$

$$\boxed{f(A,B) = u(A) - u(B)}$$

quindi $\overline{W}_{A \rightarrow B}^{(\gamma_1)} = \overline{W}_{A \rightarrow B}^{(\gamma_2)} = \overline{W}_{A \rightarrow B}^{(\gamma)}$

$$\overline{W}_{A \rightarrow B} = f(A,B)$$

$$\overline{W}_{A \rightarrow B} = u(A) - u(B)$$

Dove u è il potenziale!

come ottenere le $\boxed{\text{condizioni di conservatività}}$

$\boxed{\text{DIM}}$ $\overline{W}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{s} = - \int_A^B d\mu$

$$\rightarrow \int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{s} + \int_A^B d\mu = 0 \rightarrow \int_A^B (\overline{F} \cdot d\overline{s} + d\mu) = 0 \quad \forall (A,B)$$

$$\rightarrow \overline{F} \cdot d\overline{s} + d\mu = 0 \quad \text{TRASFORMO IN COORDINATE CARTESIANE}$$

$$\overline{F} = F_x \overline{u}_x + F_y \overline{u}_y + F_z \overline{u}_z$$

$$d\overline{s} = dx \overline{u}_x + dy \overline{u}_y + dz \overline{u}_z \rightarrow \overline{F} \cdot d\overline{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$d\mu(x,y,z) = \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy + \frac{\partial \mu}{\partial z} dz \quad \left. \vphantom{d\mu} \right\} \text{ x il teorema del differenziale TOTALE}$$

quindi $F_x dx + F_y dy + F_z dz + \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy + \frac{\partial \mu}{\partial z} dz = 0$

$$dx \left(F_x + \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + dy \left(F_y + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) + dz \left(F_z + \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = 0$$

CAMPO CONSERVATIVO

$$W_{A \rightarrow B}^{(\gamma_1)} = W_{A \rightarrow B}^{(\gamma_2)}$$

IL LAVORO NON DIPENDE
DA γ , DAL PERCORSO

L'INTEGRALE DI LINEA NON
DIPENDE DALLA LINEA

LA CIRCVITAZIONE
È NULLA

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

+ dim

CIRCVITAZIONE = INTEGRALE
LUNGO UN PERCORSO CHIUSO

L'INTEGRALE DI LINEA È
ESPRIMIBILE COME DIFFERENZA
DI UNA PROPRIETÀ DEL PUNTO DI
PARTENZA E DI UNA PROPRIETÀ
DEL PUNTO DI ARRIVO

$$W_{A \rightarrow B} = \varphi(A, B)$$

$$W_{A \rightarrow B} = u(A) - u(B)$$

+ dim

• CONDIZIONE DI CONSERVATIVITÀ

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots$$

$$F = -\nabla u \quad \curvearrowright$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

CAMPO NON CONSERVATIVO

$$W_{A \rightarrow B}^{(\gamma_1)} \neq W_{A \rightarrow B}^{(\gamma_2)}$$

IL LAVORO DIPENDE DA γ ,
DAL PERCORSO

L'INTEGRALE DI LINEA
DIPENDE DALLA LINEA

$$\int_{\gamma_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq \int_{\gamma_2}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta x \left(\langle F_x \rangle_{AB} - \langle F_x \rangle_{DC} \right) + \Delta y \left(\langle F_y \rangle_{BC} - \langle F_y \rangle_{AD} \right)$$

$$\langle F_x \rangle_{AB} = \frac{F_x(A) + F_x(B)}{2} = \frac{F_x(x,y) + F_x(x+\Delta x, y)}{2} = \frac{F_x(x,y) + F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x}{2}$$

$$\langle F_x \rangle_{AB} = F_x(x,y) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x$$

$$\langle F_x \rangle_{DC} = \frac{F_x(D) + F_x(C)}{2} = \frac{F_x(x,y+\Delta y) + F_x(x+\Delta x, y+\Delta y)}{2} =$$

$$= \frac{F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y + F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y}{2} =$$

$$= F_x(x,y) + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x$$

$$\langle F_y \rangle_{BC} = \frac{F_y(B) + F_y(C)}{2} = \frac{F_y(x+\Delta x, y) + F_y(x+\Delta x, y+\Delta y)}{2}$$

$$= \frac{F_y(x,y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x + F_y(x,y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y}{2} =$$

$$= F_y(x,y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y$$

$$\langle F_y \rangle_{AD} = \frac{F_y(A) + F_y(D)}{2} = \frac{F_y(x,y) + F_y(x,y+\Delta y)}{2} = \frac{F_y(x,y) + F_y(x,y) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y}{2}$$

$$= F_y(x,y) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta x \left(F_x(x,y) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x - F_x(x,y) - \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \right) + \Delta y \left(F_y(x,y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y - F_y(x,y) - \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y \right)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \Delta y =$$

$$= \Delta x \Delta y \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \Delta \omega \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\int_{ABCD} = \int_{AOCA} + \int_{ABOA} + \int_{BCOB}$$

Piano xz
Piano xy
Piano yz

$$\oint_{\partial} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{S(x)} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) da_{(x,z)} + \int_{S(y)} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) da_{(x,y)} + \int_{S(z)} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) da_{(y,z)}$$

Introduciamo il vettore area

$$da_{(x,y)} = dx dy$$

$$da_{(x,z)} = dx dz$$

$$da_{(y,z)} = dy dz$$

$$da_z = dx dy$$

$$da_y = dx dz$$

$$da_x = dy dz$$



Regola mano DX

$$d\vec{\sigma} = da_x \vec{u}_x + da_y \vec{u}_y + da_z \vec{u}_z$$

$$\oint_{\partial} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S(x)} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) da_y + \iint_{S(y)} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) da_z + \iint_{S(z)} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) da_x$$

→ scattare

$$\oint_{\partial} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S(x)} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) (da_x + da_y + da_z)$$

Introduciamo il rotore \vec{R}

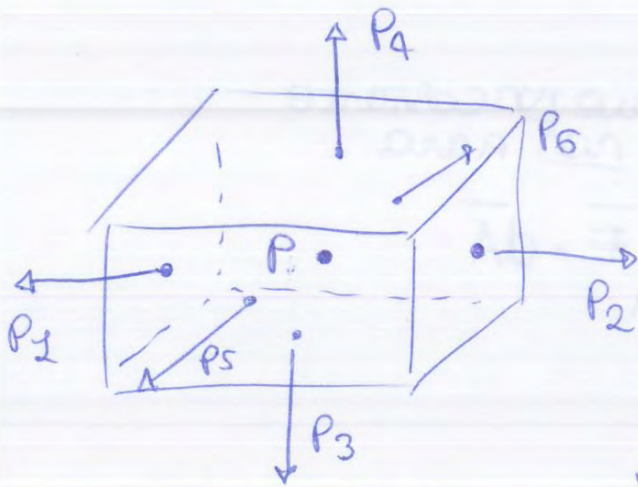
$$\vec{R} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{u}_x R_x + \vec{u}_y R_y + \vec{u}_z R_z$$

$$\oint_{\partial} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S(x)} \vec{R} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{S(x)} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{S(x)} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} da$$

FORMULA INTEGRALE DI STOKES

subdiviso il volume lungo su assi cartesiani

$$\Delta\phi = \Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z \quad \Delta\phi = F \cdot n \cdot A$$



ogni faccia 2 punti



a ogni punto
P1 P2 P3 P4 P5 P6

corrisponde 1 normale a
wi corrisponde un versore

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= -\bar{u}_x & \bar{n}_4 &= +\bar{u}_z \\ \bar{n}_2 &= +\bar{u}_x & \bar{n}_5 &= -\bar{u}_y \\ \bar{n}_3 &= -\bar{u}_z & \bar{n}_6 &= +\bar{u}_y \end{aligned}$$

P(x,y,z) è il centro

$$\begin{aligned} P_1 &\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) & P_3 &\left(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}\right) & P_5 &\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \\ P_2 &\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) & P_4 &\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right) & P_6 &\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \end{aligned}$$

$$\bar{F} = F_x \bar{u}_x + F_y \bar{u}_y + F_z \bar{u}_z$$

$$\phi_x = \bar{F}(P_1) \cdot \bar{n}_1 \Delta y \Delta z + \bar{F}(P_2) \cdot \bar{n}_2 \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\phi_x = \Delta y \Delta z (-F_x(P_1) + F_x(P_2))$$

$$\Delta\phi_x = \Delta y \Delta z \left(-F_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) + F_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \right)$$

$$\Delta\phi_x = \Delta y \Delta z \left(-F_x(x, y, z) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + F_x(x, y, z) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\Delta\phi_x = \Delta y \Delta z \Delta x \frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta\tau$$

$$\Delta\phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta\tau$$

$$\Delta\phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta\tau$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi_y &= \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta\tau \\ \Delta\phi_z &= \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta\tau \end{aligned} \right\} \Delta\phi = \Delta\tau \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_{T(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau \quad \Phi_E(\vec{F}) = \iiint_{T(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_{T(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

DIVERGENZA DEL VETTORE POSIZIONE

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$F_x = x \quad F_y = y \quad F_z = z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{r}$$

DIVERGENZA DELLA LEGGE DI COULOMB

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r = k \frac{Qq}{r^3} r \vec{u}_r = k Qq \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \boxed{r \vec{u}_r = \vec{r}}$$

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F_x = kQq \frac{x}{r^3}$$

$$F_y = kQq \frac{y}{r^3}$$

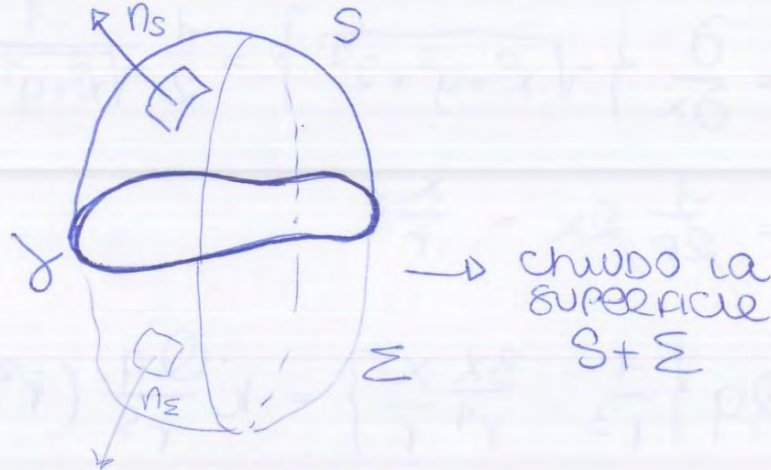
$$F_z = kQq \frac{z}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kQq \frac{x}{r^3} \right\} = kQq \frac{\partial}{\partial x} \{ x r^{-3} \} =$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = kQq \left\{ \frac{1}{r^3} - 3x r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x} \right\}$$

Se un vettore è solenoidale, il flusso attraverso superficie aperta dipende solo dal bordo della superficie



$$\Phi_S(\vec{F}) = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

Flusso lungo la superficie S

$$\oiint_{S+\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = 0$$

~~Flusso~~ Flusso lungo la superficie S + Sigma uguale a zero

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_s \, ds + \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma = 0$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_s \, ds = - \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot (-\vec{n}_{\Sigma}) \, d\Sigma$$

sono uguali e opposti

se le 2 superfici vengono appiattite una sull'altra

\vec{F} è solenoidale \rightarrow l'integrale del flusso su una superficie aperta dipende solo dal bordo di S

Divergenza di R = del rotore

$$\vec{R} = \nabla \times \vec{F} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z =$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\dots \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\dots \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\dots \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{R} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} = 0$$

* il teorema della rotazione per il rotore. una derivata si cancella

$$\forall \vec{F} \rightarrow \vec{R} = \nabla \times \vec{F} \text{ e tale che } \nabla \cdot \vec{R} = 0 \text{ cioè } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

* condizioni conservative

$$F \cdot ds + dU = 0$$

$$U = U(r, \theta, \phi)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$$

$$F_r dr + F_\theta r d\theta + F_\phi r \sin\theta d\phi + \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$$

$$dr \left(F_r + \frac{\partial U}{\partial r} \right) + d\theta \left(F_\theta r + \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + d\phi \left(F_\phi r \sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) = 0$$

ogni parentesi deve essere nulla

$$F_r = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad F_\theta = - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{1}{r} \quad F_\phi = - \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin\theta}$$

sostituisco nella forza

$$F = - \frac{\partial U}{\partial r} \bar{u}_r - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{1}{r} \bar{u}_\theta - \frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin\theta} \bar{u}_\phi$$

se raccolgo il meno

$$F = - \nabla U \quad \text{con} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \bar{u}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \bar{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin\theta} \bar{u}_\phi$$

$$f(r) = -\frac{dU}{dr} \quad -f(r) dr = dU$$

$$U = -\int f(r) dr + \text{cost}$$

③ SU TRAVERSO IL ROTORE DI UNA FORZA CENTRALE VERIFICO CHE È CONSERVATIVA

$$\underline{\text{DIM}} \quad \vec{F} = f(r) \vec{u}_r = \frac{f(r)}{r} r \vec{u}_r = \left(\frac{f(r)}{r} \right) \vec{r} = g(r) \vec{r}$$

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = g(r) \{ x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ovvero}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$$

$$F_x = g(r)x \quad F_y = g(r)y \quad F_z = g(r)z$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{ g(r)x \} = x \frac{\partial}{\partial y} (g(r)) = x \frac{da}{dr} \frac{dr}{dy}$$

derivata di funzione di funz.

$$\frac{dr}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} 2y = \frac{y}{r} \quad \text{SOSTITUISCO}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{x y}{r} \frac{da}{dr} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{x y}{r} \frac{da}{dr} \quad \dots \rightarrow \text{condizioni di Conservazione}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \nabla \times \vec{F} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z = \\ &= \vec{u}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{u}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{u}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{r_i \vec{u}_i}{r_i^3} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

SOSTITUISCO LE COORD.

$$\vec{E}(x,y,z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{(x-x_i)\vec{u}_x + (y-y_i)\vec{u}_y + (z-z_i)\vec{u}_z}{\left(\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}\right)^3}$$

componenti separate:

$$E_x(x,y,z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{x-x_i}{r_i^3}$$

$$E_y(x,y,z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{y-y_i}{r_i^3}$$

$$E_z(x,y,z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{z-z_i}{r_i^3}$$

FORMA
vettoriale
del campo
elettrostatico
generato da un
sistema discreto
di cariche.
ANTIFORMI

ora perno x verificare \vec{E} conservativo

⇒ più avanti

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

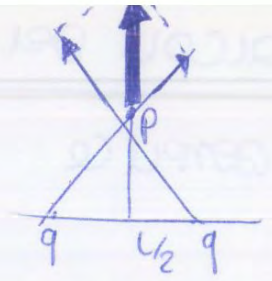
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{(r_i)^3} \vec{r}_i$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{R} - \vec{R}_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

DISTRIBUZIONE DISCRETA
DELE CARICHE

② $P \in y \rightarrow x=0$

$$\bar{E} = kq \left\{ \frac{\frac{L}{2} \bar{u}_x + y \bar{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} + \frac{-\frac{L}{2} \bar{u}_x + y \bar{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} \right\}$$



$$\bar{E} = kq \left\{ \frac{\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right) \bar{u}_x + 2y \bar{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} \right\} = kq \frac{2y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} \bar{u}_y$$

• $y \gg L$ ($\frac{L}{2}$ trascurabile)

• $y \ll L$ (y^2 trascurabile)

$$\bar{E} \approx kq \frac{2y}{(y^2)^{3/2}} \bar{u}_y$$

$$\bar{E} \approx kq \frac{2y}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} \bar{u}_y$$

$$\bar{E} \approx kq \frac{2}{y^2} \bar{u}_y$$

se le distanze sono confrontabili con il sistema, \bar{E} è molto piccolo

Come prima!

Distribuzione Discreta

Distribuzione Continua

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{r_i^2} \bar{u}_i$$

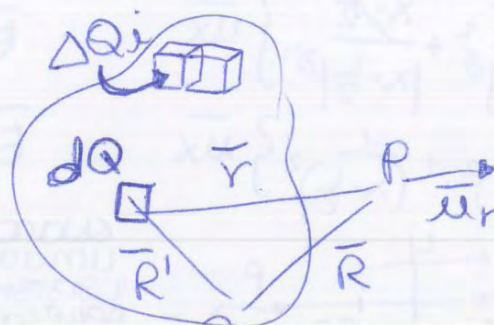
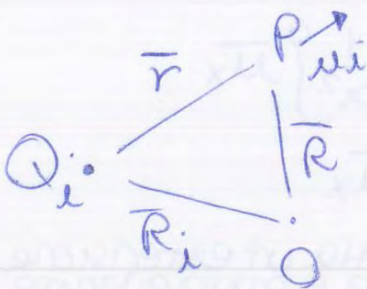
$$\bar{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k \Delta Q_i \frac{\bar{u}_i}{r_i^2}$$

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\bar{r}}{r_i^3}$$

$$\bar{E} = \int k \frac{\bar{r}}{r^2} dQ$$

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\bar{R} - \bar{R}_i}{|\bar{R} - \bar{R}_i|^3}$$

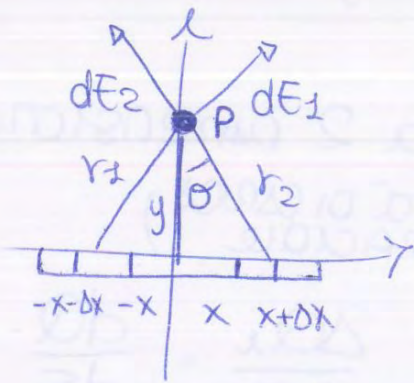
$$\bar{E} = \int_Q k \frac{\bar{R} - \bar{R}'}{|\bar{R} - \bar{R}'|^3} dQ$$



calcolo campo $\left\{ \begin{array}{l} \text{FILO} \\ \text{anello} \\ \text{disco} \\ \text{Piano} \end{array} \right.$

CORPO UNIFORME: σ, ρ, λ costanti, non dipendono dal punto considerato
 Q distribuita uniformemente

FILO omogeneo campo sull'asse



$P(x,y) \quad \lambda = \frac{Q}{L}$

$dq_1 = \lambda dx \quad dq_2 = \lambda dx$
 $dq_1 = dq_2 = dq$

$r_1 = r_2$
 $d\vec{E}_2 = k \frac{dq_2}{r_2^2} \quad d\vec{E}_1 = k \frac{dq_1}{r_1^2}$

$d\vec{E}_2 = d\vec{E}_1 = k \frac{dq}{r_2} = k \frac{\lambda dx}{r_2}$

$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2k \frac{\lambda dx}{r_2} \cos\theta \vec{u}_y$ proporz. in x e y

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan\theta = \frac{x}{y}$
 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 $r = \frac{y}{\cos\theta}$
 $x = y \tan\theta$

$d\vec{E} = 2k \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{u}_y = 2k \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} y \vec{u}_y$

campo totale

$\vec{E} = \int_0^{L/2} 2k\lambda \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} y \vec{u}_y$

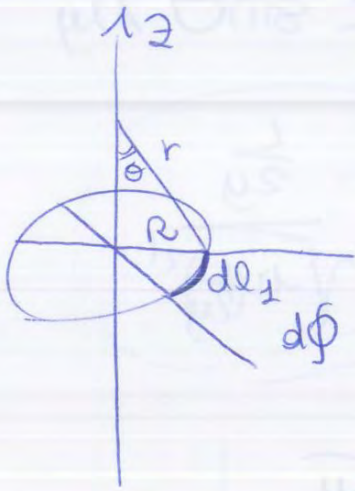
$dx = d(y \tan\theta) = y d(\tan\theta)$
 $= y \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$d\vec{E} = 2k\lambda \left(\frac{\cos^2\theta}{y^{3/2}} \right) \left(y \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \right) y \cos\theta \vec{u}_y$

$d\vec{E} = 2k\lambda \frac{d\theta \cos\theta}{y} \vec{u}_y$

Cambio di estremi di integrazione
 $dx \rightarrow d\theta$

anello
campo sull'asse



uniforme $\rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{Q}{l}$

unidimensionale $\rightarrow dQ = \lambda dl$

$dl_1 = R d\phi \rightarrow dQ_1 = \lambda dl_1 = \lambda R d\phi$

x la simmetria il campo

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2k \frac{q}{r^2} \cos\theta \vec{u}_z$
RICORDARLO!

x carica infinitesima

$d\vec{E} = 2k \frac{dQ}{r^2} \cos\theta \vec{u}_z$

$\vec{E} = 2k \int \frac{dQ}{r^2} \cos\theta \vec{u}_z$ OPPOSTO LE COSTANTI

$\vec{E} = 2k \frac{\cos\theta}{r^2} \vec{u}_z \int dQ = 2k \frac{\cos\theta}{r^2} \vec{u}_z \frac{Q}{2}$

CONSIDERO SOLO MEZZO ANELLO x non premezzo 2 volte

$\vec{E} = kQ \frac{\cos\theta}{r^2} \vec{u}_z$

relazioni disegno:

$\cos\theta = \frac{z}{r} \quad r = \sqrt{z^2 + R^2}$

$z = r \cos\theta$

$\vec{E} = kQ \frac{z}{r^3} \vec{u}_z = kQ \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

- $z=0, \vec{E}(\text{nel centro anello}) = 0 \Rightarrow$ CENTRO = PUNTO DI EQUILIBRIO INSTABILE
- $z \gg R, \vec{E}(z \gg R) = kQ \frac{z}{z^3} \vec{u}_z = kQ \frac{1}{z^2} \vec{u}_z \Rightarrow$ CAMPO CONCENTRATO NEL CENTRO
- $z \ll R, \vec{E}(z \ll R) = kQ \frac{z}{R^3} \vec{u}_z$

(NB) asse = TUBO
carica positiva
carica q

$\vec{E}(z \ll R) = kQ \frac{z}{R^3} \vec{u}_z$

\rightarrow MOTO PARTICELLA? $\vec{F} = -qE = -k \frac{Qq}{R^3} z \vec{u}_z$

METODO NEWTON

$m\vec{a} = m \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z = -k \frac{Qq}{R^3} z \vec{u}_z$

$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k Qq}{m R^3} z = 0$ MOTO OSCILLATO
RIO ARMONICO

con $\omega^2 = \frac{k Qq}{m R^3}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \bar{E}_+ = k \sigma 2\pi \bar{u}_z$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \bar{E}_- = -k \sigma 2\pi \bar{u}_z$$

il campo è una funzione
dispari e discontinua

ma $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $2\pi k = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0}$, $2\pi k = \frac{1}{2\epsilon_0}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_+(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \bar{u}_z \\ \bar{E}_-(z) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \bar{u}_z \end{aligned} \right\} \Delta \bar{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \bar{u}_z$$

* $z \rightarrow \infty$ // $z \gg R$

$$\bar{E}(z \gg R) \rightarrow 0$$

precisamente

$$\bar{E}(z \gg R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right\} \bar{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{z \sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2}} \right] \bar{u}_z$$

$$\left(\frac{R}{z}\right)^2 = \epsilon$$

$$\epsilon \ll 1 \quad \times \text{Taylor}$$

$$\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\epsilon} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$$

$$\bar{E}(z \gg R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right\} = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{z}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{z^2}\right) =$$

$$\bar{E}(z \gg R) = k \frac{\sigma \cdot \pi R^2}{z^2} = k \frac{Q}{z^2} \bar{u}_z \quad \begin{matrix} \text{per } z \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0 \end{matrix}$$

* $z \ll R$ / $R \rightarrow \infty$

$$\bar{E}(z \ll R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{R} \right] \bar{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \bar{u}_z$$

× un raggio ∞ o × un punto molto vicino al piano del disco \rightarrow il campo si comporta come se il disco fosse ∞

DIPOLO ELETTROSTATICO

*DEF: 2 cariche antiformite e - Distanti a

*momento di dipolo $\vec{p} = q\vec{a}$

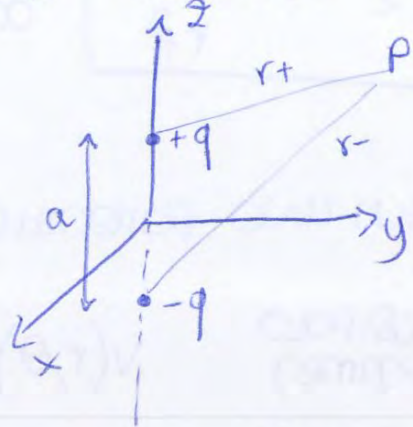
\vec{a} orientato $\ominus \rightarrow \oplus$
MISURATO IN DEBYE
 $1D = 10^{-30} \text{ Cm}$

* POTENZIALE GENERATO

DA UN DIPOLO IN UN PUNTO QUALSIASI

$$V(x,y,z) = kq \frac{1}{r_+} - kq \frac{1}{r_-} = \begin{matrix} P(x,y,z) \\ +q(0,0,\frac{a}{2}) \\ -q(0,0,-\frac{a}{2}) \end{matrix}$$

$$= kq \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = kq \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{a}{2})^2}} \right]$$



X CALCOLO USO L'APPROSSIMAZIONE BIPOLARE:

Metodo P molto distante dal centro rispetto alla distanza delle cariche stesse dal centro (VERIFICA TRA 60 ATOMI)

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \gg \frac{a}{2}$$

Passo in coordinate sferiche

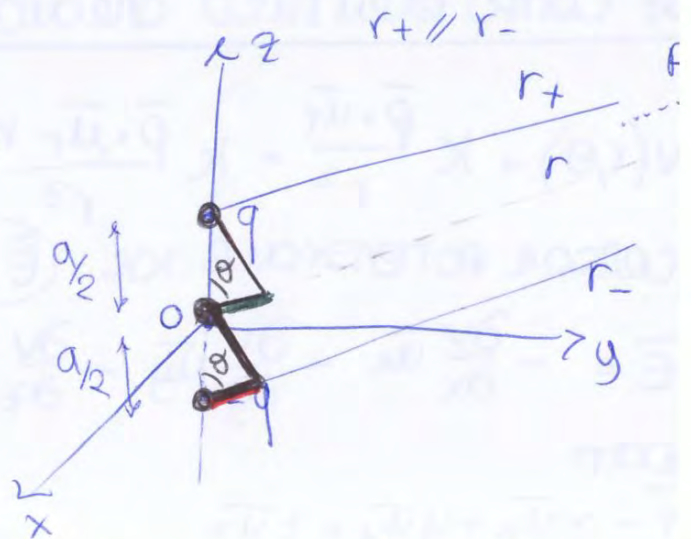
$$r_- - r_+ = \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r_- - r = \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r_+ = r - \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r_- = r + \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$r \gg \frac{a}{2}$$



$$V(x,y,z) = kq \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = kq \left[\frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos\theta} \right]$$

$$V(x,y,z) = kq \left[\frac{r + \frac{a}{2} \cos\theta - r + \frac{a}{2} \cos\theta}{(r - \frac{a}{2} \cos\theta)(r + \frac{a}{2} \cos\theta)} \right] = kq \left[\frac{a \cos\theta}{r^2 - (\frac{a}{2} \cos\theta)^2} \right]$$

con $r \gg \frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ si può trascurare rispetto r^2

$$V(x,y,z) = kq \frac{a \cos\theta}{r^2} = kq a \frac{\cos\theta}{r^2} = V(r,\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\lambda}{r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k \left\{ \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{(x p_x + y p_y + z p_z)}{r^5} x \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k}{r^3} \left\{ p_x - 3 \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \right) x \right\} \quad \text{e così x le altre}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k}{r^3} \left\{ p_y - 3 \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \right) \frac{y}{r^2} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{k}{r^3} \left\{ p_z - 3 \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \right) \frac{z}{r^2} \right\}$$

SOSTITUENDO IN \bar{E}

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V = -\frac{k}{r^3} \left\{ (p_x \bar{u}_x + p_y \bar{u}_y + p_z \bar{u}_z) - 3 \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \right) \frac{x \bar{u}_x + y \bar{u}_y + z \bar{u}_z}{r^2} \right\}$$

$$\bar{E} = -\frac{k}{r^3} \left\{ \bar{p} - 3 \left(\frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^2} \right) \frac{\bar{r}}{r^2} \right\}$$

$$\bar{E} = \frac{k}{r^3} \left\{ \frac{3(\bar{p} \cdot \bar{r}) \bar{r}}{r^2} - \bar{p} \right\}$$

Non è risolubile
Diminuisce $\frac{1}{r^3}$

$$\bar{E} = k \frac{3(\bar{p} \cdot \bar{u}_r) \bar{u}_r - \bar{p}}{r^3}$$

• IN COORDINATE CARTESIANE

$$\bar{p} = p \bar{u}_z$$

CALCOLATE
IN PUNTO

$$\bar{u}_r(A_n) = \bar{u}_z$$

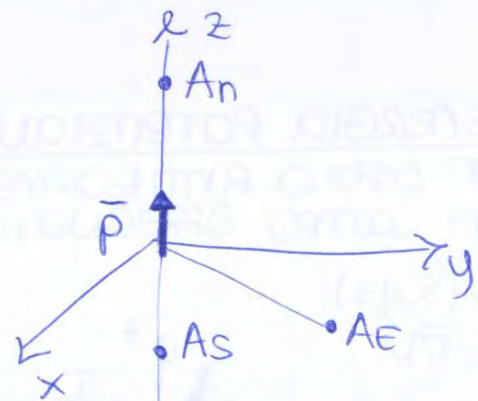
- nord

$$\bar{u}_r(A_s) = -\bar{u}_z$$

- sud

$$\bar{u}_r(A_e) \perp \bar{p}$$

- equatoriale



$$\bar{E}(A_n) = k \frac{3\bar{p} - \bar{p}}{r^3} = \frac{3(p \bar{u}_r(A_n)) - p \bar{u}_z}{r^3} = \frac{3p \bar{u}_z - p \bar{u}_z}{r^3} = k \frac{2p \bar{u}_z}{r^3}$$

$$\bar{E}(A_s) = k \frac{3\bar{p} - \bar{p}}{r^3} = k \frac{3(-p)(\bar{u}_r(A_s)) - p \bar{u}_z}{r^3} = k \frac{3p \bar{u}_z - p \bar{u}_z}{r^3} = k \frac{2p \bar{u}_z}{r^3}$$

$$\bar{E}(A_e) = k \frac{3\bar{p} - \bar{p}}{r^3} = k \frac{3(p) \bar{u}_r(A_e) - p \bar{u}_z}{r^3} = -k \frac{p}{r^3} \bar{u}_z = -\frac{k \bar{p}}{r^3}$$

$$\mu = \mu_+ + \mu_- = qV(R_+) - qV(R_-) = q(\Delta V)$$

$$\mu = qV\left(\bar{R} + \frac{\bar{a}}{2}\right) - qV\left(\bar{R} - \frac{\bar{a}}{2}\right) =$$

$$\mu = q \left\{ V\left(x + \frac{ax}{2}, y + \frac{ay}{2}, z + \frac{az}{2}\right) - V\left(x - \frac{ax}{2}, y - \frac{ay}{2}, z - \frac{az}{2}\right) \right\}$$

ora faccio gli sviluppi di Taylor

$$\mu = q \left\{ V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{ax}{2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{ay}{2} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{az}{2} - V(x, y, z) + \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \frac{ax}{2} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{ay}{2} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{az}{2} \right) \right\}$$

$$\mu = q \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} ax + \frac{\partial V}{\partial y} ay + \frac{\partial V}{\partial z} az \right\} = q \left\{ \bar{\nabla} V \cdot \bar{a} \right\}$$

$$\mu = q \left\{ \bar{a} \cdot \bar{\nabla} V \right\} = q \bar{a} \cdot \bar{\nabla} V = \bar{p} \cdot \bar{\nabla} V \quad \begin{matrix} \bar{p} = q\bar{a} \\ \bar{E} = -\bar{\nabla} V \end{matrix}$$

$$\boxed{\mu = -\bar{p} \cdot \bar{E}}$$

esempio
sul Q

* Forza netta

su un dipolo puntiforme non deformabile
in un campo assegnato, cioè $\bar{E}(\bar{R}) = \bar{E}_0$ ovunque

$$\bar{F} = \bar{F}_+ + \bar{F}_- = q\bar{E}(\bar{R}_+) + q(+E)(\bar{R}_-) = q\bar{E}(\bar{R}_+) - q\bar{E}(\bar{R}_-)$$

$$\bar{F} = q\bar{E}_0 - q\bar{E}_0 = \mathbf{0}$$

un dipolo in
un campo
elettrico
uniforme

non subisce alcuna azione meccanica
(forza)

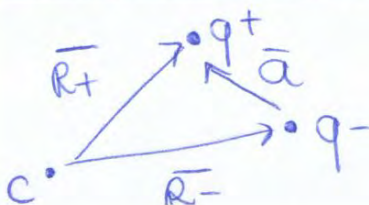
Resta fermo

Stabile con
 $\bar{p} \parallel \bar{E}$

QST momento riportato sempre
il dipolo alla posizione di
equilibrio stabile

* momento della forza

(Polo qualsiasi, xk il momento è
indipendente dal polo se $F=0$)



$$\begin{aligned} \bar{M}_C &= \bar{R}_+ \times \bar{F}_+ + \bar{R}_- \times \bar{F}_- = \bar{R}_+ \times (q_0 \bar{E}_0) + \bar{R}_- \times (-q_0 \bar{E}_0) \\ \bar{M}_C &= \bar{R}_+ \times q_0 \bar{E}_0 - \bar{R}_- \times q_0 \bar{E}_0 = q_0 (\bar{R}_+ - \bar{R}_-) \times \bar{E}_0 \\ \bar{M}_C &= q_0 \bar{a} \times \bar{E}_0 = \bar{p} \times \bar{E}_0 \end{aligned} \quad \boxed{M_C = \bar{p} \times \bar{E}_0}$$

LEGGE DI GAUSS

$$\phi_E(\bar{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0}$$

DEFINIZIONE DI FLUSSO : $\phi_E(\bar{E}) = \iint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma = \iiint_{T(\Sigma)} \nabla \cdot \bar{E} d\tau$
 \bar{E} è irrotazionale e $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ ($\frac{1}{r^3}$)

* FLUSSO DI 1 CARICA (DIMO)

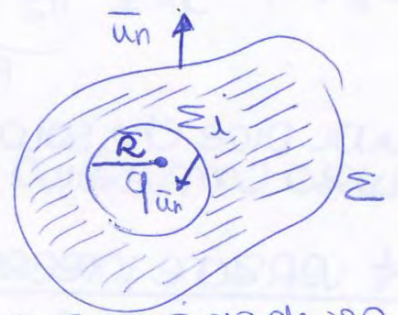
① CARICA FUORI DAL CORPO

$\forall p \in T(\Sigma), \bar{r}$ è definito e $\nabla \cdot \bar{E} = 0 \rightarrow \iiint_{T(\Sigma)} \nabla \cdot \bar{E} d\tau = 0 \rightarrow \iint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\tau = 0$
 \bar{E} è irrotazionale in tutti i punti \Rightarrow IL FLUSSO È NUO

② CARICA ALL'INTERNO DEL CORPO

$\exists p \in T(\Sigma), \text{ dove } \bar{r} = 0 \Rightarrow \bar{E}$ non è irrotazionale in tutti i punti

in Σ_i definito $\Rightarrow \nabla \cdot \bar{E} = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma, \Sigma_i} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma = 0$



Σ_i, Σ superficie chiusa, con 2 normali verso l'esterno

FACCIO UNA SUPERFICIE SFERICA ATTORNO ALLA CARICA

$$\iint_{\Sigma, \Sigma_i} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\iint_{\Sigma} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma + \iint_{\Sigma_i} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma_i = 0$$

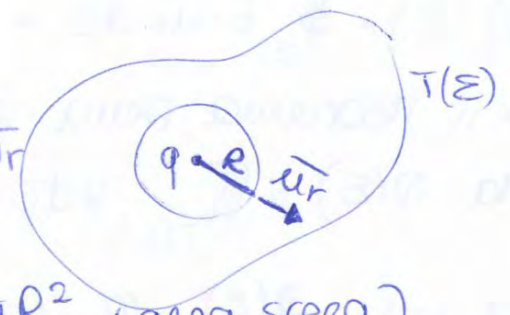
$$\phi_E(\bar{E}) + \iint_{\Sigma_i} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma_i = 0$$

$$\phi_E(\bar{E}) = - \iint_{\Sigma_i} \bar{E} \cdot \bar{u}_n d\Sigma_i \rightarrow \bar{E} = k \frac{q}{R^2} \bar{u}_r$$

SOSTITUISCO A \bar{E} (IL CAMPO ELETTRICO SU Σ_i)

$$\phi_E(\bar{E}) = - \iint_{\Sigma_i} (k \frac{q}{R^2} \bar{u}_r) \cdot \bar{u}_n d\Sigma_i$$

$$\phi_E(\bar{E}) = - \frac{kq}{R^2} \iint_{\Sigma_i} \bar{u}_r \cdot \bar{u}_n d\Sigma_i \quad \bar{u}_n = -\bar{u}_r$$



$$\phi_E(\bar{E}) = \frac{kq}{R^2} \iint_{\Sigma_i} d\Sigma_i \rightarrow \Sigma_i = 4\pi R^2 \text{ (area sfera)}$$

$$\phi_E(\bar{E}) = \frac{kq}{R^2} 4\pi R^2 \rightarrow \text{ma } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad k4\pi = \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \phi_E(\bar{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

esprimendola in coordinate cartesiane:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{OPERATORE NABLA}$$

operatore di LAPLACE

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ma in un regime statico

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

V non è un vettore!

$$\nabla V = \vec{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \implies E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ora deriviamo le componenti di \vec{E}

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\partial V}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial V}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\partial V}{\partial z} \right\} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

EQUAZIONE DI POISSON

operatore LAPLACIANO

quando la densità di carica è nulla ($\rho=0$) può essere

$$-\rho=0 \text{ ovunque (tutto lo spazio vuoto)} \implies \nabla^2 V = 0 \text{ (EQ. LAPLACE)} \implies V=0, V=\text{cost}$$

$$-\rho=0 \text{ da qualche parte} \implies \text{non è vero che } V=0!! \text{ (es) } V = k \frac{q}{r}$$

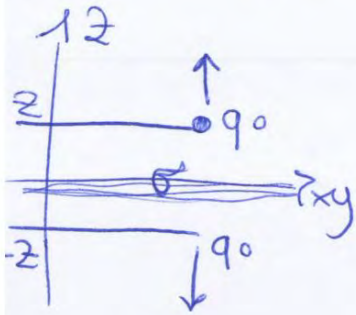
L'integrazione di $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ con determinate condizioni al contorno, permette di determinare univocamente il potenziale $V(x,y,z)$ e da qui il campo elettrico attraverso l'operazione di GRADIENTE

$$\text{es } V(x,y,z) = k \int \frac{\rho(x_i, y_i, z_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} d\tau'$$

esempio di soluzione (di solito sono funzioni armoniche)

CONSEGUENZE (Gauss)

* CAMPO DI UN PIANO INFINITO UNIFORMEMENTE CARICO



Tutte posizioni sono equivalenti non dipendono da x o y

× la simmetria, il campo è una funzione dispari
 $E(z) = -E(-z)$

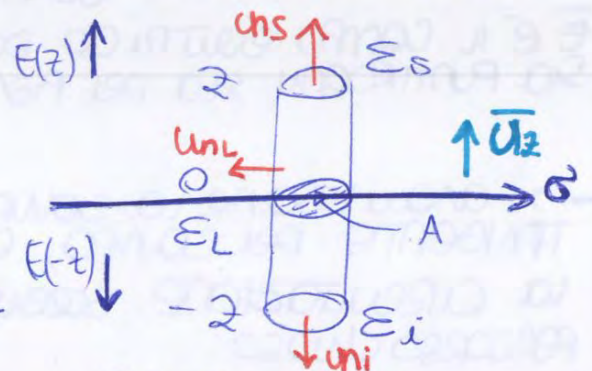
σ ovunque costante

Il campo \vec{E} × forza \perp al piano
 $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$

Calcolo il flusso attraverso una superficie chiusa: CILINDRO

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma =$$

$\Sigma = \Sigma_i + \Sigma_s + \Sigma_L$



$$Q(E) = A\sigma$$

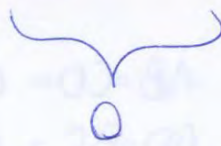
$$\Sigma_i = \Sigma_s = \Sigma_A = A$$

$$\iint_{\Sigma_i} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_i + \iint_{\Sigma_s} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_s + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma_L$$

$$\vec{u}_{n_i} = -\vec{u}_z$$

$$\vec{u}_{n_s} = \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_{n_L} \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \times \perp$$



× il versore \vec{u}_z

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_i} \vec{E} \cdot (-\vec{u}_z) d\Sigma_i + \iint_{\Sigma_s} \vec{E} \cdot \vec{u}_z d\Sigma_s + 0 =$$

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_i} -E(-z) \cdot \vec{u}_z d\Sigma_i + \iint_{\Sigma_s} E(z) \cdot \vec{u}_z d\Sigma_s$$

× la simmetria del campo

× il piano infinito uniformemente carico

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) = -E(-z) \cdot \iint_{\Sigma_i} d\Sigma_i + E(z) \cdot \iint_{\Sigma_s} d\Sigma_s =$$

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) = E(z) \cdot (A + A) = 2A E(z)$$

× il teorema di Gauss

$$\Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) = \frac{Q(E)}{\epsilon_0} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{A\sigma}{\epsilon_0} = 2A E(z) \rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Stesso valore che avevamo ottenuto × un disco con $R \rightarrow \infty$

$$\Delta Q_T (\bar{E}_i \cdot \bar{U}_T - \bar{E}_s \cdot \bar{U}_T) = 0$$

$$\bar{E}_i \cdot \bar{U}_T - \bar{E}_s \cdot \bar{U}_T = 0$$

$$E_{iT} - E_{sT} = 0$$

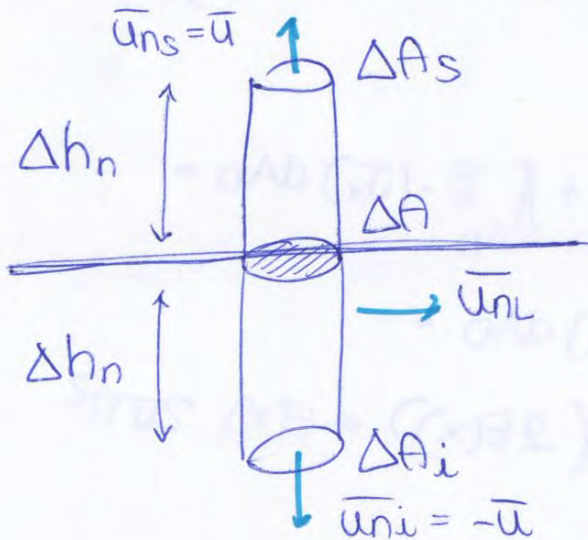


$$\boxed{E_{iT} = E_{sT}}$$

La componente tangente del campo sotto il piano è uguale alla componente tangente del campo sopra il piano

⇒ x conseguenza della conservatività del campo elettrico, la componente tangente del campo elettrostatico all'interfaccia è continua

- x analizzare la componente normale del campo, calcolo il flusso scegliendo una superficie chiusa



Ricordo che

$$Q(E) = \sigma \Delta A$$

per $\Delta A \rightarrow 0$, σ è costante!

$$E_L = 2\pi R J (2\Delta h_n)$$

per $\Delta h_n \rightarrow 0$, $E_L \rightarrow 0$,

$$\iint_{E_L} \bar{E} \cdot \bar{u}_{nl} dE_L \rightarrow 0$$

$$\Phi_E(\bar{E}) = \iint_{E = \Delta A_s + \Delta A_i + E_L} \bar{E} \cdot \bar{u}_n dE = \iint_{\Delta A_s} \bar{E}_s \cdot \bar{u}_{ns} dE_s + \iint_{\Delta A_i} \bar{E}_i \cdot \bar{u}_{ni} dE_i + \iint_{E_L} \bar{E} \cdot \bar{u}_{nl} dE_L$$

$$\lim_{\Delta h_n \rightarrow 0} \Phi_E(\bar{E}) = \iint_{\Delta A_s} \bar{E}_s \cdot (\bar{u}) dE_s + \iint_{\Delta A_i} \bar{E}_i \cdot (-\bar{u}) dE_i =$$

uso teorema media

$$= \bar{E}_s \cdot (\bar{u}) \Delta A_s + \bar{E}_i \cdot (-\bar{u}) \Delta A_i = \Delta A (\bar{E}_s \cdot \bar{u} - \bar{E}_i \cdot \bar{u})$$

x il teorema di Gauss

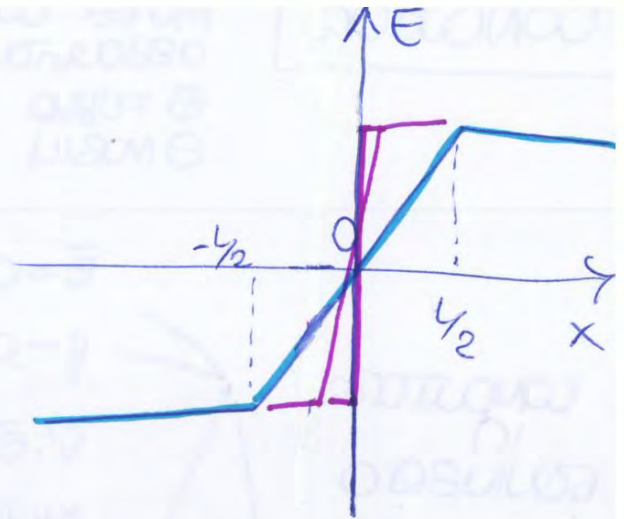
$$\Phi_E(\bar{E}) = \frac{Q(E)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} = \Delta A (\bar{E}_s \cdot \bar{u} - \bar{E}_i \cdot \bar{u})$$

$$\boxed{\bar{E}_s \cdot \bar{u}_n - \bar{E}_i \cdot \bar{u}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

La componente normale alla superficie del campo elettrico è discontinua il valore dell'interfaccia è $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

TOTALE:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho_0 L}{2\epsilon_0} & x > \frac{L}{2} \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ -\frac{\rho_0 L}{2\epsilon_0} & x < -\frac{L}{2} \end{cases}$$



Per $L \rightarrow 0$, la curva diventa discontinua: diventa il campo di un piano (non stretto)

con $\sigma = \rho_0 L$ che è la densità superficiale di carica e la carica confinata in uno strato microscopico!

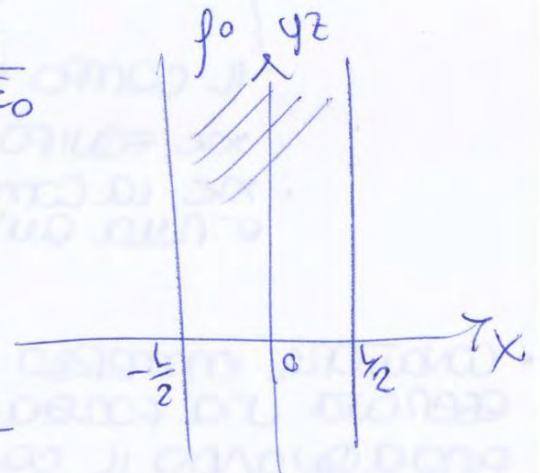
-X IL POTENZIALE

USO EQ. DI POISSON

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

MA IL POTENZIALE DIPENDE SOLO DA X (PER IL PIANO È ∞ SU YZ)

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



I vari potenziali devono soddisfare delle condizioni

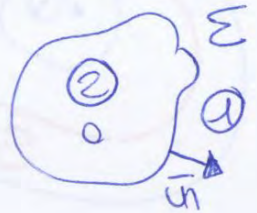
$$\begin{cases} \frac{d^2 V_s}{dx^2} = 0 & x < -\frac{L}{2} \\ \frac{d^2 V_c}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \frac{d^2 V_o}{dx^2} = 0 & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

In R_{ii} non deve essere discontinuo, ma continuo: le condizioni al contorno solo

$$\begin{cases} V_s\left(-\frac{L}{2}\right) = V_c\left(-\frac{L}{2}\right) \\ V_o\left(\frac{L}{2}\right) = V_c\left(\frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

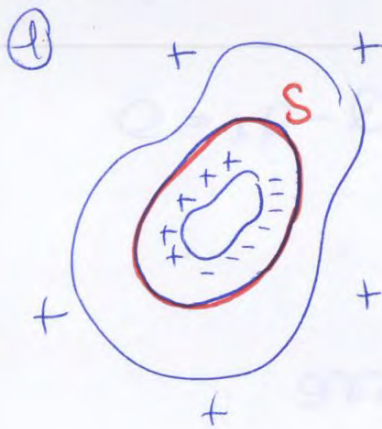
TEOREMA DI GAUSS

in condizioni di equilibrio statico,
 un conduttore ha il campo interno uguale a zero ②
 ma il campo in prossimità della superficie è suo \perp
 e vale $\vec{E}(E) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$ ①



La componente normale all'interfaccia
 è discontinua con una discontinuità
 di σ/ϵ_0

* Conduttore cavo
 situazioni possibili



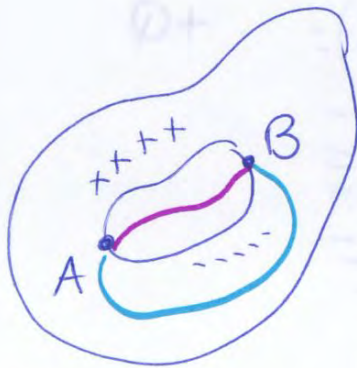
NO xk

$$\phi_S(E) = \frac{Q(S)}{\epsilon_0}$$

ma $\forall P \in S, \vec{E} = 0 \Rightarrow \phi_S(E) = 0$

$\Rightarrow Q(S) = 0$

Questo significa che le cariche
 positive devono essere uguali a quelle
 negative e ciò è impossibile



~ linea di campo nella cavità
 (Ycavità)
 ~ linea di campo nel conduttore
 (Yconduttore)

\vec{E} è conservativo quindi la circolazione

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_A^B \vec{E} \cdot ds + \oint^B \vec{E} \cdot ds = 0$$

$\gamma = \gamma_{cav} + \gamma_{cav}$ γ_{CONDUT} γ_{cav}

$= 0$ xk
 $\vec{E} = 0$

> 0 xk
 $\vec{E} > 0$

Sulle pareti
 della cavità non
 possono esserci
 cariche elettriche!

quindi assurdo!!

la situazione ① non si può verificare! in un conduttore,
 anche con una cavità, la carica si porta tutta sulla
 superficie esterna!

IL CAMPO E POTENZIALE DI UN CONDENSATORE SFERICO

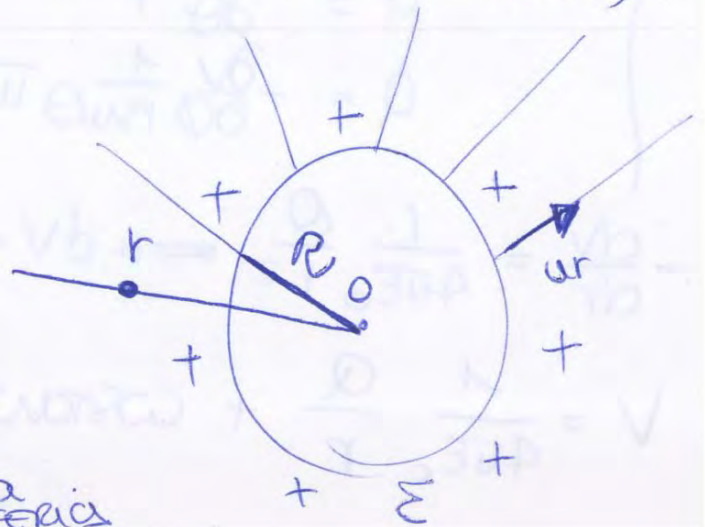
- CORPO metallico omogeneo
- BUIO sopra Q di carica (DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE)
- $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

Calcolo il flusso

$$\Phi_E(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma =$$

$$= \oint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r d\Sigma =$$

$$= \oint_{\Sigma} E(r) d\Sigma = E(r) \underbrace{4\pi r^2}_{\text{area di una sfera}} =$$



CONSIDERO 2 CASI:

① $r < R_0 \rightarrow Q(\Sigma) = 0$ x GAUSS:

$$\Phi_E(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow E(r) 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

perché il campo all'interno di un conduttore è sempre nullo

② $r > R_0 \rightarrow Q(\Sigma) = Q$ x GAUSS:

$$\Phi_E(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = E(r) 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E(r) = k \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \text{COME SE IL CAMPO FOSSE CONCENTRATO TUTTO NEL CENTRO DELLA SFERA}$$

(per $r = R_0$, $E(R_0) = k \frac{Q}{R_0^2}$)

Calcolo Potenziale

① $r < R_0 \rightarrow \vec{E} = 0 \rightarrow V = \text{cost!}$ ($\vec{E} = -\nabla V$)

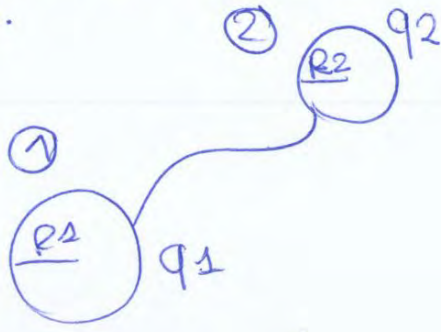
② $r > R_0 \rightarrow \vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$, $\vec{E} = -\nabla V$

USO COORDINATE POLARI

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r} \vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{u}_\varphi$$

EGUAGUO LE COMPONENTI

* CAMPO E POTENZIALE DI 2 WIRE DI SPESORI
 UNITI DA UN CONDUTTORE METALLICO FUORIFORME MOLTO UNICO
 EX 4.2.



① BUIO
 SI DISTRIBUISCE
 MA NON SU FIO XLE POTIZZO
 ACCOUSIMO

$$V = k \frac{q}{R_1 + R_2}$$

$$U = qV$$

CONSERVAZIONE CARICA

$$q = q_1 + q_2$$

SISTEMA EQUIPOTENZIALE

$$V_1 = k \frac{q_1}{R_1} = k \frac{q_2}{R_2} = V_2$$

$$\rightarrow q_1 = \frac{R_1}{R_2} q_2$$

$$q = q_2 \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \\ q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 = k \frac{q_1}{R_1^2} = k \frac{R_1}{R_1^2} \frac{q}{R_1 + R_2} = k \frac{q}{R_1(R_1 + R_2)} \\ E_2 = k \frac{q_2}{R_2^2} = k \frac{q}{R_2(R_1 + R_2)} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}} \right\} \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

↓ IL CAMPO E' TANTO PIU' GRANDE QUANTO PIU' I RAGGI
 SONO ACCOLI = EFFETTO DELLE RINTE



IL CAMPO E'
 MAX
 SULLA RINTA

TANTISSIME CARICHE
 SULLA RINTA, QST
 SCAPPANO E IL SISTEMA
 RUOTA: MULLINELLO
 ELETTRICO

ESPERIMENTO DEL
 MULLINELLO ELETTRICO



IL CAMPO ELETTRICO E' + INTENSO SUL RINTE SPIGOLOSE
 E CON RAGGIO ACCOUSIMO.

La differenza di potenziale tra i 2 conduttori è :

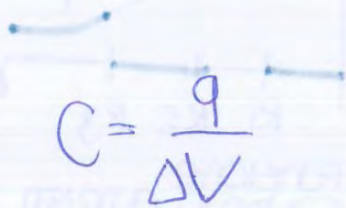
$$R_1 < r < R_2 \rightarrow V_2 = k \frac{Q}{r} + B$$

$$\left. \begin{aligned} V_b(R_1) &= k \frac{Q}{R_1} + B \\ V_b(R_2) &= k \frac{Q}{R_2} + B \end{aligned} \right\} \Delta V = V_2 - V_b = kQ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = kQ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

La differenza di potenziale è \propto alla carica, se i 2 conduttori sono messi in regime di induzione completa. \rightarrow (tutte le linee di forza che partono dal conduttore interno, terminano sul conduttore esterno)

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = kQ \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

* Capacità : rapporto tra carica e potenziale di un conduttore



$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

QST RAPPORTO NON CAMBIA AL VARIARE DELLA CARICA SUL CONDUTTORE

DIPENDE SOLO $\left\{ \begin{array}{l} \text{FORMA COND.} \\ \text{DIMENSIONI COND.} \\ \text{MEZZO CHE LO CIRCONDA} \end{array} \right.$

UNITÀ MISURA $[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{C}{V} = \text{FARAD}$ $\left(C = \frac{q}{\Delta V}, q = C\Delta V, \Delta V = \frac{q}{C} \right)$
 $\Delta V = V_1 - V_2$

Capacità di 2 conduttori sferici (condensatore sferico)

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \rightarrow \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{k} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = C$$

Capacità di un conduttore sferico isolante

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{1}{k} R$$

$\approx R_2 \rightarrow \infty$
 condensatore con un'armatura posta all'infinito

un sistema costituito da 2 conduttori tra i quali c'è induzione completa si chiama condensatore

(i 2 conduttori = armature del condensatore)

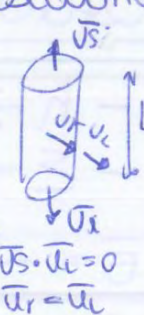
~~$R_2 - R_1 \ll R_1 \ll R_2$ (due m) il campo viene calcolato con GAUSS~~

~~SVILUPPO TAYLOR~~

~~$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{m}{R_1}$~~

~~$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d \ell}{m} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{m}$~~

il campo viene calcolato con GAUSS



$\Phi_E(E) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$

$\Phi_E(E) = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_5} + \int_{\Sigma_L}$

$= E(r) \cdot \Sigma_L = E(r) \cdot 2\pi r L$

$\vec{E} = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r} \vec{u}_r$

$\int \vec{E} \cdot d\vec{u} = 0$
 $\vec{u}_r = \vec{u}$

CONDENSATORE CILINDRICO

$r < R_1 : E=0, V=cost$

$R_1 < r < R_2 : E = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r} \vec{u}_r \rightarrow E = -\vec{\nabla} V$

$r > R_2 : E=0, V=cost$

$\vec{\nabla} V$ IN COORD. CILINDRICHE

$\frac{dV}{dr} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}$

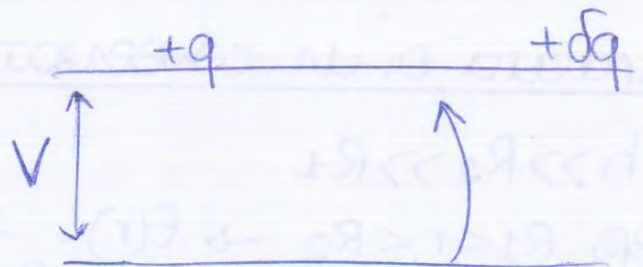
$\Delta V = (V(R_1) - V(R_2)) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$

$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda L}{\Delta V} = \frac{2\epsilon_0 \pi L}{\ln(\frac{R_2}{R_1})} \text{ e poi } \frac{C}{L}$

* ENERGIA PROPRIA DI UN CONDENSATORE CILINDRICO = LAVORO CHE BISOGLIA FARE DALL'ESTERNO X COSTRUIRE UN SISTEMA / ENERGIA CHE VIENE USATA CON LA DISTRUZIONE DEL SISTEMA = ENERGIA ELETTROSTATICA

calcolo energia spesa x costruire un condensatore cilindrico dati 2 conduttori

(prendo una carica e la porto sopra, poi un'altra...)



LAVORO INFATTESIMO x spostare dq

$dW_{est} = dU = dq \cdot V$ variazione di energia potenziale

$W_{est} = \int_0^Q dU = \int_0^Q dq v$

MA LA CAPACITA' $C = \frac{q}{\Delta V}$, $\Delta V = \frac{q}{C}$

$W_{est} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2C} Q^2$ ENERGIA MAGAZZINATA il lavoro che carico il condensatore

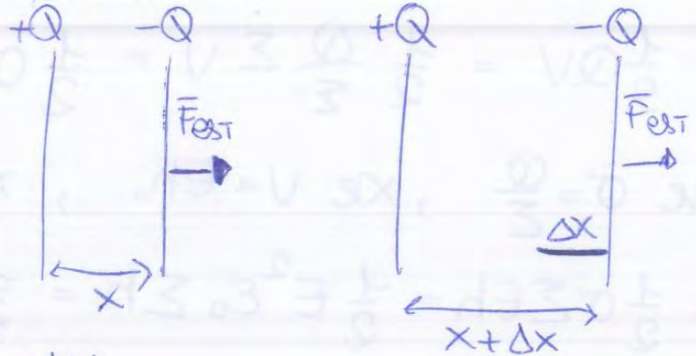
2) METODO (METODO DEI LAVORI VIRTUALI)

USO L'ENERGIA PROPRIA DEL SISTEMA

SUPPONGO DI CARICARE UN CONDENSATORE ISOLATO (senza perdite)

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ energia immagazzinata (propria)}$$

APPLICO \vec{F} dall'esterno x spostarlo di un Δx molto lentamente in modo che la superficie non acceleri



IL LAVORO FATTO:

$$\Delta W_{\text{est}} = F_{\text{est}} dx = -F_c dx = dU$$

LAVORO FATTO
FORZA ESTERNA APPLICATA
FORZA DAVANTI AL CAMPO
ENERGIA PROPRIA

$$-F_c dx = dU, \quad F_c = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d\left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}\right)}{dx} = -\frac{d\left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 \Sigma x}\right)}{dx}$$

capacità dei condensatori piani $C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{x}$

$$F_c = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 \Sigma} \frac{dx}{dx}$$

oppure $F_c = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 \Sigma} = -\frac{1}{2} \frac{(\sigma \Sigma)^2}{\epsilon_0 \Sigma} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \Sigma = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \sigma^2 \Sigma$

$$F_{\text{est}} = F_c = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \epsilon_0 \Sigma = \boxed{-\frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 \Sigma} \text{ UGUALE A PRIMA}$$

pressione elettrostatica $\bar{p} = \frac{F_c}{\Sigma} = -\frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 \bar{u}_x$

durante lo spostamento $\bar{E} = \text{cost} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \bar{u}_x$

$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times \text{distanza} \quad V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x + \Delta x)$

cioè AUMENTA!

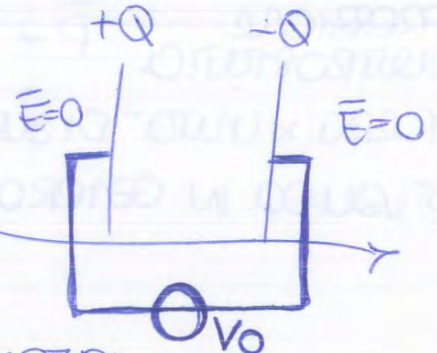
3) METODO

COLLEGO UN GENERATORE DI TENSIONE V_0 AL CONDENSATORE (poi sposto armature)

$$\bar{E} = \frac{V_0}{x} \quad \bar{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

cioè $\sigma = \frac{V_0}{x} \epsilon_0 = \Delta$

mentre sposto l'armatura la densità di carica delle armature cambia



$$\overline{\Delta F} = \Delta q \overline{E} (A - \Delta A) = \Delta q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \overline{un} = \left[\Delta A \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \overline{un} \right]$$

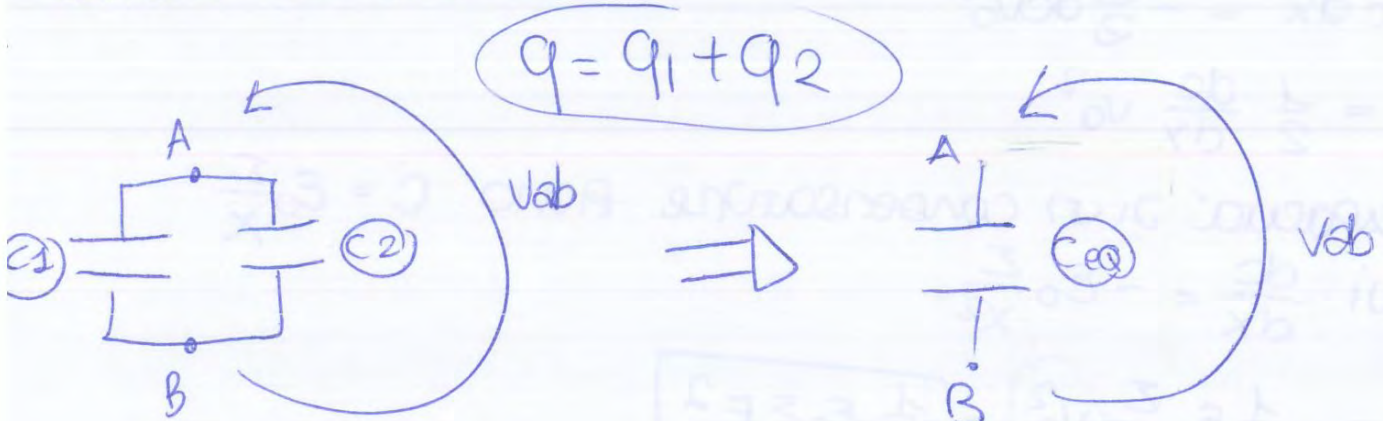
$$\Delta A = \Sigma$$

$$\frac{\overline{\Delta F}}{\Delta A} = \overline{p} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \overline{un}$$

pressione elettrostatica
 con area con la densità di energia elettrostatica sulla superficie del conduttore

★ Collegamento di Condensatori

col. in // se la ΔV è uguale agli estremi dei condensatori



$$q_1 = C_1 V_{ab}$$

$$q_2 = C_2 V_{ab}$$



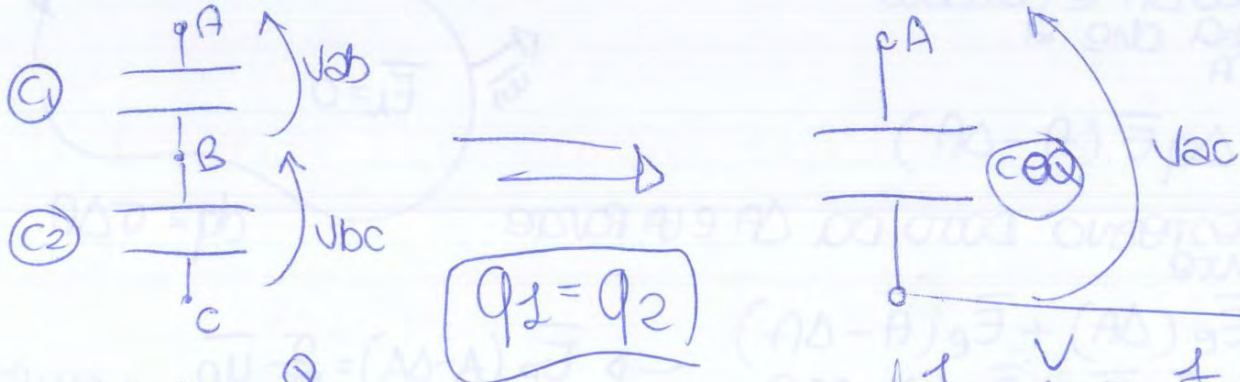
$$q = V(C_1 + C_2)$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

in un col. in //, la capacità eq. è la somma delle capacità

$$C_{eq} > C_2, C_1, \dots$$

- col. in serie se c'è 1 solo collegamento tra i condensatori



$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{C_1}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ac} = V_a - V_c = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

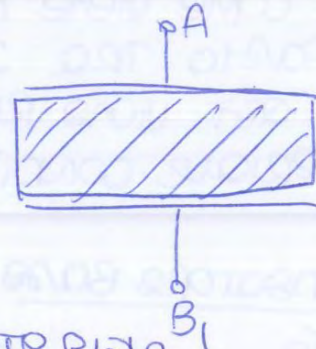
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

in un col. in serie la capacità eq. è la somma dei reciproci delle capacità

- CONDUTTORE CON UNA LASTRA ISOLANTE $\epsilon = k$

LA D.D.P. ASSUME IL VALORE MINIMO IN QUESTA SITUAZIONE.

LE ESPERIMENTE DI FARADAY HANNO MOSTRATO CHE IL RAPPORTO TRA V_0 (D.D.P. DEL CONDEN. VUOTO) E V_x (D.D.P. DEL CONDEN. ϵ RENO DIMAT. ISOLANTE) È SEMPRE > 1 E DIPENDE SOLO DAL MATERIALE



NO DIPENDE DA $\left\{ \begin{array}{l} \text{CARICA} \\ \text{FORMA} \\ \text{DIMENSIONI} \end{array} \right.$ DELLE ARMATURE
 S, h

$$V_x = \frac{V_0}{k}, k > 1 \Rightarrow k = \frac{V_0}{V_x} > 1$$

(k) È LA COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA (DEL DIELETTRICO) CARATTERISTICA DEL MEZZO IN CONSIDERAZIONE

LE SOSTANZE ISOLANTI CHE RIDUCONO LA D.D.P. E \vec{E} SI CHIAMANO SOSTANZE DIELETTRICHE O DIELETTRICI

IL CAMPO ALL'INTERNO È $(E_x h = V_x) (V_x = \frac{V_0}{k})$

$$E_x = \frac{V_x}{h} = \frac{V_0}{kh} = \frac{E_0}{k} < E_0 \quad \text{ANCHE IL CAMPO ELETTRICO DIMINUISCE}$$

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\epsilon_0}$$

2 FORMULE IN RELAZIONE

$$E_x = E_x \rightarrow \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 k} = \frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_p = \frac{k-1}{k} \sigma_0$$

SE SIAMO NEL VUOTO, $k=1$ E IMPUNCA $\sigma_p = 0$
(σ_p È LA CARICA INDOTTA)

LA CAPACITÀ È

$$C_0 = \frac{q_0}{V_0} \Rightarrow \text{DIVENTA } C = \frac{q_0}{V_x} = \frac{q_0}{\frac{V_0}{k}} = k \frac{q_0}{V_0} = [k C_0] > C_0$$

OVVERO È AUMENTATA! DELLO STESSO FATTORE k DI CUI È DIMINUITA LA D.D.P. IN ACCORDO COL FATTO CHE LA CARICA È RIMASTA COSTANTE!

CONDUTTORI → x INDUZIONE ELETTROSTATICA AVVIENE LA SEPARAZIONE DELLE CARICHE

ISOLANTI → DALL' ESTERNO x LO STROFINIO CON UN PANO AVVIENE LA SEPARAZIONE DELLE CARICHE

♥ se si applica un campo elettrico esterno avviene solo uno spostamento locale delle cariche che costituiscono gli atomi effetti piccoli, ma moltiplicati se moltiplicati x il numero di atomi

♥ Gli atomi sotto un campo elettrico esterno si orientano (si sposta la nuvola negativa) con un momento di dipolo atomico

$$\bar{p}_a$$

se n = densità atomica
 $d\tau$ = volume elementare
 dN = numero atomi in $d\tau$
 $dN = n d\tau$

$\Rightarrow d\bar{p} = dN \bar{p}_a =$ momento di dipolo
 $d\bar{p} = n d\tau \bar{p}_a$

$\Rightarrow \frac{d\bar{p}}{d\tau} = n \bar{p}_a = \bar{P}$

quindi x quindi
 }
 }
 \bar{P} = momento di dipolo
 \bar{p}_a = momento di dipolo atomico
 \underline{P} = polarizzazione, momento dipolo x unità di volume

\bar{P} e' la polarizzazione elettronica, cioè il momento di dipolo x unità di volume del sistema

IL FENOMENO DELLA POLARIZZAZIONE ELETTRONICA avviene quando un atomo acquista un momento di dipolo elettrico microscopico \bar{p}_a se sottoposto a un campo esterno \bar{E}

I mezzi LINEARI SONO SI STEMI IN CUI \bar{p}_a ESISTE se e solo se esiste \bar{E} , cioè

$$\bar{p}_a = \alpha \bar{E} \quad \text{in alcuni casi} \quad (\bar{p}_a = \epsilon_0 \alpha \bar{E})$$

di LA POLARIZZABILITÀ

I mezzi LINEARI ISOTROPI SONO QU IN CUI $\bar{p}_a \parallel \bar{E}$

- MEZZO

MA CON POLARIZZAZIONE NON UNIFORME

• IN OGNI Δ LA CARICA NON È PIÙ BILANCIATA, MA RIMANE UNA CARICA DI VOLUME (ρ)

• SE APPONGO P ABBIAMO SOLO LA COMPONENTE Z (VALE ANCHE X E ALTRE COMPONENTI)

• SUPERFICIE NEL PIANO XY SU DI CUI CI SONO CARICHE

$$dQ_P = P_z(z) dx dy \text{ POSITIVA}$$

$$dQ_N = -P_z(z+dz) dx dy \text{ NEGATIVA}$$

QUANTITÀ TOTALE È:

$$dQ = dQ_P + dQ_N = P_z(z) dx dy - P_z(z+dz) dx dy$$

SVILUPPO CON TAYLOR

$$dQ = dx dy \left[P_z(z) - P_z(z) - \frac{\partial P_z}{\partial z} dz \right] = - \frac{\partial P_z}{\partial z} dx dy dz =$$

$$dQ = - \frac{\partial P_z}{\partial z} d\tau$$

SE \vec{P} CAMBIA DA PUNTO A PUNTO (STECCA CALCOLO X LE SUE COMPONENTI)

$$dQ = - \left(\frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_x}{\partial x} \right) d\tau$$

$$dQ = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d\tau \quad \text{MA} \quad dQ = \rho_P d\tau$$

$$\rho_P = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

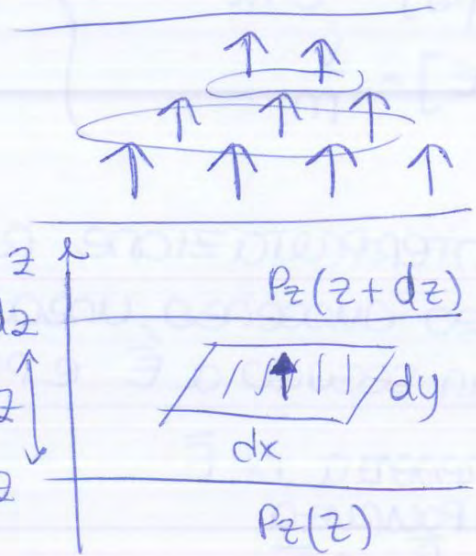
IN UN DIELETTRICO CON POLARIZZ. NON UNIFORME È UNA DENSITÀ SPAZIALE DI CARICHE DI POLARIZZ. EGUALE IN OGNI PUNTO ALL'OPPOSTO DELLA DIVERGENZA DI \vec{P}

ABBIAMO LE 2 EQUAZIONI FONDAMENTALI

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_P &= \vec{P} \cdot \vec{u}_n \\ \rho_P &= - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \end{aligned} \right.$$

DENSITÀ DI CARICHE DI POLARIZZ.

DENSITÀ SPAZIALE DI CARICHE DI POLARIZZ.



per cui

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \chi) = \epsilon_0 \vec{E} \kappa = \epsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

★ FENOMENO DELLA RIFRAZIONE DELLE LINEE DI CAMPO ELETTRICO

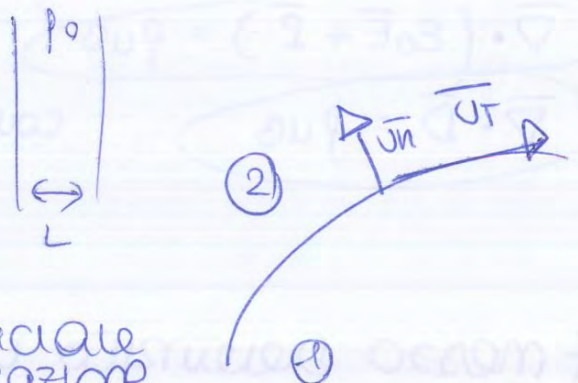
(DISCONTINUITÀ DEI CAMPI SULLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE TRA 2 DIELETRICI)

MEZZI
NEL VUOTO

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\tau = \frac{q(\epsilon)}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{T2} = E_{T1} \\ E_{N2} - E_{N1} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

ORA 2 DIELETRICI A CONTATTO!

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{us} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \sigma = \rho_0 L$$



⊕ CALCOLO
SUPPONGO NON CI SIA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA SULLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE

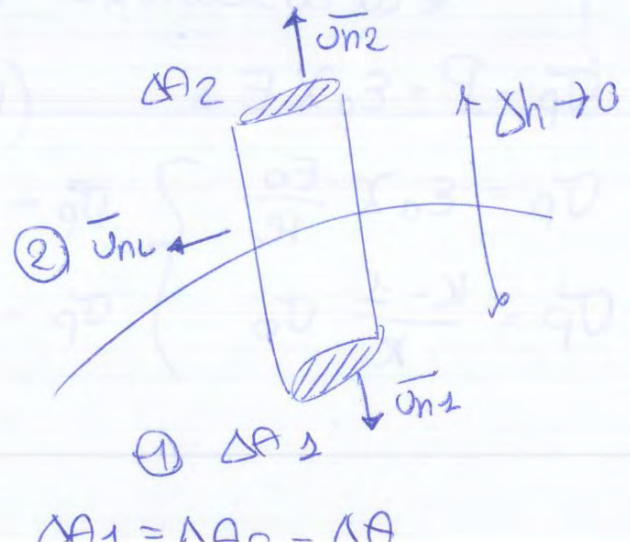
$$\rho_{us} < \rho_{max}$$

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
 $E_{T2} = E_{T1}$

come
veduto

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{us}$
SUP = CILINDRO

$$\iiint_{\tau_{out}} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\tau = \iiint_{\tau_{in}} \rho_{us} d\tau$$



$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iiint_{\tau_c} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\tau = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho_{us} \iiint_{\tau_c} \rho_{us} d\tau$$

volume molecolare/atomico

Tesi: $\alpha = 10^{-30} \text{ m}^3$

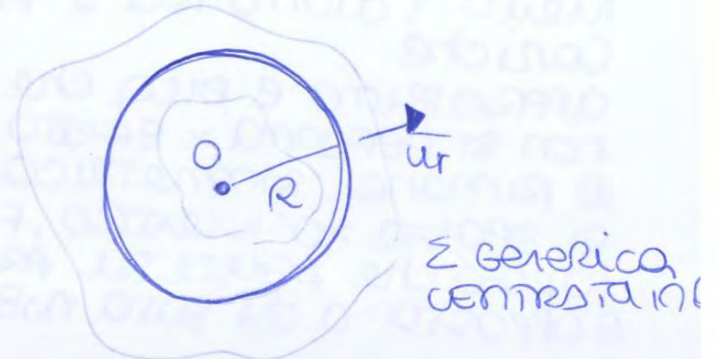
- Campo di una sfera omogenea di densità ρ costante

USO GAUSS
CARICO IL FUSCO

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

$$\forall P \in \Sigma, \vec{u}_n = \vec{u}_r$$

$$\forall P \in \Sigma, r = \text{cost}$$



$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma =$$

$$\oint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r d\Sigma = E(r) \oint_{\Sigma} d\Sigma = E(r) 4\pi r^2$$

2 casi:

• $r > R$

$$\rightarrow \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E(r) 4\pi r^2$$

$$\left(\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \right)$$

EGUAGUO

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = k \frac{Q}{r^2}$$

• $r < R$

$$\rightarrow \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = E(r) 4\pi r^2$$

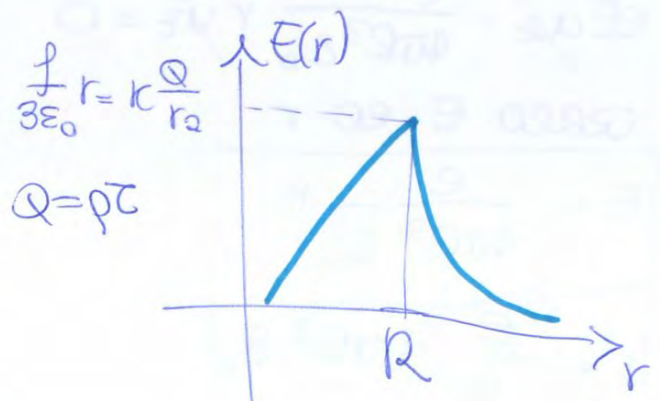
EGUAGUO

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} R \rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

GRAFICO



★ Dimostrare che l'atomo è un mezzo che si comporta come una molla



$$\left. \begin{aligned} F &= -kx \\ F_c &= qE \end{aligned} \right\} \text{in equilibrio}$$

$$\begin{aligned} F + F_c &= 0 \\ -kx + qE &= 0 \end{aligned}$$

FORZA ELASTICA
E FORZA DI CULOMB

$$x = \frac{qE}{k}$$

QST È LA DEFORMAZIONE

IL MOMENTO DI DIPOLLO È

$$p = qx = \frac{q^2 E}{k}$$

$$p_s = \epsilon_0 \alpha E$$

QUINDI $\epsilon_0 \alpha = \frac{q^2}{k}$ e $\alpha = \frac{q^2}{\epsilon_0 k}$

IL COMPORTAMENTO ASSIMILABILE A UNA MOLLA È PLAGIBILE NEI CAMPI ESTERNI APPLICATI SONO MOLTO PICCOLI RISPETTO AI CAMPI ELETTRICI ATOMICI

TUTTI CAMPI DEFORMANO LA SIMMETRIA DELLE PARTI CELLE

$$\frac{dQ}{dt} = \oint_{\Sigma} (\vec{j} \cdot \vec{n}) d\epsilon \quad \text{e} \quad \Sigma \perp \vec{j} \quad \text{e} \quad \epsilon \perp \vec{v}_d \quad \frac{dQ}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{\epsilon}, \quad \vec{j} = \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

\vec{j} = è la densità di corrente, cioè la corrente che attraversa l'unità di superficie \perp alla direzione del moto delle cariche

★ Legge di continuità

serve a esprimere in modo dinamico la conservazione della carica elettrica

- abbiamo una superficie chiusa Σ che delimita un volume $\tau(\Sigma)$
- dentro partecole distribuite con densità che dipende dalla posizione e dal tempo

$\rho = \rho(x, y, z, t)$ densità spaziale in carica

$$\rho = \frac{dQ}{d\tau}$$

- la carica contenuta da Σ al tempo t in un volume $d\tau$

$$Q_c = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho d\tau$$

Integro in funzione del tempo

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_c = \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho d\tau \right\}$$

$d\tau$ è fisso e esce dalla derivata, rimane la derivata parziale di ρ (se dipende anche dalla posizione)

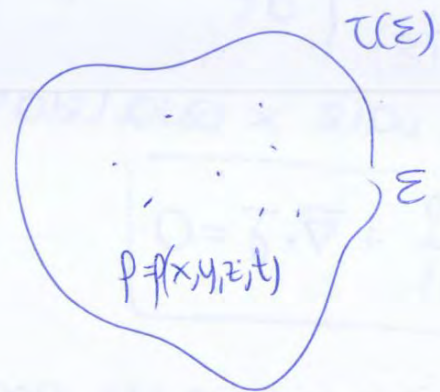
$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_c = \iiint_{\tau(\Sigma)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

- le cariche che escono da Σ sono in ecc:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_u = - \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} d\epsilon$$

× la conservazione della carica

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_c = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_u$$



$$-j_1 \Sigma_1 + j_2 \Sigma_2 = 0$$

$$-v_1 \Sigma_1 + v_2 \Sigma_2 = 0$$

$$v_2 \Sigma_2 = v_1 \Sigma_1$$

$$\boxed{V \Sigma = \text{cost}} \quad \text{in un regime STAZIONARIO}$$

in condizioni stazionarie l'intensità di corrente è la stessa attraverso ogni sezione del conduttore. Se la sezione varia, $j >$ dove sezione $<$ $v >$ dove sezione $<$

in un tubo di flusso abbiamo le linee di flusso che passano attraverso una linea chiusa (γ_1 e γ_2) una linea di flusso è una linea che ha x tangente in ogni suo punto un vettore // alla velocità in quel punto in un regime stazionario 2 linee di flusso non si incontrano mai \rightarrow non è possibile che una particella esca dal tubo

sempre x la conservazione della corrente elettrica in un regime stazionario abbiamo

$$KCL \quad i_1 = i_2 + i_3$$

proprio x il flusso attraverso Σ deve essere uguale a zero!



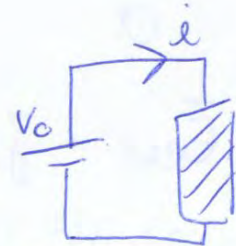
★ LEGGE DI OHM

ESPERIMENTO

corrente passa attraverso un oggetto collegato a una batteria che genera ΔV

$$V_0 = 0 \rightarrow i = 0$$

$$V_0 \neq 0 \rightarrow i \neq 0$$



OHM HA MISURATO TANTE i DIVERSE PARTENDO LA V_0 DIVERSI E HA TROVATO CHE $i \propto V_0$

$$i = k V_0$$

$$V_0 = \frac{1}{k} i$$

$$\boxed{V_0 = R i} \quad \text{LEGGE DI OHM (LEGGESperimentale)}$$

x i conduttori metallici

con $R = \frac{1}{k}$ Resistenza misurata in Ω OHM = $\frac{V}{A}$ ($\frac{1}{\Omega}$ = siemens) dipende solo dalla natura del conduttore e dalle sue dimensioni

★ Resistenza in un conduttore cilindrico
 ovvero Σ è costante

$$\bar{E} = \rho \bar{J}$$

$$\bar{E} \cdot d\bar{s} = \rho \bar{J} \cdot d\bar{s} \text{ ma } \bar{J} \parallel d\bar{s}$$

$$-dV = \rho J ds$$

ma $\bar{J} = \frac{i}{\Sigma}$ corrente x
 unità di
 superficie

$$-(V_b - V_a) = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma} ds$$

$$V_a - V_b = \rho \frac{i}{\Sigma} \int_A^B ds$$

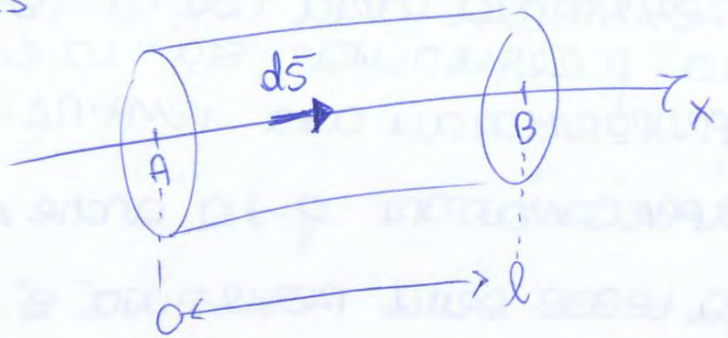
$\underbrace{\hspace{10em}}_l$

$$V_a - V_b = \rho \frac{i}{\Sigma} l \quad \text{ma } \Delta V = Ri$$

$$Ri = \rho \frac{l}{\Sigma} i$$

$$\boxed{R = \frac{\rho l}{\Sigma}}$$

Resistenza x un
 conduttore cilindrico



$\rho \frac{i}{\Sigma}$ tutte costanti!
 x è costante

★ Resistenza in un conduttore non cilindrico
 cioè Σ è una sezione del conduttore che
 varia da A a B

$$\bar{E} = \rho \bar{J} \quad \text{ma } \bar{J} \text{ varia x } \Sigma \text{ varia}$$

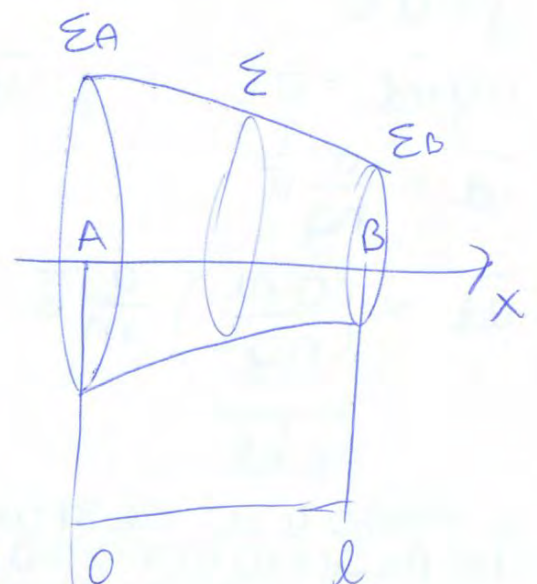
$$\bar{J} = \frac{i}{\Sigma}$$

$$V_a - V_b = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma} ds$$

$$V_a - V_b = i \int_A^B \rho \frac{ds}{\Sigma}$$

$$\boxed{R = \int_A^B \frac{\rho ds}{\Sigma}}$$

x un mezzo non
 omogeneo (rho cost)

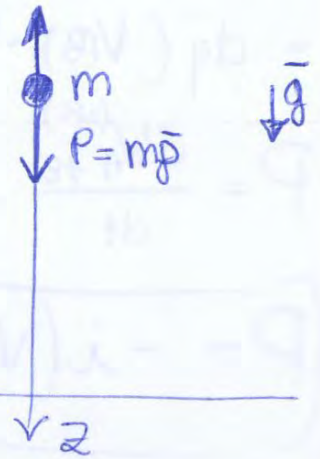


particella che cade in un mezzo e incontra una resistenza

$f_v =$ forza viscosa

$\eta =$ dipende da forma del corpo e viscosità del fluido in cui si muove

$$f_v = \eta v$$



$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = mg - \eta v \Leftrightarrow \eta v = m \frac{dv}{dt} - mg$$

se $\bar{v} = 0$, $\bar{F} = m\bar{g}$ forza netta

se $\bar{v} > 0$, \bar{F} netta diminuisce

se $\bar{F} = 0$, $m\bar{g} - \eta v = 0$

e abbiamo $v_{max} = v_{limite}!$

$$v_{lim} = \frac{mg}{\eta}$$

se c'è una dissipazione, l'energia non si conserva

$$E_T = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$$

se cerco l'energia dissipata x unità di tempo (potenza)

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}mv^2 - mgz \right\} = \frac{1}{2}m \cdot 2v \frac{dv}{dt} - mg \frac{dz}{dt} = mva - mgv$$

$$\frac{dE_T}{dt} = v \left\{ m \frac{dv}{dt} - mg \right\} = v(-\eta v) = -\eta v^2$$

$$\boxed{\frac{dE_T}{dt} = -\eta v^2}$$

Legge di dissipazione dell'energia

se $v = v_{lim}$

$$\frac{dE_T}{dt} = -\eta \left(\frac{mg}{\eta} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{dE_T}{dt} = -\frac{(mg)^2}{\eta}}$$

se faccio delle considerazioni energetiche

T. EN
CON $W_{A \rightarrow B} = E_K(B) - E_K(A)$

F. NV
CON $W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^{(c)} + W_{A \rightarrow B}^{(nc)}$

F. CON $W_{A \rightarrow B}^{(c)} = -\Delta E_P$

$W_{A \rightarrow B}^{(nc)} = \Delta E_{TOT}$
con le forze dissipative / non conservative l'energia totale non si conserva

ma se $v(a) = v(b)$, velocità costante

$$W_{A \rightarrow B}^{(nc)} = \Delta E_P = E_P(B) - E_P(A)$$

se $E_P(A) > E_P(B) \Rightarrow W_{A \rightarrow B}^{(nc)} < 0$

abbiamo una dissipazione dell'energia

28 ESAME 0.2 / 6.2

MOTO ELETTRONICO LIBERO IN UN MEZZO UNIFORME

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T$$

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
costante Boltzmann

$\langle v \rangle$: v. media

$\langle v \rangle^2$: v. quadratic media

SOSTITUISCO VALORI

$T = 300 K$

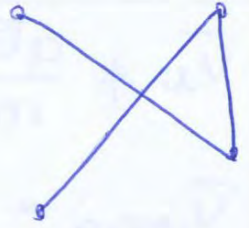
$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$$

$$\langle v \rangle = 10^5 m/s = v$$

velocità grande
MOTO COMPLET. DISORDINATO
CORRENTE ELETTRICA NULLA

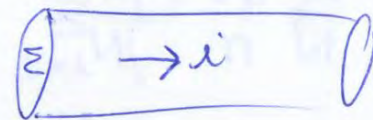


velocità deriva campo di rame

$$j = \frac{d}{\Sigma} = 2 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}$$

$$j = nqvd \quad (nq = p?)$$

$$v_d = \frac{j}{nq} \approx 1,5 \cdot 10^{-4} m/s$$



$$\Sigma = 4 mm^2$$

$$i = 8 A$$

$$q_{e^-} = 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$n = 8,5 \cdot 10^{28} cu$$

carica
elettrone
elettroni
su m³

↳ moto piccolo rispetto a v

in presenza di una forza esterna (campo elettrico), la velocità degli elettroni in un conduttore varia di pochissimo.

L'effetto della conduzione è di introdurre una perturbazione molto piccola della v di ogni e^- .
Ma quest'effetto collettivo ordinato dà origine alla corrente elettrica cioè un risultato macroscopico visibile.

★ modello classico della conduzione elettrica di DRUDE

con un campo elettr

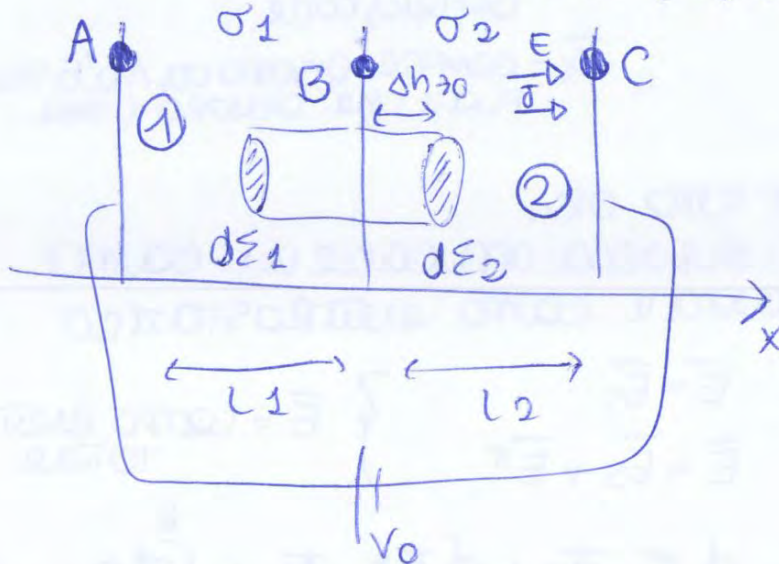
WOTO



CONSEGUENZE:

- \vec{E} SOLENOIDALE
- ρ DENSITÀ DI CARICA NETTA = 0 (EQ. POISSON)
- IL SISTEMA RIMANE LOCALMENTE NEUTRO IN UN REGIME STAZIONARIO (ANCHE SE CIRCOLA LA CORRENTE)

APPLICHIAMO IL C.S.S. A 2 CONDUTTORI A FORMA DI PISTRINA con σ DIVERSE (σ_1 e σ_2)



CONDIZIONE AI CONDUTTORI: $\Delta h \rightarrow 0$

- $\vec{j} \parallel x$, ma $\vec{j} \propto \vec{E}$ ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$) $\Rightarrow \vec{E} \parallel x \Rightarrow \vec{E} = E(x) \vec{u}_x$
 $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, ma $\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$ x wi
 $\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow$ la derivata è nulla $\Rightarrow \vec{E}$ è costante!

- IL CAMPO ELETTRICO È COSTANTE ($V_A = V_B$)
- IL CAMPO ELETTRICO È CONSERVATIVO E LA COMPONENTE TANGENTE ALL'INTERFACCIA È CONTINUA $E_{1T} = E_{2T}$

1) $\vec{j}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1$ ($\vec{j} = \frac{di}{dS}$) $di_1 = \vec{j}_1 dS_1 = \sigma_1 E_1 dS_1$
 2) $\vec{j}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2$ $di_2 = \vec{j}_2 dS_2 = \sigma_2 E_2 dS_2$

x IL REGIME STAZIONARIO $di_1 = di_2$
 $\sigma_1 E_1 dS_1 = \sigma_2 E_2 dS_2 \Leftrightarrow \boxed{\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2}$

- OPPURE CONSIDERO IL COLLEGAMENTO IN SERIE TRA I 2 CONDUTTORI

$V_A - V_B = i R_1 = \frac{1}{\sigma_1} \frac{L_1}{\Sigma} i$, $V_B - V_C = i R_2 = \frac{1}{\sigma_2} \frac{L_2}{\Sigma} i$, $E h = V$

$E_1 = \frac{V_A - V_B}{L_1} = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\Sigma} i$
 $E_2 = \frac{V_B - V_C}{L_2} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{\Sigma} i$ } $\left[\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right]$ $R = \frac{\rho L}{\Sigma} = \frac{L}{\sigma \Sigma}$

tabella di riferimento

$$r_i = V_b - V_a + f_{em}$$

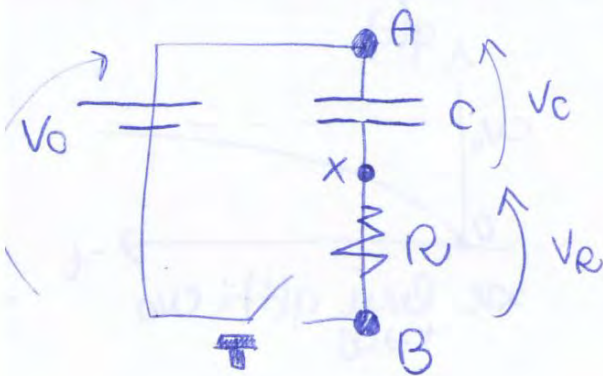
$$f_{em} = r_i + V_a - V_b$$

$$\boxed{f_{em} = r_i + R_i} \quad \text{legge di Ohm generalizzata}$$

f_{em} è la differenza di potenziale ai capi del generatore aperto

★ carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore

circuito in cui $i \neq \text{cost}$, ma varia nel tempo



- Generatore con D.D.P. = V_0

- Resistore R

- Condensatore $C = \frac{q}{V_C}$

- Condensatore:
 $C = \frac{q}{V_C}$, $U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

- Circuito ohmico:
 $V_R = R i$, $P = R i^2$

Inizialmente l'interruttore è aperto e non c'è corrente e il condensatore è scarico. \rightarrow Caricatore iniziale $q(0) = 0$

at $t=0$ il circuito viene chiuso, il condensatore si carica con $+q$ e $-q$ fino a un valore max (sua ampiezza) $(q(t=0) = 0)$

EQ. CIRCUITO

$$V_0 = (V_a - V_x) + (V_x - V_b) = V_C + V_R = \frac{q}{C} + R i = V_0$$

quando passa corrente

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e diventa} \quad V_0 = f_{em} = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} \quad \text{EQ. DIFF. DEL 1° ORDINE NON OMOGENEA}$$

soluzione $q(t) = q_{om}(t) + q_p(t)$ soluzione omogenea + soluzione particolare

$$* q_{om}(t) \Rightarrow \frac{q_{om}}{C} + R \frac{dq_{om}}{dt} = 0$$

$$\frac{dq_{om}}{dt} + \frac{q_{om}}{RC} = 0$$

ma $[RC] = \text{secondi!}$ è una costante di tempo intrinseca al problema

$$P = \int_0^{\infty} v_0 \frac{dq}{dt} + \int_0^{\infty} \frac{q}{2c} \left(\frac{dq}{dt} \right) dt$$

$$P = v_0 [q(\infty) - \underbrace{q(0)}_0] - \frac{q^2}{2c} (\infty) + \frac{q^2}{2c} (0)$$

$$q(0) = 0$$

$$q(\infty) = c v_0 !!$$

$$P = c v_0^2 - \frac{(c v_0)^2}{2c} = \boxed{\frac{1}{2} c v_0^2}$$

$P_{gen} : c v_0^2$
 $P_{oss} : \frac{1}{2} c v_0^2$
 $P_{imm} : \frac{1}{2} c v_0^2$

nella carica
 50% dell'energia
 fornita da gen
 va' in eu. imm
 e l'altra metà
 e' dissipata

Se $v_0 = 0$, il condensatore si scarica

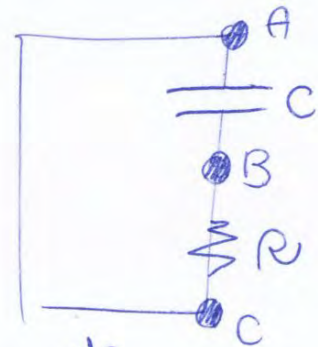
$$v_0 = 0 = \frac{q}{c} + R \frac{dq}{dt}$$

si trova $q(0) = q_0$ e $A = q_0 = q(0)$

x cui $q(t) = A e^{-\frac{t}{RC}} = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

e $i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{v_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt}$$



Faccio lo stesso calcolo x la potenza

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2c} \right) + R i^2$$

$$P = - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2c} \right) dt = \boxed{\frac{q_0^2}{2c}}$$

con $q(0) = q_0$
 con $q(\infty) = 0$

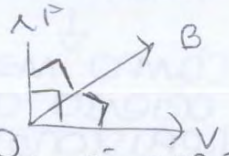
e quindi tutta la ^{o energia?} ~~energia~~ immagazzinata durante il processo di carica, viene dissipata in calore durante il procedimento di scarica.

- la corrente di carica e' uguale a quella descrittasi (in un caso avviene spontaneamente in un verso, nell'altro e' forzato ad avvenire in verso contrario)
- si chiamano circuiti RC

se F è di origine magnetica, sostituisco:

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{PRODOTTO MISTO} = 0$$

se $\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{v} \perp \vec{B}, \vec{F} \perp \vec{B}$



$$\frac{dE_k}{dt} = 0 \rightarrow \text{L'ENERGIA cinetica è costante}$$

quindi la forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella, essa subisce solo un'accelerazione centripeta, cui la sua velocità cambia in direzione ma non in modulo $\rightarrow |\vec{v}| = \text{cost}$

• unità di misura del campo magnetico

$$[B] = \frac{V \cdot s}{C \cdot m^2} = \left(\frac{V \cdot s}{m^2} \right) = \frac{Wb}{m^2} = T$$

Weber = V · s

Tesla = $\frac{Wb}{m^2}$

* FORZA MAGNETICA SU UN CONDOTTO RE PERCORSO DA CORRENTE

① regime stazionario, abbiamo 1 filo percorso da corrente, campo magnetico

- Cerco la forza che si esercita sul conduttore

n = numero portatori di carica q elettroni liberi x unità di volume

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad \text{senza di corrente}$$

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{F. campo magn. su ogni portatore}$$

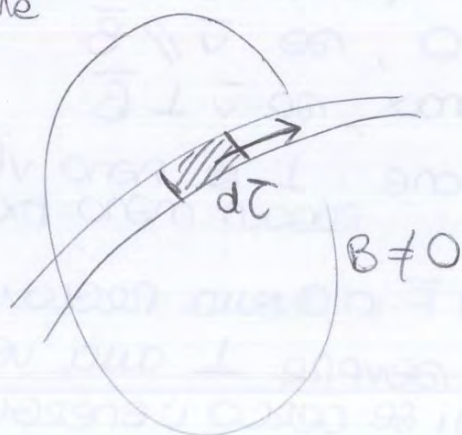
Forza esercitata sul conduttore x unità di volume

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = n\vec{f} = nq\vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} d\tau$$

$$\vec{F} = \iiint_{\tau} \vec{j} \times \vec{B} d\tau$$

seconda formula di LAPLACE



vale x qualsiasi forma del conduttore!
 in particolare se il conduttore è percorso da corrente i ed è **AUFORME** e **CILINDRO**

FORZA SUL MATTO - $F = I \omega \times B$

$$\vec{F} = i (2R \cdot \vec{u}_x) \times (B \vec{u}_y) = i 2RB (\vec{u}_x \times \vec{u}_y) = 2iRB \vec{u}_z$$

(Somma di tutte forze piccole // ma loro e applicate in 0 ungo z)

• FORZA SUL MATTO n

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

$$d\vec{s} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$$

$$\begin{cases} dx = -R \sin \theta d\theta \\ dy = R \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$d\vec{s} = R (-\vec{u}_x \sin \theta + \vec{u}_y \cos \theta) d\theta$$

$$d\vec{F}_n = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F}_n = i R [(-\vec{u}_x \sin \theta + \vec{u}_y \cos \theta) d\theta] \times B \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_y \times \vec{u}_y = 0 \text{ } \times \parallel$$

$$d\vec{F}_n = -iRB d\theta \sin \theta \vec{u}_z \text{ integrale}$$

$$\vec{F}_n = +iRB \vec{u}_z \int_0^\pi -\sin \theta d\theta = iRB \vec{u}_z [\cos \theta]_0^\pi = -2iRB \vec{u}_z$$

\vec{F}_n è uguale e opposta a \vec{F} .

$\vec{F}_n + \vec{F} = 0$ la forza complessiva è nulla

Ma le 2 forze sono applicate in un Pnti diversi

★ CALCOLO IL MOMENTO

(questo momento è wr. dal polo xk $F_T = 0$, quindi scelgo il polo che voglio)

polo O = (0,0)

$$d\vec{F}_- = i d\vec{s} \times \vec{B} \quad \begin{cases} d\vec{s} = dx \vec{u}_x \\ \vec{B} = B \vec{u}_y \end{cases}$$

$$d\vec{F}_- = i (dx \vec{u}_x) \times (B \vec{u}_y) = i dx B \vec{u}_z$$

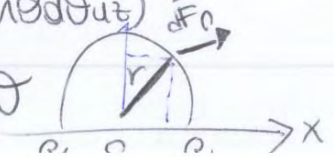
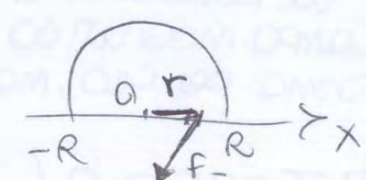
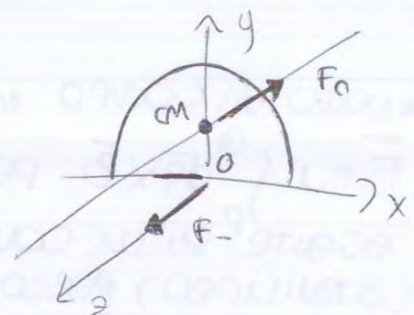
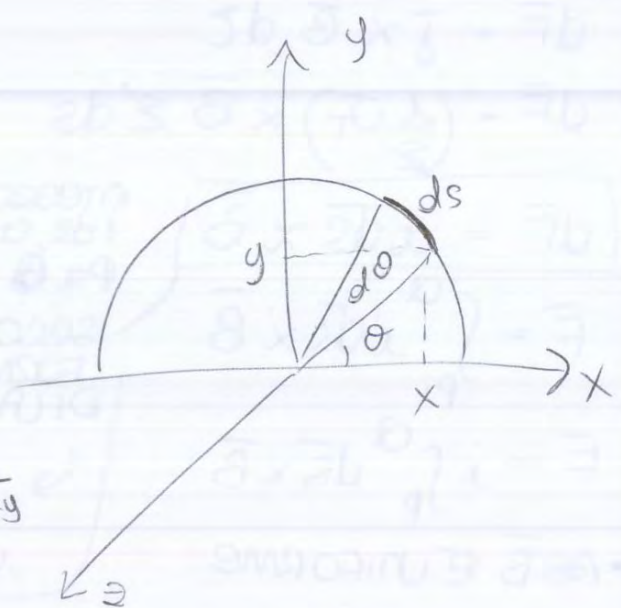
$$dM_{0,-} = \vec{r} \times d\vec{F}_- = (x \vec{u}_x) \times (i dx B \vec{u}_z) = -i x dx B \vec{u}_y$$

$$M_{0,-} = \int_{-R}^R -i x dx B \vec{u}_y = -iB \vec{u}_y \int_{-R}^R x dx = 0$$

la parte lineare non da momento rispetto al polo o.

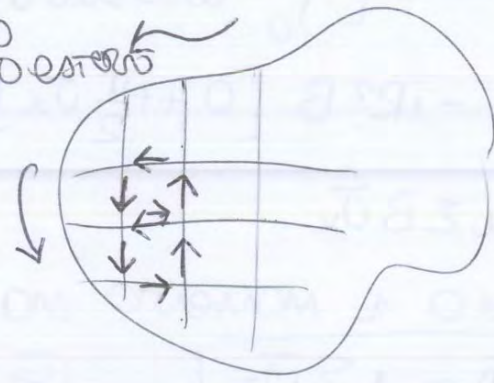
$$dM_{0,n} = \vec{r} \times d\vec{F}_n = (R)(\vec{u}_x \cos \theta + \vec{u}_y \sin \theta) \times (-iRB \sin \theta d\theta \vec{u}_z) \quad d\vec{F}_n$$

$$dM_{0,n} = -iR^2 B \int \cos \theta \sin \theta (\vec{u}_x \times \vec{u}_z) + \sin^2 \theta (\vec{u}_y \times \vec{u}_z) d\theta$$



UNA CARICA ELETTRICA CONSIDERATA IN UN CIRCUITO CHIUso, DI FORMA GENERALE

- viene rastremato
- i lati contigui sono percorsi da correnti opposte, si annullano rimanendo solo gli effetti sul circuito esterno
- in ogni punto nessuno il momento elementare è



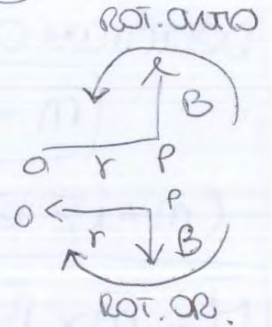
$$d\vec{M} = d\vec{m} \times \vec{B} = (i d\Sigma \vec{u}_n) \times \vec{B}$$

integro

$$\vec{M}_{TOT} = \iint_{\Sigma} d\vec{M} = \iint_{\Sigma} i d\Sigma \vec{u}_n \times \vec{B} =$$

$$\vec{M}_{TOT} = i \vec{u}_n \times \vec{B} \int_{\Sigma} d\Sigma$$

$$\vec{M}_{TOT} = i \Sigma \vec{u}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{se } \vec{m} = i \Sigma \vec{u}_n$$



ROT. AUTO
 $u_{max} \rightarrow \theta = \pi$
 $u_{min} \rightarrow \theta = 0$

x i dipoli elettrica

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

x i dipoli magnetica

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M} = 0 \text{ se } \vec{m} \parallel \vec{B} \quad \theta = 0 \text{ EQ. STABILE}$$

$$\theta = \pi \text{ EQ. INSTABILE}$$

\vec{M} orienta \vec{m} su \vec{B} tende a farli coincidere imponendo una rotazione a antioraria

in particolare se prendiamo un asse di rotazione // a \vec{M}

$$\frac{dL_z}{dt} = \vec{M}_z$$

equazione della dinamica x un corpo che ruota attorno un asse // z

$$L_z = I\omega = I \frac{d\theta}{dt}$$

sostituisco

I = momento d'inerzia del circuito rispetto a quest asse

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(I \frac{d\theta}{dt} \right) = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \vec{M}_z = -mB \sin\theta$$

il momento richiama il circuito verso la posizione d'equilibrio

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mB}{I} \sin\theta = 0 \quad \text{ma } \theta \rightarrow 0 \quad \sin\theta \approx \theta$$

EQ. del moto di un mini-circuito in un campo magnetico = EQ. moto di un oscillatore armonico

$$\omega_0^2 = \frac{mB}{I} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{I}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{iB}}$$

la soluzione è $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$

quest comportamento oscillatorio è quello di un dipolo elettrico in un campo elettrico.

TABELLINA RIASSUNTIVA DELLE PROPRIETÀ DEI DIPOLI

	\vec{p} $\ominus \xrightarrow{a} \oplus$	\vec{m} Σ \vec{u}_n
MOMENTO DIPOLO MOM. MECCANICO	$\vec{p} = q\vec{a}$ $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{m} = i \Sigma \vec{u}_n$ $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
E. POTENZIALE	$U_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
PERIODO PRECISE OSCILLAZ.	$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pE}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB}}$
FORZA IN UN CAMPO NON UNIF. // AL MOM. DI DIPOLO	$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x}$	$F_x = m \frac{\partial B}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x}$ $\vec{F} = -\nabla U$

★ EFFETTO HALL

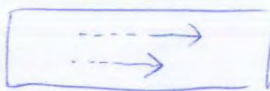
CONDUTTORE A FORMA DI NASTRO SOTTILE (PIASTRINA)

SEZIONE $\Sigma = ab$

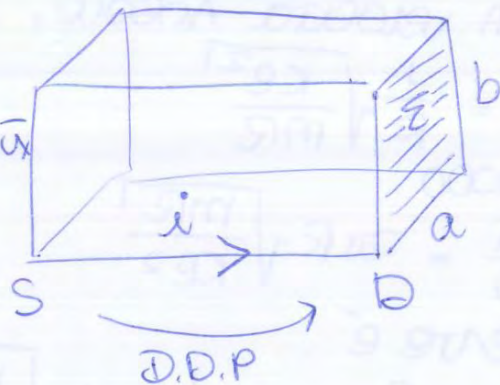
PERCORSO DA i LUNGO x ($i \parallel \vec{u}_x$)

e $\vec{j} = nq\vec{v}_d \parallel \vec{u}_x$

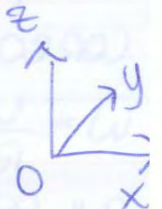
SE $\vec{B} = 0$, PORTATORI SI MUOVONO CON $\vec{v} \parallel \vec{u}_x$



v_d AL CAMPO
CAMPO INTERNO
CONSTANTE, VELOCITÀ



SIST. RIF.

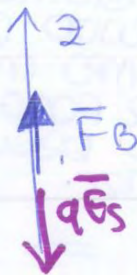
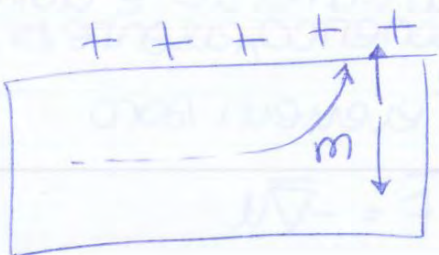


ORA $\vec{B} = B\vec{u}_z$

ADORA SU CASCUN PORTATORE SEVCE LA FORZA DI LORENTZ

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v\vec{u}_x) \times (B\vec{u}_z) = qvB\vec{u}_y$

DIRETTA LUNGO L'ASSE z ! quindi la traiettoria dei portatori viene devinata, con un conseguente accumulo della carica \oplus sulla faccia superiore e, x induzione, un accumulo di carica \ominus nella faccia inferiore



x QUESTE 2 CARICHE NASCE UN CAMPO ELETTRICO CHE SI INTENSIFICA AL CUI ACCUMULO DI CARICHE. LA FORZA SUE PARTICELLE NON E' PIU' SOLO QUELLA DI LORENTZ, MA

$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_B + \vec{F}_c = \vec{F}_B + q\vec{E}_s$

QUINDI QUANDO MISURIAMO IL POTENZIALE, ESSO È CAMBIATO DI SEGNO, MA ORA IL POT. FACCE A & P È < POT. FACCE A INF.

COSÌ MISURANDO ΔV SO SUBITO SE SI STANNO MOVENDO PORTATORI POSITIVI O NEGATIVI

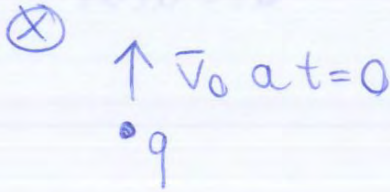
$$\Delta V < 0, q < 0$$

$$\Delta V > 0, q > 0$$

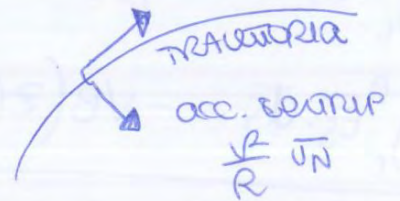
★ MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME

con \vec{v} iniziale = v_0 , $\vec{v} \perp \vec{B}$, $\vec{B} \perp$ al foglio

$$\text{acc tang} = \frac{dv}{dt} \hat{t}$$



in coordinate intrinseche



Calco $v(t)$ in un istante generico, usando Newton

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{ forza lorentz}$$

$$m \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{R} \hat{u}_n \right) = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$m \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{R} \hat{u}_n \right) = q v B \text{ sen} \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ sic} \vec{B} \perp \vec{v}$$

$$\text{sen} \theta = \text{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$m \left(\frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{R} \hat{u}_n \right) = q v B \hat{u}_n$$

Equazione componenti

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} \hat{t} = 0 & \rightarrow v_{\text{tang}} = \omega t = v_0 \\ \frac{v^2}{R} \hat{u}_n = q v B \hat{u}_n & \rightarrow m \frac{v_0}{R} = q B \end{cases}$$

sic \hat{t} è la derivata e nulla

$$R = \frac{m v_0}{q B}$$

è il raggio di curvatura, è costante sic B, q, m si cost

la forza è solo centripeta, v non cambia in modulo

$R = \omega t \rightarrow$ la traiettoria è un arco di cerchio o cerchio intero

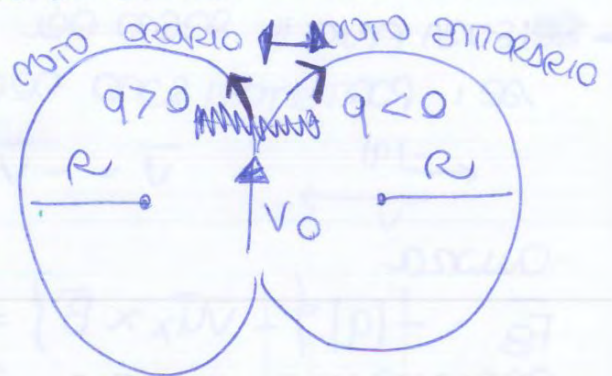
$$v = \frac{q B R}{m} = \omega R$$

Per la velocità è grande, per il raggio è grande

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q B}{m}$$

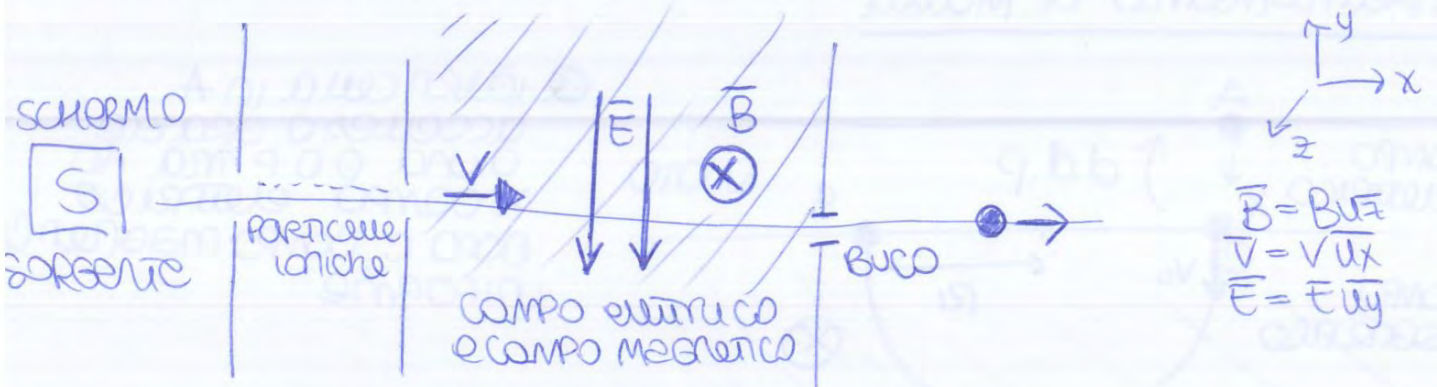
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{q B}$$

sempre // a \vec{B}



Selezione di velocità x ottenere un

fasco di ioni diversi con la stessa velocità!
 nella stessa regione si fanno agire \vec{E} e \vec{B} uniformi e \perp tra loro



la forza totale nella regione con \vec{E} e \vec{B} è

$$\vec{F}_{TOT} = -q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = F_L - F_E$$

se $\vec{F}_{TOT} = 0$, allora la forza sullo ione è nulla (sia + che -)
 quindi la particella ha una traiettoria retta e centra il buco
 le 2 deflessioni dovute a \vec{E} e \vec{B} si bilanciano

la condizione è verificata solo x quindi la cui
 velocità è

$$|\vec{v}| = \frac{E}{B}$$

$$\text{se } F_{TOT} = 0, -qE + q\vec{v} \times \vec{B} = 0, -E u_y + (v u_x) \times (B u_z) = 0$$

$$-E u_y + v B u_x = 0 \rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}}$$

Ciclotrone

è un acceleratore di particelle, grazie a una ΔV variabile

$t=0$: particella ferma
 viene accelerata da AAC x e ddp.
 ($A > C$) e ottiene una v_1

$$qV(A) = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV(C) \quad \text{cons. energia}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2q}{m}(V(A)-V(C))} = \sqrt{\frac{2q}{m}\Delta V} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Raggio} \\ \times \text{campo} \\ \text{magn.} \end{array} \right\}$$

quando la particella è in 2,
 l'operatore inverte i poli e così
 cambia il potenziale, passa da 2 a 3
 e in 3 ha una velocità v_3

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV(A) = \frac{1}{2}mv_3^2 + qV(C)$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + q\Delta V = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mv_1^2$$

