



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1216

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Fisica II + Eserc.

Prof. Barbero

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

BARBERO

FISICA II

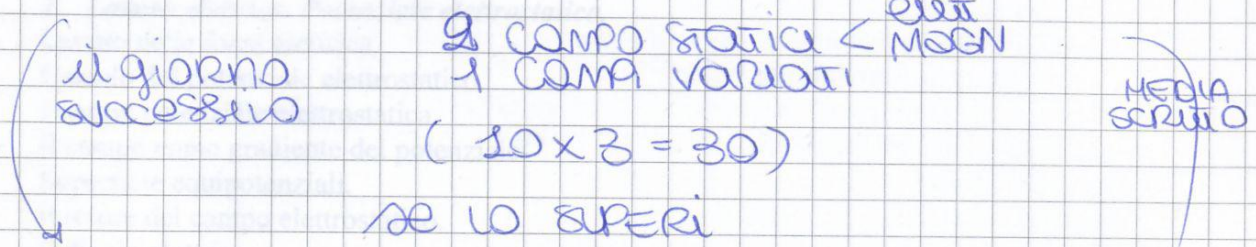
* mail : giovanni.barbero@polito.it

* ORARIO :

Mart.	11,30 - 13,00) TEORIA
Giovedì	8,30 - 10,00	
Venerdì	13,00 - 14,30	

* ESAME :

1 PARTE - SCRITTO 3 ESERCIZI :



2 PARTE - SCRITTO 3 DOMANDE TEORIA :

se lo superi
Fatta la MEDIA

3 PARTE - ORALE FACOLTATIVO < prof io

* LIBRI :

Elettromagnetismo e onde

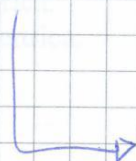
Mazzoldi, "Fisica II"
Nigro
Voti

Edises

"Elementi di Fisica
Elettromagnetismo / onde"
anche x gli esercizi

* MATERIALE IN RETE

* consulenza -
martedì matt



LIBRO con ESERCIZI
x ELEMENTI

A.C. Sparavigna

"ESERCIZI DI Elettromagn"
Esculapio Bologna

- 7 Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore.
- 8 Corrente di spostamento.
- 9 Leggi di Kirchoff per le reti elettriche (cenni).

Campo magnetico. Forza magnetica.

- 1 Interazione magnetica. Campo magnetico.
- 2 Eletticità e magnetismo
- 3 Forza magnetica su di una carica in moto.
- 4 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente..
- 5 Momenti meccanici su circuiti piani.
- 6 Effetto Hall.
- 7 Moto di una particella carica in un campo magnetico..
- 8 Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme.

Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampere. Proprietà magnetiche della materia.

- 1 Campo magnetico prodotto da una corrente.
- 2 Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari.
- 3 Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da corrente.
- 4 Legge di Ampere.
- 5 Proprietà magnetiche della materia. Permeabilità e suscettività magnetica.
- 6 Meccanismi di magnetizzazione e correnti amperiane.
- 7 Legge di Gauss per il campo magnetico.
- 8 Equazioni generali della magnetostatica in presenza di mezzi magnetizzati.

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo.

- 1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica.
- 2 Origine del campo elettrico indotto e della forza elettromotrice indotta.
- 3 Applicazioni della legge di Faraday.
- 4 Autoinduzione.
- 5 Energia magnetica.
- 6 Induzione mutua.
- 7 Legge di Ampere-Maxwell.
- 8 Le equazioni di Maxwell.
- 9 Le equazioni di Maxwell in forma differenziale.

Oscillazioni elettriche.

- 1 Oscillazioni elettriche.
- 2 Circuiti in corrente alternata.
- 3 Il circuito RLC in serie. Risonanza.
- 4 Potenza nei circuiti a corrente alternata.
- 5 Equazioni del trasformatore.

9 ottobre 2012

FORZE & CAMPI CONSERVATIVI

- forza = ente che agendo su una particella, genera una accelerazione
 ↓
 INTERAZIONE

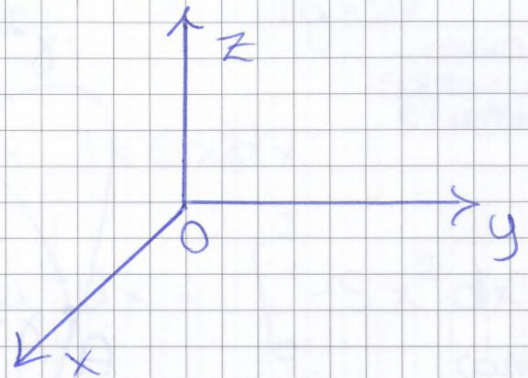


DIPENDE DALLA POSIZIONE OCCUPATA DA UNA PARTICELLA

→ $\vec{F}(\vec{r})$ RISPETTO AL SISTEMA SCELTO (CARTESIANO, ECC...)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$



PROBLEMA RICAMBIATO A RISOLVERE LE 3 EQUAZIONI

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ F_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ F_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\}$$

DEVO CONOSCERE

- POSIZIONI:

$$x(0), y(0), z(0)$$

- VELOCITÀ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$$

ENTRAMBE A $t=0$

- lavoro = integrale della forza x lo spostamento

$$\vec{F} = (y^2 - x^2) \vec{u}_x + (3xy) \vec{u}_y \quad \text{FORZA 3DIMENSIONALE}$$

$$d\vec{s} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y \quad \text{SISTEMA CARTESIANO}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = (y^2 - x^2) dx + (3xy) dy$$

→ GRANDEZZA CHIAMATA CAMPO

$$W(\gamma)_{A \rightarrow B} = \int_A^B \left\{ (y^2 - x^2) dx + 3xy dy \right\}_\gamma$$

$$W(\gamma_1)_{A \rightarrow B} = \int_{A=(0,0)}^{B=(2,4)} \left\{ (y^2 - x^2) dx + 3xy dy \right\}_{y=2x}$$

variaz
cambio lay
e cambio d.

$$= \int_0^2 (4x^2 - x^2) dx + 3x \cdot 2x \cdot 2 dx =$$

$$- \int_0^2 3x^2 dx + 12x^2 dx = \int_0^2 15x^2 dx$$

$$W(\gamma_1)_{A \rightarrow B} = \left[\frac{1}{3} 15x^3 \right]_0^2 = 5 \cdot 8 = 40$$

V campo elettrico
J forza
campo magnetico

$$W(\gamma_2)_{A \rightarrow B} = \int_{A=(0,0)}^{B=(2,4)} \left\{ (y^2 - x^2) dx + 3xy dy \right\}_{y=x^2}$$

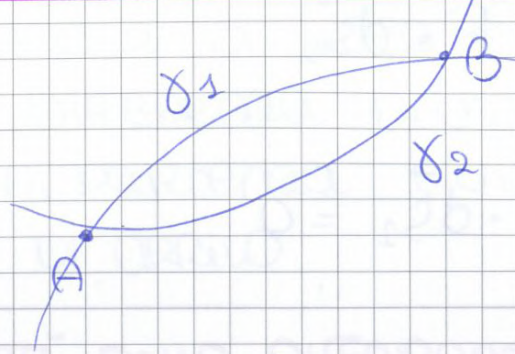
$$= \int_0^2 \left\{ (x^4 - x^2) dx + 3x \cdot x^2 \cdot 2x \cdot dx \right\} =$$

$$= \int_0^2 (x^4 - x^2) dx + 6x^4 dx =$$

$$= \int_0^2 (7x^4 - x^2) dx = \left[\frac{7}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2$$

$$W(\gamma_2)_{A \rightarrow B} = \frac{7 \cdot 32}{5} - \frac{8}{3}$$

Dati due percorsi diversi da A → B



si possono verificare 2 situazioni:

$$\textcircled{1} \quad W_{A \rightarrow B}(\gamma^1) = W_{A \rightarrow B}(\gamma^2) \quad \text{per ogni } \gamma$$

W non dipende dal percorso! (da γ)
 questi sono campi **conservativi**

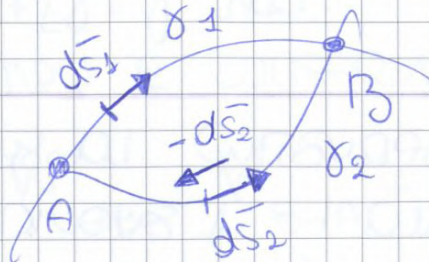
$$\textcircled{2} \quad W_{A \rightarrow B}(\gamma^1) \neq W_{A \rightarrow B}(\gamma^2)$$

W dipende dal percorso!
 il campo **non è conservativo**

Proprietà della Circolazione

(il campo elettrostatico è un campo conservativo)

Dato un campo conservativo → ipotesi:



$$W_{A \rightarrow B}(\gamma^1) = W_{A \rightarrow B}(\gamma^2)$$

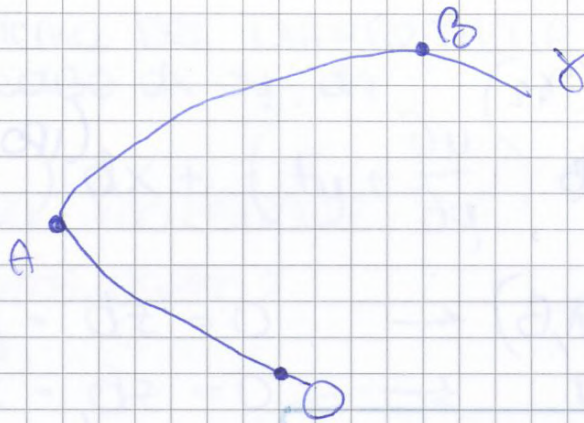
Se un campo è conservativo allora l'integrale di linea è esprimibile come differenza di una proprietà del punto di partenza e una proprietà del punto di arrivo

PROPRIETÀ DELLA DIFFERENZA

\vec{F} è conservativo \rightarrow ipotesi

$$W_{A \rightarrow B}^{(x_1)} = W_{A \rightarrow B}^{(x_2)}$$

$$\rightarrow W_{A \rightarrow B} = \varphi(A, B)$$



$$W_{O \rightarrow B}^{(x)} = \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{O \rightarrow B}^{(x)} = W_{O \rightarrow A}^{(x)} + W_{A \rightarrow B}^{(x)}$$

Se il campo è conservativo

$$\rightarrow W_{O \rightarrow B} = W_{O \rightarrow A} + W_{A \rightarrow B}$$

$$\varphi(O, B) = \varphi(O, A) + \varphi(A, B)$$

$$\varphi(A, B) = \varphi(O, B) - \varphi(O, A)$$

facendo la sottrazione deve scomparire

ORA LA FUNZIONE È USUALE A ZERO :

$$\bar{F} \cdot d\bar{s} + dU = 0$$

USANDO COORDINATE CARTESIANE :

$$\bar{F} = F_x \bar{u}_x + F_y \bar{u}_y + F_z \bar{u}_z$$

$$d\bar{s} = dx \bar{u}_x + dy \bar{u}_y + dz \bar{u}_z$$

$$\bar{F} \cdot d\bar{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE
RACCOMO dx, dy, dz

$$\left(F_x + \frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(F_y + \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(F_z + \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0$$

se $dy = dz = 0 \rightarrow F_x + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

se $dx = dz = 0 \rightarrow F_y + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

se $dx = dy = 0 \rightarrow F_z + \frac{\partial U}{\partial z} = 0$

SE UN CAMPO È CONSERVATIVO :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

QUINDI :

$$\bar{F} = -\bar{u}_x \frac{\partial U}{\partial x} - \bar{u}_y \frac{\partial U}{\partial y} - \bar{u}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\bar{\nabla} = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{GRADIENTE}$$

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} U$$

4 ottobre 2012

RIPASSINO :

$$W_{A \rightarrow B} = u(A) - u(B)$$

se il campo è conservativo

$$W_{A \rightarrow B}(\gamma) = \int_{\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

se il campo non è conservativo

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

se il campo è conservativo

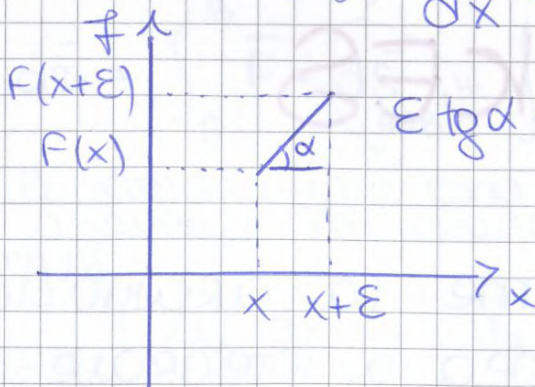
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} ; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} ; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

CRITERI DI CONSERVATIVITÀ

matematiche utili:

• $F(x+\epsilon) = F(x) + \frac{dF}{dx} \epsilon$

Sviluppo Taylor al 1° ordine



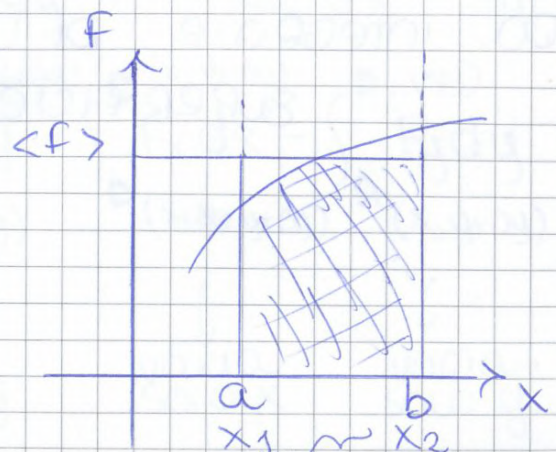
$$\epsilon \operatorname{tg} \alpha = \epsilon \frac{dF}{dx}$$

$$f(x_0) + f'(x)(x-x_0)$$

• Media integrale :

$$\int_a^b f dx = (b-a) \langle f \rangle$$

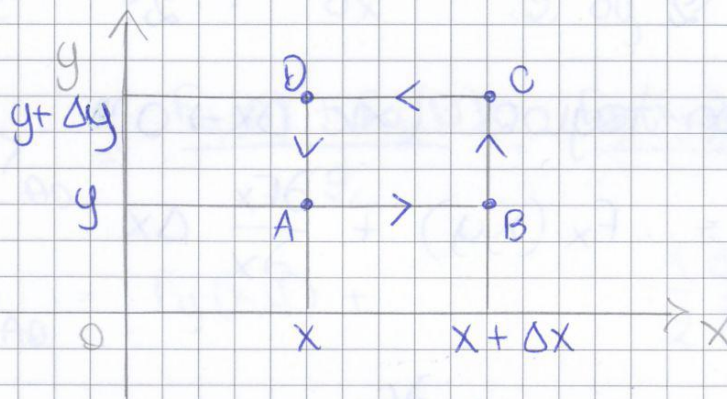
$$\langle f \rangle = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



calcoliamo la CIRCOLAZIONE di un vettore su un percorso qualunque γ

IPOTESI:

- ① γ sta su un piano (x, y)
- ② γ è un rettangolo



$A(x, y)$
 $B(x + \Delta x, y)$
 $C(x + \Delta x, y + \Delta y)$
 $D(x, y + \Delta y)$

- Devo scegliere il verso
- la funzione vettoriale di cui voglio calcolare la CIRCOLAZIONE è:

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y) \vec{u}_x + F_y(x, y) \vec{u}_y$$

$$d\vec{s} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$$

x e DC e AD sono orientati?!

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

I limiti di integrazione sono dal valore più piccolo a quello più grande
sostituisco $d\vec{s}$

$$+ \vec{u}_x dx + \vec{u}_y dy - \vec{u}_x dx - \vec{u}_y dy$$

sostituisco le coordinate

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^{B(x+\Delta x, y)} F_x dx + \int_B^{C(x+\Delta x, y+\Delta y)} F_y dy - \int_C^{D(x, y+\Delta y)} F_x dx - \int_D^A F_y dy$$

\downarrow varia solo x \downarrow varia solo y \downarrow varia solo x \downarrow varia solo y

$$\bullet \langle F_y \rangle_{BC} = \frac{F_y(B) + F_y(C)}{2} = \frac{F_y(x+\Delta x, y) + F_y(x+\Delta x, y+\Delta y)}{2}$$

$$F_y(x+\Delta x, y) = F_y(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x$$

$$F_y(x+\Delta x, y+\Delta y) = F_y(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y$$

$$\langle F_y \rangle_{BC} = F_y(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y$$

$$\bullet \langle F_y \rangle_{AD} = \frac{F_y(A) + F_y(D)}{2} = \frac{F_y(x, y) + F_y(x, y+\Delta y)}{2}$$

$$\langle F_y \rangle_{AD} = F_y(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y$$

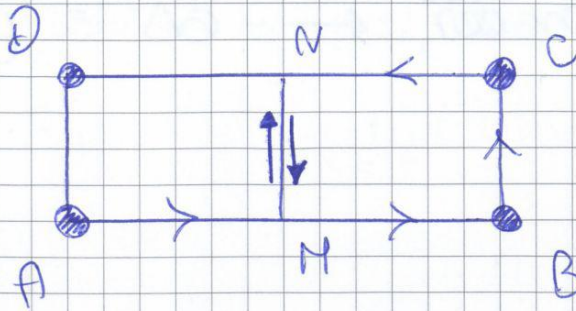


$$\bullet \langle F_y \rangle_{BC} - \langle F_y \rangle_{AD} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x$$

Quindi la circulazione

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

Se abbiamo 2 percorsi a contatto, quanto vale la circolazione complessiva?



$$\int_{ABCD} = \int_{AMND} + \int_{MBCN}$$

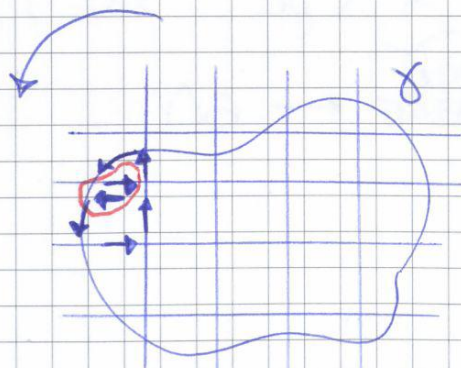
$$d\vec{s}_{M \rightarrow N} = +\vec{u}_y dy$$

$$d\vec{s}_{N \rightarrow M} = -\vec{u}_y dy$$

Il percorso MN non dà nessun contributo xk prima lo da positivo te poi negativo ↓

Ogni circuito rettangolare pu' sempre essere diviso in n parti!

Stavolta prendiamo un percorso γ completamente generico



lo divido in tanti rettangoli elementari!

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int \vec{F} \cdot d\vec{s}_i$$

numero rettangolini, devono essere tanti xk x ricoprire qualsiasi superficie

ogni piccolo circuito rettangolino

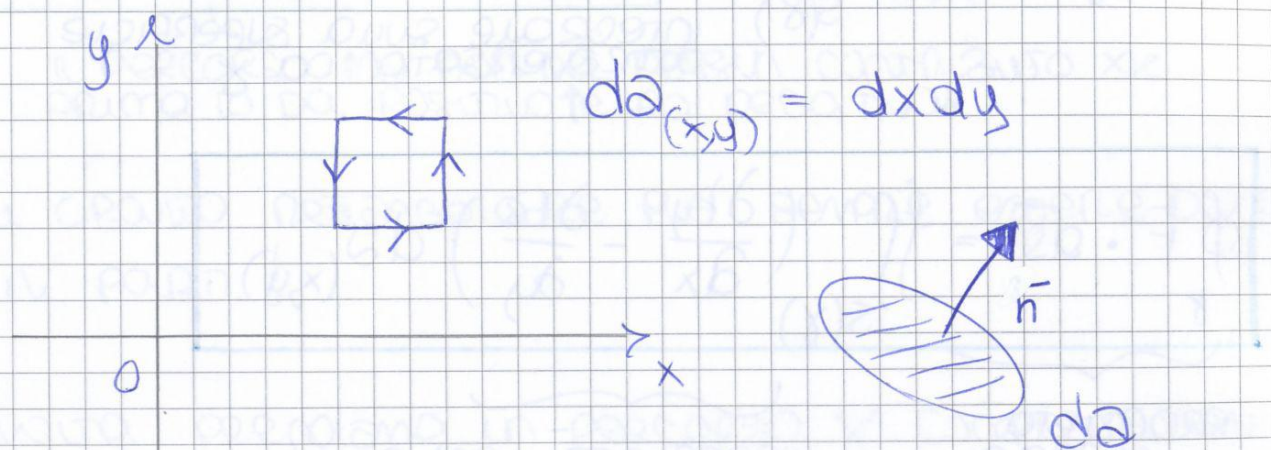
solo xk due lati contribui danno un contributo nono alla circolazione!

$$\int_{ABCA} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{ABOA} + \int_{BCOB} + \int_{CAOC} !$$

INTEGRALE SUL PIANO xy INTEGRALE SUL PIANO yz INTEGRALE SUL PIANO xz

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) da_{(x,y)} + \int \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) da_{(y,z)} + \int \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) da_{(x,z)}$$

INTRODUCIAMO IL VETTORE AREA :



$$da_{(x,y)} = dx dy$$

REGOLA MANO DX → POLICE = DIREZIONE DELL'ELEMENTO DI AREA

$$d\vec{a} = dx dy \vec{n}_z$$

MODULO → $da_z = dx dy$
 QUINDI π LE AREE DIVENTANO:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) da_z + \int \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) da_x + \int \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) da_y$$

Dato un vettore qualunque costante e data una superficie piana A



A: piana
F: costante

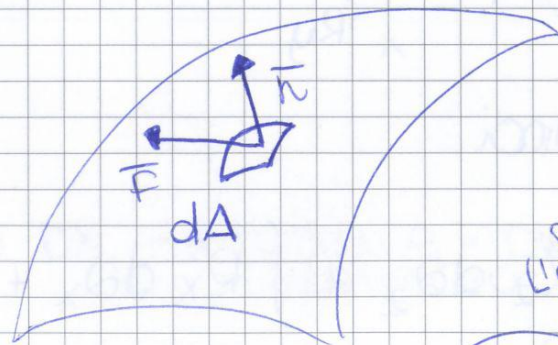
Flusso di \vec{F} attraverso A

$$\Phi_A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{n} A$$

↓ scalare

definizione di flusso

se cadono le ipotesi (abbiamo una superficie generica non piana e un vettore non costante)



se considero l'area come un vettore

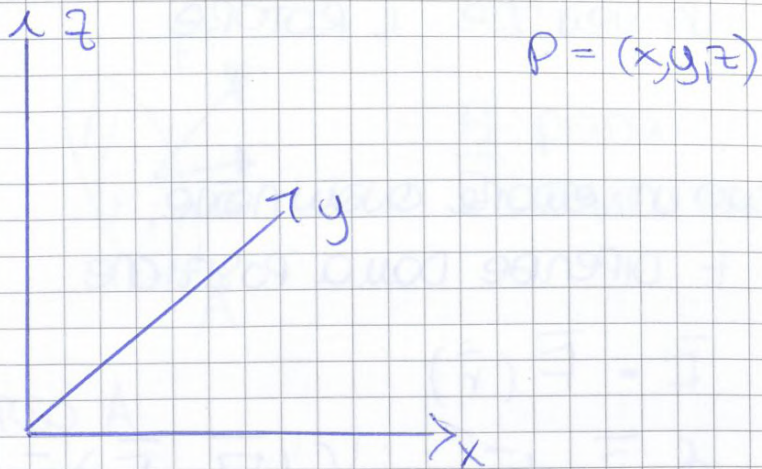
$$\Phi_A(\vec{F}) = \iint_A \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_A \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

↓ scalare

il teorema di Stokes quindi afferma che la circolazione di un vettore lungo 1 linea chiusa è uguale al flusso del rotore del vettore attraverso una superficie chiusa

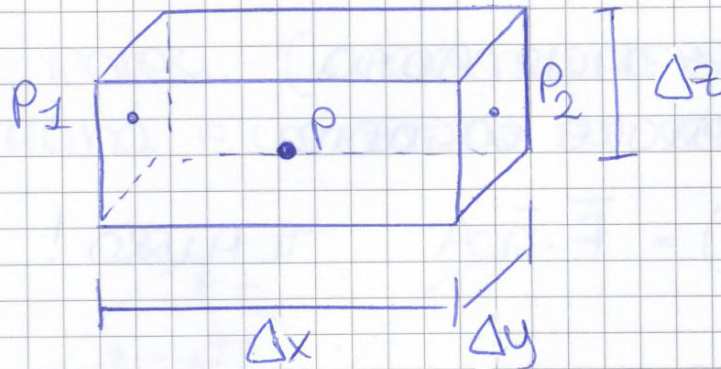
TEOREMA di GAUSS o DELLA DIVERGENZA

calcolare il flusso di una superficie chiusa :



$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$$

$P(x, y, z)$
È IL CENTRO

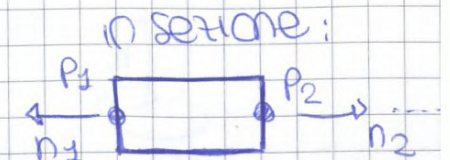


$$P_1 = \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$$

$$P_2 = \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right)$$

$$\bar{F} = F_x \bar{u}_x + F_y \bar{u}_y + F_z \bar{u}_z$$

flusso che esce, lungo l'asse x : in sezione:



$$\Delta \phi_x = \bar{F}(P_1) \cdot \bar{n}_1 \Delta y \Delta z + \bar{F}(P_2) \cdot \bar{n}_2 \Delta y \Delta z$$

$$\bar{n}_1 = -\bar{u}_x$$

$$\bar{n}_2 = \bar{u}_x$$

$$\Delta \phi_x = -F_x(P_1) \Delta y \Delta z + F_x(P_2) \Delta y \Delta z$$

IL FLUSSO TOTALE :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z$$

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) \Delta\tau$$

IL FLUSSO CHE ESCE DA UNA SCATOLA ELEMENTARE È PROPORZIONALE AL VOLUME + LE DERIVATE CALCOLATE NEL CENTRO DELLA SCATOLA

LA PARENTESI VIENE CHIAMATA **DIVERGENZA** (QUANTITÀ SCALARE)

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\ \text{div } \vec{F} \end{array} \rightsquigarrow \boxed{\Delta\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \Delta\tau}$$

RIPASSINO :

GRADIENTE $\vec{\nabla} u = \hat{u}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{u}_z \frac{\partial u}{\partial z}$ VETTORE

ROTORE $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = R_x \hat{u}_x + R_y \hat{u}_y + R_z \hat{u}_z$ VETTORE

DIVERG $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$ SCALARE

$$\Phi_S(\vec{F}) = \int_{\tau(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

LIMITO DELLA
SOMMATORIA
= INTEGRALE

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_{\tau(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\tau$$

TEOREMA
DI
GAUSS

S = superficie chiusa

$\tau(S)$ = volume delimitato da S

assomiglia a quello di Stokes :

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S(x)} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$$

ma la differenza è che in Stokes non si può identificare precisamente la superficie.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k Q q \frac{x}{r^3} \right\} = k Q q \frac{\partial}{\partial x} (x r^{-3}) \\ &= k Q q \left\{ r^{-3} - 3x r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x} \right\} \\ &= k Q q \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right\}\end{aligned}$$

$$\text{ma } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = k Q q \left\{ \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5} \right\} = k \frac{Q q}{r^5} (r^2 - 3x^2)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = k \frac{Q q}{r^5} (r^2 - 3y^2)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial z} = k \frac{Q q}{r^5} (r^2 - 3z^2)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = k \frac{Q q}{r^5} (3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2))$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

tutte le volte che la divergenza è 0
e allora il vettore si chiama

SOLENOIDALE

ma se le 2 superfici vengono appiattite una sull'altra (limite)

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_S \, dS = - \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \, d\Sigma = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot (-\vec{n}_{\Sigma}) \, d\Sigma$$

se \vec{F} è solenoidale l'INTEGRALE DEL FLUSSO SU UNA SUPERFICIE APERTA DIPENDE SOLO DAL BORDO DI S

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \text{ dipende solo dal BORDO di S}$$

la DIVERGENZA di \vec{R} = **ESSERE solenoidale**

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$$

$$\vec{R} = \nabla \times \vec{F}$$

$$R_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$R_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$R_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

il vettore \vec{R} è solenoidale ?!

se calcolo la DIVERGENZA

$$\nabla \cdot \vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

LE COORDINATE SFERICHE x LO SPAZIO 9 ottobre 2012

$$W_{A \rightarrow B} = u(B) - u(A)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u = -\vec{u}_x \frac{\partial u}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial u}{\partial y} - \vec{u}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$dW = -du$$

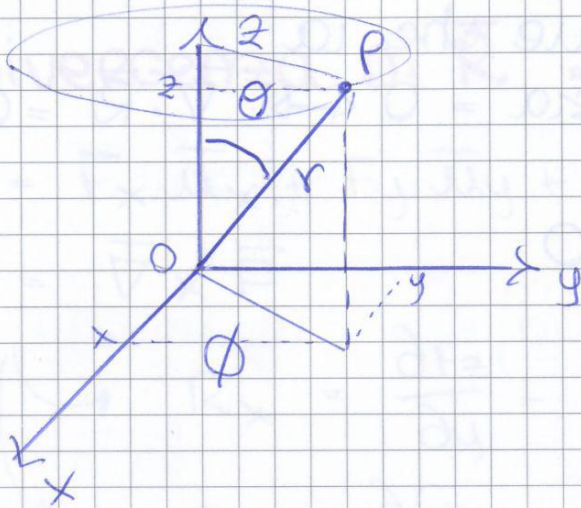
$$dW + du = 0$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

GRADIENTE IN
COORDINATE
CARTESIANE

COORDINATE SFERICHE



$$\vec{OP} = r = \text{RAGGIO}$$

$$\theta = \text{ANGOLO POLARE}$$

$$\phi =$$

$$P \equiv (r, \theta, \phi)$$

CORRISPONDENZA CON LE COORDINATE CARTESIANE

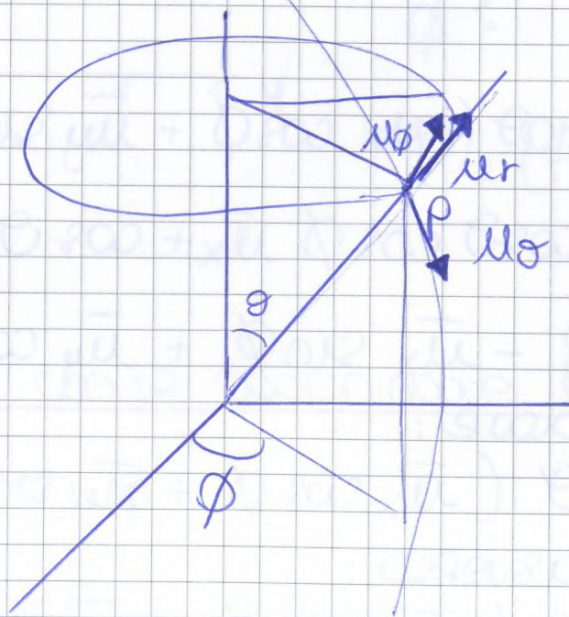
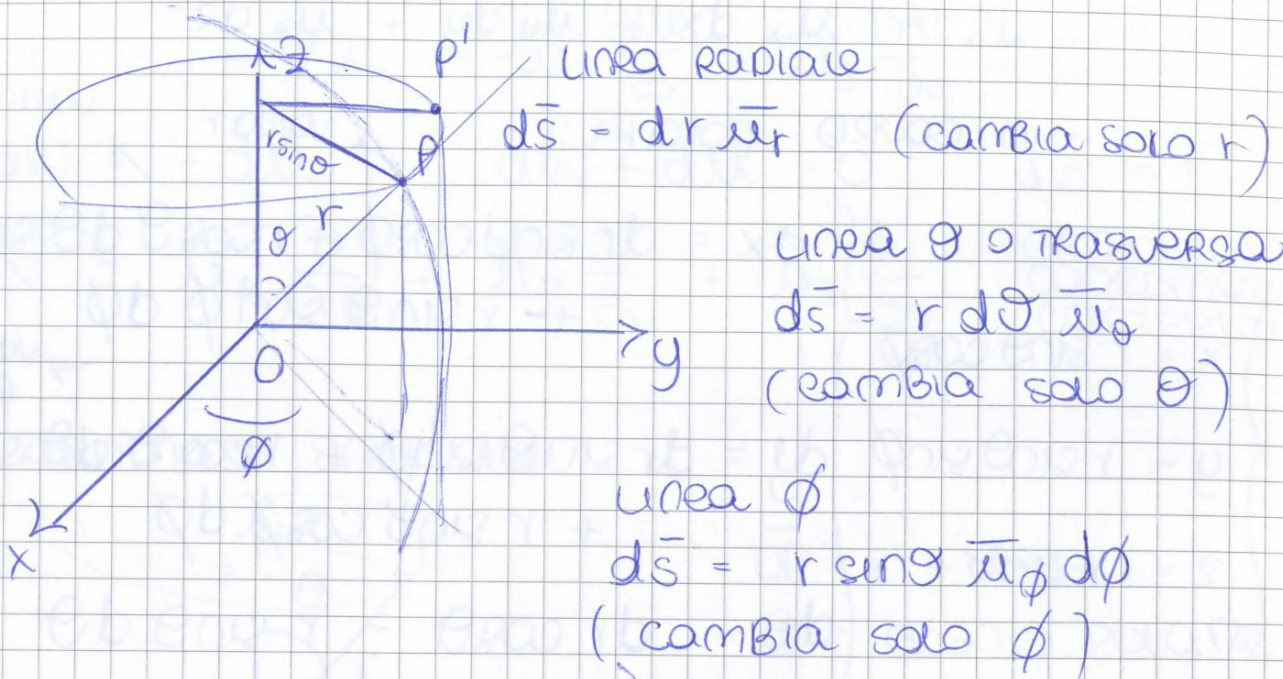
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

mi muovo sull'asse x \rightarrow cambia x, costanti y e z
(idem x le altre) così si dicono linee coordinate
quelle tre linee coordin. sferiche sono:

- linea radiale r \rightarrow cambia r
- cerchi con centro in origine \rightarrow cambia θ
- sono \perp all'asse Polare \rightarrow cambia ϕ

$d\vec{s}$ diventa:

$$d\vec{s} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$



IL GRADIENTE in coordinate polari sferiche

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z \quad \text{diventa}$$

$$\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta + F_\phi \vec{u}_\phi$$

$$d\vec{s} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

QUINDI:

$$\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta + F_\phi \vec{u}_\phi$$

$$\vec{F} = - \left(\vec{u}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right)$$

$$= - \vec{\nabla} u$$

con $\nabla = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

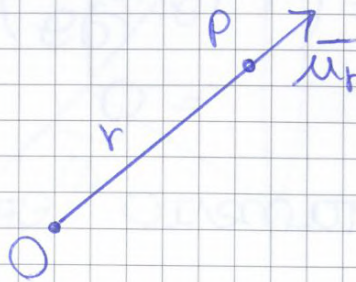
FORZA / CAMPO CENTRALE

SI CHIAMA CAMPO CENTRALE UN CAMPO TALE CHE LA FORZA / IL CAMPO GOBE DELLA PROPRIETA':

$$\vec{F} = f(r) \vec{u}_r$$

DIREZIONE: RADIALE

MODULO: DIPENDE
DALLA DISTANZA
DAL CENTRO



$F > 0$ FORZA REPULSIVA

$F < 0$ FORZA ATTRATTIVA

DIMOSTRAZIONE : OGNI FORZA CENTRALE È
CONSERVATIVA

Il potenziale soltanto da $r \rightarrow u = u(r)$

quindi:

$$f(r) = -\frac{du}{dr} \quad \leadsto \quad u = -\int f(r) dr + \text{cost}$$

calcolo il rotore di $\vec{F} = f(r) \vec{u}_r$ $[=0]$
 così verifico che è conservativa

$$\vec{F} = f(r) \vec{u}_r = \frac{f(r)}{r} r \vec{u}_r \quad \text{ma } \vec{F} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{F} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} = \underbrace{g(r)}_{\text{Q. scalare}} \vec{r} \quad \text{vettore}$$

$$\text{ma } \vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = g(r) \{ x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \}$$

$$f_x = g(r) \cdot x$$

$$f_y = g(r) \cdot y$$

$$f_z = g(r) \cdot z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

funzione
di funzione

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{ g(r) x \} = x \frac{\partial}{\partial y} \{ g(r) \} = x \frac{dg}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\text{ma } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} 2y = \frac{y}{r}$$

sistema di GAUSS (FURIOLEGGI) $\rightarrow k=1$

sistema MESA (CORRENTE) $\rightarrow k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{(\text{As})^2}$

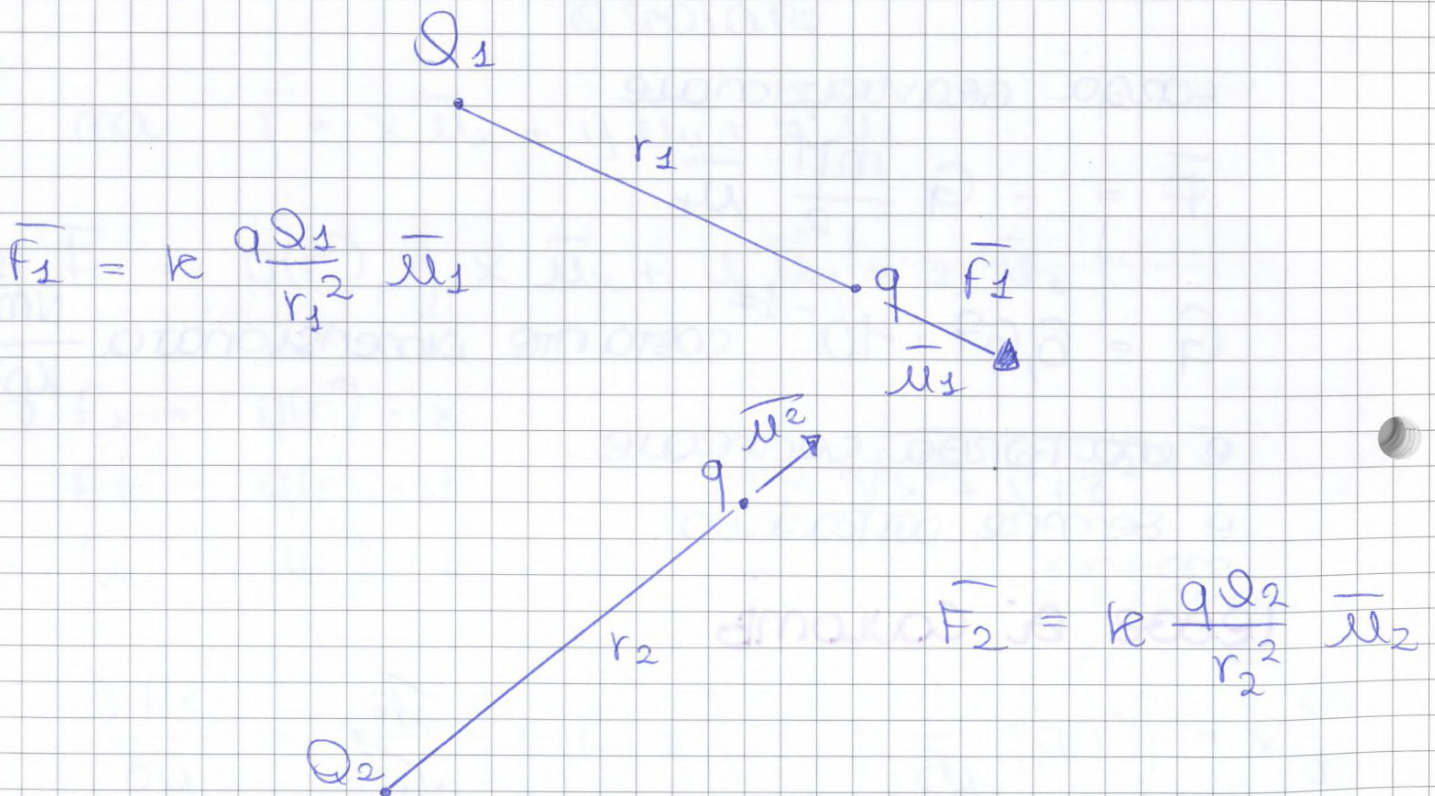
MEZZO
KILOGRAMMO
SECONDO
AMPERE

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ϵ_0 = COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

LA CARICA SI MISURA IN AMPERE/SECONDI AS = C
O IN COULOMB



$$\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{R} - \vec{R}_i = \begin{cases} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Componenti} \\ \text{di } \vec{r}_i \end{array}$$

$$\bar{u}_i = \frac{|\vec{r}_i|}{r_i} =$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{(x-x_i)\bar{u}_x + (y-y_i)\bar{u}_y + (z-z_i)\bar{u}_z}{\left\{ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \right\}^{3/2}}$$

$$E_x(x, y, z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{x-x_i}{r_i^3}$$

$$E_y(x, y, z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{y-y_i}{r_i^3}$$

$$E_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{z-z_i}{r_i^3}$$

\downarrow
 Forma vettoriale
 del
 campo
 elettrostatico
 generato da
 un sistema
 discreto di cariche
 puntiformi

11 ottobre 20

Distribuzione di cariche qualunque :

vale il principio di sovrapposizione degli effetti \rightarrow x il campo

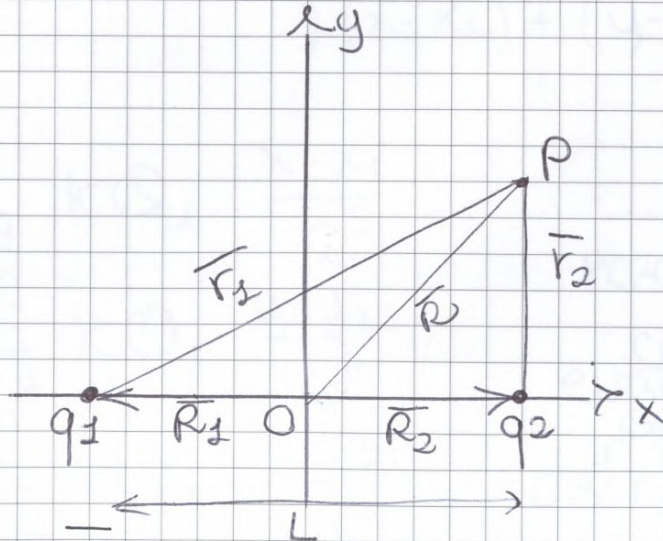
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{r}_i}{(r_i)^3} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{R} - \vec{R}_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

$$\vec{E} = kq \frac{\vec{r}_1}{r^3}$$

CASO SEMPLICE

$P=(x,y)$



$$\vec{R} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$$

$$\vec{R}_1 = -\frac{L}{2} \vec{u}_x$$

$$q_1 = q_2 = q$$

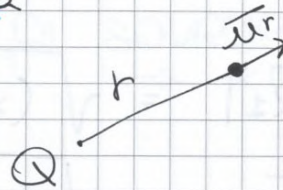
$$\vec{R}_2 = \frac{L}{2} \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} - \vec{R}_1 = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + \frac{L}{2} \vec{u}_x = \\ &= (x + \frac{L}{2}) \vec{u}_x + y \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\vec{E} (x \gg L) \approx kq \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \vec{u}_x = k \frac{2q}{x^2} \vec{u}_x$$

* se la carica è unica

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$



Quando il sistema ha una estensione limitata e considero un punto P molto distante, il sistema è come se fosse concentrato nel centro delle cariche e le cariche si sommano

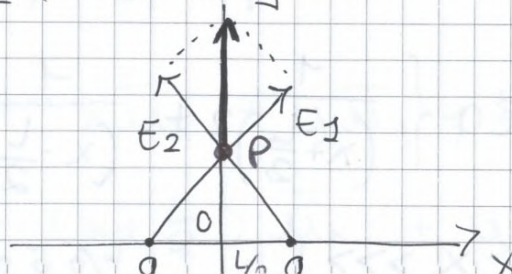
se il sistema è elettricamente neutro, con $q_1 = -q_2$ per punti molto distanti il campo è molto più piccolo di $\frac{1}{r^2}$

* se $P \in y \rightarrow x=0$

$$\vec{E}(0,y) = kq \left\{ \frac{\frac{1}{2} \vec{u}_x + y \vec{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 \right]^{3/2}} + \frac{-\frac{1}{2} \vec{u}_x + y \vec{u}_y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \right\} \text{ Faccio mcm}$$

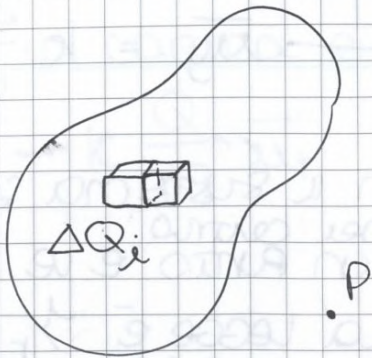
$$= kq \frac{2y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \vec{u}_y$$

Il campo è diretto lungo l'asse y



DISTRIBUZIONE CONTINUA DELLE CARICHE

CORPO VOLUMICO



carica complessiva Q che si è distribuita

DIVIDO IL CORPO

OGNI CUBETTO PORTA UNA CARICA ΔQ_i

$$\vec{E}(\vec{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k \Delta Q_i \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$$

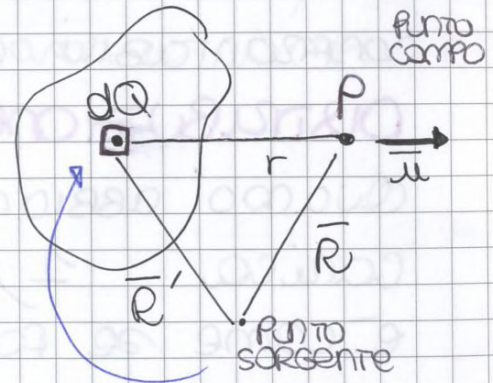
APPROSSIMARE BENE

• ESTENSIONE AL CASO CONTINUO

$$\vec{E}(\vec{P}) = \int k \frac{\vec{u}}{r^2} dQ$$

esplicitamente

$$\vec{E}(\vec{R}) = \int_Q k \frac{\vec{R} - \vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dQ$$



FORMULA CHE SI PUO' APPLICARE IN 3 CASI:

- ① caso volumico: il corpo ha 3 dimensioni
- ② caso superficiale: il corpo ha 2 dimensioni
- ③ caso lineare: il corpo ha 1 dimensione



④ ΔQ_i



la carica è contenuta in un volume

DENSITA' DI CARICA

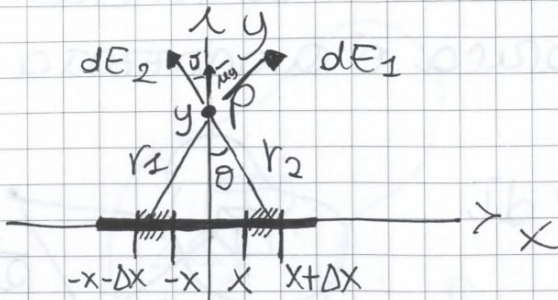
$$\rho = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_i}{\Delta \tau}$$

CAMPO ELETTROSTATICO DI UN FILO OMOGENEO

FILO OMOGENEO L (TRATTO NERO)

ESEMPLO 1.6

VOGLIO CALCOLARE IL CAMPO SUL SUO ASSE (PEY)



$Q =$ DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE

$\lambda = \frac{Q}{L}$ DENSITA' DI CARICA LINEARE

$dq_2 = \lambda dx$

$dq_1 = \lambda dx$

IL 2 ELEMENTI SIMMETRICI CONTENGONO LA STESSA CARICA

$$d\vec{E}_2 = k \frac{dq_2}{r_2^2}$$

$$d\vec{E}_1 = k \frac{dq_1}{r_1^2}$$

ma $r_1 = r_2$
 $dq_1 = dq_2$

$$dE_1 = dE_2 = k \frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2k \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\theta \vec{u}_y$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d\vec{E} = 2k \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} y \vec{u}_y$$

* $\approx y \gg L$

$$\begin{aligned}\bar{E}(y \gg L) &\approx 2k\lambda \frac{1}{y} \frac{L}{2y} \bar{\mu}_y = k \frac{\lambda L}{y^2} \bar{\mu}_y \\ &= k \frac{Q}{y^2} \bar{\mu}_y\end{aligned}$$

di nuovo i conti vanno...

* $\approx y \rightarrow 0$ (e trascurabile)

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{E}(y \ll L) \approx 2k\lambda \frac{1}{y} \bar{\mu}_y$$

Il campo DIVERGE

* $\approx y \ll L \Rightarrow \frac{L}{2y} \gg 1$

POSSO TRAVERLO
IN 2 MODI

$$\bar{E}(y \ll L) = 2k\lambda \frac{1}{y} \frac{\frac{L}{2y}}{\frac{L}{2y}} \bar{\mu}_y = 2k\lambda \frac{1}{y} \bar{\mu}_y$$

* $\approx L \rightarrow \infty \Rightarrow$ FIO INDEFINITO

$$\bar{E}(y) = 2k\lambda \frac{1}{y} \bar{\mu}_y$$

Quando un punto è molto vicino al filo ($y \ll L$) il filo può considerarsi ∞ e crea un campo che decresce come $\frac{1}{y}$

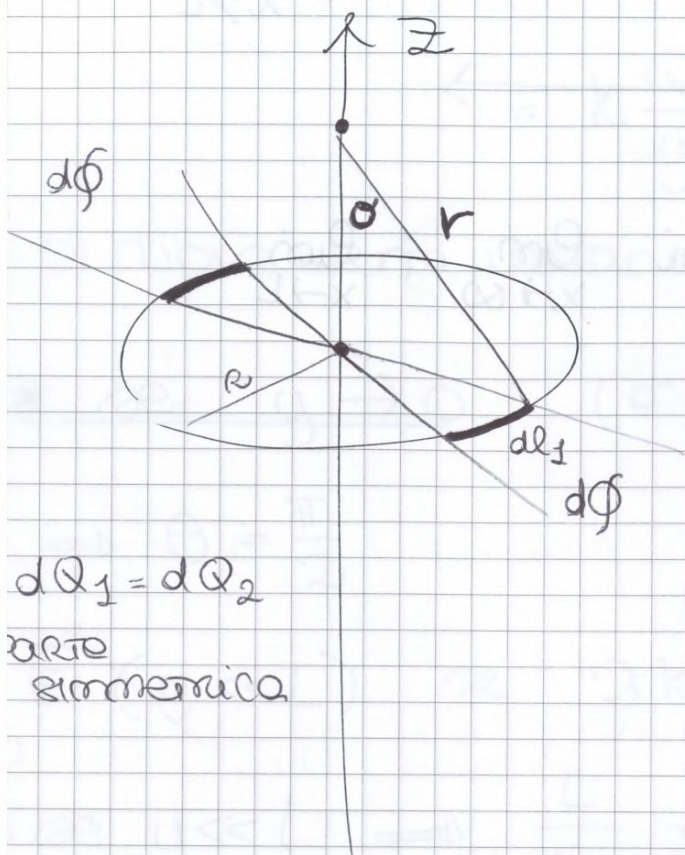
CAMPO ELETTROSTATICO di un anello uniforme

12 ottobre 2012

ESEMPLO 17

FILLO = ANELLO

VOGLIO CALCOLARE IL CAMPO DI UN ANELLO UNIFORME



$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} \rightarrow \text{CIRCONFERENZA}$$

(SERVE POI X IL DISCO =
SUCCESSIONE ANELLI...)

CORPO UNIFORME SE
 σ, ρ, λ SONO COSTANTI,
CIOÈ NON DIPENDONO DAL
PUNTO CONSIDERATO

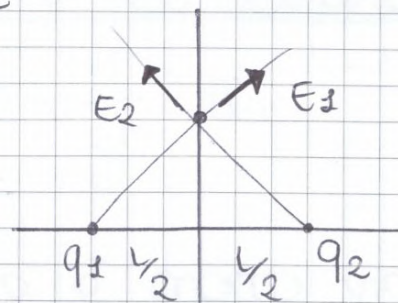
Q , CARICA \rightarrow UNIFORME
 R , RAGGIO

È un sistema UNIDIMENSIONALE
 $\rightarrow dQ = \lambda dl$

$dQ_1 = dQ_2$
ARTE
SIMMETRICA

$$dl_1 = R d\phi \rightarrow dQ_1 = \lambda dl_1 = \lambda R d\phi$$

MI RICORDO DI



$$q_1 = q_2 = q$$

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_1$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_2$$

} SONO UGUALI
IN
MODULO

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2k \frac{q}{r^2} \cos\theta \vec{u}_2 !$$

$$\vec{E} = kQ \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

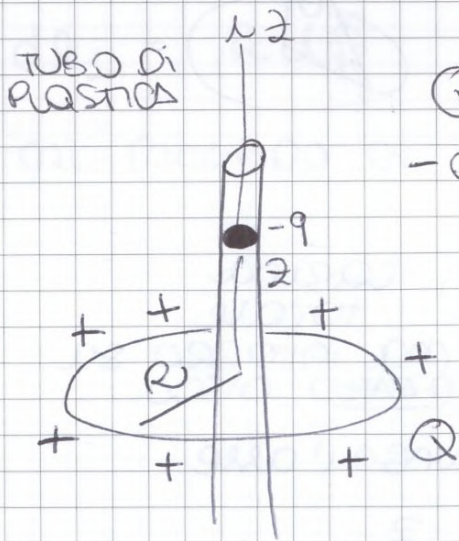
Il campo nel centro dell'anello ($z=0$) vale 0 e la forza anche vale zero, cioè il centro dell'anello è un punto di equilibrio INSTABILE

→ in un campo elettrostatico non ci sono punti di equilibrio stabile

consideriamo un punto molto lontano, cioè $z \gg R$, cioè trascuro R al posto di z

$$\vec{E}(z \gg R) = kQ \frac{z}{z^3} \vec{u}_z = kQ \frac{\vec{u}_z}{z^2}$$

x punti molto lontani, il campo si concentra tutto nel centro



Q = carica positiva anello

$-q$ = carica negativa particella

$$z \ll R$$

molto più piccolo

come si muove?

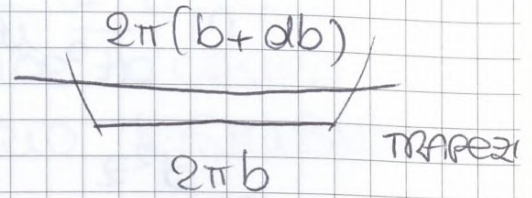
$$\vec{E}(z \ll R) = kQ \frac{z}{R^3} \vec{u}_z \quad (z \text{ è trascurabile})$$

$$\vec{F} = -q\vec{E} = -k \frac{Qq}{R^3} z \vec{u}_z$$

$$d\vec{E} = k dQ \frac{\vec{z}}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \bar{u}_z$$

$$dQ = \sigma dA = \sigma 2\pi b db$$

$$dA = 2\pi b db$$



$db \rightarrow 0$

$$d\vec{E} = k \sigma \frac{2\pi b db \vec{z}}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \bar{u}_z$$

INTEGRO SU TUTTI GLI ANELLI
CON CUI HO APPROSSIMATO
IL DISCO

$$\vec{E} = \int_0^R k \sigma \frac{2\pi b db \vec{z}}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \bar{u}_z$$

$k, \sigma, 2\pi, z, \bar{u}_z$ costanti

$$\vec{E} = k \sigma 2\pi z \bar{u}_z \int_0^R \frac{b}{(b^2 + z^2)^{3/2}} db$$

CALCOLO INTEGRALE

$$\int_0^R \frac{b}{(b^2 + z^2)^{3/2}} db = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(b^2)}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad \eta = b^2 + z^2$$

cambio di variabili

$$\begin{cases} \eta(0) = z^2 \\ \eta(R) = R^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\eta(0)}^{\eta(R)} \frac{d\eta}{\eta^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{-\frac{3}{2} + 1} \left[\eta^{-\frac{3}{2} + 1} \right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} =$$

$$= - \left[\frac{1}{\eta^{1/2}} \right]_{\eta(0)}^{\eta(R)} = - \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right\} =$$

★ ae $z \ll R$

$$\vec{E}(z \ll R) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Punto vicino al piano del disco = campo uniforme
 si comporta come se il disco fosse ∞

★ ae $R \rightarrow \infty$

IL DISCO DIVENTA UN PIANO INDEFINITO \times cui

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

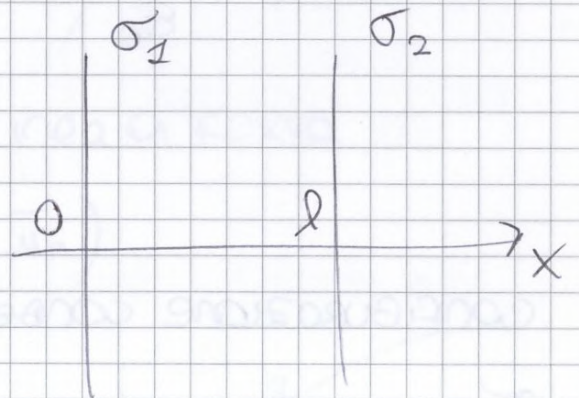
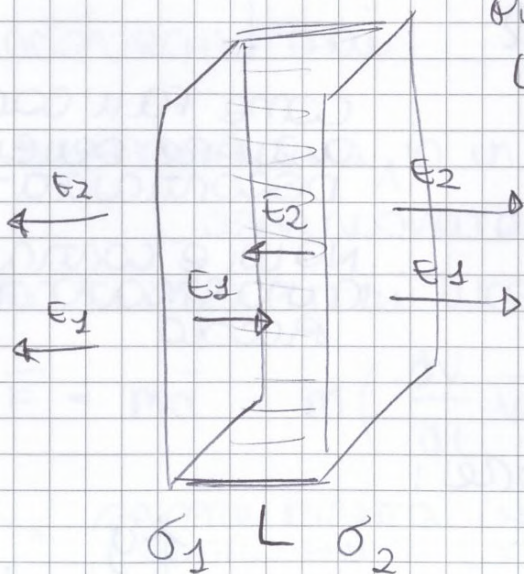
CAMPO ELETTROSTATICO
 TRA 2 PIANI

PROBLEMA :

esempio 19

Piano INDEFINITO

$L =$ distanza tra i 2 piani

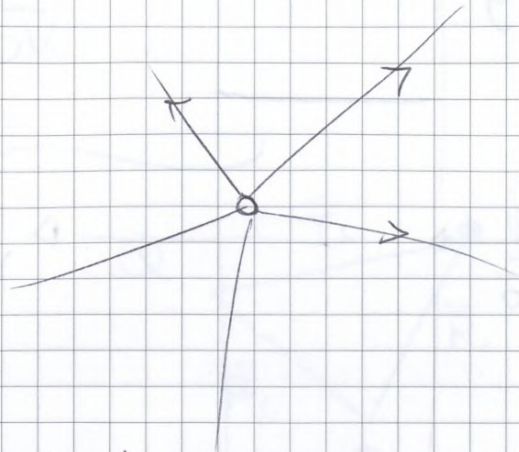
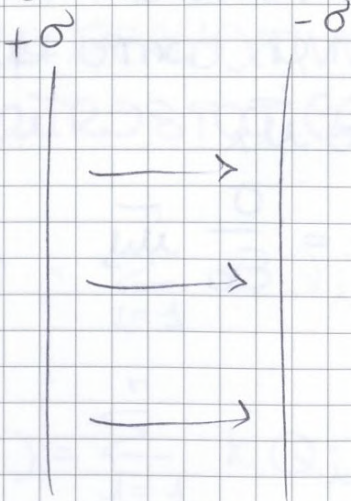


$$\vec{E}_1 = \begin{cases} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} & x > 0 \\ - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} & x < 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} & x > l \\ - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} & x < l \end{cases}$$

LINEE DI CAMPO

Linee di campo



o linee di forza : linee che hanno x tangente, in ogni punto, un versore // al campo in quel punto

Le linee di forza non si incontrano mai

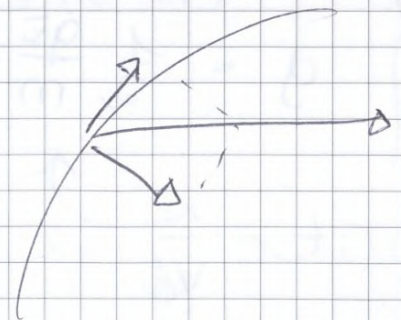
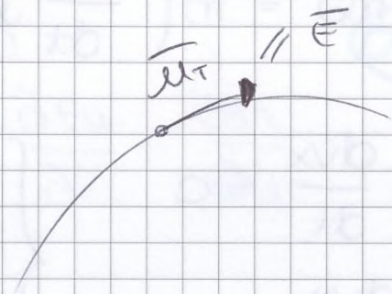
una particella, in un campo abbandonata

non si muove mai lungo una linea di forza

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \left(\frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n \right)$$

sempre diretta lungo il centro della curvatura

la traiettoria difficilmente coincide lungo una linea del campo, tranne nel caso in cui io già la ponga lungo una linea di campo

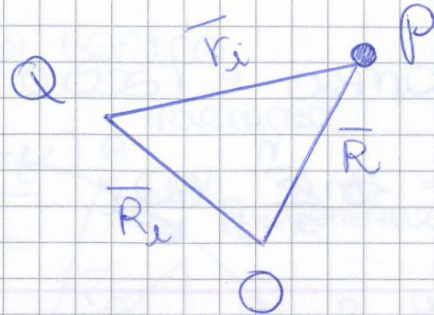


16 ottobre 2012

LA CONSERVATIVITÀ DEL CAMPO ELETTROSTATICO

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^2}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$



$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{R})$$

VERIFICO LA CONSERVATIVITÀ DEL CAMPO ELETTROSTATICO, TROVANDO:

dim

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{R} = (x, y, z) \quad \vec{R}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$\vec{r}_i = \vec{R} - \vec{R}_i = (x - x_i, y - y_i, z - z_i)$$

$$r_i = |\vec{R} - \vec{R}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

$$E_x(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{x - x_i}{r_i^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{x - x_i}{r_i^3} \right\} = \sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (x - x_i) r_i^{-3} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n k Q_i (x - x_i) (-3) (r_i^{-4}) \frac{\partial r_i}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{calcolo } \frac{\partial r_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 (y - y_i) \end{aligned}$$

$$u(r) = k \frac{Qq_0}{r} + c$$

L'ENERGIA POTENZIALE SI PUÒ SEMPRE DEFINIRE A MERO DI UNA COSTANTE

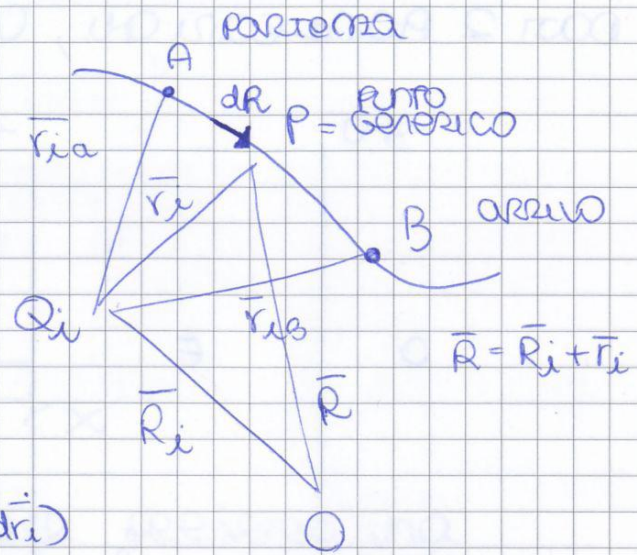
Se $r \rightarrow \infty$, $u(r) = 0$ ma non sempre si può imporre QUESTA CONDIZIONE

* se abbiamo una distribuzione di carica

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{R} =$$

$$= \int_A^B q_0 \left(\sum_{i=1}^n k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \cdot d\vec{R} =$$

$$= q_0 \sum_{i=1}^n \int_A^B k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \cdot d\vec{R}$$



ma $d\vec{R} = d\vec{r}_i$ x_c $(d\vec{R} = d\vec{R}_i + d\vec{r}_i)$

\vec{R}_i è costante x_c $d\vec{R}_i = 0$

$d\vec{R}$ = indica lo spostamento della carica di prova e dipende solo da lei

$$= q_0 \sum_{i=1}^n \int_A^B k Q_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \cdot d\vec{r}_i$$

Q_i fissa, mentre q_0 si muove

$$W_{A \rightarrow B} = q_0 \sum_{i=1}^n k Q_i \left(\frac{1}{r_{Ai}} - \frac{1}{r_{Bi}} \right)$$

$$u = q_0 \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{r_i}$$

ENERGIA POTENZIALE dipende dalla carica di prova e dalla distanza da essa

$$V = \frac{u}{q_0} = \sum_{i=1}^n k \frac{Q_i}{r_i}$$

potenziale elettrico

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{N}{A \cdot s} = \frac{Nm}{Cm} = \frac{J}{Cm} = \frac{V}{m}$$

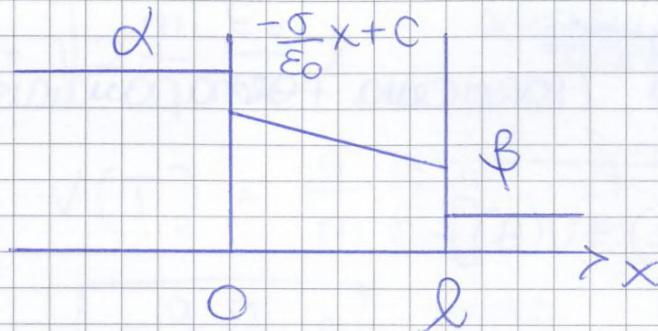
$$[V] = \frac{J}{C} = \frac{J}{A \cdot s} = V \text{ (volt)}$$

la derivata non è parziale ma totale xk
dipende solo da x

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dx \quad \text{INTEGRO}$$

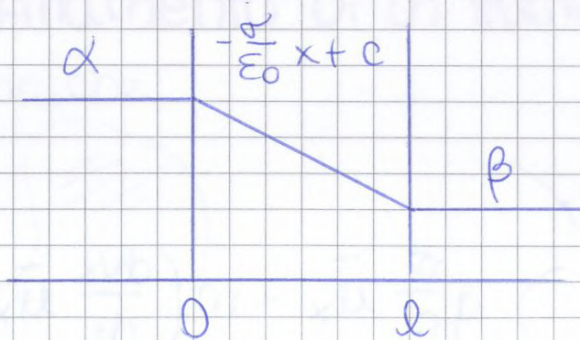
$$V(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x + \text{Costante}$$

varie situazioni :



anomalia xk il potenziale presenta una discontinuità in $x=0$ e $x=l$ → la derivata in questi punti va a ∞ , E va a ∞ ... assurdo!

il potenziale non può essere discontinuo!



Per $x=0 \rightarrow \alpha = c$

Per $x=l \rightarrow -\frac{\sigma}{\epsilon_0} l + c = \beta$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} t$$

Mostrare la velocità
passo alla posizione

$$\int_0^l dx = \int_0^T \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} t$$

$$l = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} T^2$$

$$T = \sqrt{2 \frac{m}{q} \frac{\epsilon_0}{\sigma} l}$$

Tempo di
transito

$$v_B = v(T) = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} T = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sqrt{2 \frac{m}{q} \frac{\epsilon_0}{\sigma} l}$$

$$v_B = \sqrt{2 \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\epsilon_0} l}$$

Stesso
risultato
di prima!

metà sotto
radice

ENERGIA PROPRIA o ENERGIA x IL CONFINAMENTO di un sistema

cariche



sposto la carica AB con velocità cost o quasi zero

devo applicare una certa forza x spostarla:
Faccio un lavoro

$$W_{A \rightarrow B}^{(est)} = \int_A^B \vec{F}_{est} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{\infty \rightarrow 3} = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

il lavoro totale è:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= W_{\infty 1} + W_{\infty 2} + W_{\infty 3} \\ &= k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \end{aligned}$$

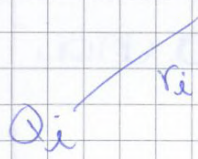
c'è l'energia x ogni coppia!

$$W = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad) \rightarrow i \neq j$$


metto $q_1 q_2$ e $q_2 q_1$ ma ne basta 1!

si spende x costruire il sistema
 si dà x distruggere il sistema

se abbiamo una distribuzione di cariche



$$V = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i}$$



$$V_j = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_{ij}}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \sum_{j=i}^n q_j V_j$$

CAMPO elettrico

DIPOLLO
ELETTICO

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N k Q_i \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$$

$$\approx P \rightarrow 0 \Rightarrow \approx |\vec{R}| \gg |\vec{r}_i|$$

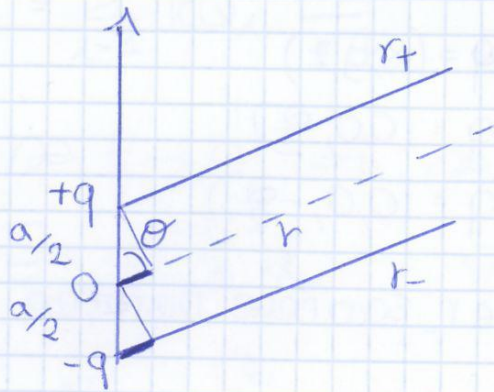
$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}$$

$$V = k \frac{Q}{R}$$

$$V = \sum_{i=1}^N k \frac{Q_i}{r_i}$$

due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti
a costituiscono un dipolo elettrico

se $\overline{OP} \gg a$, cioè $\overline{r} \gg a$



.P
 r_+ e r_- non sono vettori,
 ma distanze

Passo in coordinate sferiche :

$$r - r_+ = \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$r_+ = r - \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$r_- - r = \frac{a}{2} \cos \theta$$

$$r_- = r + \frac{a}{2} \cos \theta$$

quindi:

$$V(x,y,z) = kq \left\{ \frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos \theta} \right\}$$

FACCO
 mcm

$$V(x,y,z) = kq \left\{ \frac{r + \frac{a}{2} \cos \theta - r + \frac{a}{2} \cos \theta}{r^2 - \left(\frac{a}{2} \cos \theta\right)^2} \right\} =$$

$$kq \left\{ \frac{a \cos \theta}{r^2 - \left(\frac{a}{2} \cos \theta\right)^2} \right\} \quad \text{ma } \frac{a}{2} \text{ si può TRASCURARE}$$

$$V(x,y,z) = \boxed{kq \frac{a \cos \theta}{r^2} = V(r, \theta)} \quad \text{DIPOLO}$$

$$V(r, \theta) = kq \frac{a \cos \theta}{r^2} \quad \text{DIPOLO (ANTIFORME)}$$

SIMMETRIA
 CILINDRICA
 INTORNO AL
 SUO ASSE



$$V(r) = k \frac{q}{r}$$

CARICA (ANTIFORME)

SIMMETRIA
 SFERICA



$$V = k \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{r^3}$$

$$\text{ma } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

calcolo le DERIVATE: (ovvero le componenti del campo)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k \frac{x p_x + y p_y + z p_z}{r^3} \right\} = k \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x p_x + y p_y + z p_z) r^{-3} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k \left\{ p_x r^{-3} + (x p_x + y p_y + z p_z) (-3) (r^{-4}) \frac{\partial r}{\partial x} \right\}$$

ma devo trovare:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (\text{fatto già tante volte})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k \left\{ \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^5} x \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k}{r^3} \left\{ p_x - 3 (\bar{p} \cdot \bar{r}) \frac{x}{r^2} \right\}$$

idem x le
altre
componenti!

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k}{r^3} \left\{ p_y - 3 (\bar{p} \cdot \bar{r}) \frac{y}{r^2} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{k}{r^3} \left\{ p_z - 3 (\bar{p} \cdot \bar{r}) \frac{z}{r^2} \right\}$$

stituisco nella formula iniziale del campo!

Se siamo sul piano equatoriale
 $\vec{u}_z(AE) \perp$ al DIPOLO, x cui

$$E(AE) = -k \frac{P}{r^3}$$

COMPO DI UN DIPOLO IN COORDINATE POLARI

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad \text{con}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$V = k \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = \left[-\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{P \cos \theta}{r^2} \right\} - \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{P \cos \theta}{r^2} \right\} - \vec{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{P \cos \theta}{r^2} \right\} \right] k$$

xu V non dipende dall'angolo ϕ

$$\vec{E} = \left\{ -\vec{u}_r P \cos \theta \left(-\frac{3}{r^3} \right) - \vec{u}_\theta \frac{1}{r^3} P (-\sin \theta) \right\} k$$

$$= \left\{ \frac{3P \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{P \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right\} k$$

$$\vec{E}(r, \theta) = k \frac{3P \cos \theta \vec{u}_r + P \sin \theta \vec{u}_\theta}{r^3}$$

FORMULA x
 IL CAMPO IN
 COORDINATE
 POLARI

x far coincidere le 2 formule



$$U = U_+ + U_- = qV(\bar{R}_+) - qV(\bar{R}_-)$$

ma $\bar{R}_+ = \bar{R} + \frac{\bar{a}}{2}$ $\bar{R}_- = \bar{R} - \frac{\bar{a}}{2}$ $\bar{R} = (x, y, z)$ $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$$U = q \left\{ V\left(\bar{R} + \frac{\bar{a}}{2}\right) - V\left(\bar{R} - \frac{\bar{a}}{2}\right) \right\} =$$

$$= q \left\{ V\left(x + \frac{a_x}{2}, y + \frac{a_y}{2}, z + \frac{a_z}{2}\right) - V\left(x - \frac{a_x}{2}, y - \frac{a_y}{2}, z - \frac{a_z}{2}\right) \right\}$$

x Taylor

$$U = q \left\{ V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{a_x}{2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{a_y}{2} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{a_z}{2} - V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{a_x}{2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{a_y}{2} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{a_z}{2} \right\}$$

senza cambiare il meno

$$U = q \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z \right\}$$

ENERGIA POTENZIALE DEL DIPLO

ma $\bar{\nabla} V = \bar{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}$

e $\bar{a} = \bar{u}_x a_x + \bar{u}_y a_y + \bar{u}_z a_z$

allora $\bar{a} \cdot \bar{\nabla} V = a_x \frac{\partial V}{\partial x} + a_y \frac{\partial V}{\partial y} + a_z \frac{\partial V}{\partial z}$

$$U = q \left\{ \bar{a} \cdot \bar{\nabla} V \right\}$$

ma $\bar{p} = q\bar{a}$

$$U = \bar{p} \cdot \bar{\nabla} V$$

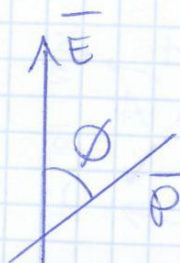
ma $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$

$$U = -\bar{p} \cdot \bar{E}$$

molto importante!

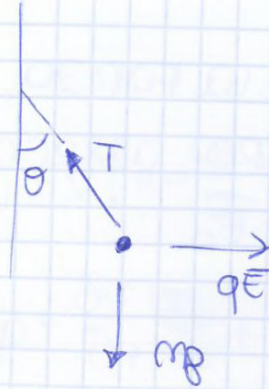
esempio

$$u(\theta) = -pE \cos \theta$$



19 ottobre 2012

PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DELL' ELETROSCOPPIO

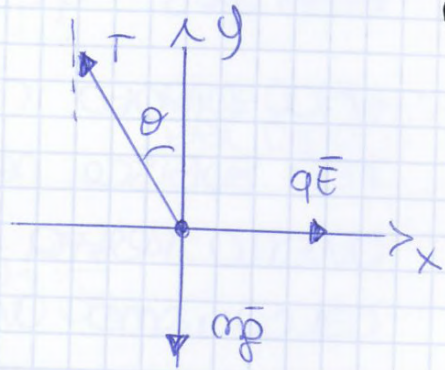


in condizioni di equilibrio

$$\vec{T} + q\vec{E} + m\vec{g} = 0 \quad \text{Somma forze}$$

$$\textcircled{x} \quad qE - T \sin \theta = 0$$

$$\textcircled{y} \quad -mg + T \cos \theta = 0$$



$$T \sin \theta = qE$$

$$T \cos \theta = mg$$

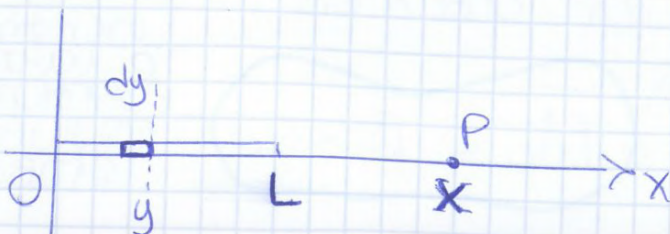
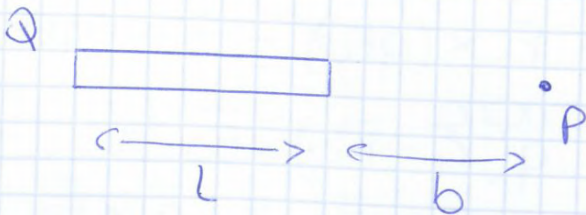
$$\rightarrow \tan \theta = \frac{qE}{mg}$$

$$T = \sqrt{(qE)^2 + (mg)^2}$$

Problema /18/19

COMPITO D'ESAME !!

SBARRA Isolante
CALCOLO \vec{E} in P



- carica uniforme

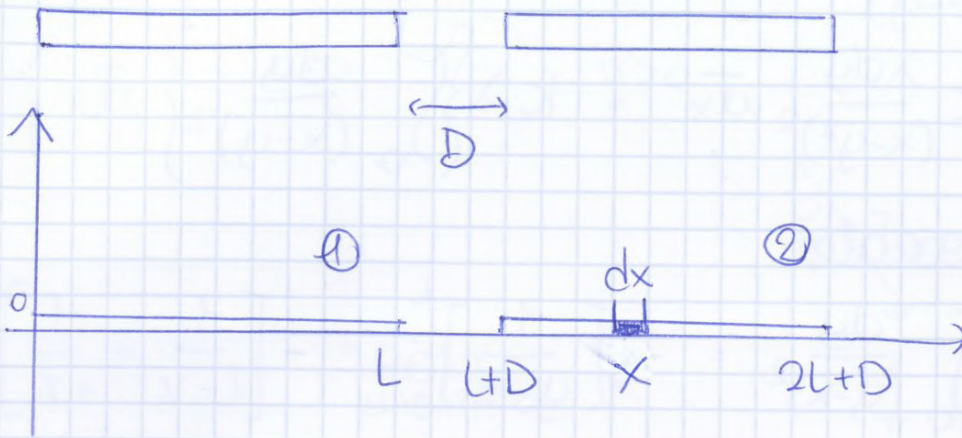
$$- \lambda = \frac{Q}{L}$$

$$- \vec{E} = \int_{\text{CORPO}} k dQ \frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$- \vec{E}(x > L) = ?$$

★ 2 BARRE UGUALI, QUAL È LA FORZA CHE UNA AGISCE SULL'ALTRA (CHE SI ESERCITA TRA LE BARRE)

- CARICA
uniforme



$$dQ = \lambda dx$$

$$d\vec{F} = dQ \vec{E}(x) \quad \text{FORZA DATA ALLA BARRA ① SULL'ELEMENTO } dx \text{ DELLA BARRA ②}$$

VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

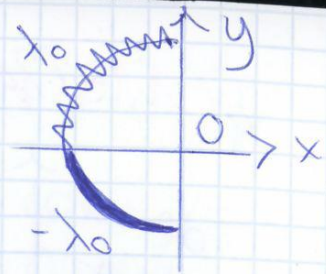
$$\vec{F} = \int_{L+D}^{2L+D} \lambda dx \vec{E}(x) = \int_{L+D}^{2L+D} \lambda dx k \lambda \frac{L}{x(x-L)} \vec{u}_z =$$

$$= k \lambda^2 L \left\{ \int_{L+D}^{2L+D} \frac{dx}{x(x-L)} \right\} \vec{u}_z \quad \text{DECOMPONGO IN PARTI SEMPLICI}$$

$$\frac{1}{x(x-L)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-L}$$

risultato $\vec{F} = k \lambda^2 \text{ en } \left\{ \frac{(L+D)^2}{D(2L+D)} \right\}$

$$\textcircled{2} \quad \lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0 & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ -\lambda_0 & \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \end{cases}$$



SENDO SU INTEGRALI!

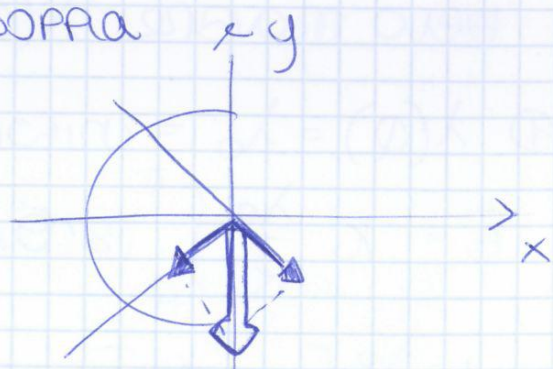
$$\vec{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \frac{\lambda_0}{R} d\varphi (\sin\varphi \vec{u}_x - \cos\varphi \vec{u}_y) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} k \frac{-\lambda_0}{R} d\varphi (\sin\varphi \vec{u}_x - \cos\varphi \vec{u}_y)$$

$$\vec{E} = -k \frac{\lambda_0}{R} [\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y]_0^{\pi/2} + k \frac{\lambda_0}{R} [\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$\vec{E} = -k \frac{\lambda_0}{R} (-\vec{u}_x + \vec{u}_y) + k \frac{\lambda_0}{R} (-\vec{u}_x - \vec{u}_y) =$$

$$= k \frac{\lambda_0}{R} \{ \vec{u}_x - \vec{u}_x - \vec{u}_y - \vec{u}_y \} = -k \frac{\lambda_0}{R} 2 \vec{u}_y$$

la \vec{u}_x si annulla e \vec{u}_y si RADDOPPIA



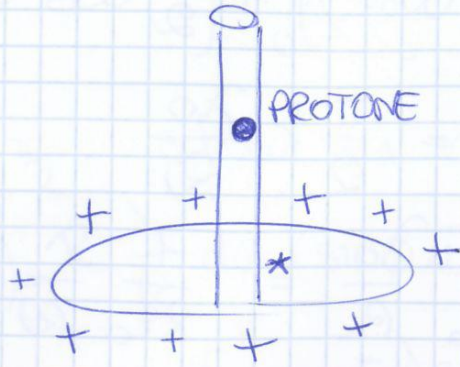
$$\textcircled{3} \quad \lambda(\varphi) = \lambda_0 \sin\varphi$$

$$\vec{E} = \int k \frac{\lambda_0 \sin\varphi}{R} d\varphi (\sin\varphi \vec{u}_x - \cos\varphi \vec{u}_y)$$

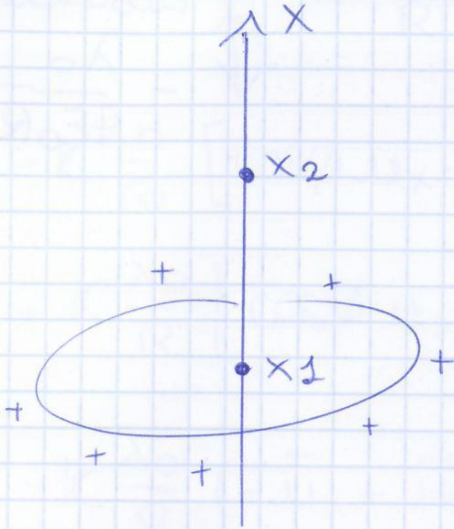
$$\vec{E} = k \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi} (\sin^2\varphi d\varphi \vec{u}_x - \sin\varphi \cos\varphi \vec{u}_y)$$

★ anello uniformemente carico

9.16



Se il protone è ★ nel centro del disco, è in equilibrio ($\Sigma F = 0!!$) ed è in un punto di equilibrio instabile! appena si sposta viene lanciato via



$t = 0 \rightarrow x_1 = 0$
velocità in $x_2 = 2R$?

$R =$ raggio anello
 $\lambda =$ PdL

$r = x + R$

Calcolo il campo sull'asse
trovo $F = qE$
trovo $F = ma$ } Metodo Newton

Campo elettrostat. = conservativo
Calcolo E_p del protone
conserv. Energia

$E_p = q_p V$ energia potenziale

Calcolo il potenziale elettrico in P

$$V = \int_{\text{corpo}} k \frac{dQ}{r} = \int_{\text{corpo}} k \frac{\lambda R d\theta}{r} =$$

$$V = \int_0^{2\pi} k \frac{\lambda R d\theta}{r} = k \lambda \frac{R}{r} \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$V = k \lambda \frac{R}{r} 2\pi \rightarrow V(x) = 2\pi k \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

