NUMERO: 1205 DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Analisi Matematica I + Quiz + Eserc.

Prof. Serra_Cordovez

Struttura del test di Analisi Matematica I

Argomento	Numero domande
Nozioni di base	1
Numeri complessi	1
Limiti	3
Successioni	1
Derivate	2
Sviluppi di Taylor	2
Funzioni in un intervallo	2
Integrali definiti e indefiniti	1
Integrali impropri	1
Equazioni differenziali	1
Teoria su tutto il programma	5

GIUSTA 1 punto
SBAGLIATA -0,15
VUOTA 0

12 G e VUOTE = 18
12 G e 3 SBA = 18
13 G e 5 SBA = 18
13 G e 6 SBA = 18

30 ottobre 20

INSIEMI

- CONCETTO PRIMITIVO / DI BASE
- **SIMBOLOGIA**:
  - A, B, X lettere maiuscole indicano gli insiemi
  - a, b, c lettere minuscole indicano gli elementi di un insieme
  - $\in$ simbolo di appartenenza
  - $\notin$ simbolo di non-appartenenza
  - $\subset$ simbolo "è contenuto" "è sottoinsieme"
  - $\not\subset$ simbolo "non è un sottoinsieme"
  - $\subseteq$ il sottoinsieme coincide con l'insieme
  - $=$ uguali, insiemi con stessi elementi (uno contenuto nell'altro)
  - $\emptyset$ insieme vuoto
  - $\neq$ insiemi diversi: $\exists$ almeno un elemento di A che non è in B, oppure esiste almeno un elemento di B che non è in A

    insiemi **DISGIUNTI**

♥ esempi:

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c\}$ $X = \{b, c, d\}$

$b \in A$ oppure $\{b\} \subset A$ MAI $\rightarrow$ $b \cancel{\subset} A$!

$d \notin A$

$B \subset A$

$X \not\subset A$

$A = B \rightarrow A \subset B$ e $B \subset A$

$A \neq B \rightarrow$ A B ; A B ; A B

DISGIUNTI $\rightarrow$ A B

- Possono essere **DESCRITTI** tramite 1:
  - **elenco** (rappresentazione **esplicita**)
  - **PROPRIETÀ CARATTERISTICA** dei suoi elementi (o predicato logico) (rappresentazione **implicita**) $\rightarrow$ tanti elementi, elementi sconosciuti

♥ esempi:

$A = \{a, b, c\}$

$P(x)$: x è un numero pari

$\{x \mid P(x)\}$ o $\{x : P(x)\}$ $\rightarrow$ insieme di x, tale che $P(x)$ è vera

infatti $\{x \in \mathbb{N} \,/\, 2x+1=0\} = \emptyset$
$\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x+1=0\} = \{-\frac{1}{2}\}$

- passare da una rappresentazione implicita a una esplicita vuol dire risolvere un' **equazione**

- **proprietà** delle operazioni:
  - booleane: $A \cap CA = \emptyset$, $A \cup CA = X$
  - commutativa, associativa, distributiva ($\cap$ e $\cup$)
  - leggi di De Morgan: $C(A \cap B) = CA \cup CB$
    $C(A \cup B) = CA \cap CB$

LOGICA

- **proposizione logica**: é un enunciato a cui si può sempre attribuire un valore di verità o falsità

esempi:
$2 < 3$ si propone → vera
$2 > 3$ si propone → falsa
$2 >$
$2+3$ } sintatticamente sbagliate

- proposizione $P(x)$ → x é una variabile libera

ex: $x > 3$ non si può dire se V o F xk x é una variabile

- tutte le variabili devono essere quantificate
- **quantificare le variabili**: dire a quali x variabili ci si sta riferendo
- **quantificatori**:
  - esistenziale: $\exists$ esiste, per qualche
  - universale: $\forall$ qualunque, per ogni

- bisogna sempre far attenzione all' **ordine** dei quantificatori

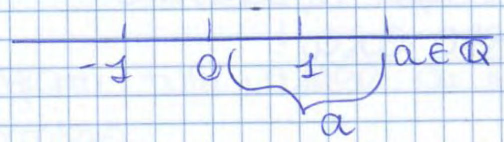
esempi:
$P(x)$: x é dispari
$\exists x \; P(x)$ → vera
$\forall x \; P(x)$ → falsa } corrette sintatticamente
$\exists x \; x > 3$ → vera
$\forall$ ... → falsa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 526

- **insieme $\mathbb{Q}$**

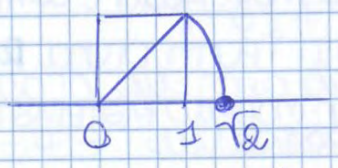
- il + piccolo razionale positivo non esiste
  dimostrazione per assurdo
  $\exists$ il più piccolo numero razionale positivo : x
  faccio $\frac{x}{2}$ è più piccolo di x

- rappresento sulla retta



- i numeri razionali hanno espansioni decimali
  - finite
  - periodiche

sulla retta ci sono dei buchi



$\leadsto$ PITAGORA

gli infiniti numeri razionali non sono abbastanza

- $\boxed{\text{teorema}}$ NON ESISTE ALCUN NUMERO RAZIONALE r TALE CHE $r^2 = 2$
  - $NOT\ (\exists x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2)$
  - $\forall x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 \neq 2$

- DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO :
  $\exists r \in \mathbb{Q} \,/\, r^2 = 2$

$r = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

posso supporre che p, q NON sono entrambi **pari**, perché sennò semplifico la frazione

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \rightarrow p^2$ è pari, xk è 2 volte un numero

$\rightarrow p$ è pari, i quadrati dei pari sono pari

$\rightarrow p = 2k$ perché è pari, con $k \in \mathbb{Z}$

$p^2 = 2q^2 \rightarrow 4k^2 = 2q^2 \rightarrow q^2 = 2k^2 \rightarrow q^2$ è pari
q è pari

ASSURDO

$\hookrightarrow \sqrt{2}$ non è un numero razionale
$\hookrightarrow$ idem π il fattore di proporzionalità tra circonferenza e diametro non è razionale

} esempi di non commensurabilità razionale

VALORE ASSOLUTO

10 Ottobre 2011

DEF LA DISTANZA DI UN NUMERO DA ZERO SI CHIAMA VALORE ASSOLUTO / MODULO DEL NUMERO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|espr| = \begin{cases} espr & \text{se } espr \geq 0 \\ -espr & \text{se } espr < 0 \end{cases}$$

Infatti: tutti i numeri di $\mathbb{R}$ possono essere scritti su una retta completa

SCELGO:
- UNITÀ DI MISURA
- VERSO

$-1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Cerco la distanza di un numero da 0:
- $-4 \rightarrow$ distanza 4
- $4 \rightarrow$ distanza 4
- $x \rightarrow$ distanza da zero? esprimo la distanza usando x, ovvero il valore assoluto di x ($|x|$)

- $|x-y|$ = DISTANZA DI x DA y

esempio:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -x+2 & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \rightarrow = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

PROPRIETÀ

- $|x| \geq 0 \rightarrow$ la distanza è positiva per definizione
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

esempio:

se $x<0$ e $y>0 \rightarrow |x \cdot y| = -xy = -x|y| = |x| \cdot |y|$

- $|x^2| = |x|^2$
- $x \leq |x|$

esempio:

se $x>0 \rightarrow x=x$

se $x<0 \rightarrow -x<x$

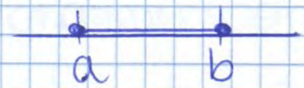
- $-x \leq |x|$

RIPASSO sugli INTERVALLI

- $[a, b]$

  INTERVALLO **CHIUSO** DI ESTREMI a, b

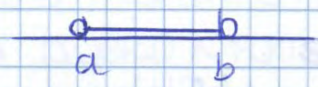
  $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$



- (a, b) v $]a, b[$

  INTERVALLO **APERTO** DI ESTREMI a, b

  $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$



- $[a, b)$; $(a; b]$ ecc....

- INFINITO

  $[a; +\infty)$ v $(-\infty; b]$ → sempre "(aperto" con $\pm\infty$

$\pm\infty$ non è un numero: non può essere contenuto negli intervalli

PROPRIETÀ di LIMITATEZZA

PROPRIETÀ DI SOTTOINSIEMI DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$

- essere limitati superiorm. / inferiorm.
  avere dei maggioranti / minoranti

  } PRENDIAMO UN SOTTOINSIEME A di → $A \subset \mathbb{R}$

$\boxed{\text{DEF.}}$ SI DICE CHE A è **LIMITATO SUPERIORMENTE** se esiste $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ a \leq M, \forall a \in A$

- esiste un numero reale M + grosso di tutti i numeri a
- A non si estende all'infinito

$\boxed{\text{DEF.}}$ Si dice che A è **LIMITATO INFERIORMENTE** se esiste $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ m \leq a, \forall a \in A$

- esiste un numero reale m + piccolo di tutti i numeri a

$\boxed{\text{DEF}}$ I NUMERI M tali che $a \leq M, \forall a \in \mathbb{R}$ SI CHIAMANO **MAGGIORANTI** di A

$\boxed{\text{DEF}}$ I numeri **m** tali che $m \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$ si chiamano **MINORANTI** di A

- $[4;12)$

MAGGIORANTI: 13, 14, 15, 16...

massimo ?!? $\boxed{\text{NO}}$

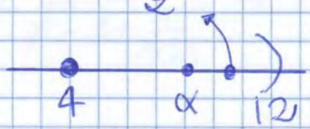
DIMOSTRIAMO!

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE ESISTA IL MASSIMO DI $[4,12)$ E SIA $= \alpha$

CERCHIAMOLO IN 2 CASI:

① PUÒ ESSERE $\alpha < 12$? NO, PERCHÉ NON SAREBBE 1 MAGGIORANTE

$\alpha < \frac{\alpha+12}{2} < 12$ → ABBIAMO TROVATO UN PUNTO MAGGIORE DI ALFA, OVVERO IL PUNTO MEDIO TRA α E 12 → $\frac{\alpha+12}{2}$



QUINDI → $\forall \alpha < 12$, α NON È UN MAGGIORANTE, PERCHÉ RIMANE DELLO SPAZIO TRA α E 12

② PUÒ ESSERE $\alpha \geq 12$? NO, PERCHÉ NON SONO NUMERI $\in [4;12)$

QUINDI → $[4;12)$ **non HA IL MASSIMO!**

★ AVERE UN ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE → PRENDIAMO $A \subset \mathbb{R}$

$\boxed{\text{DEF}}$ SIA $A \subset \mathbb{R}$ **LIMITATO SUPERIORMENTE**, ALLORA IL **minimo dei MAGGIORANTI** DI A SI CHIAMA **ESTREMO SUPERIORE** DI A → $\sup A$

$\boxed{\text{DEF}}$ SIA $A \subset \mathbb{R}$ **LIMITATO INFERIORMENTE**, ALLORA IL **massimo dei MINORANTI** DI A SI CHIAMA **ESTREMO INFERIORE** DI A → $\inf A$

NOTA: POSSONO NON ESISTERE!

- **CARATTERIZZA IL supA:**

$s = \sup A$ ⟺ SE E SOLO SE

① $\forall a \in A,\ a \leq s$ → s È UN MAGGIORANTE DI A

② $\forall r < s,\ \exists a \in A \ / \ a > r$ → PER OGNI NUMERO $<$ DI s, TROVO UN NUMERO DI A $>$ DI QUESTO NUMERO

→ OGNI NUMERO $< s$ non È UN MAGGIORANTE

→ s È IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI DI A, OVVERO L'ESTREMO SUPERIORE

(b) $\forall r < 1, \exists a \in A / a > r$?

PRENDO UN $r < 1$

DEVO TROVARE UN n TALE CHE $\frac{n}{n+1} > r$ → RISOLVO

$$\frac{n}{n+1} > r$$

$$n > rn + r$$

$$n(1-r) > r$$

$n > \frac{r}{1-r}$ → QUINDI DEVO TROVARE UN n TALE CHE $n > \frac{r}{1-r}$

PRENDO UN NUMERO $r < 1$, OVVERO $r = 1 - \frac{1}{100}$ E SOSTITUISCO

$$n > \frac{1-\frac{1}{100}}{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{100}} \rightarrow n > \frac{\frac{99}{100}}{\frac{1}{100}} \rightarrow n > 99$$

conseguenze:

→ se A **non** è **limitato** superiormente (NON HA MAGGIORANTI non ha massimo) allora $\sup A = +\infty$

→ se A **non** è **limitato** inferiormente allora $\inf A = -\infty$

→ se A ha il massimo: $\max A = \sup A$

→ se A ha il minimo: $\min A = \inf A$

→ può non $\exists$ l'estremo sup/inf

esempio:

$A: \{ q \in \mathbb{Q} / q^2 < 2 \}$

$\mathbb{Q}$ = razionali

A = non ha sup A, l'estremo superiore

MAGGIORANTI: 3, 4, 5...

NESSUN $q \in \mathbb{Q} / q^2 < 2$ è un minimo dei maggioranti

→ POTREBBE ESSERLO $\sqrt{2}$, ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

COMPLETEZZA di $\mathbb{R}$

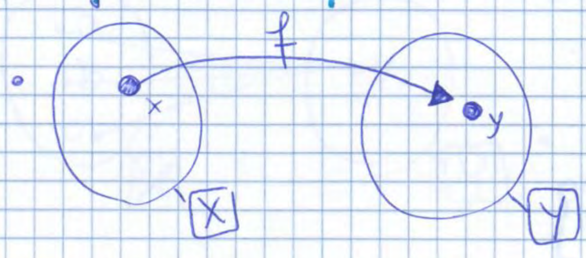
PROPRIETÀ: OGNI SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORMENTE HA L'ESTREMO SUPERIORE

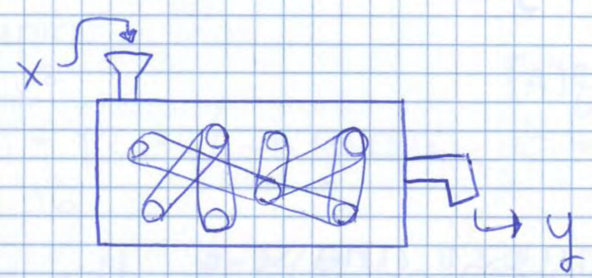
• QST PROPRIETÀ NON VALE CON L'INSIEME $\mathbb{Q}$, PERCHÉ HA DEI BUCHI

FUNZIONI

DEF. una funzione tra 2 insiemi X e Y è una legge che **associa** ad ogni elemento del 1° insieme ($\forall x \in X$) al più / uno e uno solo un elemento del 2° insieme ($y \in Y$)

Modi per rappresentare una funzione:

- $f: X \to Y$
- 

- 

x viene trasformata dagli ingranaggi in y

♥ esempio:

$X = \{\text{studenti}\}$

$Y = \mathbb{N}$

AD OGNI STUDENTE $\xrightarrow{\text{associo}}$ un numero di matricola

$f: X \to Y$

DOMINIO

dom(f) è il sottoinsieme di X dove è definita f, ovvero dove la funzione f può essere calcolata

♥ esempio:

$f(x) = \sqrt{x}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\text{dom}(f) = [0; +\infty) \subset \mathbb{R}$

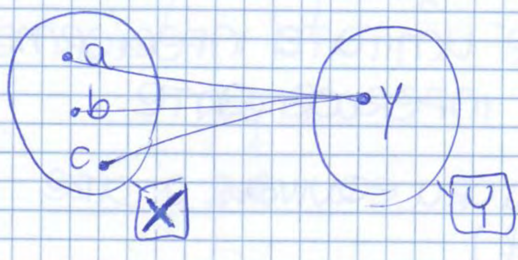
IMMAGINE

Im(f) è il sottoinsieme di tutti i valori che una funzione prende, ovvero $f(x)$

CONTROIMMAGINE

- Da $y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x \in dom(f) \,/\, f(x) = y\}$,
  ovvero $f^{-1}(y)$ è l'insieme dei punti x con immagine y

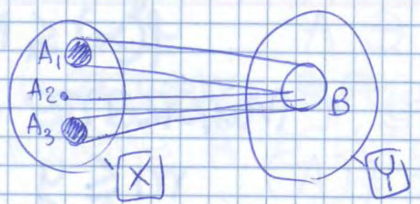
- con $f(x) = y$
  se y è immagine di x, tramite f
  allora x è controimmagine di y, "



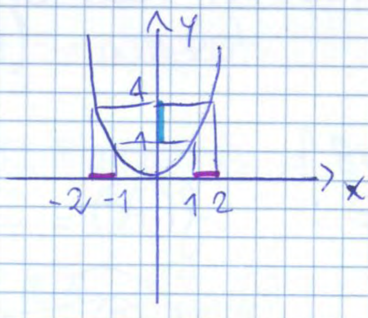
- y è immagine di a, b, c
  $f(a) = f(b) = f(c) = y$
- a, b, c sono controimmagine di y
  $f^{-1}(y) = \{a, b, c\} \subset X$

♥ esempio:
$f(x) = x^2$
$f^{-1}(4) = \{2; -2\} \rightarrow$ risolvo $x^2 = 4$ $\quad x = \pm 2$
$f(4) = 16$

- Da $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in dom(f) \,/\, f(x) \in B\}$

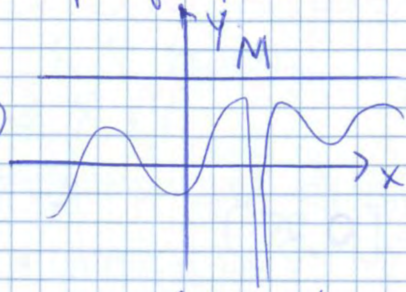


- Gli insiemi A_1, A_2, A_3 sono controimmagine dell'insieme B
  $f^{-1}(B) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

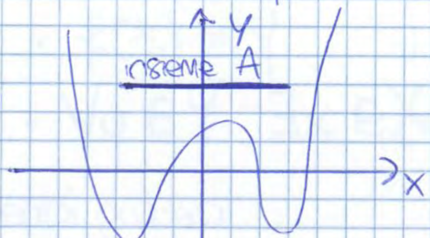


♥ esempio:
$f(x) = x^2$
$f([1,2]) = [1,4]$
$f^{-1}([1,4]) = [1,2] \cup [-2,-1]$
$\rightarrow$ risolvo : $1 \leq x^2 \leq 4$

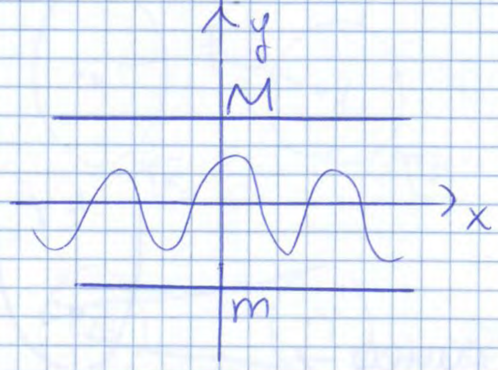
♥ esempi grafici:

① 

la funzione è limitata superiormente su $\mathbb{R}$
tutti i valori $f(x) \le M$
M = maggiorante
$[M, +\infty)$ = insieme dei maggioranti

② 

la funzione è limitata superiormente su A
$\forall x \in A$, $f(x) \le M$

③ 

la funzione è limitata (sup. e inf) su $\mathbb{R}$
ex: sen x, cos x

avere un estremo superiore / inferiore → l'estremo sup c'è sempre, xk siamo nell'insieme $\mathbb{R}$
avere un massimo / minimo

DEF L'**estremo superiore** della funzione f **su** un insieme **A** è definito:

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \text{numero!}$$

DEF L'**estremo inferiore** della funzione f **su** un insieme **A** è definito:

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \text{numero!}$$

DEF Il **massimo** della funzione **su A** è l'estremo superiore se esso appartiene ad A:

$$\text{se } \sup_A f \in A \rightarrow \sup_A f = \max_A f$$

DEF Il **minimo** della funzione **su A** è l'estremo inferiore, se esso $\in A$: **se** $\inf_A f \in A \rightarrow \inf_A f = \min_A f$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 526

FUNZIONE SURIETTIVA

DATI X, Y INSIEMI (CASO + ASTRATTO)
$f : X \to Y$

DEF $f : X \to Y$ SI DICE **SURIETTIVA** SE

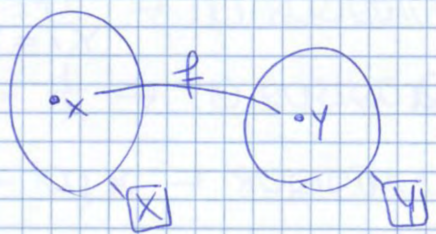
- $Im(f) = Y$
- $f(X) = Y$

} L'IMMAGINE DI f COINCIDE CON L'INSIEME Y

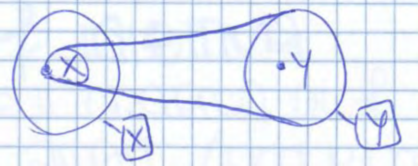
- $\forall y \in Y, \exists x \in X \,/\, f(x) = y$ } OGNI y HA ALMENO UNA CONTROIMMAGINE

♥ esempi grafici:

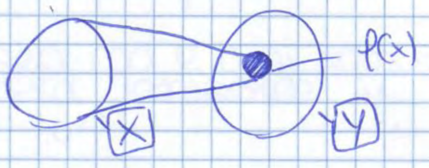
CARATTERISTICHE:
f SURIETTIVA:
- SEMPRE CRESCENTE
- RETTA

(1) 

$f : X \to Y$

(2) 

SURIETTIVA

(3) 

NO SURIETTIVA

♥ esempi:

- $f(x) = 2x + 3$

DATO $y \in \mathbb{R}$ TROVO $x \,/\, f(x) = y$
$2x + 3 = y$
$x = \frac{y-3}{2}$ HO TROVATO x

VERIFICO:
PRENDO $y = 7$
ESISTE x TALE CHE $f(x) = 7$
$x = \frac{7-3}{2} = 2$
SI ESISTE $\Rightarrow$ LA FUNZIONE È SURIETTIVA

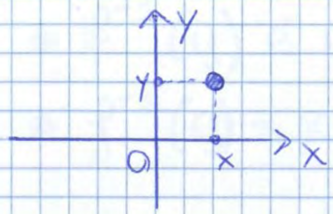
- $f(x) = x^2$

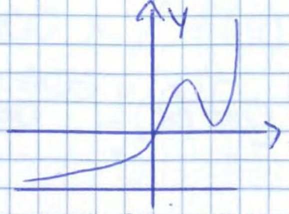
$Im(x^2) = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}$
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = y$? NO
LA FUNZIONE NON È SURIETTIVA!

DAL GRAFICO SI CAPISCE!

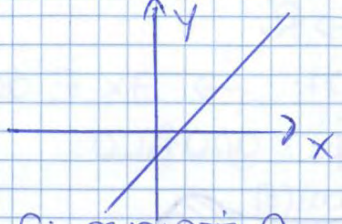
- **f SURIETTIVA**

SE IL GRAFICO DI f INTERSECA OGNI POSSIBILE RETTA ORIZZONTALE / INTERSECA ALMENO UN PUNTO



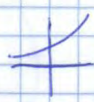


NO SURIETTIVA



SI SURIETTIVA

$y = e^x \rightarrow$ NO SURIETTIVA



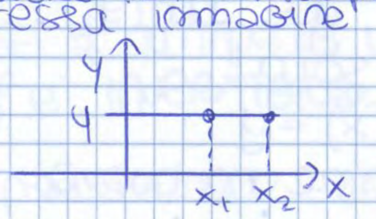
$y = \frac{1}{x} \rightarrow$ NO SURIETTIVA

$y = \log x \rightarrow$ SURIETTIVA

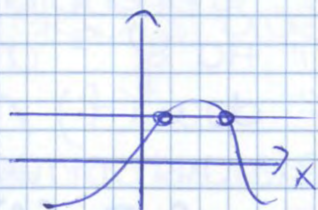
- **f INIETTIVA**

SE IL GRAFICO DI f INTERSECA OGNI RETTA ORIZZONTALE IN AL PIÙ / UNO E UNO SOLO PUNTO

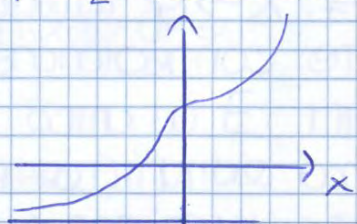
OVVERO NON È MAI POSSIBILE CHE 2 PUNTI $x_1 \ldots x_2$ ABBIANO LA STESSA IMMAGINE y



NO INIETTIVA



NO INIETTIVA



INIETTIVA

$y = e^x \rightarrow$ INIETTIVA

$y = \log x \rightarrow$ INIETTIVA

PER LE COSE DIFFICILI...

$$\underbrace{x^3 + 6\sqrt{x} + x^5 + 3}_{f(x)} = b$$

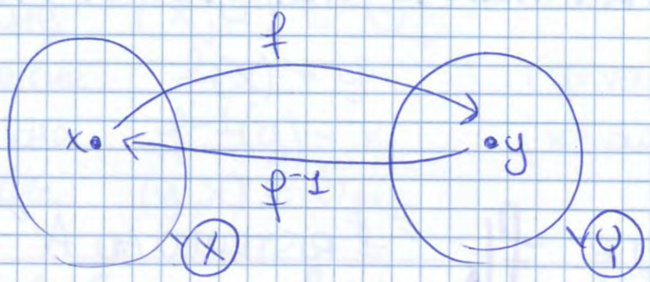
$f(x) = b$ DATO $b \in \mathbb{R}$

- f SURIETTIVA $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}$, L'EQUAZIONE HA ALMENO UNA S. $\Rightarrow$ PROBLEMA DI ESISTENZA
- f INIETTIVA $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}$, L'EQUAZ. HA AL PIÙ UNA SOLUZIONE $\Rightarrow$ PROBLEMA DI UNICITÀ

La funzione inversa

DEF Sia $f: X \to Y$ iniettiva, definisco la funzione inversa
$f^{-1}: Im(f) \to X$ se

- $f^{-1}(y)$ é l'unico $x \,/\, f(x)=y$
- $f^{-1}(y)=x \overset{\text{se e solo se}}{\iff} f(x)=y$



[si capisce che non posso trovare l'inversa di una funzione che non è iniettiva → vedi disegno pagina a sx]

attenzione a non confondere le 2 notazioni:
$f^{-1}(y)=\{x\}$ → vuol dire che ogni y ha 1 sola controimmagine x
↳ questo di solito si scrive $f^{-1}(y)=x$

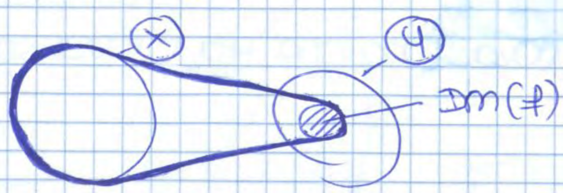
- conseguenze:

→ se f ammette l'inversa si dice anche che f è **invertibile**

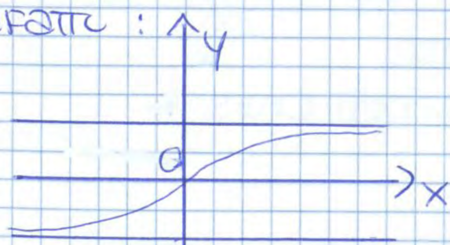
- precisazione: (a causa di ciò che dicono i libri..)

BASTA che la funzione sia iniettiva per ammettere l'inversa, mentre alcuni credono che la funzione debba essere sia iniettiva che suriettiva (e si sbagliano..)

Funzione suriettiva
↳ non serve!



infatti:

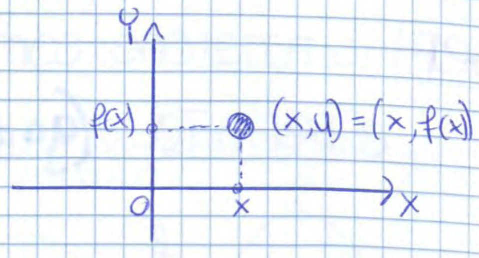


la funzione $y=\sqrt[3]{x}$ è
- iniettiva (sì)
- suriettiva (no)

→ ma possiede l'inversa.
solo la sua funzione inversa non è definita su tutto $\mathbb{R}$

Il grafico della funzione inversa

Ricordo la definizione di grafico:



- $G=\{(x,y)\in X\times Y \,/\, f(x)=y\}$ oppure
- $G=\{(x,f(x)) \,/\, x\in \text{dom}(f)\}$

Prendo f invertibile
e quindi considero anche $f^{-1}(y)$ l'inversa

Dire che $(x,y)\in G_f$

vuol dire che $f(x)=y$ (y = valore di f su x)

e anche che $f^{-1}(y)=x$ (x = valore di f^{-1} su x)

e quindi che $(y,x)\in G_{f^{-1}}$

$$\boxed{(x,y)\in G_f \iff f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x \iff (y,x)\in G_{f^{-1}}}$$

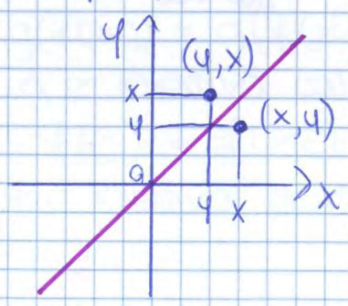
- Quindi un punto $(x,y)\in G_f \iff (y,x)\in G_{f^{-1}}$
- Il grafico della funzione inversa ovvero $G_{f^{-1}}$ è il grafico di f riflesso attraverso la <u>bisettrice</u> 1°/3° quadrante

♥ esempi:

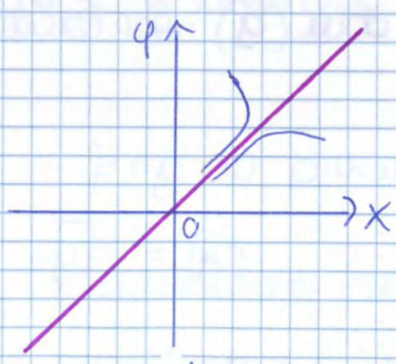
$f(x)=x^3 \rightsquigarrow (1,1),(2,8)\in G_f$

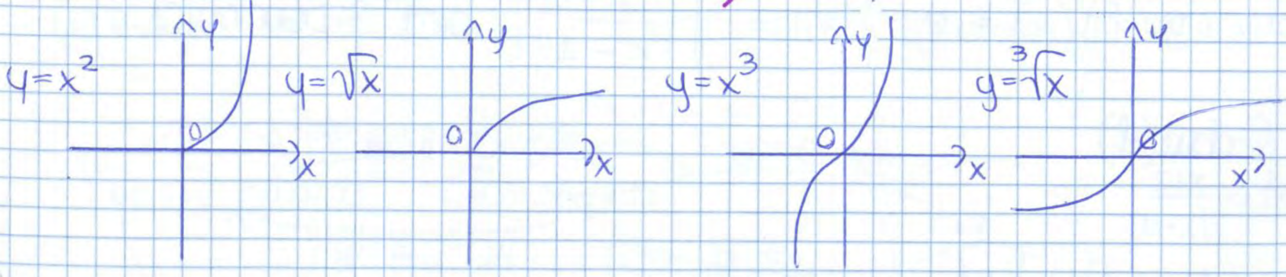
$f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y} \rightsquigarrow (1,1),(8,2)\in G_{f^{-1}}$

♥ esempi grafici:



I punti sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° quadrante





ora $f(x)$ deve stare in dom(g) ovvero in $[0,+\infty)$ quindi:

$\frac{x+2}{|x-1|} \in [0,+\infty)$ ovvero:

$\frac{x+2}{|x-1|} \geq 0$ soluzione: $x \geq -2$ (so che $|x-1|$ è sempre positivo)

riassumendo:

① $x \neq 1$

② $x \geq -2$

① ∪ ②

$$\text{dom}(g \circ f) = [-2,1) \cup (1,+\infty) = [-2,+\infty) - \{1\}$$

in realtà la funzione composta la utilizziamo sempre, anche in calcoli molto semplici come:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, quanto è $f(4)$?

funzione composta: $f(x) = x^2$, $g(y) = \frac{1}{y}$ $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2}$

infatti $x = 4 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}$

- relazioni:

- $g \circ f$ e $f \circ g$: non è detto che se esiste uno allora esiste anche l'altro

- $g \circ f \neq f \circ g$

se sono crescenti → la composta è decrescente

- se f, g sono iniettive $\Rightarrow$ $g \circ f$ è iniettiva

$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

g è iniettiva quindi

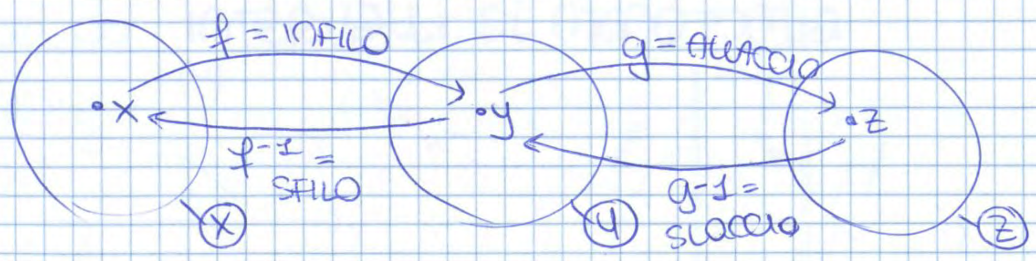
$f(x_1) = f(x_2)$

f è iniettiva quindi

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ ∃ la funzione inversa!

- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (NOTA: si è scambiato l'ordine!)



ESEMPIO delle SCARPE!

FUNZIONI MONOTONE

DEF la funzione f si dice **crescente su un insieme A** se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$

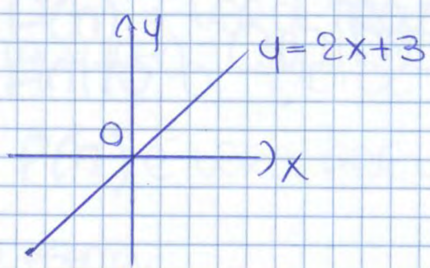
DEF f si dice **strettamente crescente** su un insieme A se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$

DEF la funzione f si dice **decrescente su un insieme A** se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$

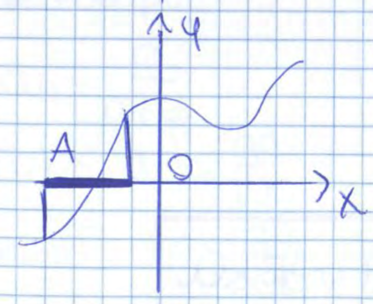
DEF f si dice **strettamente decrescente** su A se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$

➡ se f è crescente o decrescente su un insieme A $\Rightarrow$ la funzione f è **monotona**

♥ esempi:

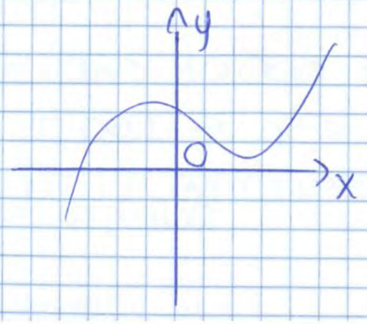


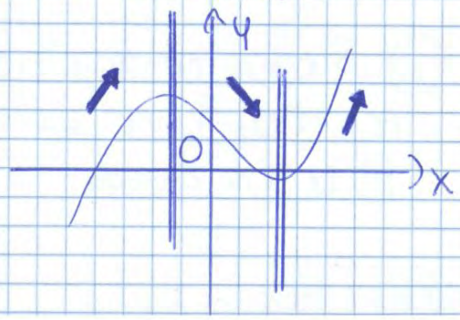
funzione strettam. crescente su $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ f monotona



funzione strettam. crescente su A

se una funzione non è crescente o decrescente su $\mathbb{R}$, cerco gli **intervalli di monotonia**





le successioni

sono funzioni il cui dominio è particolare:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

si può scrivere $<$ $f(n)$: non usato
a_n : **elemento n-esimo**

- n è l'indice
- $n \in \mathbb{N}$
- n conta il posto nella successione

esempi:

$a_n = n$ ovvero $f(n) = n$ ovvero $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$

$a_n = \frac{n}{n+1}$ ovvero $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots$

$b_n = (-1)^n \cdot n$ ovvero $0, -1, 2, -3, 4, -5 \ldots$

- GRAFICO: è formato dai puntini $(n, a_n) = (n, f(n))$
- si dice che una proprietà $P(n)$ è **vera definitivamente** se è vera per ogni n da un certo punto in poi
- $P(n)$ è vera **tranne che** per il numero **finito** di indici n
- $P(n)$ è vera per un numero ∞ di indici n

3 cose che dicono la stessa cosa !!

esempi:

- $a_n = \frac{n}{n+1}$

$P(n) = a_n > \frac{99}{100}$ proprietà definitivamente vera! perché?

perché $a_n > \frac{99}{100} \to \frac{n}{n+1} > \frac{99}{100} \to 100n > 99n + 99 \to n > 99$

perché $n > 99$ — cioè è una proprietà vera da un certo punto n in poi e non abbiamo trovato l'n

- $a_n = n^2$

$P(n) = a_n > 10\,000$ proprietà definit. vera? sì infatti...

$a_n > 10\,000 \to n^2 > 10\,000 \to \cancel{n < -100}$ o $n > 100$

quindi $P(n)$ è definit. vera perché $n > 100$ — perché $n \in \mathbb{N}$!!!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 526

$\forall \varepsilon \quad |a_n - 1| < \varepsilon$

ORA... VOGLIO CHE QUESTA PROPRIETÀ SIA DEFINITIVAMENTE VERA QUINDI...

LIMITI delle successioni

DEF SI DICE CHE a_n TENDE / CONVERGE / HA LIMITE a un numero reale ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) se

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; / \; |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ — TRADUZIONE DI "DEFINITIVAMENTE"
- $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$

● OSSERVAZIONI:

- n DIPENDE DA ε (cambiando ε, cambia n)
  INFATTI X SOTTOLINEARE IL SIGNIFICATO SPESSO SI SCRIVE
  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon \; / \; |a_n - \ell| \leq \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0$: ci sono infinite proprietà, non una sola!

ESERCIZI:

① VERIFICO CHE $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_0 \; \forall n \geq n_0 \; / \; |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ (LA NOSTRA INCOGNITA È n_0)

$\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_0 \; \forall n \geq n_0 \; / \; \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \leq \varepsilon$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1}\right| \leq \varepsilon \rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| \leq \varepsilon \rightarrow \frac{1}{|n+1|} \leq \varepsilon$$

TOLGO IL VALORE ASSOLUTO:

$$-\varepsilon \leq \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \rightarrow$$

① $\frac{1}{n+1} \geq -\varepsilon$ sempre! so che $n+1$ è sempre positiv

② $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$

$n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$

PRENDO UN ESEMPIO DI ε: $\varepsilon = \frac{1}{100}$ e SOSTITUISCO

$n \geq \frac{1}{\frac{1}{100}} - 1 \rightarrow n \geq 99$

QUINDI LA PROPRIETÀ È DEFINITIVAM. VERA!

(4) VERIFICO $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+6n+2}{4n^4+5n^2+3} = \frac{3}{4}$

È VERO CHE $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \,/\, \forall n \geq n_\varepsilon, \left|\frac{3n^4+6n+2}{4n^4+5n^2+3} - \frac{3}{4}\right| \leq \varepsilon$

RISOLVO

$\left|\frac{3n^4+6n+2}{4n^4+5n^2+3} - \frac{3}{4}\right| \leq \varepsilon \rightarrow \left|\frac{\cancel{12n^4}+24n+8-\cancel{12n^4}-15n^2-9}{4(4n^4+5n^2+3)}\right| \leq \varepsilon$

$\left|\frac{-15n^2+24n-1}{16n^4+20n^2+12}\right| \leq \varepsilon$

$|-15n^2+24n-1| \leq \varepsilon \rightarrow$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SUL VALORE ASSOLUTO

$|-15n^2+24n-1| \leq 15n^2+24n+1 \leq 15n^2+24n^2+n^2 \leq 40n^2$

$\frac{40n^2}{16n^4+20n^2+12} \leq \frac{\cancel{40}^{5}\cancel{n^2}}{\cancel{16}_{2}n^{\cancel{4}\,2}} = \frac{5}{2n^2} \leq \varepsilon \qquad \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{5}\varepsilon$

$n^2 \geq \frac{2}{5\varepsilon} \qquad n \geq \sqrt{\frac{2}{5\varepsilon}}$

(5) VERIFICO CHE:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0 \rightarrow$ FALSO ma dov'è che non funziona più?

$\forall \varepsilon > 0, \exists ? n_\varepsilon \,/\, \forall n \geq n_\varepsilon, \left|\frac{n}{n-1} - 0\right| < \varepsilon$

RISOLVO

$\left|\frac{n}{n-1}\right| < \varepsilon \qquad -\varepsilon < \frac{n}{n-1} < \varepsilon$

$\frac{n}{n-1} > -\varepsilon$ SEMPRE $\forall n$

$\frac{n}{n-1} < \varepsilon$ STUDIO

$\frac{n}{n-1} < \varepsilon \qquad n < \varepsilon n - \varepsilon$

$n - \varepsilon n < \varepsilon \qquad n(1-\varepsilon) < \varepsilon \qquad n < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ SBAGLIATO!

DEVO SEMPRE TROVARE $n >$ TOT

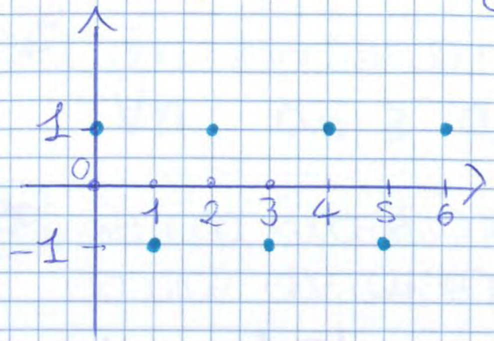
PERCHÉ $n <$ TOT NON VUOLE PIÙ DIRE "DEFINITIVAMENTE".

non vuol più dire che la proprietà è vera da un certo punto in poi!

SUCCESSIONI senza LIMITI

① $a_n = (-1)^n$

$n = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots$
$a_n = 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1 \ldots$



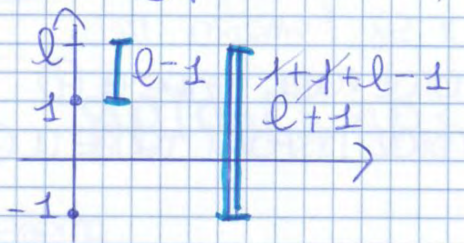
FACCIAMO FINTA CHE ESISTA IL LIMITE:

$\lim_{n \to \infty} a_n = l \qquad \lim_{n \to \infty} (-1)^n = l$

$l \in \mathbb{R}$

CERCO QUALE PUÒ ESSERE l:

- $l > 1$ (NO) perché $\forall n$, $|a_n - l| > ?$



DISTANZA > COSA? DI QUALCOSA DI FISSO!!

$|a_n - l| > l - 1$

$a_n = \pm 1$

$|1 - l| > l - 1$

$|-1 - l| > l - 1$

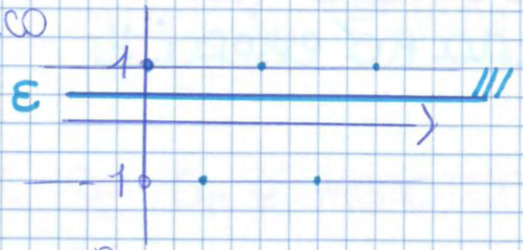
- $l = 1$ (NO)

$|a_n - 1| = |(-1)^n - 1| \begin{cases} \to 0 \\ \to 2 \end{cases}$

TUTTE LE DISTANZE DI a_n DA 1 SONO O UGUALI A ZERO, O UGUALI A DUE: → NON SONO DISTANZE SEMPRE PIÙ PICCOLE!!

↳ $|a_n - 1| < \varepsilon$ NON è VERA DEFINITIVAMENTE!

dal grafico



→ TUTTI I VALORI DOVREBBERO ESSERE IN QUESTA STRISCIA... INVECE!

QUINDI $(-1)^n$ NON HA LIMITE!

$\lim_{n \to \infty} (-1)^n = \nexists$ NON ESISTE $\qquad \lim_{n \to \infty} (-1)^n \cdot n = \nexists$

come $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}(n) = \lim_{n \to \infty} \cos(n) = \nexists$

DEF una successione si dice **CRESCENTE** se
$\forall n, \ a_n \leq a_{n+1}$ STRETTAMENTE CRESCENTE $a_n < a_{n+1}$

DEF una successione si dice **DECRESCENTE** se
$\forall n, \ a_n \geq a_{n+1}$ STRETTAMENTE DECRESCENTE $a_n > a_{n+1}$

DEF se una successione a_n é crescente o decrescente, si dice che a_n é **MONOTONA**

TEOREMA SE a_n É MONOTONA IL $\lim_{n \to \infty} a_n$ ESISTE!
E PUÓ essere FINITO O INFINITO

DEF una successione a_n si dice **LIMITATA** (nel senso dell' insieme) se il

$\sup |a_n| = \sup \{ |a_n| \text{ tale che } n \in \mathbb{N} \}$ **é FINITO** $\neq \infty$

esempi:

- $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad 0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \rightarrow a_n$ é limitata!
- $a_n = (-1)^n$ $\quad -1 \leq (-1)^n \leq 1 \rightarrow a_n$ é limitata!
- $a_n = n^2$ $\quad 0 \leq n^2 < +\infty \rightarrow a_n$ NON é limitata!

TEOREMA se a_n é monotona e LIMITATA $\Rightarrow$
$\lim_{n \to \infty} a_n$ ESISTE ED é FINITO

implica

TEOREMA se a_n é monotona e NON limitata $\Rightarrow$
$\lim_{n \to \infty} a_n$ ESISTE ED é ∞

$\exists a_{n_0} / \varepsilon < a_{n_0}$

$\exists a_{n_0} \rightarrow$ TROVO a_{n_0} CON LA DEFINIZIONE DI SUP a_n

INFATTI a_n È CRESCENTE : $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n_0}$

$\hookrightarrow \forall n \geq n_0$, $a_n \geq \ell - \varepsilon$, $\forall n$ $a_n \leq \ell$ $\rightarrow$ HO TROVATO LA DEFINIZIONE DI LIMITE!

♡ **esempio impo:**

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a_n è una successione < MONOTONA (crescente) / LIMITATA

n : 1 , 2 , 3 ...
a_n : 2 , $\frac{9}{4}$, $\frac{64}{27}$ ...

SI PUÒ DIMOSTRARE CON DIVERSI CALCOLI CHE a_n È DAVVERO MONOTONA E LIMITATA $\rightarrow$ QUINDI:

a_n POSSIEDE IL LIMITE CHE TENDE $\rightarrow +\infty$ ED È FINITO

$$\exists \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

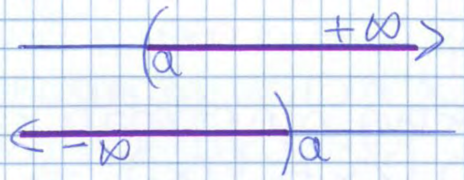
DEFINIZIONE di e

e è un NUMERO IRRAZIONALE : $e = 2,718...$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

DEF SI DICE **INTORNO** di $\pm\infty$, PER DEFINIZIONE, OGNI INTERVALLO $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ / OGNI INTERVALLO $(-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$

$$I_a(+\infty) = (a, +\infty)$$
$$I_a(-\infty) = (-\infty, a)$$



PROPRIETÀ:

- $x \in I_a(+\infty) = x > a = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$
- $x \in I_a(-\infty) = x < a = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

ORA RISCRIVO LA DEFINIZIONE DI LIMITE DI UNA SUCCESSIONE UTILIZZANDO QST NUOVE DEFINIZIONI

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon / \forall n > n_\varepsilon, |a_n - l| < \varepsilon$

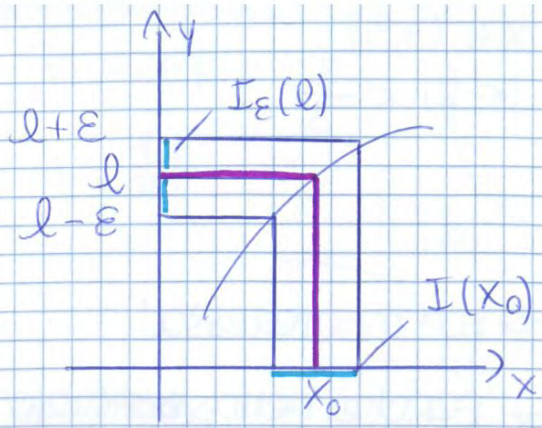
- $|a_n - l| < \varepsilon$ DIVENTA $\rightarrow$ $a_n \in I_\varepsilon(l)$
- $n > n_\varepsilon$ DIVENTA $\rightarrow$ $n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty)$

QUINDI

$\lim_{n \to \infty} a_n = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon / \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty), \Rightarrow a_n \in I_\varepsilon(l)$

MA NON HO BISOGNO DI ESPRIMERE IL RAGGIO ε ($I_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ QUALUNQUE ε, MA BASTA $I(l)$)

$\lim_{n \to \infty} a_n = l \rightarrow \forall I(l), \exists I(+\infty) / \forall n \in I(+\infty) \Rightarrow a_n \in I(l)$



esprimo $f(x)$ vicino a ℓ
$|f(x)-\ell| <$ QUALCOSA
$|f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \ |f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \ f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$
↳ QUESTO È VERO QUANDO ⊗ è abbastanza vicino a x_0
owero $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

IMPO $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

perché lo tolgo?
perché la definizione di limite deve essere definita anche se x_0 non c'è e non si può calcolare $f(x_0)$

♥ esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$ ⇝ anche se non posso calcolare $f(0)$

♥ ① verifico che:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

$\forall I(\ell), \exists I(x_0) \ / \ x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$

sostituisco:

$\forall I(4), \exists I(2) \ / \ x \in I(2) \setminus \{2\} \Rightarrow x^2 \in I(4)$

cambio la definizione:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \ / \ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

la mia incognita: δ ecco cs devo trovare

infatti $|x^2-4|$ è piccolo se $|x-2|$ è piccolo
$|x^2-4| < \varepsilon$ è vera se $0 < |x-2| < \delta$

inizio da $|x^2-4| < \varepsilon$

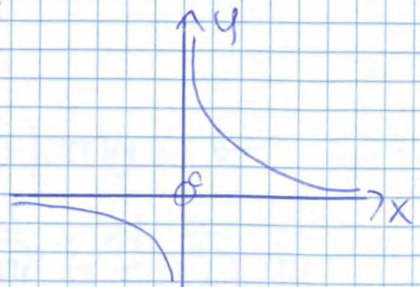
cerco di far comparire un $(x-2)$

$|x^2-4| < \varepsilon \rightarrow |(x+2)(x-2)| < \varepsilon \rightarrow |x+2| \cdot |x-2| < \varepsilon$

- suppongo che $x \in (1,3) \rightarrow$ owero un $I(x_0)$
- devo togliere il termine $x+2 \rightarrow 3 \leq |x+2| \leq 5$
- $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{|x+2|} < \dfrac{\varepsilon}{\ldots}$

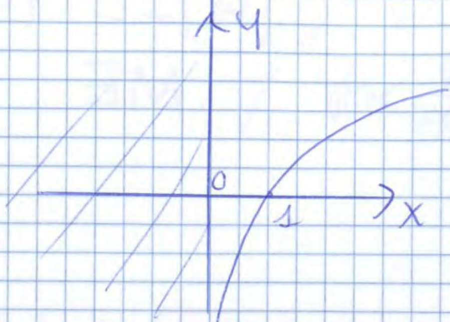
♥ esempi:

$f(x) = \frac{1}{x}$



questa f è continua in $x_0 = 0$?
domanda assurda!
perché $x_0 \notin dom(f)$

$g(x) = \log x$



questa g è continua in $x_0 = -3$?
$x_0 < 0$
domanda assurda!
perché $x_0 \notin dom(f)$

LA FUNZIONE È CONTINUA DOVE È DEFINITA!!

Continuiamo con i limiti

$\boxed{\text{DEF}}$ solita!! però al posto di $\ell = +\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow$$

$I(+\infty) = (M, +\infty)$ $\quad I(x_0) = I_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

- $\forall I(+\infty), \exists I(x_0) \,/\, x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(+\infty)$
- $\forall M, \exists \varepsilon > 0 \,/\, 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > M$

$\boxed{\text{DEF}}$ solita!! però al posto di $\ell = -\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

- $\forall I(-\infty), \exists I(x_0) \,/\, x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(-\infty)$
- $\forall M, \exists \varepsilon \,/\, 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < M$

♥ esempi:

① verifico che:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \rightarrow \forall M$ trovo $\varepsilon \,/\, 0 < |x - 0| < \varepsilon \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > M$

DEF

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

- $\forall I(\infty) \ \exists I(\infty) \ / \ \forall x \in I(\infty) \Rightarrow f(x) \in I(\infty)$
- $\forall K \ \exists M \ / \ \forall x > M \Rightarrow f(x) > K$

DEF

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

- $\forall I(\infty) \ \exists I(-\infty) \ / \ \forall x \in I(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I(\infty)$
- $\forall K \ \exists m \ / \ \forall x < m \Rightarrow f(x) > K$

DEF

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- $\forall I(-\infty) \ \exists I(-\infty) \ / \ \forall x \in I(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I(-\infty)$
- $\forall K \ \exists m \ / \ \forall x < m \Rightarrow f(x) < K$

✔ verifico che:

$$\lim_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$$

$\forall K, \ \exists M \ / \ \forall x > M \Rightarrow -e^x < K$

se $K \geq 0 \rightarrow -e^x < K$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sempre vero

se $K < 0 \rightarrow -e^x < K$ studio

$e^x > -K$

$\log e^x > \log(-K)$

$x > \log(-K)$ con $K<0$

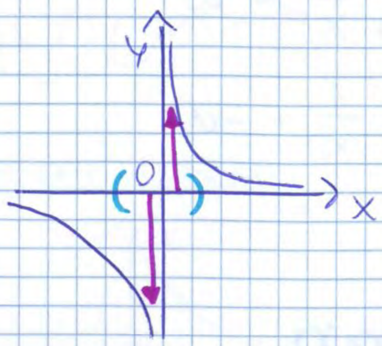
$M = \log(-K)$ con $K < 0$! trovato!

LIMITI (di funzioni) UNILATERALI

26 ottobre 2011

- esempio:

$f(x) = \frac{1}{x}$



$(\ ) \Rightarrow I(x_0) \setminus \{x_0\}$ con $x_0 = 0$

$I(0) \setminus \{0\}$

IL LIMITE VA IN 2 DIREZIONI DIVERSE!

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$ non esiste!!

DEF SI DICE **INTORNO DESTRO** DI x_0: (di raggio δ)

$I^+_{(\delta)}(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$

DEF SI DICE **INTORNO SINISTRO** di x_0: (di raggio δ)

$I^-_{(\delta)}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$ con $\delta > 0$

DEF SI DEFINISCE **LIMITE DESTRO**:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \qquad l = n, \pm\infty \ldots \in \mathbb{R}$

$\forall I(l), \exists I^+(x_0) / \forall x \in I^+(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

DEF SI DEFINISCE **LIMITE SINISTRO**:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad l = n, \pm\infty \ldots \in \mathbb{R}$

$\forall I(l), \exists I^-(x_0) / \forall x \in I^-(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

→ TRADUZIONE:

$\forall x \in I^+_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) = x_0 < x < x_0 + \delta$

$=$ (SPOSTO DENTRO x_0) $=$ $0 < x - x_0 < \delta$

(se non escludo x_0 diventa $0 \leq x - x_0 < \delta$)

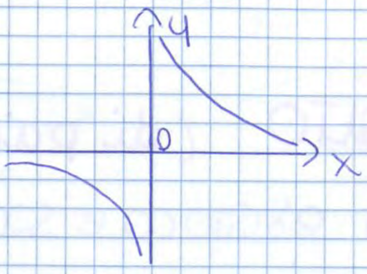
$\forall x \in I^-\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \forall x (x_0 - \delta, x_0) = x_0 - \delta < x < x_0 =$

$= -\delta < x - x_0 < 0$

CLASSIFICAZIONE delle DISCONTINUITÀ (O MEGLIO = SINGOLARITÀ)

anche se ci sono dei problemi!
- esempio:

$f(x) = \frac{1}{x}$



- la funzione è continua nel suo dominio : $dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ma in $x_0 = 0$ c'è una discontinuità di seconda specie

CASO (I) DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \;,\; l \in \mathbb{R}$$

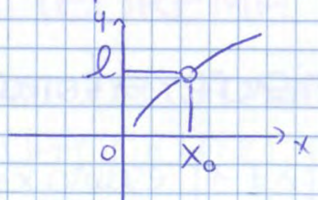
il limite esiste ed è finito (ma)

- $f(x_0) \neq l$
- $x_0 \notin dom(f)$

x_0 = è un punto di discontinuità eliminabile

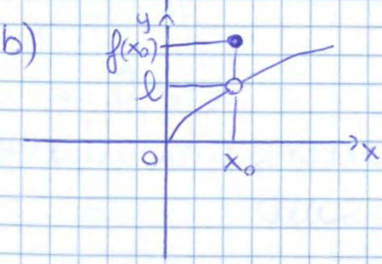
- esempi:

a)



$x_0 \notin dom(f)$ come $\frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$

b)



$f(x_0) \neq l$

la discontinuità si dice **eliminabile** perché:
modificando la f in un punto solo (x_0) posso renderla continua:

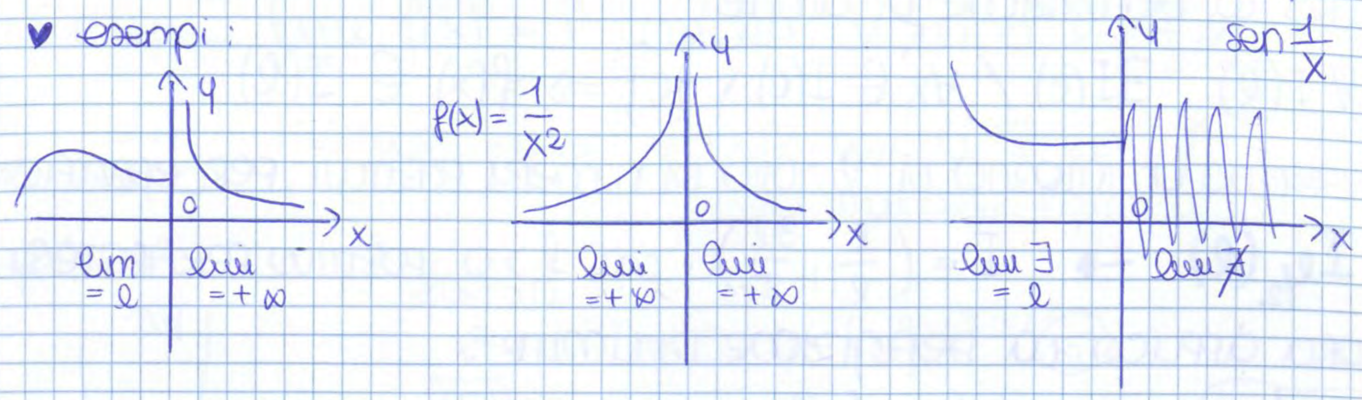
f segnata $\leftarrow$ $\bar{f}(x) \begin{cases} f(x) & se\ x \neq x_0 \\ l & se\ x = x_0 \end{cases}$ $\rightarrow$ aggiungo o cambio il valore in x_0

$\bar{f}(x)$ è continua in x_0, perché $\lim \bar{f}(x) = l = \bar{f}(x_0)$

CASO (III) DISCONTINUITÀ di SECONDA SPECIE

TUTTI GLI ALTRI CASI

esempi:



TEOREMI SUI LIMITI

= PROPRIETÀ LOCALI

NON DIPENDONO DA x CHE TENDE A QUALCOSA

PRENDO $c = (x_0, \pm\infty, x_0^+, x_0^- \ldots)$ $\quad x \to c$

- FUNZIONE f, g, h TUTTE DEFINITE ALMENO SU $I(c) \setminus \{c\}$

☆ UNICITÀ DEL LIMITE

SE IL LIMITE ESISTE È UNICO

☆ TEOREMA della PERMANENZA del SEGNO

SIA UNA FUNZIONE f DEFINITA SU: $I(c) \setminus \{c\}$ (dom(f))
SUPPONIAMO CHE ESISTA IL LIMITE
$\lim_{x \to c} f(x) = l$ ALLORA SE:

- $l > 0$, $l = +\infty$, $\exists$ ESISTE UN INTORNO $I'(c)$ DOVE f È POSITIVA
$$\forall x \in I'(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) > 0$$

$\exists \delta \,/\, x-\delta, x+\delta \setminus$
$0 < |x - \varepsilon| < \delta$

- $l < 0$, $l = -\infty$, ESISTE UN INTORNO $I'(c)$ DOVE f È NEGATIVA
$$\forall x \in I'(c) \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) < 0$$

IMPO $\setminus \{c\}$ ex: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ -4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

FUORI DA ZERO
$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 > 0$

IMPO $I(0) \setminus \{0\}$

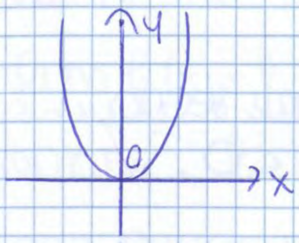
INFATTI $f(x) > 0$

• Potrei supporre esista anche il corollario "forte":
se $f(x)>0$ in un $I(c)\setminus\{c\}$
e se $\exists \lim_{x\to c} f(x) = l$ allora $l>0$ o $l=+\infty$

Posso avere $f(x)>0$ allora $l\geq 0$
ma mai solo $l>0$!

✔ esempio:

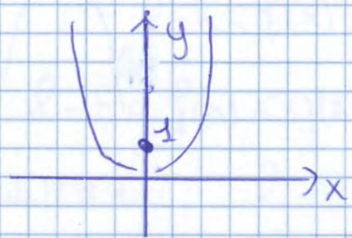
$f(x)=x^2$



$f(x)>0$
$x^2>0$ in $I(0)\setminus\{0\}$? sì
$\boxed{\text{MA}}$
$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ zero non è $>$ di zero!

$l>0 \to$ sbagliato!! giusto $l\geq 0$!

$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$ → provo a togliere $I(c)\setminus\{c\}$ a favore di $I(c)$



$\forall x,\ f(x)>0$!! in tutti gli $I(c)$
$\boxed{\text{MA}}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ rimane zero!!

non si può fare l'enunciato "forte" del corollario I

• Corollario II

Se $f(x_0)\neq 0$ e f è continua nel punto x_0 allora $\exists I(x_0)$ dove f ha lo stesso segno di $f(x_0)$.

Tradotto: $\exists I(x_0) \,/\, \forall x\in I(x_0)$, $f(x)$ e $f(x_0)$ hanno lo stesso seg

– Perché stavolta non metto $\setminus\{x_0\}$? Perché non serve a niente, mi interessa solo $f(x_0)$ che segno ha.

DIMOSTRO

DEVO DIRE CHE $\forall \varepsilon > 0, \exists\, I(x_0) \,/\, \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$
OVVERO $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$!

X IPOTESI IO SO CHE:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ OVVERO $\forall \varepsilon > 0, \exists\, I'(x_0) \,/\, \forall x \in I'(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
  QUINDI $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ OVVERO $\forall \varepsilon > 0, \exists\, I''(x_0) \,/\, \forall x \in I''(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon$
  QUINDI $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

ORA PRENDO UN $x \in I'(x_0) \cap I''(x_0) \setminus \{x_0\}$ (È SEMPRE UN INTORNO DI x_0)

IO SO CHE: $\ell - \varepsilon < f(x)$ PERCHÉ $x \in I'(x_0)$

$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x)$ PER IPOTESI DEL TEOREMA $f \leq g$

$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ " " " $g \leq h$

$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$ PERCHÉ $x \in I''(x_0)$

QUINDI $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$
OVVERO $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ QUINDI $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$!

✔ ESERCIZIO SUL TEOREMA DEL CONFRONTO:

$g(x) = \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$ RISOLVO $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

USO IL TEOREMA DEL CONFRONTO:
DEVO TROVARE 2 FUNZIONI SEMPLICI (f, h) IN CUI VALGA LA DISUGUAGLIANZA $f \leq g \leq h$ IN UN INTORNO DI $+\infty$ (COSÌ CALCOLO I LIMITI)

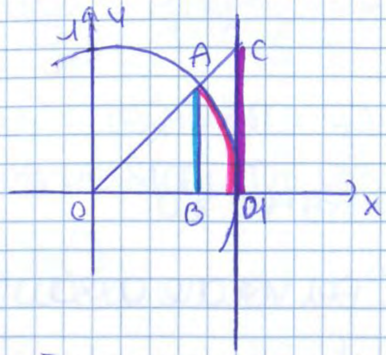
<u>NUMERATORE</u>: $x + \operatorname{sen} x \leq x + 1 \leq 2x$ $\boxed{\text{se } x \geq 1}$ e mi va bene xk $\lim x \to +\infty$

$\frac{x}{2} \leq x - 1 \leq x + \operatorname{sen} x \leq x + 1 \leq 2x$

QUINDI $\frac{x}{2} \leq x + \operatorname{sen} x \leq 2x$ IN UN $I(+\infty)$

<u>DENOMINATORE</u>: $x^2 \leq x^2 + 1 \leq 2x^2$

GUARDANDO GRAFICAMENTE IL SENO:



- circonferenza di raggio 1 $\overline{OD} = 1$
- x = lunghezza arco
- $\overline{AB} = \sin x$
- $\overline{CD} = \tan x$
- $\widehat{AD} = x$

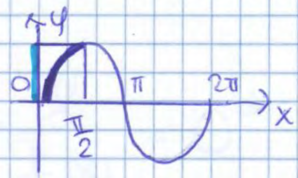
DA CONSIDERAZIONI DI TIPO GEOMETRICO

SI PUÒ CONCLUDERE CHE:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

ORA DIVIDO PER $\sin x$ E POSSO FARLO SENZA CAMBIARE IL SEGNO DELLA DISEGUAGLIANZA PERCHÈ NEL MIO $I(0^+)$ SUPPOSTO, OVVERO $0 < x < \frac{\pi}{2}$, IL SENO È SEMPRE POSITIVO $\rightarrow \sin x > 0$



QUINDI:

$$\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x \cdot \cancel{\sin x}}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ORA RIBALTO:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

ORA, PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

- $f = \cos x$
- $h = 1$
- $g = \frac{\sin x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x \to 0} 1 = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

● PROPRIETÀ (del teorema del confronto)

Sia f LIMITATA in un $I(c) \setminus \{c\}$:

se $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ ALLORA $\lim_{x \to c} g(x) f(x) = 0$

- f LIMITATA in $I(c) \setminus \{c\}$ vuol dire che $\Rightarrow$

$\exists k / \; |f(x)| \leq k$ in $I(c) \setminus \{c\}$ (OVVERO ESISTE UN MAGGIORANTE k)

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = l^m$$

QUESTI TEOREMI SONO SEMPRE VERI SOLO QUANDO le espressioni DI DESTRA (come: $l+m$, $l \cdot m$, $\frac{l}{m}$, l^m) HANNO senso.

ALGEBRA dei LIMITI

POCHE REGOLETTE SONO:

lim f   lim g   lim f+g

- $l \pm \infty = \pm \infty$
- $l \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ se $l>0$; $\mp\infty$ se $l<0$ OVVERO $+ \cdot + = +\infty$, $+ \cdot - = -\infty$, $- \cdot + = -\infty$, $- \cdot - = +\infty$
- $\frac{l}{\pm\infty} = 0^{\pm}$
- $\infty + \infty = \infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $-\infty(\infty) = -\infty$
- $\infty(\infty) = \infty$
- $\frac{l}{0} = \infty$ MA con che segno? IMPO GUARDARE sia segno l sia segno

REGOLA:

$\lim_{x\to c} f(x) = 0^+$ se $\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = 0 \\ f \text{ è POSITIVA in un INTORNO DI } 0 \ (I(0)). \end{cases}$

$\lim_{x\to c} f(x) = 0^-$ se $\begin{cases} \lim_{x\to c} f(x) = 0 \\ f \text{ è NEGATIVA in un INTORNO DI ZERO } (I(0)). \end{cases}$

IDEM PER $\frac{l}{0}$:

- $l>0$ $\quad \frac{l}{0^\pm} = \pm\infty$
- $l<0$ $\quad \frac{l}{0^\pm} = \mp\infty$

CAMBIO SEGNO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 526

esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0/0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0/0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3} = 0/0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \cdot \frac{1}{0} = 1 \cdot \infty = +\infty$$

CALCOLO FORME INDETERMINATE:

- nei polinomi

$$\lim_{x\to \infty} x^3 - 3x^2 + x + 1 = \infty - \infty = x^3\Big(1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\Big) = \infty$$

- nelle funzioni razionali

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3 - 2x + 4}{3x^3 + x + 1} = \lim_{x\to \infty} \frac{\cancel{x^3}(1 \ldots}{\cancel{x^3}(3 \ldots} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x^2+4} = \lim_{x\to \infty} \frac{\cancel{x}(\ldots}{x^{\cancel{2}}(\ldots} = \frac{1}{\infty} = 0$$

FUNZIONI RAZIONALI = RAPPORTI DI POLINOMI! con $x \to \infty$!

TUTTO DIPENDE DAL GRADO DEL NUM. e GRADO DEL DENOM.

- GRADO NUM = GRADO DENO : lim → RAPPORTO TRA I COEFFICIE[NTI] DELLE x CON GRADO MAGGIO[RE]
- GRADO NUM > GRADO DENO : lim → ∞
- GRADO NUM < GRADO DENO : lim → 0

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

DIMOSTRO

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

- $\lim_{x \to \infty} \log\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ posso fare 2 sostituzioni:

a) $y = \sin \frac{1}{x}$

$\begin{cases} x \to \infty, & y \to 0 \end{cases}$

$\lim_{y \to 0^+} \log(y) = -\infty$

b) $y = \frac{1}{x}$ $\begin{cases} x \to \infty \\ y \to 0 \end{cases}$

$\lim_{y \to 0} \log(\sin y)$

$z = \sin y$ $\begin{cases} y \to 0 \\ z \to 0 \end{cases}$

$\lim_{z \to 0} \log(z) = -\infty$

↝ conseguenza:

✡ TEOREMA:

la composizione di f continue è una f continua.

ovvero: se g è continua in x_0 e
se f è continua in x_0
allora $\Rightarrow$ **$g \circ f$ è continua** in x_0

DIMOSTRO: che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

uso la sostituzione!

$y = g(x)$ $\begin{cases} x \to x_0 \\ y \to g(x_0) \end{cases}$ $\to$ perché g è supposta continua per ipotesi

allora $\lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$ $\to$ proprio perché f è continua!

SOSTITUZIONE nelle SUCCESSIONI pg 107

sia $\lim_{x \to c} f(x) = l$ e sia a_n una successione tale che

$\lim_{n \to \infty} a_n = c \Rightarrow$ allora $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$

CRITERIO DI NON ESISTENZA DEL LIMITE

lim funzione 

lim successione 

③ Se f è continua in $x=0$, e $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, allora

a) $\sqrt{5+f(0)} = 2$

b) $\sqrt{5+f(0)} \in [-2,0]$

c) $\sqrt{5+f(0)} \geq \sqrt{5}$

d) $\sqrt{5+f(x)}$ può non essere continua in $x=0$

e) nex RISP

PER IL TEOREMA DELLA CONTINUITÀ una funzione f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

④ se $\lim_{x \to 4} f(x) \geq 0$, allora

a) $\exists$ I di $x=4$ dove $f(x) \geq 0$

b) $\exists$ I di $x=4$ dove $f(x) > 0$

c) $f(4) \geq 0$

d) $f(4) > 4$

e) nex RISP

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO: essendo $\lim_{x \to 4} f(x) \geq 0$, è compreso il caso in cui è $= 0$ quindi non posso dire niente della funzione in zero!!

se $l > 0 \longrightarrow$ (ok) $f(x) > 0$

se $l \geq 0 \longrightarrow$ BO?!!!... non si può dire niente!

- $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right)=\frac{1}{\log a}$$ % PER $a>0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\log=\ln\\ \mathrm{Log}=\log_{10}\end{array}}$$

DIMOSTRO: riconduco a quello prima!

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$ MA LOG È UNA FUNZIONE CONTINUA QUINDI...

$$=\log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e=\frac{1}{\log a}$$ RICONDUCO $\log_a$ IN BASE e: (CAMBIO DI BASE)

CASO PARTICOLARE IMPORTANTE!

★ $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$ SE LA BASE DEL LOGARITMO È e IL LIMITE FA UNO

- $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$$ %

DIMOSTRO: riconduco a quello prima!

SOSTITUZIONE:

$y=a^x-1$ $\quad a^x=y+1 \quad \log_a(a^x)=\log_a(y+1) \quad x=\log_a(y+$

$x\to 0$

$y\to 0$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)}=\log a$$ L'INVERSO DI QUELLO PRECEDENTE!

OVVERO $$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right)^{-1}=$$ PORTO DENTRO IL LIMITE...

$$=\left[\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{\log a}\right]^{-1}=\log a$$

CASO PARTICOLARE IMPORTANTE!

★ $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$ SE LA BASE DELL'ESPONENZIALE È e IL LIMITE FA UNO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 526

TABELLA LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad \sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ anche $(1-x)^{\frac{1}{x}} = e$?

- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right) = \frac{1}{\log a}$ $\qquad$ • $\log_a(1+x) = \frac{x}{\log a} + o(x)$ per $x \to 0$, $\forall a > 0, a \neq 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ $\qquad$ • $a^x = 1 + x\log a + o(x)$ per $x \to 0$, per $\forall a > 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\qquad e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$

- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$

$\log x \sim x - 1$ per $x \to 1$

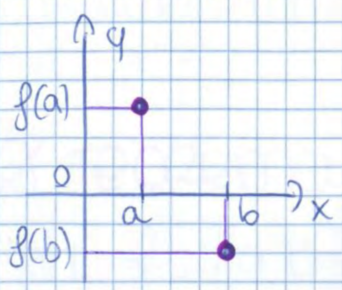
• $\log x = x - 1 + o(x-1)$ per $x \to 1$

$\tan x \sim x$ per $x \to 0$

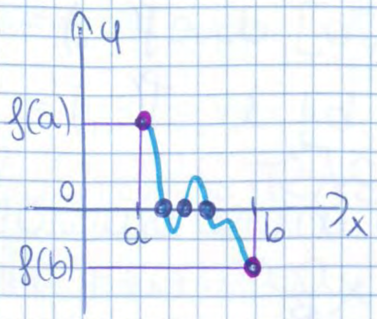
$\tan x = x + o(x)$

DIMOSTRO GRAFICAMENTE!

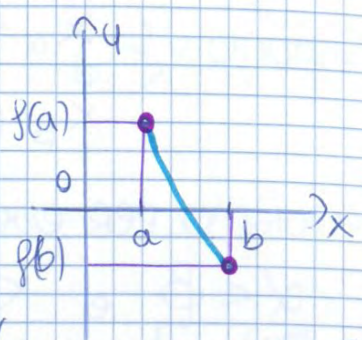
Se $f(a)f(b)<0$ ⇝ vuol dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti!



↳ $f(a)$ e $f(b)$ devono avere segni opposti!



↳ in $[a,b]$ la funzione deve essere continua!



↳ se la funzione è strettamente monotona → 1 zero!

✔ Riprendiamo l'esempio di prima:

$f(x) = e^x + 2\cos x - x^2 \rightarrow f$ continua

Trovo 2 x per cui $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$

$x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 1 + 2\cos 0 - 0^2 = 1 + 2 = 3$ $\quad f(x_1) > 0$

$x_2 = -10 \rightarrow f(-10) = e^{-10} + 2\cos(-10) - 100$

• $e^{-10} < 1$ • $2\cos(-10) \geq -2$

$f(-10) = 1 + (-2) - 100 = -101$ $\quad f(x_2) < 0$

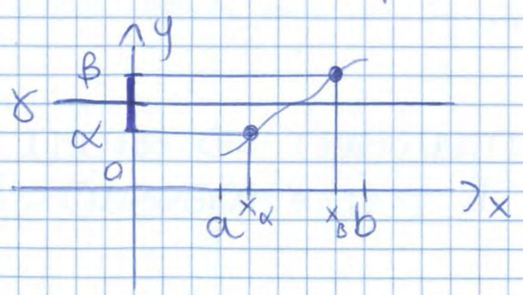
Quindi posso concludere che l'equazione ha sicuramente 1 soluzione nell'intervallo $(-10, 0)$ perché $f(0)f(-10) < 0$.

☆ TEOREMA: DEI VALORI INTERMEDI

(variante minima del teorema precedente)

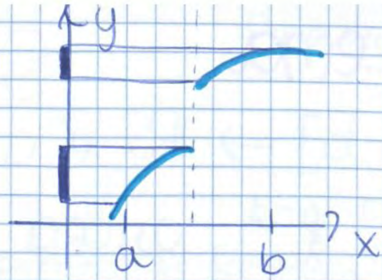
Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua:

se f assume **2** valori α e β allora $\Rightarrow$ f assume **TUTTI I VALORI** tra α e β



x la dimostrazione applico il teorema degli zeri alla retta γ!

NATURALMENTE, COME SI PUÒ VEDERE DAL GRAFICO, SE LA FUNZIONE NON È CONTINUA IL COROLLARIO NON ESISTE →



TEOREMA di WEIERSTRASS

sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua:

allora $\Rightarrow$ f HA **minimo e massimo** IN $[a,b]$

f è limitata in $[a,b]$

OVVERO:

$\exists$ un punto $x_n \in [a,b]$ dove:

$f(x_n)$ è $\min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f$

OPPURE

$f(x_n)$ è $\sup_{[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f$

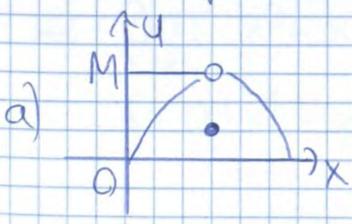
✔ esempio:

$$f(x) = \frac{e^{\sin(\log x)} + x^x}{e^x + 4\log^2 x}$$

, nell'intervallo $[10,12]$ HA sia minimo che massimo, perché è continua → è composta da tante funzioni continue!

✔ esempio:

a)

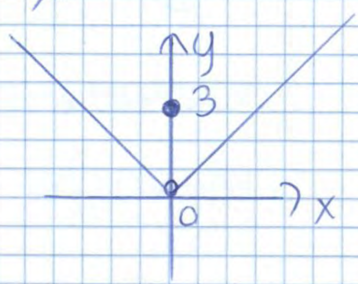


$\sup f = M$

$\max f = \nexists$

il massimo non c'è xk non esiste nessun x dove $f(x) = M$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

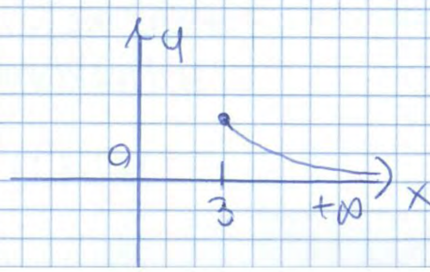


$\inf f = 0$

$\min f = \nexists$

il minimo non c'è xk non esiste nessun x dove $f(x) = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[3, +\infty)$



$f(x)$ è continua

$\min f = \nexists$

$\inf f = +\infty$

9 novembre 2011

CONFRONTO LOCALE di funzioni

OVVERO: COME SI COMPORTA UNA FUNZIONE RISPETTO A UN'ALTRA
LOCALE: VENGONO USATI I LIMITI

✔ esempio:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x+1}{5x^4+x^3+x^2+3} = \frac{\infty}{\infty}$$

SO CHE COMANDA IL GRADO + ALTO (x^4) LO METTO IN EVIDENZA SEMPLIFICO

$$\lim_{x\to\infty} \text{"} = \frac{3}{5}$$

↓
COME POSSO FARLO + VELOCEMENTE?

IPOTESI:

- $x \to c \qquad c = \begin{cases} x_0 \\ \pm\infty \\ x_0^{\pm} \end{cases}$
- $f, g, \ldots$ FUNZIONI DEFINITE IN UN INTORNO ESCLUSO c $I(c) \setminus \{c\}$
- $g(x) \neq 0$ in $I(c)$ ($g(x)$, SARÀ SPESSO A DENOMINATORE)

COME AGIRE:

- GUARDARE COSA FA LA DIFFERENZA? NON SERVE!

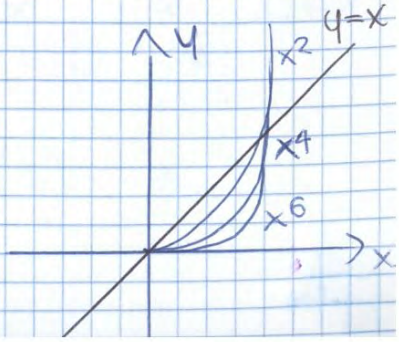
se $f(x) - g(x) > 0 \to f(x) > g(x)$
NON MI SERVE PERCHÉ:

se $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} x^2 - x^4 \to 0 \\ \lim_{x\to 0} x^4 - x^2 \to 0 \end{array}\right\}$ IN ENTRAMBI I CASI!

- GUARDARE COSA FA IL RAPPORTO! $\frac{f(x)}{g(x)}$

INFATTI $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4} = +\infty \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = 0 \end{array}\right\}$ SONO DIVERSI!

VEDO CHI È + "PICCOLO" E CHI È + "GRANDE"
VEDO CHI TENDE A ZERO PIÙ RAPIDAMENTE!



✔ esempio: RAPPORTO QUALITÀ/PREZZO

Relazioni tra i simboli di Landau ($\sim$ e o)

servono x semplificare i calcoli

• PROPRIETÀ

(solite ipotesi)

$$\boxed{f \sim g \iff f = g + o(g)}$$

sono 2 scritture equivalenti!

[$o(g)$: cosa che divide f e dà un risultato zero]

DIMOSTRO:

$f \sim g$ vuol dire che $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ per l'algebra dei limiti

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

$f - g$ diviso da g è uguale a zero!!

$f - g$ è trascurabile rispetto a g $\Rightarrow f - g = o(g) \underset{\text{libertà}}{\Rightarrow} f = g + o(g)$

• PROPRIETÀ

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: scritture che si equivalgono

$$\boxed{f = o(g) = \alpha\, o(g) = o(\alpha g)}$$

f è o piccolo di g = f è alpha o picc. di g = f è o piccolo di αg

infatti $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\alpha(g(x))}$ α lo posso tranquillamente portare fuori dal limite

✔ esempio:

$f(x) = o(5x) \iff f(x) = o(x)$

$f(x) = 4\,o(x) \iff f(x) = o(x)$

semplifica sempre di più i calcoli

Definizione di funzione continua in un punto con gli "o piccoli"

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)! \rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{1} = 0 \rightarrow f(x) - f(x_0) = o(1) \rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + o(1) \text{ per } x \to x_0}$$

- $x^k \cdot o(x^n) = o(x^{k+n})$

DIMOSTRO

verifico che
se $f = o(x^n)$ allora $\Rightarrow x^k \cdot f(x) = o(x^{k+n})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f}{x^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^k f}{x^{k+n}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^k}\, f}{\cancel{x^k}\, x^n} = 0$$

$\to 0$

tende a zero per l'ipotesi $f = o(x^n)$

- $o(x^n) \cdot o(x^k) = o(x^{k+n})$

DIMOSTRO

$\lim_{x\to 0} \frac{f}{x^k} = 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{g}{x^n} = 0$ moltiplico

$\lim_{x\to 0} \frac{f \cdot g}{x^k \cdot x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f \cdot g}{x^{n+k}} \quad f \cdot g = o(x^{n+k})$

ma per ipotesi
$f = o(x^k)$ e $g = o(x^n) \to o(x^k) \cdot o(x^n) = o(x^{n+k})$

- $o(x^k)^n = o(x^{kn})$

- $-o(x) = o(x)$ il segno $\pm$ dell'"o piccolo" è inutile

- $o(f + o(f)) = o(f)$ $\Leftarrow$ se $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(g)}{g} = 0$$

esempi:

- se $t \to 0$, vale $e^t = 1 + t + o(t)$

quindi e^{5x} per $x \to 0$: $e^{5x} = 1 + 5x + o(x)$

- se $t \to 0$, vale $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$

quindi $\sqrt{1+3x^2}$ per $x \to 0$, $3x^2 \to 0$:

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3x^2 + o(x^2)$$

- se $t \to 0$, vale $\sin t = t + o(t)$

quindi $x \cdot \sin^2 3x$ per $x \to 0$: $x \cdot (\sin 3x)^2 =$

$$= x\,[3x + o(x)]^2 = x\,[9x^2 + 6x \cdot o(x) + [o(x)]^2]$$
$$= x\,[9x^2 + x \cdot o(x) + o(x^2)] = x\,[9x^2 + o(x^2)]$$
$$= 9x^3 + o(x^3)$$

esercizio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(4x^2)}{9x^2 + o(x^2)} \quad \text{come su}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \cancel{o(x^2)}}{9x^2 + \cancel{o(x^2)}} = \frac{2}{9}$$

perché gli "o piccoli" non contano!
Dimostrazione (lezione successiva →)

14 Novembre 2011

→ meglio:

SOSTITUZIONE negli "o piccoli"

da $e^x = 1 + x + o(x)$ se $\boxed{f(x) \to 0 \text{ per } x \to 0}$

allora per il teorema di sostituzione dei limiti:

$$e^{f(x)} = 1 + f(x) + o(f)$$

$\boxed{\text{ex}}$ $e^{(1+x)} = 1 + (1+x) + o(1+x)$ sbagliatissimo!

$e^{(1+x)} = e^1 \cdot e^x = e(1 + x + o(x)) = e + ex + o(x)$

DIMOSTRO (per il quoziente)

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)+o(f(x))}{g(x)+o(g(x))} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f+o(f)}{g+o(g)} \quad \text{RACCOLGO } f \text{ e } g \quad \lim_{x\to c} \frac{f\left(1+\frac{o(f)}{f}\right)}{g\left(1+\frac{o(g)}{g}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f}{g} \cdot \lim_{x\to c} \frac{1+\frac{o(f)}{f}}{1+\frac{o(g)}{g}} \to 1 = \lim_{x\to c} \frac{f}{g}$$

$\frac{o(f)}{f} \to 0$, $\frac{o(g)}{g} \to 0$

♥ esempi:

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x+6}{5x^4+x^3+2}$$ per $x\to\infty$ so che $x^n = o(x^k)$ $n<k$

contano le potenze più alte!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+o(x^4)}{5(x^4)+o(x^4)}$$ per il teorema appena dimostrato butto via gli "o piccoli" $$\lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{x^4}}{5\cancel{x^4}} = \frac{3}{5}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)+x^3}{4x+5\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)+x^3}{4x+5x^2+\cancel{5}\,o(x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{4x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{4x}_2} = \frac{1}{2}$$ perché $x^3 = o(x)$, $x^2 = o(x)$, $o(x^2) = o(x)$

• IMPO:

quando: $x \to 0$ contano le potenze più basse!
$x \to \infty$ contano le potenze più alte!.

infatti:

per $x \to 0$, se x^5 è la più **bassa** potenza che c'è, allora tutte le potenze $> x^5$ $(x^6, x^7, x^8 \ldots)$ sono $o(x^5)$

per $x \to \infty$, se x^5 è la più **alta** potenza che c'è, allora tutte le potenze $< x^5$ $(x^4, x^3, x^2 \ldots)$ sono $o(x^5)$

lim di $3x^2 - 4x + 5x^3 + 6x^7$

per $x \to 0$: $-4x + o(x)$

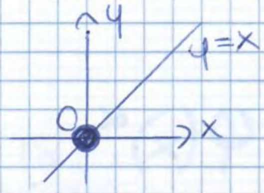
CONFRONTARE le funzioni con una funzione "campione" fissa $= \varphi$

N.B. Negli esercizi il campione te lo danno sempre!

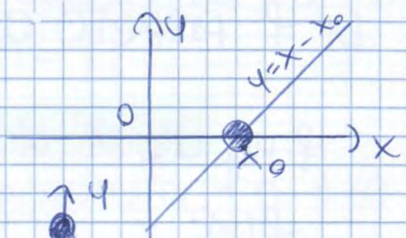
elenco funzioni campione:

φ = funzione "campione"

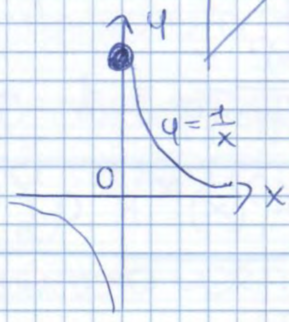
- se $f \to 0$ per $x \to 0$
  $\varphi(x) = x$



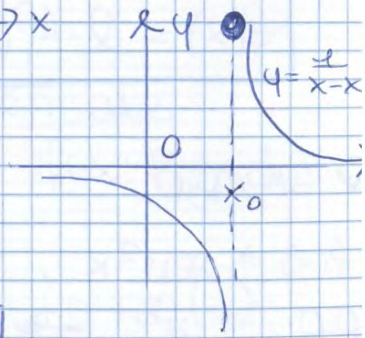
- se $f \to 0$ per $x \to x_0$
  $\varphi(x) = x - x_0$



- se $f \to 0$ per $x \to +\infty$
  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$



- se $f \to \infty$ per $x \to x_0$
  $\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}$ oppure $\frac{1}{|x - x_0|}$



- Dato un campione si può definire **L'ORDINE di una funzione** $\boxed{\text{DEF}}$

IPOTESI:

- φ campione : $\varphi \to 0$, $x \to c$
- f tale che : $f \to 0$, $x \to c$

} 2 f. infinitesime

se $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{[\varphi(x)]^\alpha} = l \neq 0 \to l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

si dice che f ha **ORDINE α RISPETTO a φ**

- se α $\exists$ esiste $\to$ c'è ne uno **solo**!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x \cdot x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{[x+o(x)][\cancel{1}-\cancel{1}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}{\cos x \cdot x^{\alpha}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^{\alpha}(1+o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3(1+o(1))} = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = 3$ ← x1c??? PRENDO SI IL PRIMISSIMO TERMINE DI $\cos x$

$p.p. = -\frac{1}{2}x^3 \longrightarrow \sin x - \tan x = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

ASINTOTI
di una funzione

DEF

- ASINTOTO = retta nel piano $\mathbb{R}^2$ con equazione: $y = mx + q$
- f = funzione data con dom$(f) = \mathbb{R}$

* Se, per $x \to \pm\infty$, $f(x) = mx + q + o(1)$
allora la retta $y = mx + q$ è un asintoto di f a $\pm\infty$

↳ $m = 0$: ASINTOTO ORIZZONTALE
$m \neq 0$: ASINTOTO OBLIQUO

* Se, per $x \to x_0^{\pm}$, $f(x) \to \pm\infty$
allora la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale

[ex: $f(x) = \frac{1}{x}$ $x=0$ a.v.]

RICAVARE m e q

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-mx-q}{1} = 0 \quad \text{da } f(x) = mx + q + o(1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx - q = 0 \iff$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-mx-q}{x} = 0 \iff$$ perché divido per x?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} - \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q}{x} = 0$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$

TANGENTE: non ne esiste una definizione senza usare le derivate prima del calcolo differenziale

DEF Si dice che f è **DERIVABILE** in x_0 se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$ esiste ed è finito ed $\in \mathbb{R}$

↳ F. indeterminata $0/0$ se la funzione è continua → sempre!)

Il valore del limite si chiama **DERIVATA** di f in x_0:

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

- IMPORTANTE!

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ è equivalente a

$x = x_0 + h$
$h = x - x_0$

$$\begin{cases} x \to x_0 \\ h \to 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}}$$

- IMPORTANTE:

L'esistenza della derivata con gli "o piccoli" diventa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x) = o(1) \Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)-f'(x)[x-x_0] = o(1)[x-x_0]$$

$$f(x)-f(x_0)-f'(x)(x-x_0) = o(x-x_0)$$

QUINDI:

f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow$ se e solo se esiste un numero $f'(x_0)$ tale che /

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \text{ per } x \to x_0}$$

OPPURE:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \text{ per } h \to 0}$$

$f'(x)$ è la derivata di f ed è una nuova funzione co
$dom(f') = \{x \in dom(f) / f$ è derivabile in $x\}$

CALCOLO DI DERIVATE

$f(x) = $ costante $\rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x$

(la retta tangente a una retta è la retta stessa !)

✔ esempio: DIMOSTRO:

$f(x) = c \; , \; \forall x$ (funzione costante / retta orizzontale)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$

✔ esempio:

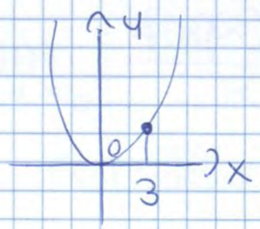
$f(x) = x^2$

uso la formula: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ se $h \to 0$

calcolo: $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$$= \underbrace{x^2}_{f(x)} + \underbrace{2x}_{f'(x)} h + o(h) \longrightarrow f'(x) = 2x$$

scrivo l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel punto $x = 3$. uso la formula:



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f(3) + f'(3)(x-3)$$
$$y = 9 + 6(x-3)$$
$$y = 6x - 9$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 101 di 526

DIMOSTRO

RICORDO: $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

$f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall y$ FUNZIONE COMPOSTA CON LA SUA INVERSA

DERIVO LA FUNZIONE COMPOSTA CON LA ④

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

✔ esempio:

SIA DATA f INVERTIBILE E SO CHE $f(2) = 5$ e $f'(2) = 3$:

CALCOLO LA DERIVATA DI f^{-1} NEL PUNTO 5 $\rightarrow (f^{-1})'(5)$

$f(2) = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2$

FORMULA $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}$$

RIASSUNTINO

16 Novembre 201

f: DERIVABILE (limiti)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0) = f($$

f: DERIVABILE IN UN CERTO PUNTO (o piccoli)

in x_0] $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

in x] $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$ per $h \to 0$

x SAPERE SE È DERIVABILE MI BASTA PRENDERE UNA FUNZIONE E SCRIVERLA

$$f(x+h) = f(x) + L\,h + o(h)$$

ALLORA IL COEFF DI $h = L$ È UGUALE A $f'(x)$

PER FAR VALERE QUELLA FORMULA

$f(x+h) - f(x) - Lh$ DEVE ESSERE UN $o(h)$ OVVERO $= o(h)$

$$\sin(x+h) - \sin x = \cos x\,(h + o(h)) + \sin x\,(o(h))$$
$$= \underbrace{\cos x}_{\text{derivata}} \cdot h + o(h)$$

- $(\sin x)' = \cos x$

★ $f(x) = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

★ $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

USO LA FORMULA $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

- $(\tan x)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$(\tan x)' = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

- esponenziali

★ $f(x) = a^x$

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^x (a^h - 1)}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} a^x \cdot \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}}_{\text{limite notevole}} = a^x \cdot \log a$

$(a^x)' = a^x \cdot \log a$

CASO PARTICOLARE:

★ $f(x) = e^x$

- $(e^x)' = e^x$ DERIVATA UGUALE A SE STESSA

DERIVATA delle FUNZIONI COMPOSTE

RICORDO REGOLA:

$$[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$$

- esempio:

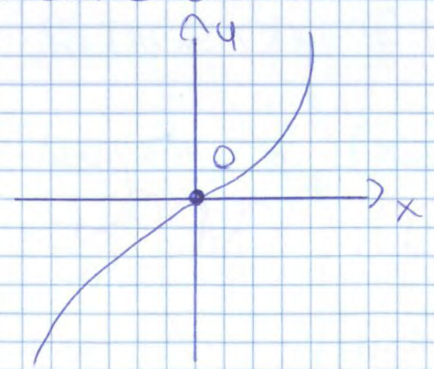
- $(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x \qquad f = e^{x^2} \quad g = x^2$
- $(\sin\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f = \sin\sqrt{x} \quad g = \sqrt{x}$
- $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{e^x} \qquad f = e^{-x} \quad g = -x$

DERIVATA delle FUNZIONI IPERBOLICHE

- SENO IPERBOLICO:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

FUNZIONE DISPARI



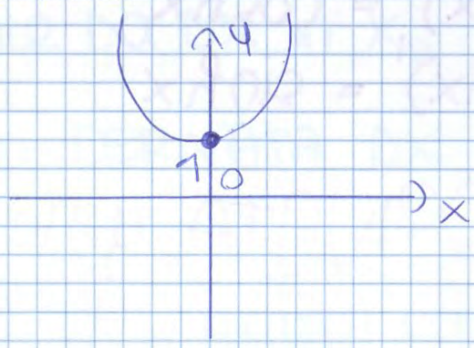
$f(0) = 0$

SEMPRE STRETTAMENTE CRESCENTE

- COSENO IPERBOLICO:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

FUNZIONE PARI



$f(0) = 1$

$f(x) > 0 \,, \forall x$!!

$$\rightarrow \tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

★ $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$f^{-1}(y) = \arcsin y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

x semplificare:

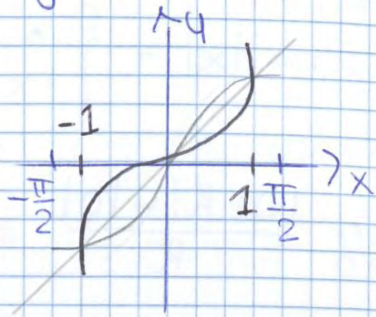
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$

scelgo il ⊕!

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

GRAFICO: $y = \arcsin x$



$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

DEF Sia f definita su un intorno DX di x_0 = $I^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta)$

se:

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ESISTE ed è FINITO

si dice che f è **DERIVABILE DA DX in x_0**

quindi $f'_+(x_0)$ si chiama **DERIVATA DX**

DEF Sia f definita su un intorno SX di $x_0 = I^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$

se $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esiste ed è finito

si dice che f' è **DERIVABILE da SX in x_0**

quindi $f'_-(x_0)$ si chiama **DERIVATA SINISTRA**

21 Novembre 2011

CONTINUITÀ & DERIVABILITÀ

- f continua:
  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  - $f(x) = f(x_0) + o(1)$
- f derivabile:
  - $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
  - $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{per } x\to x_0 \ \to 0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\text{per } x\to x_0 \ \to 0}$ per $x \to x_0$

quindi sono $o(1)$

$f(x) = f(x_0) + o(1)$

infatti:

PROPRIETÀ

tutte le funzioni derivabili sono continue:

f: derivabile in x_0 → f: continua in x_0

invece:

non tutte le funzioni continue sono derivabili

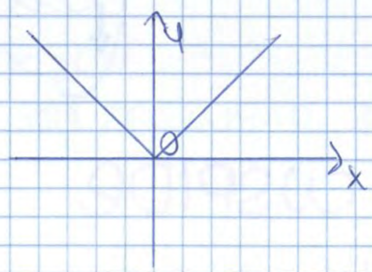
- esempio:

$f(x) = |x|$

no derivabile in $x_0 = 0$

$f'_-(0) = -1$

$f'_+(0) = 1$



PUNTI di NON DERIVABILITÀ

quando la funzione non è derivabile

① PUNTO ANGOLOSO (x° è un angolo)

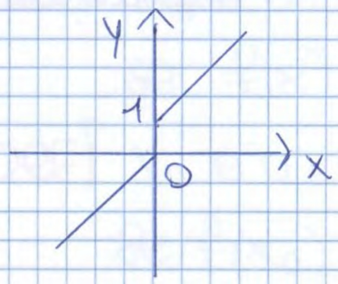
$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono, sono <u>DIVERSI</u>,

e **almeno uno** è finito (l'altro può essere ∞)

PROPRIETÀ (per semplificare gli esercizi)

Sia f definita in un $I(x_0)$ intorno di x_0.
Supponiamo che f sia **CONTINUA** in x_0 (non trascurabile)
e derivabile almeno per $x \neq x_0$
se $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ $\exists$ esiste finito $= \ell$
$\Rightarrow$ allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$
(più facile fare questo limite che il limite del rapporto incrementale)

♥ esempio:



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$

SBAGLIATISSIMO!

HO TRASCURATO L'IPOTESI + IMPORTANTE:
f deve essere continua.

♥ esercizio:

$$f(x) = \begin{cases} a\,\text{sen}(2x) - 4 & \text{se } x < 0 \\ b(x-1) + e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Trovo a, b in modo che f sia derivabile su tutto $\mathbb{R}$

Analizzo:
- il mio problema è $x = 0$
- se $x \neq 0$ f è derivabile in x perché è la somma/composizione di funzioni derivabili
- quindi: $x = 0$

a) f deve essere continua in $x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

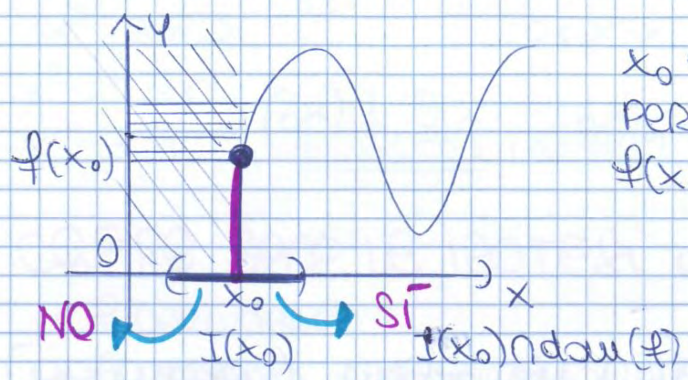
$f(0) = b(0-1) + e^0 = -b + 1 = 1 - b$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 - b$

$\lim f(x) = -4$

$I(x_0)$ deve essere $\cap$ dom(f)

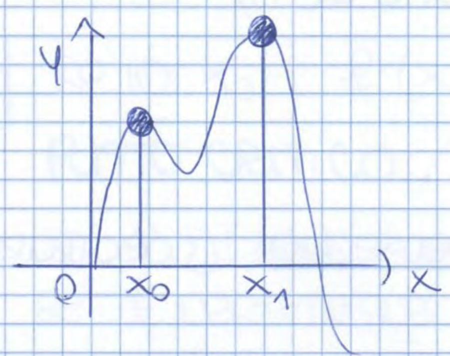
SERVE PER PRENDERE LA PARTE DI INTORNO (x_0) DOVE LA FUNZIONE È DEFINITA



x_0 è un MINIMO LOCALE perché la $f(x)$ è sempre $\geq f(x_0)$ in quell'intorno $I(x_0) \cap dom(f)$

DEF x_0 è un punto di **MASSIMO GLOBALE/ASSOLUTO** se $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in dom(f)$ (NO INTORNO)

DEF x_0 è un punto di **MINIMO GLOBALE/ASSOLUTO** se $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in dom(f)$



x_0 = MASSIMO LOCALE
x_1 = MASSIMO GLOBALE

COME TROVARE I PUNTI DI MAX E MIN SENZA IL GRAFICO, SOLAMENTE CON LA FUNZIONE?

☆ TEOREMA di FERMAT (fermà)

- Sia f DEFINITA in un INTORNO di x_0: $f: I(x_0)$,
- e sia DERIVABILE in x_0,
- Se x_0 è un massimo o un minimo **LOCALE** (ESTREMO)

$\Rightarrow$ allora $f'(x_0) = 0$ la derivata si annulla
$\Rightarrow$ x_0 è un punto **CRITICO / STAZIONARIO**

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 115 di 526

✔ esempio:

$f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0?$

$3x^2 - 3 = 0$

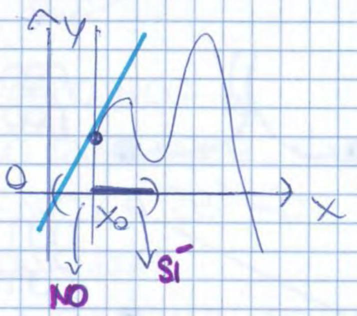
$x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$ POSSIBILI MASSIMI O MINIMI

CAPIRE BENE LE IPOTESI DEL TEOREMA

- f DERIVABILE
- f DEFINITA IN UN INTORNO $I(x_0)$

↳ INFATTI SENZA QUESTA IL TEOREMA È FALSO



- x_0 è un minimo locale
- x_0 non ha la derivata nulla perché f non è definita in $I(x_0)$ ma solo in un $I^+(x_0)$
- $f'_+(x_0) \geq 0 \to$ mezza tangente

Def se in x_0, $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ il punto x_0 è un PUNTO CRITICO / STAZIONARIO per f

se $f: I(x_0)$ definita in un intorno di x_0

se f derivabile

I MASSIMI e I MINIMI di f (gli estremi) vanno cercati tra:

1. PUNTI CRITICI
2. ESTREMI DEL DOMINIO
3. PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

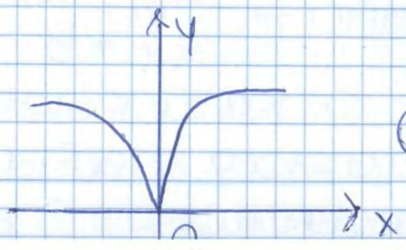
} FERMAT non funziona

✔ esempi:

$f(x) = \sqrt{|x|}$

$x = 0$ è una cuspide

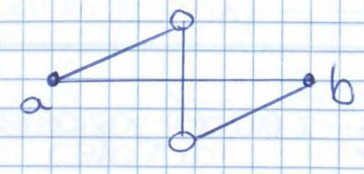
$x = 0$ è un minimo globale



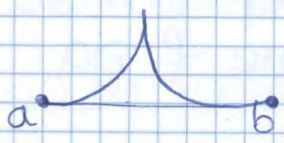
③

✔ esempi:

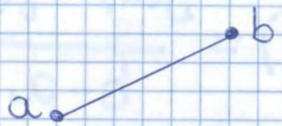
- tolgo continuità




- tolgo derivabilità




- tolgo $f(a) = f(b)$



✔ esercizio: !!

devo risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^3 - \sin x + 2e^x$

$x^3 - \sin x + 2e^x = 0$

risolvo con:

- teorema dell'esistenza degli zeri
- teorema di Rolle !! cerco una

$$F(x) \rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \cos x + 2e^x$$

} ovvero integro f

se trovo a, b tale che $F(a) = F(b)$

allora Rolle dice che $\exists c$ tale che $F'(c) = 0$

quindi $f(c) = 0$

QUIZ

$f(x) = (x-1)(x-2)\cos x$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$ f ha:

a) esattamente 1 punto critico

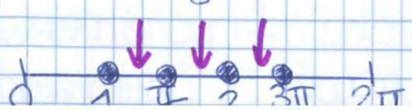
b) esattamente 3 punti critici

c) almeno 3 punti critici

applico Rolle: trovo $f(x) = 0$ $\quad x = 1, 2, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ovvero guardo se $f(a) = f(b)$ e trovo a e b!

$\exists f'(x) = 0$



negli intervalli (a, b) trovati la derivata si annulla!

- ORA TROVO $g(a)$ e $g(b)$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a) - 0 = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{(\cancel{b-a})}(\cancel{b-a}) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(b)} + f(a) = f(a)$$

QUINDI $g(a) = g(b) = f(a)$

POSSO APPLICARE ROLLE! $\exists c \in (a,b)$ DOVE $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-0) \quad \text{DERIVO}$$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{e poi } g'(c) = 0$$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

USO LAGRANGE PER CARATTERIZZARE le FUNZIONI COSTANTI

se $f(x) = c$, $\forall x$ OVVERO f COSTANTE
$\implies f'(x) = 0$, $\forall x$

MA VICEVERSA?

● COROLLARIO (caratterizzazione delle f costanti)

SIA f DERIVABILE SU UN INTERVALLO QUALUNQUE
f è **COSTANTE** $\iff$ SE E SOLO SE $f'(x) = 0$, $\forall x$

DIMOSTRO

$\iff$ SE E SOLO SE: 2 IPOTESI:

① f COSTANTE $\to f'(x) = 0$ OVVIA

② $f'(x) = 0 \to f$ COSTANTE

PER IPOTESI: $f'(x) = 0$, $\forall x$

PRENDO $a, x \in$ ALL'INTERVALLO DOVE f è DEFINITA
e GUARDO f SU $[a,x]$ ovvero su un qualunque intervallo

- f CONTINUA PERCHÉ f PER IPOTESI è DERIVABILE
- f è DERIVABILE PER IPOTESI

ORA APPLICO LAGRANGE IN $[a,x]$

(2) $f(x) = e^{e^{\cos x}}$

a) è limitata → SI: $\cos x$ limitato tra -1 e 1

b) non è periodica → NO: $\cos x$ è periodica di 2π

c) $\sup f = e$

d) $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$ → NO: esponenziale mai $= 0$

e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ → NO: $\lim_{x\to\infty} \cos x \to$ oscilla tra -1 e 1

(3) $f(x) = e^{\cos e^x}$

a) $\operatorname{Im} f = [e^{-1}, e]$

b) periodica

c) illimitata

uno esclude l'altro

d) $\inf f = 0$ → espo mai $\neq 0$

e) si annulla infinite volte → espo mai $\neq 0$

RISOLVO: $0 < e^x < +\infty$

$0 < \cos x < +\infty$ ma

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$e^{-1} \leq e^x = e^{\cos x} \leq e^1$

Non è periodica xke la variabile di $\cos x$ è e^x

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 123 di 526

DIMOSTRO

① Sia f crescente su I, mostro che $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$

- Sia $x \in I$, sia $h > 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \begin{matrix} \to f(x+h) - f(x) \geq 0 \\ \to h > 0 \end{matrix} \quad \to \text{TUTTA LA FRAZIONE È } \geq 0$$

QUINDI:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

PER IL TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$$f'_+(x) \geq 0$$

IL LIMITE $h \to 0^-$ NON SERVE A NULLA, PERCHÉ PER IPOTESI f È DERIVABILE, QUINDI LIMITE DX E SX DEVONO ESSERE UGUALI. $f'_+(x) = f'_-(x) \geq 0$

$$f'(x) \geq 0$$

② Sia $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, mostro che f è crescente

Prendo a caso $x_1 < x_2$ in I

(DEVO FAR VEDERE CHE $f(x_1) < f(x_2)$)

SCRIVO IL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \text{ x IPOTESI}$$

IN PIÙ, f È DERIVABILE IN I E ANCHE CONTINUA IN I ALLORA APPLICO LAGRANGE IN $[x_1, x_2] \in I$

OVVERO:

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ tale che } / \ f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

perché $f'(x) \geq 0$

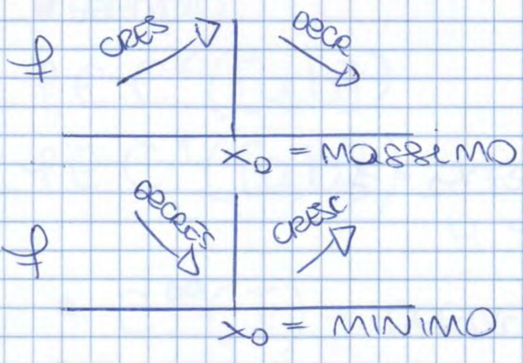
SO CHE $x_1 < x_2 \to x_2 - x_1 \geq 0$,

QUINDI IL NUMERATORE DEVE ESSERE ≥ 0

$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \to f(x_2) \geq f(x_1)$

- $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \text{dom}(f) \Longrightarrow$
  f è CRESCENTE SU OGNI INTERVALLO CONTENUTO NEL DOMINIO
- $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \text{dom}(f) \Longrightarrow$
  f è DECRESCENTE SU OGNI INTERVALLO CONTENUTO NEL DOMINIO

CLASSIFICAZIONE PUNTI CRITICI



OPPURE:
MINIMI e MASSIMI IN PUNTI DI NON DERIVABILITÀ
- CUSPIDE ex. $\sqrt{|x|}$ $x=0$ minimo
- PUNTO ANGOLOSO ex. $|x|$ $x=0$ minimo

Sia x_0 critico per $f \rightarrow f'(x_0)=0$

se in un intorno di x_0 $I(x_0)$:
- $f'(x) \geq 0$, $x \leq x_0$
- $f'(x) \leq 0$, $x \geq x_0$

$\Rightarrow x_0$ è un MASSIMO

se in un intorno di x_0 $I(x_0)$:
- $f'(x) \leq 0$, $x \leq x_0$
- $f'(x) \geq 0$, $x \geq x_0$

$\Rightarrow x_0$ è un MINIMO

$f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$
è una condizione sufficiente x un punto di minimo ma non necessaria!

$f^{(k)}$ derivata di ordine k → mai $\cancel{f^k}$ (sembra potenza)

esempio:

$f'''''''(x)$ → NO $f^{(8)}(x)$ → sì

Def Si chiama:

$$C^k(I) = \{ f \,/\, f \text{ è derivabile } k \text{ volte su } I \text{ e } f^{(k)} \text{ è continua} \}$$

esempio:

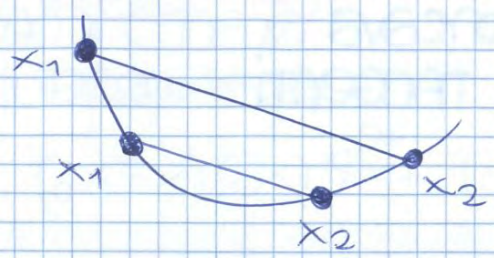
$f \in C^k([a,b])$

$f \in C^1([a,b])$: f è derivabile una volta su $[a,b]$ e $f'(x)$ è continua

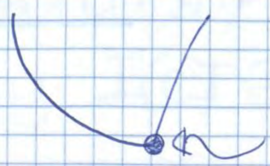
- $C^{\infty}(I)$: derivabile ∞ volte (e^x, $\sin x$)
- $C^0(I)$: derivabile 0 volte e f è continua
- $C^0(I)$: $\{ f \,/\, f \text{ è continua su } I \}$

Funzioni convesse (concave)

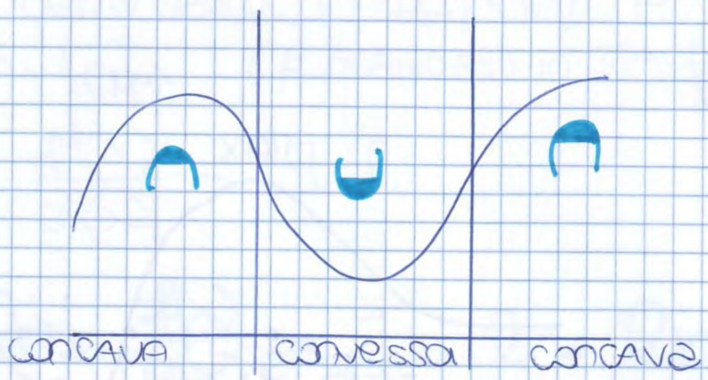
Def f è **convessa** su un intervallo $[a,b]$ se $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ (coppia di punti) il grafico di f sta sotto il segmento che passa per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$



f convessa:	$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
f concava:	$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

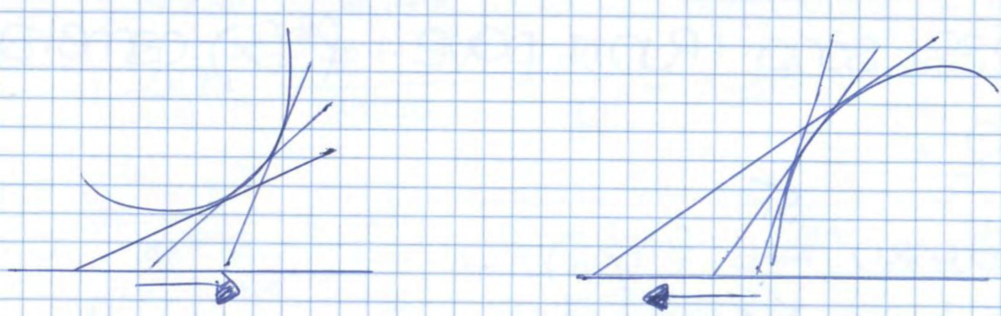


INTERVALLI di CONVESSITÀ



OSSERVAZIONE:

- Se f è derivabile e convessa, il coefficiente angolare delle tangenti **CRESCE**
- se f è derivabile e concava, il coefficiente angolare delle tangenti **DECRESCE**



PROPRIETÀ (1)

Se f è **derivabile** in I, f è convessa in I $\Leftrightarrow$ se e solo se f' è crescente

f' cresce è condizione necessaria e sufficiente per f convessa

28 Novembre 2011

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano f, g definite in un intorno di c (tranne c)

$f, g : I(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

Si suppone:

- $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$ se sono = viene una forma indeterminata
- g sia derivabile in $I(c) \setminus \{c\}$ e $g'(x) \neq 0$ in $I(c) \setminus \{c\}$ (f derivabile in $I(c) \setminus \{c\}$) !!
- $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \exists\, l$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \exists = l = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esempio:

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{\sin(4x)}$ controllo le ipotesi poi... $\lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} - 3e^{-3x}}{4\cos 4x} = \frac{0}{4} = 0$

allora $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{\sin 4x} = 0$ SBAGLIATO! xk non è una forma indeterminata!

$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{\sin 4x} = \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4\cos 4x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ GIUSTO DE L'HÔPITAL

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 3x + o(x) - (1 - 3x + o(x))}{4x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{6x + o(x)}{4x + o(x)}$

$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

- $\forall \alpha \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha$

SOSTITUZ: $y = \frac{x}{\alpha}$ $y \to \infty$

$\frac{1}{\alpha^\alpha}\lim_{y\to\infty}\left(\frac{e^y}{y}\right)^\alpha = +\infty$

$\rightarrow$ FATTO PRIMA! TENDE a $+\infty$

- $\forall \alpha \rightarrow \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \cdot e^x$ SOSTITUZ: $y = -x$ $y \to \infty$

$\lim_{y\to\infty}\frac{|y|^\alpha}{e^y} = 0$

· DEBOLEZZA DEL LOGARITMO

① $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ $\forall \alpha > 0$ $\left(\lim_{x\to\infty} x\cdot\log x = \infty!!\right)$

② $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log x = 0$ $\forall \alpha > 0$

DIMO

- $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$ USO DE L'HÔPITAL $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log x$ USO DEL L'HÔPITAL $\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\alpha x^{\alpha-2} = 0$

♥ esercizi:

- $f(x) = e^x - 1 - \sin x$ TROVARE LA P.P. PER $x\to 0$ RISPETTO a $\varphi(x)=$

OVVERO TROVARE $\alpha > 0$ /

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha} = l \neq 0$

RICORDO: lx^α ; $f(x) = lx^\alpha + o(x^\alpha)$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha} =$ DE L'HÔP $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{\alpha x^{\alpha-1}}$ DE L'HÔP

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin x \rightarrow 1}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$ $\begin{matrix}\alpha>2 \rightarrow 0\\ \alpha<2\rightarrow 0\end{matrix}$ $\alpha = 2!!$ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1)x^0} = \frac{1}{2}$

Buona approssimazione? Sì!

★ $e^x - (x+1) = ?$ sappiamo $= o(x)$

per $x \to 0$

$$p_1(x) = e^0 + e^0 x = f(0) + f'(0)x$$

$o(x)$ è più piccolo di $o(1)$, è un errore più piccolo

una funzione è uguale alla sua tangente più un $o(x)$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to 0$$

f derivabile $\Rightarrow$ implica $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$
per $x \to 0$

posso prendere, quindi, qualsiasi polinomio!

★ voglio approssimare e^x in $x \to 0$
con un polinomio di grado 2 $(p_2(x))$
in modo che $e^x - p_2(x) = o(x^2)$

$p_0(x) = e^0$

$p_1(x) = e^0 + e^0(x)$
$f(0) + f'(0) - x$

$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + ax^2$

$p_2(x) = 1 + x + ax^2$

$e^x - p_2(x) = o(x^2)$

trovare $a \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - ax^2}{x^2} = 0 \quad \text{uso de l'Hôpital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - 2ax}{2x} = 0 \quad \text{" "}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2a}{2} \quad \text{lo voglio} = 0$$

$1 - 2a = 0$

$a = \frac{1}{2}$

* $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n}$$

Def POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO n CENTRATO IN x_0

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

COSTANTE

$$T_0(x) = \sum_{k=0}^{0} = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{1} \cdot 1 = f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

$$T_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$ RETTA TANGENTE

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^6 \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

✡ TEOREMA DI TAYLOR

Si suppone f **DERIVABILE** n volte in x_0.

Esiste un unico **POLINOMIO** di grado $\leq$ a n /

$$f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

ed è il polinomio di Taylor:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \dots \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

SVILUPPO DI MCLAURIN DI SINX (FUNZIONE DISPARI)

- $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$
- $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = -1$

sequenza $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1 \dots$ (solo dispari)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

IMPO

perché $o(x^{2n-2})$?

perché : $\sin x = x + o(x)$ $\nearrow$ manca

$\sin x = x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$

$\sin x = x + o(x^2)$

aumenta di grado!

succede x tt le funzioni pari o dispari!

SVILUPPO DI MCLAURIN DI COSX

- $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x \dots$
- $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$

sequenza: $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1 \dots$ (solo pari)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

guadagno anche qui

SVILUPPO DI MCLAURIN DI LOG(1+X)

- $f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = +2(1+x$

$\rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!\,(1+x)^{-k}$

$\rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$

coefficiente : $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

RIASSUNTO

POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO n CENTRATO IN x_0

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$T_0(x) = f(x_0)$$

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0)$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \dots$$
$$\dots \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

TEOREMA DI TAYLOR

SI SUPPONE f DERIVABILE n VOLTE IN x_0.
ESISTE UN UNICO POLINOMIO DI GRADO $\leq$ a n TALE CHE
$f(x) - p_n(x) = o((x-x_0)^n)$ PER $x \to x_0$ ED È IL POLINOMIO DI TAYLOR: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

SVILUPPO DI TAYLOR DI f DI ORDINE n
FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

SE f È C^n IN UN INTORNO DI x_0 E ESISTE $f^{(n+1)}$ ALLORA ESISTE UN PUNTO $t \in (x_0, x)$ TALE CHE:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(t)(x-x_0) \quad \text{se } n=0$$

30 Novembre 2011

RIASSUNTINO

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \qquad \text{TAYLOR}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \qquad \text{MCLAURIN}$$

ULTIMO LIMITE NOTEVOLE (sviluppo di McLaurin)

$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad x_0 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \alpha$

$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)$

ovvero $\alpha-(k-1)$

COEFFICENTE DELLA FORMULA DI MC LAURIN:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

COEFFICENTE BINOMIALE GENERALIZZATO

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

CALCOLIAMONE QUALCUNO:

$\binom{\alpha}{0} = 1$

$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1!} = \alpha$

$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$

QUINDI:

SVILUPPO DI MC LAURIN PER $(1+x)^\alpha$

MACLAURIN

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

A COSA SERVONO GLI SVILUPPI DI MCLAURIN?

HO 2 SVILUPPI DI MCLAURIN:

$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \qquad x_0 = 0$

$g(x) = S_n(x) + o(x^n) \qquad x_0 = 0$

★ SOMMO LE FUNZIONI:

$$f(x) + g(x) = \underbrace{T_n(x) + S_n(x)}_{} + o(x^n)$$

QUESTO È IL POLINOMIO DI TAYLOR PER LA NUOVA FUNZIONE DEFINITA DA $f(x) + g(x)$? SÌ

PERCHÉ, IL TEOREMA DICE CHE ESISTE UN SOLO POLINOMIO!
SE QUELLO NON FOSSE IL POLINOMIO DI TAYLOR NON POTREI SCRIVERE ... $+ o(x^n)$!

★ LO STESSO SE FACCIO IL PRODOTTO DELLE FUNZIONI:

$$f(x)g(x) = (T_n(x) + o(x^n))(S_n(x) + o(x^n)) =$$

$$= \underbrace{T_n(x) \cdot S_n(x)}_{} + o(x^n) \qquad \text{PERCHÉ } \boxed{T_n(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)}$$

È IL POLINOMIO DI TAYLOR PER LA NUOVA FUNZIONE DEFINITA DA $f(x)g(x)$ PERCHÉ LO DICE IL SUO TEOREMA

♥ esempio:

$f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$ } TROVARE UNO SVILUPPO DI MCLAURIN DI ORDINE 3 DI $f(x) \cdot g(x) = e^x \sin x$

- CALCOLO CON LE DERIVATE bla, bla oppure
- USO GIÀ GLI SVILUPPI DI MCLAURIN:

$$f(x)g(x) = e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

TUTTE LE POTENZE PIÙ ALTE DI 3 VENGONO BUTTATE VIA XK NON SERVONO:

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \cancel{\frac{x^4}{6}} + \frac{x^3}{2} - \cancel{\frac{x^5}{12}} + o(x^3)\right) =$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

HO TROVATO LO SVILUPPO DI MCLAURIN DI $e^x \sin x$

$\left(x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)$ È IL POLINOMIO DI MCLAURIN

QUINDI:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

ESERCIZIO:

SVILUPPO DI MCLAURIN DI $f(x) = e^{\cos x}$

$$f(x) = e^{\cos x} = 1 + \cos x + \frac{\cos^2 x}{2} \dots + o(\cos^n x)$$

SBAGLIATO !! • se $x \to 0$, $\cos x \to 1$!! • $o(\cos^n x) = o(1)$!!

$$f(x) = e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = e^1 e^{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

se $x \to 0$ $-\frac{x}{2} + o(x^2) \to 0$!

$$= e\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = e - \frac{ex^2}{2} + o(x^2)$$

ESERCIZIO:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(\tan x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x - \sin(\tan x)}{x \cdot \sin(\tan x)}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(\tan x)}{x^2 \cdot \sin(\tan x)}$$ ORA

• $\sin(\tan x)$: se $x \to 0$, $\tan x \to 0$ POSSO APPLICARE LA COMPOSIZIONE

$$\sin(\tan x) = \tan x - \frac{\tan^3 x}{6} + o(\tan^3(x))$$

MA $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ QUINDI:

$$\sin\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$\sin\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{6}$$

♥ esercizio:

$$\lim_{x\to 0} (1+x^6)^{\frac{1}{x^4 \sin^2 3x}} = 1^\infty \text{ forma indet.}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\log(1+x^6)\frac{1}{x^4\sin^2 3x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^6)}{x^4 \sin^2 3x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^6+o(x^6)}{x^4(3x+o(x))^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^6+o(x^6)}{x^4(9x^2+o(x^2))}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{x^6+o(x^6)}{9x^6+o(x^6)}} = e^{1/9}$$

5 Dicembre 2011

USO degli SVILUPPI!

- fare limiti
- calcolare parte principale

RICORDO:

$f(x)$

$\varphi(x) = (x-x_0)$

$f(x) \to 0$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = l \neq 0$$

P.P. di $f(x) = l(x-x_0)^\alpha$

$f(x) \sim l(x-x_0)^\alpha$

$f(x) = l(x-x_0)^\alpha + o((x-x_0)^\alpha)$

assomiglia a uno sviluppo di Taylor!!

$f(x) = \cancel{f(x_0)} + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \dots + o((x-x_0)^n)$

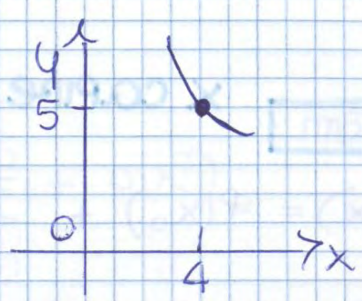
$$\boxed{\text{se } \varphi(x) = x - x_0 \text{ e } f \text{ è derivabile un numero sufficiente di volte, la parte principale di } f \text{ è il primo termine non nullo dello sviluppo.}}$$

♥ esempio:

$f(x) = 5 - 3(x-4) + 2(x-4)^2 + o((x-4)^2)$

$\exists\, I(x_0)$ ovvero $I(4)$ dove:
- f è positiva (5)
- f è decrescente (−3)
- f è convessa (2)

(xk f è continua!!)

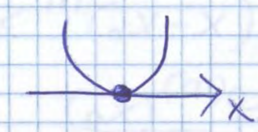


♥ esempio:

$f(x) = -3 + 4(x-2)^2 + o((x-2)^2)$

$\exists\, I(x_0)$ ovvero $I(2)$ dove:
- f è negativa (−3)
- la derivata si annulla → tangente orizzontale!
- f è convessa (4)

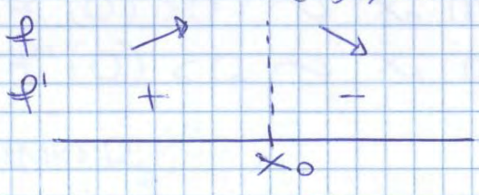
quindi $x = 2$ è un punto minimo



NUOVO MODO X CLASSIFICARE I PUNTI CRITICI

vecchio modo: $f'(x_0) = 0$ punto critico

studio $f'(x) \geq 0$



TEOREMA (classificazione punti critici)

Sia f **derivabile** n volte in x_0,

supponiamo che $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$

e che $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ $\boxed{m \leq n}$

Allora se **m è pari**:
- $f^{(m)}(x_0) > 0 \to x_0$ è un **minimo**
- $f^{(m)}(x_0) < 0 \to x_0$ è un **massimo**

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 526

ESERCIZI SU TAYLOR
dai vecchi ESAMI

(1) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che per $x \to 0$

$$f(x) = 2 + \sin(16x) + 2\alpha x + \beta x^2 + o(x^2)$$

Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che f:

a) abbia un **minimo** in x_0
b) abbia un **massimo** in x_0

MAI fare la derivata di $f(x)$!!!
ex: mai detto che $o(x^2)$ sia derivabile

- Scrivo lo sviluppo al 2° ordine
  = sviluppo $\sin(16x)$

$$f(x) = 2 + 16x + o(x^2) + 2\alpha x + \beta x^2$$
$$f(x) = 2 + (16 + 2\alpha)x + (\beta)x^2 + o(x^2)$$

- Bisogna che $f'(0) = 0$ → la derivata prima sia nulla

$$16 + 2\alpha = 0$$
$$\alpha = -8$$

Quindi: $f(x) = 2 + (\beta)x^2 + o(x^2)$

- Bisogna che $f''(0) > 0$ → x_0 minimo
  $f''(0) < 0$ → x_0 massimo

se $\beta > 0 \to x_0$ minimo
$\beta < 0 \to x_0$ massimo

(2) Sia $f(x) = \sin^2 4x - \log(1 + 16x^2) - \lambda(x^5 - x^4)$

a) Scrivo sviluppo Mcl all'ordine 5
b) Trovo λ : $f(x) = o(x^4)$ se $x \to 0$

- $\sin^2 4x = \left(4x - \frac{(4x)^3}{6} + \frac{(4x)^5}{120} + o(x^6)\right)^2 = 16x^2 + \left(-\frac{4}{3}(4)^3 x^4\right)$

$$= 16x^2 - \frac{4^4}{3}x^4 + o(x^5)$$

- $\sin^2 x \log(1+x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

- $e^{\cos(\alpha x)} = e^{1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + \frac{(\alpha x)^4}{24} + o(x^5)} = e \cdot e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^5)}$

$$e^{\cos(\alpha x)} = e\left[1 + \frac{-\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^5) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^4)\right]$$

$$e^{\cos(\alpha x)} = e\left[1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + \frac{(\alpha x)^4}{24} + \frac{(\alpha x)^4}{8} + o(x^4)\right]$$

QUINDI:

$$f(x) = \cancel{e} - e\frac{\alpha^2 x^2}{2} + e\frac{1+3}{24}\alpha^4 x^4 - \cancel{e} + x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = x^2\left(-\frac{e\alpha^2}{2}\right) + x^3 + x^4\left(\frac{e\alpha^4}{6} - \frac{1}{2}\right) + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(-\frac{e\alpha^2}{2}\right)x^2 + x^3 + \left(\frac{e\alpha^4 - 3}{6}\right)x^4 + o(x^4)$$

se $\alpha \neq 0$ la P.P. è $-\frac{e\alpha^2}{2}x^2$

se $\alpha = 0$ la P.P. è x^3

TEOREMA

Siano F_1 e F_2 due primitive di f.
Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ /

$$F_1(x) = F_2(x) + c$$

ovvero $F_1(x) - F_2(x) = c$

- se a una primitiva aggiungo una costante è ancora una primitiva
- non ci sono primitive di altro tipo

DIMOSTRO

$F_1(x) - F_2(x)$ → derivo

$(F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0 \quad , \forall x$

x la caratterizzazione delle f costanti

$F_1(x) - F_2(x) = c \quad , \forall x$

DEF L'insieme di **TUTTE** le primitive di f si chiama integrale **INDEFINITO** di f
ovvero $\int f(x)\,dx$

esempio:

$$\int x\,dx = \left\{ \frac{x^2}{2} + c \,/\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

QUINDI $\int$ è un insieme di funzioni

QUINDI:

$D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$ $\qquad$ $\int e^x\,dx = e^x + c$

eccetera eccetera!

REGOLETTE

• PROPRIETÀ (linearità dell'integrale)

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

DIMOSTRO

$F' = f \;,\; G' = g$

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$

$\Rightarrow$ $\alpha F + \beta G$ è una PRIMITIVA DI $\alpha f + \beta g$ $\Rightarrow$

$\int [\alpha f + \beta g]\, dx = \alpha F + \beta G + c$

$\int [\alpha f + \beta g]\, dx = \alpha \int f\, dx + \beta \int g(x)$

♥ esempio:

- $\int (3x + 4\cos x)\, dx = 3\int x\,dx + 4\int \cos x\, dx = \frac{3}{2}x^2 + 4\sin x + c$
- $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot \frac{2}{2}\, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x \cdot 2\, dx =$ TRUCCO

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$

• PROPRIETÀ (integrazione per parti)

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

♥ esempio:

$\int x \cdot e^x\, dx =$ $\quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$, $\quad g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$

$\underbrace{\int x \cdot e^x\, dx}_{fg'} = \underbrace{x e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx}_{fg - \int f'g} = x e^x - e^x + c$

se scambiavo i ruoli, era ancora peggio non risolvevo nulla!

QUIZ

TEORIA FACILE TAYLOR:

① $f(x) = \sin(x^4) - \sinh(x^4)$ soddisfa

a) $f(x) \geq 0$ in un $I(0)$
b) $f(x) \leq 0$ in un $I(0)$
c) $f(x) \sim x^4$ per $x \to 0$
d) $f(x) = o(x^{12})$ per $x \to 0$
e) nex risp

B

$$\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$-\frac{x^{12}}{6} - \frac{x^{12}}{6} + o(x^{12})$$

$$\text{mcl} = -\frac{1x^{12}}{3} + o(x^{12})$$

$\text{mcl} \leq 0$!

② $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f(x) = x^3(x + o(x))$. Allora si ha

a) mcl di ordine 4 è x^4
b) mcl di ordine 4 è x^3
c) $f(x) = o(x^4)$
d) $f^{(5)}(0) = \cancel{\exists}$
e) nex risp è giusta

A

$f(x) = x^4 + o(x^4)$

mcl x^4 di ordine 4

③ $f(x) = x^7 e^{3x}$. allora si ha:

a) $f^{(8)}(0) = 0$
b) $f^{(7)}(0) = 0$
c) $f^{(8)}(0) = 3 \cdot 8!$
d) $f^{(3)}(0) = 8 \cdot 3!$
e) $f^{(3)}(0) = 24$

C

la derivata 8ª è fatta di 256 termini

sviluppo e^{3x}

$f(x) = x^7(1 + 3x + o(x))$

$f(x) = x^7 + 3x^8 + o(x^8)$

$$3x^8 = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(8)}(0)}{8!} x^8$$

$$3 = \frac{f^{(8)}(0)}{8!} \qquad f^{(8)}(0) = 3 \cdot 8!$$

④ $f(x) = 3 + o(x)$ per $x \to 0$

a) f non continua in $x = 0$
b) $f(0) = 3$ → sottigliezza
c) f è continua in 0
d) se $f(0) = 3$, allora f è continua in 0
e) nex risp

D

x essere continua

$f(x) = f(x_0) + o(1)$

se f continua

$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim 3 + o(x) = 3$

$f(0) = 3$ solo se f è continua!

Come fare la sostituzione!

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx =$$

① CHIAMO $y = \varphi(x)$ OPPURE $x = g(y)$

② DERIVO $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ $\qquad \frac{dx}{dy} = g'(y)$

③ OPERAZIONE ILLECITA: TRATTO $\frac{dy}{dx}$ COME UNA FRAZIONE

$dy = \varphi'(x)\,dx$

④ SI FA LA SOSTITUZIONE VERA E PROPRIA

$$\int \underbrace{f(\varphi(x))}_{f(y)}\,\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{dy} = \int f(y)\,dy$$

$= F(y) + c$ ⑤ RISOSTITUISCO: $F(\varphi(x)) + C$

esempi:

- $\int x e^{x^2} dx \rightarrow$ ① $y = x^2$ ② $\frac{dy}{dx} = 2x$

③ $dy = 2x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}dy = x\,dx$

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^y \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

- **INTEGRALE DELLA TANGENTE**

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ ① $y = \cos x$ ② $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$ ③ $dy = -\operatorname{sen} x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{-dy}{y} = -\int \frac{1}{y}dy = -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$$

- $\int \cos(e^x)e^x\,dx =$ ① $y = e^x$ ②

$= \sin(e^x) + c$!

INTEGRALI delle funzioni razionali

$$Q(x) = \frac{a_n x^n + \dots a_0}{b_m x^m + \dots b_0}$$

★ TUTTE LE FUNZIONI RAZIONALI POSSONO ESSERE INTEGRATE IN UN NUMERO FINITO DI PASSI

★ LE PRIMITIVE DI Q SI ESPRIMONO CON
- funzioni razionali
- logaritmi
- arctangente

CASI:

1. NUMERATORE DI GRADO ≤ 1
2. DENOMINATORE DI GRADO ≤ 2

- SE P(x) HA GRADO MAGGIORE DI Q(x) → faccio la DIVISIONE $\frac{P(x)}{Q(x)}$ DI POLINOMI PER AVERE:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{R(x)}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\frac{D(x)}{K(x)}}_{\text{grado numeratore < grado denominatore}}$$

- SI STUDIA QUINDI SOLO IL CASO: GRADO NUMERATORE < DEL GRADO DEL DENOMINATORE

★ $$\int \frac{1}{x^2+2px+q}\,dx \qquad \Delta<0$$

con $p^2-q<0 \iff x^2+2px+q \neq 0$ $(\Delta<0)$

SI DEVE FAR APPARIRE IL QUADRATO AL DENOM.

$$x^2+2px+q = x^2+2px+p^2+q-p^2 = (x+p)^2+\underbrace{q-p^2}_{q-p^2>0}$$

esempio:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+4}\,dx$$

① $\Delta = 4 - 16 < 0$

② $(x^2-2x+4)' = 2x-2$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{4\,dx}{x^2-2x+4}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx}_{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \text{LOGARITMO}} + \underbrace{2\int \frac{dx}{x^2-2x+4}}_{\text{COMPLETAMENTO DEL QUADRATO}}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+4) + c + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

☆ $\int \frac{ax+b}{x^2+2px+q}$ $(\Delta > 0)$ $\Delta > 0$

con $\Delta > 0 \iff x^2+2px+q = 0$ ha 2 soluzioni α e β

ESISTONO DUE COSTANTI a e b TALI CHE $\frac{ax+b}{x^2+2px+q} =$ SI PUÒ SCRIVERE COME $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$

ovvero $\rightarrow x^2+2px+q = (x-\alpha)(x-\beta)$

$$\frac{ax+b}{x^2+2xp+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} = \frac{A(x-\beta)+B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

$$ax+b = A(x-\beta) + B(x-\alpha)$$

$$ax+b = (A+B)x - \beta A - B\alpha$$

$$\begin{cases} A+B = a \\ \beta A + B\alpha = -b \end{cases}$$

soluzione:

$A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + c$

12 Dicembre 2011

② METODI PER DEFINIRE E CALCOLARE AREE

DEFINIZIONE AREA:

- solo x figure semplici
- no x figure complicate
- cerchio: πR^2

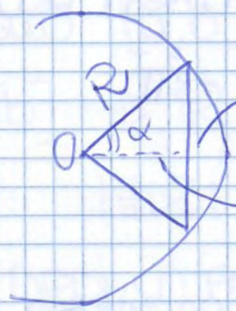
figure geometriche molto elementari

- prendo figure che assomigliano al cerchio inscritti e circoscritti

n = numero dei lati

$$\underbrace{A(P_n)}_{\text{POLIGONI INSCRITTI}} \le \underbrace{A(C)}_{\text{CERCHIO}} \le \underbrace{A(P_n)}_{\text{POLIGONI CIRCOSCRITTI}}$$

$\alpha = \frac{\pi}{n}$



$\rightarrow 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

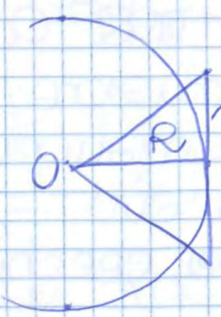
$\rightarrow R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

P_n: POLIGONO INSCRITTO DI n LATI

$$A(P_n) = n \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}R^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A(P_n) = nR^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A(P_n) \le A(C)$$



$\rightarrow 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

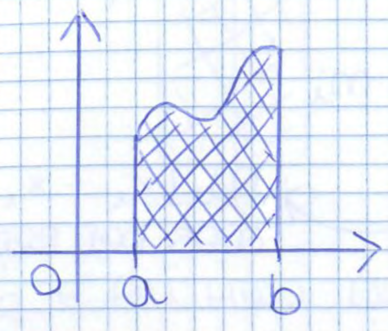
$$A(P_n) = n \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot R$$

$$A(P_n) = nR^2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A(P_n) \ge A(C)$$

INTEGRALE di RIEMANN

- cercare di definire l'area di una figura delimitata almeno da un lato curvo.



IPOTESI:

① intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato

② $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f limitate

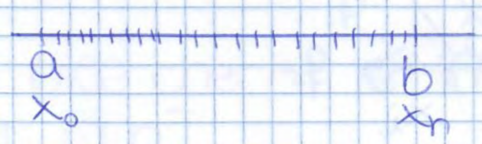
esempio: $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a,b]$

mettere in piedi un processo di approssimazione:

- **PARTIZIONE DI $[a,b]$**

insieme di punti di $[a,b]$ → $x_0 < x_1 \dots < x_n$

se $x_0 = a$, $x_n = b$



$$[x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1,2,\dots n$$

- **DEFINISCO DEI NUMERI**

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

∘ numeri ben definiti → xké la funzione è limitata

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

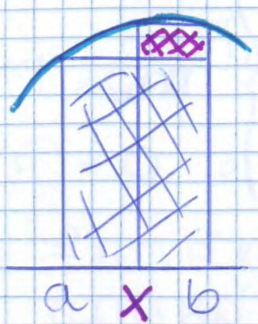
∘ non saranno mai $\pm\infty$

- **SOMME INFERIORI**

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

CERCO DI PRENDERE L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORE:

- PARTIZIONI PIÙ PICCOLE / FITTE



AGGIUNGO PUNTI

P_2 È PIÙ FITTA DI P_1 → $P_1 \subset P_2$

QUINDI SE $P_1 \subset P_2$

$s(P_1) \leq s(P_2)$ VALORE S INF CRESCE ↗

$S(P_1) \geq S(P_2)$ VALORE S SUP DECRESCE ↘

L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORE?

- PRENDO LA PIÙ GROSSA $s(P) = \sup_P s(P)$ → INSIEME DI NUMERI

- PRENDO LA PIÙ PICCOLA $S(P) = \inf_P S(P)$

$\boxed{\text{DEF}}$ SE $\inf_P S(P) = \sup_P s(P)$

SI DICE CHE f È **INTEGRABILE** (secondo Riemann) su $[a,b]$.

IL VALORE COMUNE DI $\inf_P S(P)$ e $\sup_P s(P)$ si chiama **INTEGRALE DI RIEMANN** di f su $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

allora:

$$\left.\begin{aligned} s(P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0 \\ S(P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = 1 \end{aligned}\right\} \forall P$$

qualunque partizione prendo

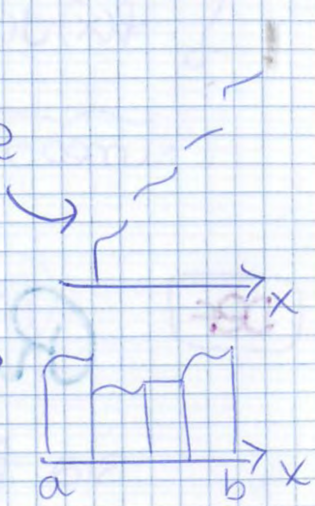
$\sup_P s(P) = 0$ e $\inf_P S(P) = 1$ → 2 numeri diversi

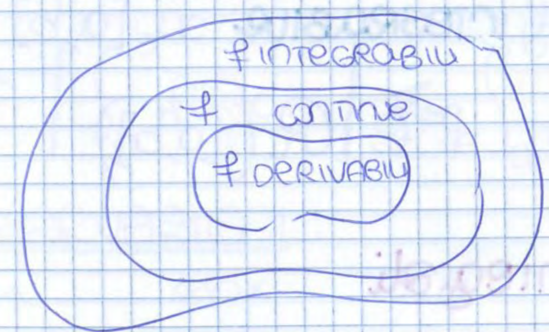
quindi: f non é integrabile (nel senso di Reimann)
non si può definire la sua area

- Quali funzioni sono integrabili?

☆ TEOREMA: classi di funzioni integrabili

1. ogni funzione **continua** é integrabile
2. ogni funzione **monotona** é integrabile (anche se é discontinua)
3. ogni funzione continua **a tratti**





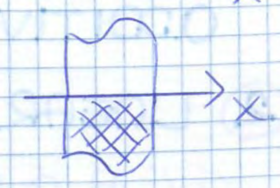
- deriv → cont
- cont → inte

integ $\not\to$ cont
cont $\not\to$ deri

Def **A = Area** sotto al grafico di f

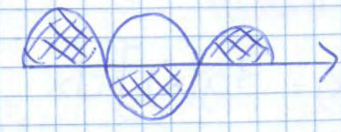
- se f é ≥ 0, $A = \int_a^b f(x)\,dx$

- se f é < 0, $A = \int_a^b -f(x)\,dx$

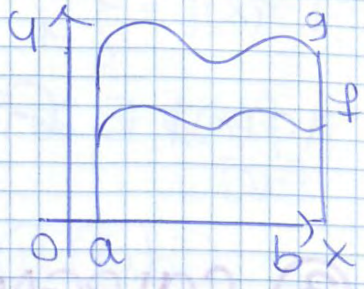


quindi $f \in R$

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$



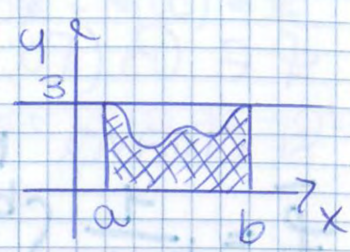
③ monotonia dell'integrale



se $f(x) \leq g(x)$ su $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

♥ esempio:



$f(x) \leq 3$ su $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b 3\,dx = 3(b-a)$$

conseguenza:

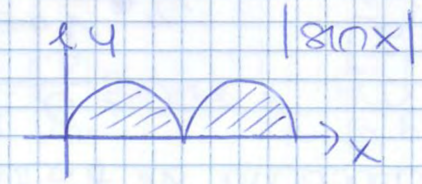
se $f(x) \geq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b 0\,dx = 0$$

④ $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a,b])$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

osservazioni:



$$\left| \int_0^{2\pi} \sin x\,dx \right| = 0 \qquad \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx > 0$$

- $|f| \in \mathcal{R}([a,b]) \not\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$

non è vera l'implicazione inversa (corretta poi da altre teorie)

♥ esempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \rightarrow f \notin \mathcal{R}([a,b]) \quad [a,b] = [0,1]$$

Teorema della media

1) Sia $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \inf_{[a,b]} f \leq \bar{f} \leq \sup_{[a,b]} f$

2) sia f continua su $[a,b]$ e $f \in \mathcal{R}([a,b])$
$\Rightarrow \exists c \in [a,b] \, / \, \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) = \bar{f}$

ovvero la media è un punto appartenente alla funzione

DIMOSTRO:

1) $\forall x \in [a,b]$, $\inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f$

- ovvia!
- inf/sup sono numeri finiti xk f è integrabile e quindi limitata

USO LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE:

- $\int_a^b \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \sup_{[a,b]} f \, dx$ • integro

$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$ • divido per $(b-a)$

$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \sup_{[a,b]} f$

$\inf_{[a,b]} f \leq \bar{f} \leq \sup_{[a,b]} f$ • trovato!

2) f è continua su $[a,b]$, ovvero:

$\inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$ e $\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$

PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

ora faccio come prima (USO MONOTONIA) fino a

$\min_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \max_{[a,b]} f$

4) PER $x \to 0$, f e g HANNO LA STESSA PP: φ^α. ALLORA:

a) PP di $f+g = \varphi^{2\alpha}$
b) PP di $f \cdot g = 2\varphi^{\alpha}$
c) PP di $f \cdot g = 2\varphi^{2\alpha}$
d) PP di $f \cdot g = \varphi^{2\alpha}$
e) nex RISP

$f+g = \varphi^\alpha + \varphi^\alpha = 2\varphi^\alpha$

$f \cdot g = \varphi^\alpha \cdot \varphi^\alpha = \varphi^{2\alpha}$

5) PER $x \to 0$ SI HA $f = o(g)$ e $g \sim o(h^2)$. ALLORA:

a) $f = o(g^2)$
b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{h(x)^2} = 0$
c) $f \sim g^2$
d) $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)^2}{f(x)} = 0$
e) nex RISP

$\star\ \frac{f}{g} = 0 \qquad \star\ \frac{g}{o(h^2)} = 1$

$\frac{f}{h^2} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h^2} = 0$!! SI VERO!

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \cdot 1$

14 Dicembre 2011

CONTINUA IL PUNTO 3 (connessione 1 e 2)

f INTEGRABILE SU UN INTERVALLO I.
FISSIAMO UN PUNTO $x_0 \in I$ E DEFINIAMO UNA FUNZIONE: $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

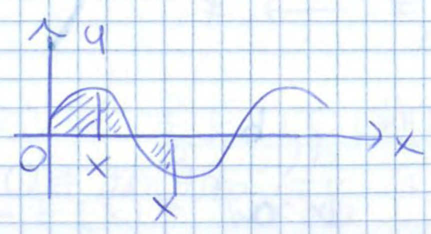
se $f(t) \geq 0 \to F(x)$ è l'AREA SOTTO AL GRAFICO DI f NELL' INTERVALLO $[x_0, x]$
(se cambio, sposto x, cambia $F(x)$)

$F(x)$ è chiamata **FUNZIONE INTEGRALE DI f**

♥ esempio:

$f(t) = \sin t$

$F(x) = \int_0^x \sin t\,dt$



DIMOSTRO:

DIMOSTRO 2 COSE: f È DERIVABILE; $F'(x) = f(x)$

CALCOLO LA DERIVATA CON IL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

- $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$
- $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt$

USO L'ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE:

$$= \cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt}$$

RITORNANDO AL LIMITE:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt}_{\text{media di } f \text{ su } [x,\, x+h]}$$

f È CONTINUA, QUINDI, PER IL TEOREMA DELLA MEDIA:

$$\exists\, c_h \in [x, x+h] \;/\; \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)$$

QUINDI:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h \to 0} f(c_h)$$

$c_h \in [x, x+h]$ se $h \to 0$, $c_h \to x$

ALLORA:

$\lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$ PERCHÉ f È UNA f CONTINUA!!

QUINDI $\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$!

INTEGRAZIONE PER PARTI:

$$\boxed{\int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,dx}$$

$(fg)' = f'g + fg' \rightarrow fg$ è una PRIMITIVA DI $f'g + fg'$

$$\int_a^b (f'g + fg')\,dx = [fg]_a^b$$

USO LINEARITÀ:

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg'\,dx = [fg]_a^b$$

SPOSTO:

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,dx$$

esempio:

$$\int_1^2 x \log x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x\right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 =$$

$$= 2\log 2 - 0 - 1 + \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{3}{4} + \log 4$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE:

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy}$$

SIA F UNA PRIMITIVA DI f, $F(\varphi(x))$ è UNA PRIMITIVA DI $f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = [F(\varphi(x))]_b^a = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) =$$

$$= [F]_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

QUANDO SI INTEGRA X SOSTITUZIONE → BISOGNA CAMBIARE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE!!

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{y} + \frac{3}{y+1}\right) dy = \Big[-\log|y| + 3\log|y+1|\Big]_1^2$$

$$= -\log 2 + 3\log 3 - 3\log 2 = 3\log 3 - 4\log 2$$

esempio:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2}}{1+t^8}\,dt$$

$F(x) \geq 0$ se $x \geq 1$
$F(x) \leq 0$ se $x \leq 1$
$F(x)$ è crescente

- **f è crescente**, $\forall x$
  $\rightarrow F'(x) = f(x) \rightarrow f(x)$ è crescente $\rightarrow F'(x)$ è cresce
  $\rightarrow$ **F è convessa!**

- **F** ha un **massimo** o un **minimo** in un punto x_0
  $\rightarrow F'(x_0) = 0 \rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \rightarrow$ **$f(x_0) = 0$**

PROPRIETÀ LIMITI delle funzioni

- Se f è **continua** e **crescente** $([a, +\infty))$
  se f è **limitata** dall'alto / superiormente
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \exists$ ed è finito $= \sup_{x \in [a,+\infty)} f(x)$

DIMOSTRAZIONE:

Chiamo $L = \sup_{x \in [a,+\infty)} f(x)$

Quindi: caratteristiche del sup:
1) $\forall x \quad f(x) \leq L$ (il sup è un maggiorante)
2) $\forall \varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ non è un maggiorante di $\{f(x) / x \in [a, +\infty)\}$
   $\rightarrow \exists x_\varepsilon$ tale che $f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon$

Poi f è crescente : $\forall x \geq x_\varepsilon \rightarrow f(x) \geq f(x_3)$
e poi $f(x_\varepsilon) \geq L - \varepsilon$

★ Se il limite è più o meno $\pm\infty$ si dice che:

$\pm\infty$ - $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **diverge** (positivam o negativam)

★ Se il limite non esiste si dice che:

$\nexists$ - l'integrale improprio è **indeterminato** (oscillante)

♥ esempi:

★ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$f(x)$ è continua

$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \arctan(b) - \arctan(0)$

$= \lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$

quindi - $\frac{1}{1+x^2}$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ è convergente

★ $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+b^2) - \frac{1}{2}\log(1+0) =$

$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\log(1+b^2) = +\infty$

quindi - $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ diverge positivamente

★ $\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \text{sen}(b) - \text{sen}(0)$

$= \lim_{b\to\infty} \text{sen}(b)\ \nexists$

quindi: - $\int_0^{\infty} \cos x\,dx$ è indeterminato o oscillante

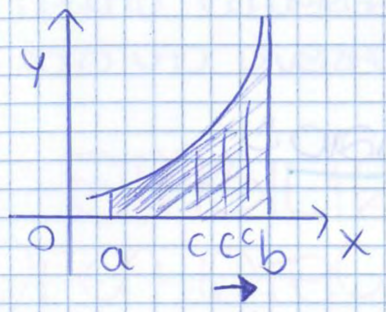
CASO $(-\infty, b]$ — INTERVALLI ILLIMITATI

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,d(x)$$

CASO FUNZIONI ILLIMITATE

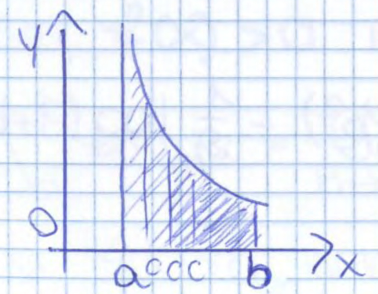
- f continua su $[a, b)$, non limitato in b

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_{a}^{c} f(x)\,dx$$



- f continua su $(a, b]$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

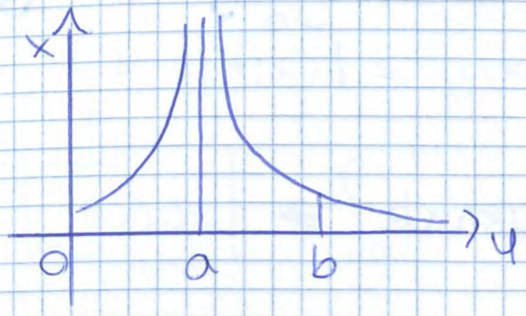


esempio:

$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ è un integrale improprio!! → $\boxed{\begin{matrix} x\to 0 \\ f(x)\to\infty \end{matrix}}$

$$\lim_{c\to 0^+}\int_{c}^{1}\frac{1}{\sin x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_{c}^{1}$$

esempio:



$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)dx + \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

- se ognuno converge → tutto converge
- se solo uno diverge → tutto diverge

STABILIRE IL CARATTERE DI UN INTEGRALE IMPROPRIO (senza calcolarlo)

CONVERGENTE, DIVERGENTE, INDETERMINATO?

Sia $f(x) > 0$ positiva $\forall x \in [a, +\infty)$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(b)$$

ma $f(x) > 0$ quindi $F(b)$ è **crescente**!!

$\lim_{b \to +\infty} F(b)$ → ∞ diverge; → $l \in \mathbb{R}$ converge

Teorema del confronto

Sia $0 < f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$

se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge → anche $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge se f HA SEGNO VARIABILE

$\rightarrow |f(x)| \leq g(x)$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

✩ TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO

più potente

Siano $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ su $[a, +\infty)$

se $f \sim g$ per $x \to +\infty$ $\left(\lim_{x \to \infty} \frac{f}{g} = 1 \right)$

$\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ HANNO LO **STESSO CARATTERE** (CONVERGONO O DIVERGONO)

DIMOSTRAZIONE

$f \sim g$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f}{g} = 1$$

$\exists M$, $\forall x \geq M$, $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}$ STA IN UN $I_{\frac{1}{2}}(1)$

$\rightarrow \frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x)$, $\forall x \geq M$

HO OTTENUTO UN DOPPIO CONFRONTO CHE MI FA OTTENERE TUTTI I CASI

♥ esempio:

$$\star \int_5^{+\infty} \frac{2x + x^2}{x^5 + 1}\,dx$$

$$\frac{2x + x^2}{x^5 + 1} \sim \frac{1}{x^3}$$

$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ CONVERGE $\rightarrow \int_5^{+\infty} \frac{2x + x^2}{x^5 + 1}$ CONVERGE

QUIZ

① SIA DATA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, CONTINUA E DERIVABILE 2 VOLTE, CON $f(-20) = 0$, $f(10) = 0$, $f(25) = 0$

COSA È VERO?

(E)

a) $f(x)$ HA ALMENO 3 PUNTI CRITICI

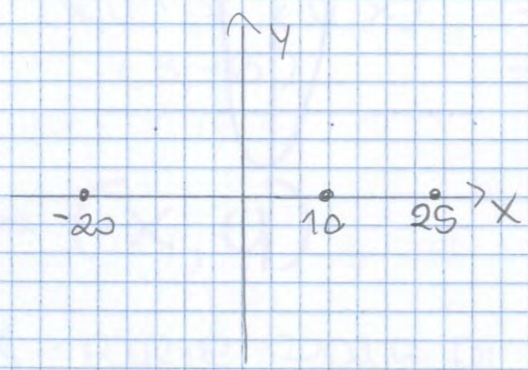
b) $f(x)$ HA 1 MAX RELATIVO E 1 MIN RELATIVO

c) $\sinh f(x)$ NON HA PUNTI DI STAZIONARIETÀ

$f' = \cosh(f(x))\, f'(x)$ NON SI ANNULLA MAI → SI PUNTI STAZ

d) $\sinh f(x)$ NON HA ZERI → NO XK f SI ANNULLA

e) $\exists$ ALMENO 1 ZERO DELLA DERIVATA 2° DI f



USO IL TEOREMA DI ROLLE

f 3 ZERI

f' 2 ZERI ALMENO

f'' 1 ZERO ALMENO

② SIA f DI CLASSE $C^\infty(\mathbb{R})$, INFINITESIMA PER $x \to 0$ E CON UN PUNTO DI MINIMO IN $x=0$. ALLORA:

(D)

a) $f(x) = kx^2 + o(x^2)$, $k \in (0, +\infty)$

b) $f(x) = h + kx^2 + o(x^2)$, $k, h \in (0, +\infty)$

c) $f(x) = kx^4 + o(x^4)$, $k \in (0, +\infty)$

d) LA 1ª DERIVATA NON NULLA IN $x=0$, SE ESISTE, È DI ORDINE PARI

MINIMO → PARI

e) $f'(0) = 0$ E $f'(x) \geq 0$ $\forall x$

③ IL POLINOMIO DI TAYLOR DI 2° GRADO CON CENTRO IN $x = 1$, DELLA FUNZIONE $f(x) = \sin \pi x$ È:

(A)

a) $T(x) = -\pi(x-1)$

b) $T(x) = -\pi(x-1) + o(x-1)$

c) $T(x) = -\pi(x-1) + o(x-1)^2$

d) $T(x) = -\pi x$

e) $T(x) = -\pi(x-1) + \pi^2(x-1)^2$

11 Gennaio 201

NUMERI COMPLESSI

ESTENSIONE DEI NUMERI REALI
SERVONO PER:

- risolvere : $x^2 + 1 = 0$
- soluzione reale ma per ottenerla bisogna usare i numeri complessi, ex: $a^2 = -1$
- utilizzati nell'elettrotecnica

DEF un numero complesso è una COPPIA ORDINATA di numeri reali

$(x,y) \neq (y,x)$ → ordinata
$(3,-6)$ → coppia di n. reali

$$z = (x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

X : PARTE REALE DI z : $Re(z)$
Y : PARTE IMMAGINARIA DI z : $Im(z)$

OPERAZIONI:

* Somma

HO 2 NUMERI COMPLESSI:
$z_1 = (x_1, y_1)$
$z_2 = (x_2, y_2)$
DEFINISCO UN NUOVO NUMERO COMPLESSO

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$

* x la definizione di somma:

$$\boxed{(x,y) = (x,0) + (0,y)}$$

* x spostare la y:

$$\boxed{(0,1)(y,0) = (0,y)}$$

* Risultato:

$$(x,y) = \underbrace{(x,0)} + (0,1)\underbrace{(y,0)}$$

sono 2 numeri reali!
$Im(z) = 0$

$(x,0) = x$
$(0,1) = i$
$(y,0) = y$

$$\boxed{z = (x,y) = x + iy}$$

Forma algebrica o cartesiana di z

* Cerco i:

$$i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

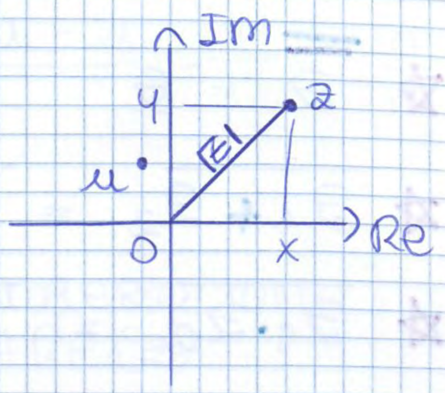
x la definizione di prodotto!
ho trovato un oggetto x cui
$a \cdot a = -1 \rightarrow a^2 = -1$
x questo a non è un numero reale, ma immaginario!

$$i^2 = -1$$

* esempio:
$z = x + iy$
$z = 2 + 3i = (2,3)$

DEF MODULO DI $z \in \mathbb{C}$:

$|z|$ è la DISTANZA DEL PUNTO (x,y) DA $(0,0)$, CON $z=(x,y)$



$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} =$$

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

esempio:

$$z = 2-i = (2,i)$$

$$|z| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

★ $|z|$ con $z=(x,0)$

$$|z| = \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = |x|$$

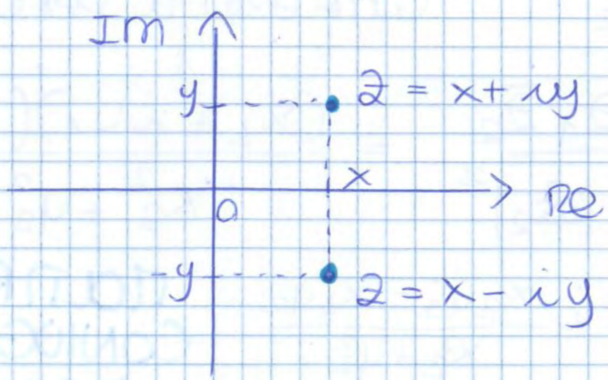
IL MODULO CALCOLATO SU NUMERI REALI È NIENT'ALTRO CHE IL VALORE ASSOLUTO

DEF PRESO $z \in \mathbb{C}$. SI DEFINISCE COMPLESSO CONIUGATO DI $z = x+iy$

$$\overline{z} = (x-iy)$$

SI CAMBIA IL SEGNO DELLA PARTE IMMAGINARIA

RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE X



esempio:

$$\frac{2+3i}{4+i} = \frac{2+3i}{4+i}\cdot\frac{4-i}{4-i} = \frac{8+3+12i-2i}{16+1} = \frac{11}{17}+i\,\frac{10}{17}$$

ESERCIZIO gennaio 2008

TROVARE E RAPPRESENTARE SU PIANO COMPLESSO TUTTI GLI $z \in \mathbb{C}$ TALI CHE $Re(z^2\bar{z}) = 4Re(z)$

$z = x+iy$

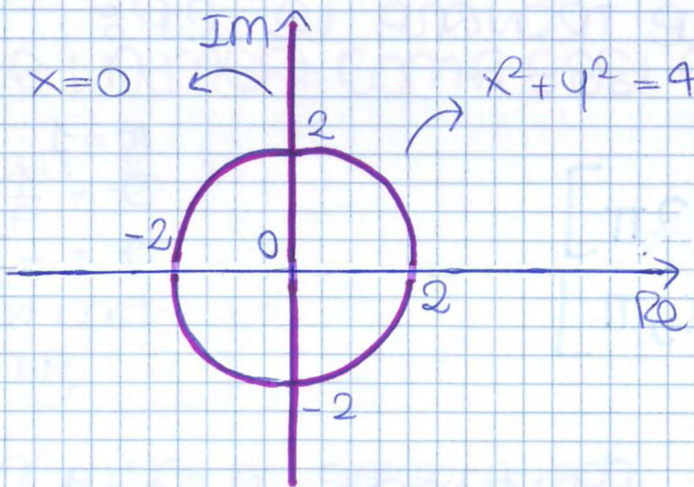
SCOPRIRE CHE: $z^2\bar{z} = z(z\cdot\bar{z}) = z|z|^2$!

$$z|z|^2 = (x+iy)(x^2+y^2) =$$

$$= \underbrace{x(x^2+y^2)}_{Re} + \underbrace{iy(x^2+y^2)}_{Im}$$

! $x(x^2+y^2) = 4x$!

- $x=0$ VERIFICA L'EQUAZIONE $(x,0)$
- $x\neq 0 \rightarrow x^2+y^2=4$ CIRCONF. DI RAGGIO 2



esempio:

* $r = 4$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{6} = \cancel{4}^{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{3} \\ y = r\sin\theta = 4\sin\frac{\pi}{6} = \cancel{4}^{2}\frac{1}{\cancel{2}} = 2 \end{cases}$$

* $P = (6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}) \rightarrow$ passare alle coord. polari

① trovare r

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{36\cdot 2 + 4\cdot 6} = \sqrt{72+24} = \sqrt{96}$$

$$r = 4\sqrt{6}$$

② $$\begin{cases} x = 4\sqrt{6}\cos\theta \\ y = 4\sqrt{6}\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} 6\sqrt{2} = 4\sqrt{6}\cos\theta \\ 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\cancel{6}^{3}\sqrt{2}}{\cancel{4}_{2}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{4}_{2}\cancel{\sqrt{6}}} \end{cases} \quad \left\{ \theta = \frac{\pi}{6} \right.$$

③ le coordinate polari sono:

$$P = \left(4\sqrt{6}, \frac{\pi}{6}\right)$$

SCRIVERE I NUMERI COMPLESSI CON LE C.P.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$

$z = (x, y)$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$z = r\cos\theta + i r\sin\theta$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

$r\cos\theta = Re(z)$

$r\, i\sin\theta = Im(z)$ $\rightarrow$ $r = |z|$ per definizione

FORMULA DI EULERO

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \forall \theta \in \mathbb{R}$$

L'esponenziale complesso ha le stesse proprietà dell'esponenziale

- esempio:

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta + i\varphi} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$$

se $\theta = \pi \rightarrow e^{i\pi} = -1$

analisi + algebra + aritmetica + geometria

- come si usa?

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$z = re^{i\theta}$$

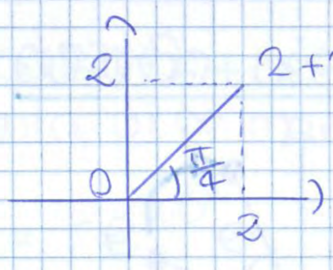
FORMA ESPONENZIALE DEI NUMERI COMPLESSI

- esempio:

$z = 2+2i$

$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = |z|$

$z = 2+2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$



$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- x fare il prodotto

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}) = r_2 r_1 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

- MOLTIPLICARE PER i:

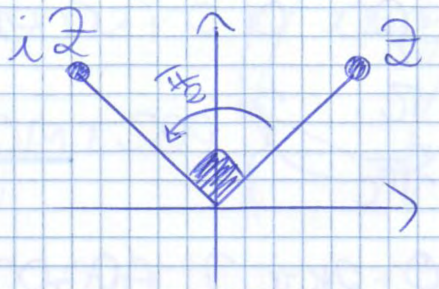
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$=$ **RUOTARE** DI $\frac{\pi}{2} = 90°$

♥ esempio:

$i(z) = (x + iy)i$

$iz = ix - y$



- $z = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

r = MODULO $= |z| = e^{x}$ (come r)

θ = ARGOMENTO $(z) = y$ (come θ)

POTENZE DEI NUMERI COMPLESSI

DATO z e $n \in \mathbb{N}$, FARE z^n

$z = re^{i\theta}$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ volte}} = \underbrace{re^{i\theta} \cdots re^{i\theta}}_{n \text{ volte}} =$$

$= z^n = r^n e^{in\theta}$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

FORMULA DI DE MOIVRE

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad \text{con } z = re^{i\theta}$$

RADICI DEI NUMERI COMPLESSI

DATO $z \in \mathbb{C}$, TROVARE $\sqrt[n]{z}$ = TROVARE TUTTI I $w \in \mathbb{C} \,/\, w^n = z$

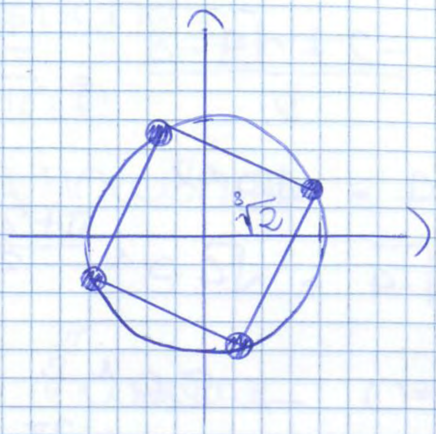
$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\, e^{i \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}} \quad \text{con } k = 0,1,2,3$$

- $k=0 \rightarrow \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{\pi}{16}}$

$k=1 \rightarrow \sqrt[8]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)}$

$k=2 \rightarrow \sqrt[8]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)}$

$k=3 \rightarrow \sqrt[8]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)}$



VIENE SEMPRE 1 QUADRATO!

- (LE RADICI STANNO SUI VERTICI DI UN QUADRATO)

♥ esempio:

$\sqrt[3]{-1}$

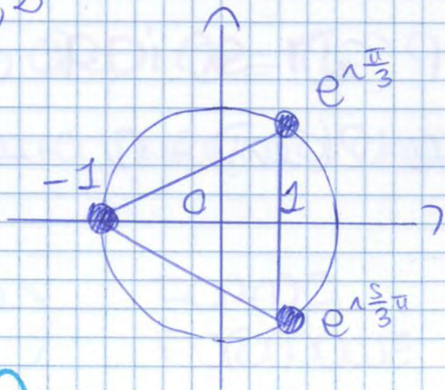
$-1 = e^{i\pi}$

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} \qquad k = 0,1,2$$

$k=0 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{3}}$

- $k=1 \rightarrow e^{i\pi} = -1$

$k=2 \rightarrow e^{i\frac{5\pi}{3}}$



VIENE SEMPRE 1 TRIANGOLO EQUILATERO!

EQUAZIONI DEI NUMERI COMPLESSI

$z^2 + az + b = 0 \qquad a,b,z \in \mathbb{C}$

- $$z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZIONI CON 2 CARATTERISTICHE:

1: L'INCOGNITA È UNA FUNZIONE

2: COMPAIONO DERIVATE DELL'INCOGNITA

♥ esempio:

* $xy' + e^y = \cos x$ con y = incognita
* $y'' + \frac{1}{y+y'} = 3$
* $y' = f(x)$ con f nota

$y(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

$y' = \cos x \rightarrow y = \sin x + c$

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n

ORDINE n: ordine della più alta derivata che compare

$$y^{(n)} = G(x, y, \dots y^{(n-1)})$$ FORMA NORMALE

la derivata più alta è esplicitata

♥ esempio:

$y'' = y' + xy = G(x, y, y')$

quello che ci interessa:

$y' = f(x, y)$ PRIMO ORDINE

$y'' = f(x, y, y')$ SECONDO ORDINE

in forma normale

esempio:

$y' = -y^2$

$y(x) = \frac{1}{x} \rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2} = -y^2(x)$

$y(x) = \frac{1}{x}$ è soluzione dell'equazione su $(-\infty, 0)$ e su $(0, \infty)$

CASO 1 solo x

$y'(x) = f(x)$ la derivata prima è uguale a una funzione

$y(x) = F(x) + C \rightarrow \infty$

da equazioni del 1° ordine → soluzioni ∞ e 1 costante arbitraria

CASO 2 solo y

$y' = y$ la derivata è uguale alla funzione stessa

$y(x) = e^x$

$y(x) = 0$

$\rightarrow y(x) = Ce^x$ con $C \in \mathbb{R}$

da equazioni del 2° ordine → soluzioni ∞ e 2 costanti arbitrarie

CASO 3

$y'' + y = 0$, $y'' = -y$

$y(x) = \cos x \rightarrow y(x) = C\cos x$

$y(x) = \sin x \rightarrow y(x) = C\sin x$ con $C \in \mathbb{R}$

$\rightarrow y(x) = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$

xk tutte le volte che integro esce 1 costante

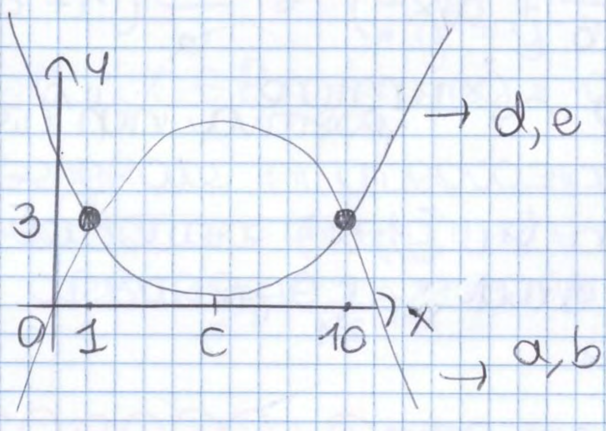
DEF L'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale si chiama **integrale generale** dell'equazione

QUIZ

(1) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, / $f(1) = f(10) = 3$
allora necessariamente:

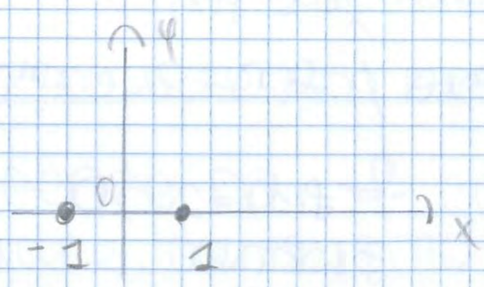
a) f ha min ass su $\mathbb{R}$ — NO
b) $\exists c \in (1,10)$ / $f(c) = 3$ — NO
c) $\exists c \in (1,10)$ di max o min relativo — OK ✓
d) $\exists c \in (1,10)$ / $f(c) > 3$ — NO
e) f ha max assoluto su $\mathbb{R}$ — NO

ESCLUSIONE



(2) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una f. derivabile tale che
$f(-1) = f(1) = 0$. Ponendo $g(x) = f(x)^2$, allora

a) $g'(x)$ non si annulla mai — NO
b) $g'(x)$ si annulla 2 volte
c) " " 1 volta — NO
d) " " almeno 3 volte — OK ✓
e) nex risp



DERIVABILE → CONTINUA

$$g(x) = f(x)^2$$

$$g'(x) = 2\underbrace{f(x)}_{\text{si annulla 2 volte}}\underbrace{f'(x)}_{\text{Rolle: si annulla 1 volta}}$$

18 Gennaio 2015

RIASSUNTO EQ. DIFFERENZ.

- $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ IN FORMA NORMALE
- $n = 1$ $y' = f(x,y)$ PRIMO GRADO
- $n = 2$ $y'' = f(x, y, y')$ SECONDO GRADO
- INTEGRALE GENERALE : INSIEME DI TT LE SOLUZIONI

♥ esempio:

* $y' = x$
  $y(x) = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$
* $y' = y$
  $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$

- INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DI ORDINE n è una famiglia di ∞ funzioni che dipendono da n costanti arbitrarie → TEOREMA DIMOSTRABILE

EQ. DIFFERENZIALI del 1° ORDINE

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ → CONDIZIONE DI CAUCHY / CONDIZIONE INIZIALE

♥ esempio:

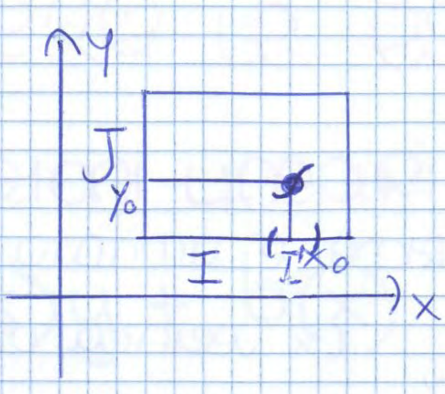
$$\begin{cases} y' = e^x y^2 + 2y = f(x,y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$ c'è una soluzione dell'equazione che passa per il punto $(0,3)$?

MA le soluzioni spesso sono definite in intervalli piccoli di x!

TUTTO DIPENDE DA **f** (DA SUE CERTE PROPRIETÀ) IN PARTICOLARE, DA QUANTO È **REGOLARE** f (è o non è derivabile, nella 1ª o nella 2ª ... incognita)

fisso y : $ae^x + b$
fisso x : $cy^2 + y$

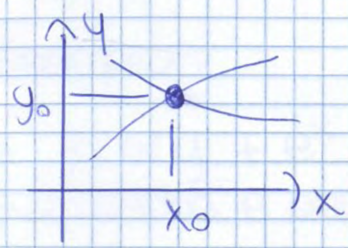
$f(x,y) = e^x y^2 + 2y$ è derivabile



$I' \subset I$

PROPRIETÀ

Nelle ipotesi del teorema, $y' = f(x,y)$
due soluzioni dell'equazione NON si incrociano mai (i grafici)



impossibile < nelle ipotesi del teorema se sono di 1° grado

x/e?

La condizione di unicità!

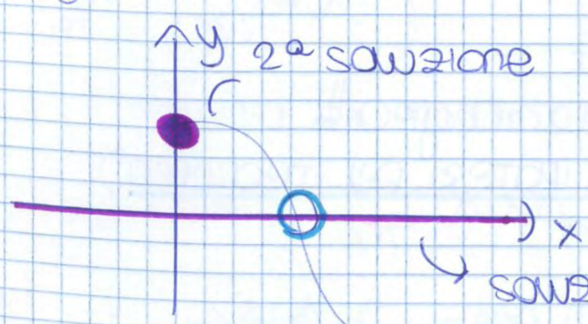
x conclusione del teorema, nel punto (x_0, y_0) passa una e una sola soluzione! unica!

esempio:

$y' = -e^x y^2 + y$ { continua in x, derivabile in y

una soluzione che è positiva per $x = 0$ ⟹ è positiva, $\forall x$

$y = 0$, è una soluzione, $y(x) = 0$, $\forall x$



2ª soluzione → non può cambiare segno e attraversare l'asse $y=0$ perché sennò ho 2 soluzioni nello stesso punto!

↳ soluzione $y=0$

↳ non può cambiare segno

RISOLVERE LE EQUAZIONI

EQUAZIONI LINEARI DEL 1° ORDINE

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$f(x,y) = a(x)y + b(x)$
PER X FISSATO, ABBIAMO UNA RETTA

- a, b CONTINUE SU UN INTERVALLO $I \subset \mathbb{R}$
- LA SOLUZIONE È DEFINITA SU TUTTO I

esempio:

$y' = \sin x \, y + e^x$
LA SOLUZIONE È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$

- $y' - a(x)y = b(x)$

(SCRIVERE A 1° MEMBRO LA DERIVATA DI QUALCOSA)

- SIA $A(x)$ UNA PRIMITIVA DI $a(x)$
- MOLTIPLICO PER $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} - a(x) y e^{-A(x)} = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\left(y \cdot e^{-A(x)}\right)' = e^{-A(x)} b(x)$$

DERIVATA DEL PRODOTTO

$$y e^{-Ax} = \int e^{-A(x)} b(x)\, dx$$

$$\boxed{y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx}$$

NON DIMENTICARSI LE COSTANTI DENTRO L'INTEGRALE

23 Gennaio 2019

nelle equazioni lineari di primo grado:
le soluzioni esistono dove sono definiti i coefficienti !!

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = g(x)\,h(y)$$

prodotto di una singola funzione x un'altra

- esempi:
  - $y' = (x + \log y) + \dfrac{e^x}{y}$ NO
  - $y' = e^x \cos y$ SI

- ammettono **soluzioni costanti**

se $y_0 \in \mathbb{R}$ / $h(y_0) = 0 \Rightarrow y(x) = y_0,\ \forall x$
è soluzione dell'equazione

- $y' = g(x)\,h(y)$

  $y_0' = g(x)\,h(y_0)$

  $0 = 0$

- esempi:
  - $y' = e^x \sin y$

    soluzioni: $y(x) = \pi,\ \forall x$

    $(\pi)' = e^x \sin\pi$

    $0 = 0$

  - $y' = 3xe^y$

    soluzioni: non ci sono soluzioni costanti

$\begin{cases} y' = e^{x-y} \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \log(e^x + c) \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y(0) = \log(e^0 + c) \\ y(0) = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = \log(1 + c) \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} c + 1 = e^4 \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{c = e^4 - 1} \\ y(0) = 4 \end{cases}$ si trova sempre 1 sola soluzion

$\rightsquigarrow y(x) = \log(e^x + e^4 - 1)$

$y' = e^{x-y}$ é definita su tutto $\mathbb{R}$, mentre la soluzione: $y(x) = \log(e^x + c)$ é definita per $e^x > -c$

$x > \log(-c)$

effetto della non linearitá dell' equazioni a variabili separabili

♥ esempio:

$y' = y(1-y)$ non é un' equaz. lineare

$g(x) = 1, \forall x$

$h(y) = y(1-y)$!

- soluzioni costanti: 2

$y(x) = 0$

$y(x) = 1$

- soluzioni non costanti

$\frac{dy}{y(1-y)} = dx \to \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx \to$

$\to \int \frac{A}{y} + \int \frac{B}{1-y} = x + C \to \int \frac{A - Ay + B}{y(1-y)} = x + C$

$\to \int \frac{1}{y} + \int \frac{-1}{1-y} = x + C \to \log|y| - \log|1-y| = x + C$

$\to \log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + c, \forall c \in \mathbb{R}$

- tolgo il logaritmo:

$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+c} = e^x e^c = k e^x, \forall k > 0$!!!

- tolgo il valore assoluto:

$\left|\frac{y}{1-y}\right| = k e^x \to \frac{y}{1-y} = \pm k e^x, \forall k > 0$

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE

$$y'' = f(x, y, y')$$

- INTEGRALE GENERALE : FAMIGLIA DI FUNZIONI CHE DIPENDE DA DUE COSTANTI
- PROBLEMA DI CAUCHY :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad x_0, y_0, y_1 \text{ noti}$$

- INFATTI IN FISICA :

$F = ma$
$y'' = F(t, y, y')$
$y(t_0) = y_0$ dov'era al tempo iniziale
$y'(t_0) = y_1$ a che velocità andava al tempo iniziale

- SI POSSONO USARE ALTRE 2 CONDIZIONI :

$$\cancel{\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}} \quad \text{non si fa mai}$$

EQ. LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI DEL SECONDO ORDINE

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ coefficienti costanti

- esempio:

$y'' - 3y' + 4y = \sin x$

CASO I:

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA 2 SOLUZIONI REALI λ_1 e λ_2

→ $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ SONO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

→ $\boxed{y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ INTEGRALE GENERALE

esempio:

$y'' + y' - 6y = 0$

SCRIVO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$y_0(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

CASO II:

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA HA 1 SOLA SOLUZIONE REALE λ

→ $e^{\lambda x}$ è SOLUZIONE DELL'EQ. DIFFERENZIALE

→ L'ALTRA SOLUZIONE è $x e^{\lambda x}$

→ $\boxed{y_0(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}}$ INTEGRALE GENERALE

$\boxed{y_0(x) = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)}$

esempio:

$y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow e^x$

$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

esempio:

$y'' - 2y' + 3y = 5 \rightsquigarrow y_p = A$

A — num.
$At + B$ — x...
$At^2 + Bt + C$ — x^2...

$y'' = 0,\ y' = 0$
$3y = 3A = 5 \to A = \frac{5}{3}$

CASO II

se f è un'esponenziale $f(x) = a e^{bx}$

la soluzione è $y_p(x) = Ae^{bx}$ oppure Axe^{2x}

a, A cambia
b è lo stesso

esempio:

$y'' - 2y' + y = 3e^{2x} \rightsquigarrow y_p = Ae^{2x}$

$$\begin{cases} y'' = 4Ae^{2x} \\ y' = -4Ae^{2x} \\ y = Ae^{2x} \end{cases}$$

$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x}$

$A = 3$

$y_p(x) = 3e^{2x}$

CASO III

se f è $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$

$f(x) = e^{ax}\sin(bx)$

se $a = 0$ non c'è il termine e^{ax}

$$y_p(x) = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$$

tutta da mettere!

esempio:

$y'' - 2y' + 4y = e^{-x}\sin(3x)$

$y_p(x) = Ae^{-x}(\sin 3x) + Be^{-x}(\cos 3x)$

butto dentro e trovo A e B

eccezioni

$y'' + ay' + by = f(x)$

- f è già una soluzione dell'equazione omogenea
  → i casi precedenti non funzionano

ESERCIZI

- $y'' + y' - 6y = 3x + 4$

TROVARE L'INTEGRALE GENERALE

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$ $\quad \lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$

$y_0(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$

$f(x) = 3x + 4$ RISOLVE L'EQ. OMOGENEA? NO

CERCO $y_p(x)$ COME GENERICO POLINOMIO DI GRADO 1

$y_p(x) = Ax + B$

$y'_p(x) = A$

$y''_p(x) = 0$

$0 + A - 6Ax - 6B = 3x + 4$

$x(-6A) + (A - 6B) = 3x + 4$

$\begin{cases} -6A = 3 \\ A - 6B = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

SOLUZIONE:

$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

- $y'' + y' - 6y = 7e^{2x}$

$y_0(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$

$f(x) = 7e^{2x}$ È SOLUZIONE DELL'EQ. OMOGENEA!

$y_p(x) = Ae^{2x}$ NON HA SPERANZA! SI PROVA CON:

$y_p(x) = Axe^{2x}$

$y'_p(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$

$y''_p(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

$4Ae^{2x} + \cancel{4Axe^{2x}} + Ae^{2x} + \cancel{2Axe^{2x}} - \cancel{6Axe^{2x}} = 7e^{2x}$

$5A = 7 \rightarrow A = \frac{7}{5}$

Simulazione di test completo

1. Il dominio della funzione $f(x) = \log(\sqrt{x-2} - 3)$ è

   (a) $[2, 3]$
   (b) $[11, +\infty)$
   (c) $(5, +\infty)$
   (d) $(11, +\infty)$
   (e) $[3, +\infty)$

2. La funzione $f(x) = |\log(x-3)|$

   (a) è invertibile sull'intervallo $[3, +\infty)$
   (b) è invertibile sull'intervallo $[4, +\infty)$
   (c) è invertibile sull'intervallo $(0, +\infty)$
   (d) non è invertibile su alcun intervallo
   (e) è invertibile sull'intervallo $(3, 5)$

qualunque intervallo ove è iniettiva

3. Sia $z = 1 - 2i$. Allora $|z^2 + \overline{z}|$ vale

   (a) $2\sqrt{2}$
   (b) 8
   (c) 4
   (d) $4\sqrt{2}$
   (e) 2

4. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x} - 2x + \cos x}{e^{-x} + 3x - 3\sin x}$$

   (a) vale -2
   (b) vale -1
   (c) vale 2
   (d) vale 0
   (e) vale $-2/3$

5. Per $x \to 0$, sia $f(x) \sim x^2 \cos x$ e $g(x) \sim e^x - 1$. Allora si ha

   (a) $\lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1/2$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

11. Il polinomio di MacLaurin di ordine 6 della funzione $f(x) = e^{\cos x^3}$ è

   (a) $e + \frac{1}{2}x^6$
   (b) $e - \frac{e}{2}x^6$
   (c) $2 + \frac{1}{2}x^6$
   (d) $1 - \frac{e}{2}x^6$
   (e) $e + \frac{1}{6}x^6$

12. Siano f, g e h tre funzioni tali che $f = o(g)$ e $g \sim h^3$ per $x \to +\infty$. Allora

   (a) $f = o(g^3)$
   (b) $f \sim g^3$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)^3}{f(x)} = 0$
   (d) nessuna delle altre risposte
   (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)^3} = 0$

13. Sia $f : [0,3] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e decrescente. Allora necessariamente

   (a) $f([0,3])$ è un intervallo aperto
   (b) $f((0,3))$ è un intervallo aperto
   (c) $f([0,3])$ contiene almeno due punti
   (d) $f([0,3)) = [f(0), f(3))$
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta

14. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = f(1) = \frac{\pi}{2}$. Ponendo $g(x) = \sin(f(x))$, allora

   (a) la derivata $g'(x)$ si annulla almeno tre volte
   (b) la derivata $g'(x)$ si annulla esattamente due volte
   (c) la derivata $g'(x)$ si annulla esattamente tre volte
   (d) la derivata $g'(x)$ non si annulla mai
   (e) la derivata $g'(x)$ si annulla almeno quattro volte

15. La parte principale (rispetto a $\varphi(x) = x$) per $x \to 0^+$ di $f(x) = 3x + \sqrt{4x^2 + 2x^3}$ è

   (a) $5x$
   (b) $x^{3/2}$
   (c) $\sqrt{2}x^{3/2}$
   (d) $3x$
   (e) $3x + o(x)$

TEST FINALE

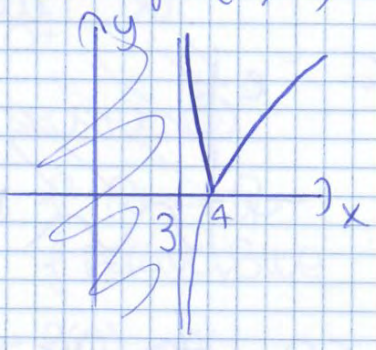
① dom f: $\log(\sqrt{x-2}-3)$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x-2}-3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}>3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x-2>9 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x>11 \end{cases}$$

dom f $(11, \infty)$
RISPOSTA (D)

② $f(x) = |\log(x-3)|$ dove è invertibile

dom f $(3, \infty)$



invertibile su
$(3,4]$ o $[4,\infty)$

RISPOSTA (B)

invertibile → iniettiva → monotona

③ $z = 1-2i$
$|z^2+\bar{z}|$

$z^2 = (1-2i)^2 = 1-4-4i = -3-4i$
$\bar{z} = 1+2i$
$z^2+\bar{z} = -3-4i+1+2i = -2-2i$
$|z^2+\bar{z}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$
RISPOSTA (A)

④ $$\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^{-2x}} - 2x + \overset{\to \pm 1}{\cos x}}{\underset{\to 0}{e^{-x}} + 3x - \underset{\to \pm 1}{3\sin x}} = -\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = -\frac{2}{3}$$

RISPOSTA (E)

⑧ $f(x) \sim x^2 \cos x$
$g(x) \sim e^x - 1$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1)}{\cancel{1}+x-\cancel{1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$$
RISPOSTA (C)

⑨ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

CONTINUA IN $x=0$?

$\lim_{x \to 0^-} = f(0) = 2x = 0$
$\lim_{x \to 0^+} = 2\sqrt{x} = 0$
} è CONTINUA IN $x=0$

DERIVABILE IN $x=0$?

$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ 2\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} 2$
$\lim_{x \to 0^+} \infty$
} NON È DERIVABILE IN $x=0$

RISPOSTA ⓓ

⑩ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f DERIVABILE (→ CONTINUA)

$f(0) = 4$
$f'(0) = 3$

$h(x) = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$

$h'(x) = (-1)(f(x))^{-2}(f'(x))$

$h'(0) = (-1)\frac{1}{4^2}\,3 = -\frac{3}{16}$

RISPOSTA ⓐ

⑪ $f(x) = e^{\cos x^3}$ P. DI MC ORDINE ⑥

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \dots \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots$

$f(x) = e^{1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)} = e^1 e^{-\frac{x^6}{2} + o(x^6)} =$

$f(x) = e\left[1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)\right] = e - \frac{e}{2}x^6$

RISPOSTA ⓑ

(15) PP per $x \to 0^+$

$\varphi(x) = x$

$f(x) = 3x + \sqrt{4x^2 + 2x^3}$

$f(x) = 3x + \sqrt{4x^2\left(1 + \frac{2x}{4_2}\right)}$

$f(x) = 3x + 2x\sqrt{1 + \frac{x}{2}} \Rightarrow \sqrt{\dots} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

perchè $x \to 0^+$

$f(x) = 3x + 2x\left[1 + \frac{x}{4}\right] = 5x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) =$

$f(x) = 5x + o(x)$

la PP è $\boxed{5x}$

RISPOSTA (a)

(16) $\int \frac{3x}{2x^2+2} = \frac{3}{2}\int \frac{x}{x^2+1} = \frac{3}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} = \frac{3}{4}\log(x^2+1) + ($

RISPOSTA (A)

(17) TEOREMA DELLA MEDIA

(1) sia $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \inf_{[ab]} f < \bar{f} < \sup_{[ab]} f$

(2) // // , f continua su $[a,b]$

$\Rightarrow \exists c \in [ab] \; / \; f(c) = \bar{f}$

con $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

RISPOSTA (C)

(18) $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\cosh t^2}\,dt$

x il teorema fondam. del calcolo integrale

$F'(x) = \frac{x^2}{\cosh t^2}$ dom f': $\cosh t^2 \neq 0$ $\varnothing \to \mathbb{R}$

☆ $f'(x) = 0$ $x^2 = 0 \to x = 0$ max o min

☆ $f'(x) > 0$

$\frac{x^2}{\cosh t^2} > 0$ (1) $x^2 > 0$ $\forall x, x \neq 0$ → (2) $\cosh t^2 > 0$ $\forall x$ → $\boxed{f'(x) > 0, \forall x}$

F è sempre crescente su $\mathbb{R}$ → RISPOSTA (B)

DEFINIZIONI

TRASL / CONTRAZ / DILATAZ
PERIODICITÀ $f(x+p) = f(x)$
FORMULE TRIGONOMETRICHE
LIMITATO / MAGG. / MAX / SUP
CARATTERIZ. SUP A
MAX A → SUP A NO ←
SURIETT. / INIETT / BIETT.
F INVERSA
F COMPOSTA
PROPRIETÀ VERA DEFINITIVAM.
LIMITI 3 CASI X LE SUCC.
9 CASI X LE FUNZ.

INTEGRALI DEFINITI:
PARTI E SOSTITUZIONE
CONSEGUENZE F INTEGRALE
PROPRIETÀ - LIMITI FUNZIONI
INTEGRALI IMPROPRI (GENERALI)
(INTERVALLI ILL / FUNZ ILL
F. CAMPIONE $\frac{1}{x^\alpha}$ $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$
STABILIRNE IL CARATT.
NUMERO COMPLESSO: P. REALE / IM
SOMMA / PRODOTTO / QUOZIENTE
FORMA ALGEBRICA / $i^2 = -1$
PIANO GAUSS / MODULO / CONIUGATO

SUCCESSIONI: CRES / DECRES / LIMITATA → IDEM X FUNZIONI
SUCC = CON O SENZA LIMITI
e: DEFINIZIONE
FUNZIONE CONTINUA (+ O PICC, TAYLOR)
PUNTI DI DISCONTINUITÀ (PROLUNGAMENTO)
FORME INDETERMIN. (REGOLA $0^\pm$) → NO 0^0
LIMITI NOTEVOLI (ESEMPI IMPO SU Q.!)
ZERI DI UNA f
SIMBOLI LANDAU
O PICCOLI (PROPRIETÀ / ALGEBRA / TANGENTE
CONTINUITÀ / DERIVABILITÀ /
POTENZE TRASCURABILI (X I LIMITI
SOSTITUZIONE)
INFINITESIMI / INFINITI / DI ORDINE SUPER.
ORDINE DI UNA f / PARTE PRINCIPALE
(O PICCOLI)
ASINTOTI (ME Q) → CON O PICCOLI?
F. DERIVABILE / DA DX DA SX / CON O PICC
TANGENTE / O PICC
LA DERIVATA f' / INTEGRAZIONE (LINEARITÀ
REGOLE DI DERIVAZIONE / ADDITIVITÀ
(f COSTANTE / LINEARITÀ / MONOTONIA
PRODOTTO / QUOZIENTE, COMPOSTA / VALORE ASS
INVERSA) CAMBIO a, b
f DERIVABILE → f CONTINUA (NO ←) PARTI
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ SOSTITUZIONE)
MAX / MIN LOCALI / ASSOLUTI
PUNTI CRITICI / STAZIONARI $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$
DERIVATA 1ª E MONOTONIA
DERIVATA 2ª E CONCAVITÀ F RAZIONALI)
CLASSIFIC. PUNTI CRITICI
CLASSI DI f ($C^k(I)$, $C^0(I) = f$ CONTINUA)
CONCAVITÀ / CONVESSITÀ SU $[a, b]$ → 4 MODI
FLESSI
FORZA ESPON / DEBOLEZZA LOG
POLINOMIO DI TAYLOR GRADO n CENTRATO IN x_0
RESTO PEANO / RESTO LAGRANGE / MAC LAURIN
SVILUPPI NOTEVOLI DI MAC LAURIN
COEFF BINOMIALE GENERALIZZATO
SVILUPPI DEL 2° ORDINE → INFO (T. DI PERM. DEL SEGNO)
PRIMITIVA / INTEGRALE INDEFINITO
INTEGRALE DI REIMANN / AREA / f. INTEGRABILE
MEDIA DI f
FUNZIONE INTEGRALE DI f

PROPRIETÀ

COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

INIETTIVITÀ → INVERSA

STRETTA MONOTONIA → INIETTIVITÀ → INVERTIBILE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

IDEM $= f(x_0)$

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n = \nexists$$

PROPRIETÀ DEL T. DEL CONFRONTO

$$a^b = e^{\log a^b} = e^{b \log a}$$

$$f \sim g \Rightarrow f = g + o(g)$$

PROPRIETÀ O PICC. X LE POTENZE TRASCURABILI

$o(f + o(f)) = o(f)$ (DIMO)

f DERIVABILE $\iff$ DA DX E DA SN

" " $\Longrightarrow$ f CONTINUA (NO $\Leftarrow$)

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) \quad \text{IMPO}}$$

ZERI DERIVATA $n-1$ CON n = ZERI FUNZ

f CONVESSA $\iff$ f' CRESCENTE

$\iff$ $f''(x) \geq 0$

$F' = f \Longrightarrow (F + c)' = f \quad \forall c \in \mathbb{R}$

INTEGRALE: LINEARITÀ / ADDITIVITÀ / MONOTONIA / VALORE ASSOLUTO

CAMBIO a, b / PARTI / SOSTITUZIONE

log tang

IMPO $= \int \sqrt{1 \pm x^2}$

CONSEGUENZE DELLA f INTEGRALE

$\forall x, f \geq 0 \rightarrow$ $F(x) \geq 0 \quad x \geq a$

$F(x) \leq 0 \quad x \leq a$

F CRESCENTE

f cresc. $\rightarrow F$ convessa

$f(x_0) = 0 \leftarrow F$ max o min in x_0

UN PUNTO CRITICO NON INDICA PER FORZA UN MAX $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow$ MAX

f continua / cresc / limitata $\rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x \in [a, +\infty)} f(x)$

$z_1 < z_2, \; z > 0 \rightarrow$ no senso

$\bar{\bar{z}} = z \qquad \frac{1}{z_1 + z_2} \quad \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \qquad Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

DEFINIZIONI: MEMORIZZO

TEOREMA: NON ESISTE ALCUN NUMERO RAZIONALE $r \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $r^2 = 2$ + DIMOSTRAZIONE

TEOREMA: NON È POSSIBILE SCRIVERE UN ELENCO DEGLI ELEMENTI DI r + DIMOSTRAZIONE

VALORE ASSOLUTO: DISTANZA DI UN NUMERO DA ZERO

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ V.A.:

$|x| \geq 0$ $\quad x \leq |x|$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ $\quad -x \leq |x|$ $\quad |x| \leq n \quad -n \leq x \leq n$

$|x^2| = |x|^2$ $\quad -|x| \leq x \leq |x|$ $\quad |x| \geq n \quad x \leq -n \vee x \geq n$

$\sqrt{x^2} = |x|$

INSIEMI

INSIEMI LIMITATI SUP/INF: $\exists M \in \mathbb{R} / a \leq M, \forall a \in A$

$\exists m \in \mathbb{R} / m \leq a, \forall a \in A$

ESSERE MAGGI./MINOR.: $M = a \leq M, \forall a \in A$

$m = m \leq a, \forall a \in A$

MASSIMO/MINIMO: $\alpha = \max A = \begin{cases} \alpha \text{ MAGGIORANTE} \\ \alpha \in A \end{cases}$

$\alpha = \min A = \begin{cases} \alpha \text{ MINORANTE} \\ \alpha \in A \end{cases}$

SE ESISTE $\Rightarrow$ $\max A = \sup A$, $\min A = \inf A$

ESTREMO SUP/INF: $\sup A$ = MINIMO DEI MAGGIORANTI

$\alpha = \sup A \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha & (\alpha \text{ MAGGIORANTE}) \\ \forall r < \alpha, \exists a \in A / a > r \end{cases}$

$\inf A$ = MASSIMO DEI MINORANTI

$\alpha = \inf A \begin{cases} \forall a \in A, \alpha \leq a & (\alpha \text{ MINORANTE}) \\ \forall r > \alpha, \exists a \in A / a < r \end{cases}$

COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$: OGNI SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ LIMITATO SUPERIORM., HA L'ESTREMO SUPERIORE

$\sqrt{2} = \sup \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}$

FUNZIONI

dom f

$\mathrm{Im} f = f(X) = \{f(x) / x \in X\}$

$\mathrm{Im} A = f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

GRAFICO $= G = \{(x, f(x)) / x \in \mathrm{dom} f\} = \{(x,y) \in X \times Y / f(x) = y\}$

DOMINIO f COMPOSTE

$\mathrm{dom}(g\circ f) < \begin{matrix} x \in \mathrm{dom}(f) \\ f(x) \in \mathrm{dom}(g) \end{matrix}$

PROPRIETÀ

$g\circ f \neq f\circ g$

$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

se f, g iniett. $\rightarrow$ $g\circ f$ è iniettiva

F. MONOTONE (F. CRESC O DECRESC)

F. CRESC. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $(x_1, x_2 \in A)$

F.S. CRESC $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

F. DECRESC. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ "

F.S. DECRESC $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ "

F.S. MONOTONA è iniettiva = è invertibile

SUCCESSIONI $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (a_n) a_n = elemento n-esimo

P(n) DEFINITIVAMENTE VERA: se è vera da 1 certo punto in poi

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ $< \begin{matrix} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon / \forall n \geq n_\varepsilon, |a_n - \ell| < \varepsilon \\ \forall I(\ell), \exists I(+\infty) / n \in I(+\infty) \Rightarrow a_n \in I(\ell) \end{matrix}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $< \forall M > 0, \exists n_\varepsilon / \forall n \geq n_\varepsilon, a_n \geq M$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $< \begin{matrix} \forall M > 0, \exists n_\varepsilon / \forall n \geq n_\varepsilon, a_n \leq -M \\ \forall M < 0, \exists n_\varepsilon / \forall n \geq n_\varepsilon, a_n \leq M \end{matrix}$

SUCC. CRESCENTE $\forall n$, $a_n \leq a_{n+1}$

SUCC. DECRESC. $\forall n$, $a_n \geq a_{n+1}$

SUCC. MONOTONA CRESC O DECRES

TEOREMA se a_n è monotona $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$ — SUCC. HA LIMITE

SUCC. LIMITATA $\sup |a_n|$ = è finito

TEOREMA se a_n è monotona e limitata $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$ ed è finito

se a_n è monotona e illimitata $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$ ed è ∞

SUCC. NON HA LIMITE se dato a_n ci sn 2 succ con limiti diversi

TEOREMA se a_n è crescente e limitata $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup |a_n|$

se a_n è decresc e limitata $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf |a_n|$

DEFINIZIONE DI e NUMERO DI NEPERO $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

INTORNO DI x_0 DI RAGGIO ε $I_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = |x - x_0| < \varepsilon$

$I_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} = 0 < |x - x_0| < \varepsilon$

LIMITE SOMMA $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n)=a+b$
LIMITE PRODOTTO $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)=a\cdot b$
LIMITE QUOZIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

$\left.\right\}$ $\lim_{\to\infty} a_n = a$, $\lim_{\to\infty} b_n = b$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$

$\oplus \lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = l^m$

INTORNO DX $I_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0+\delta)$
INTORNO SX $I_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0]$

LIMITE DX: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ $\quad \forall I(l)\ \exists I^+(x_0) / \forall x\in I^+(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x)\in I(l)$
$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta\ /\ 0<x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

LIMITE SX: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$ $\quad \forall I(l)\ \exists I^-(x_0) / \forall x\in I^-(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x)\in I(l)$
$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta / -\delta<x-x_0<0 \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

f CONTINUA DA DX $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
f CONTINUA DA SX $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

PROPRIETÀ $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$

f CONTINUA $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

DISCONTINUITÀ ELIMINABILE $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $l\in\mathbb{R}$ $<$ $f(x_0)\neq l$ / $x_0 \notin \operatorname{dom} f$

DISCONTINUITÀ A SALTO $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l_1$ $\quad l\neq l_1 \quad l,l_1\in\mathbb{R}$

DISCONTINUITÀ DI 2ª SPECIE TUTTI GLI ALTRI

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE $\lim \exists =$ unico

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO $f: I(c)\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to c} f(x)=l$
se $l>0$, $l=+\infty \Rightarrow f(x)>0$, $\forall x\in I'(c)\setminus\{c\}$
se $l<0$, $l=-\infty \Rightarrow f(x)<0$, $\forall x\in I'(c)\setminus\{c\}$

DIMOSTRAZIONE USO DEF. LIMITE / PRENDO $I_{l/2}(l) = I\left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$

COROLLARIO I $f(x)\geq 0$ su $I(c)\setminus\{c\}$:
se $\lim_{x\to c} f(x)=l \Rightarrow l\geq 0, l+\infty$ | $f(x)\leq 0$ su $I(c)\setminus\{c\}$ se $\lim_{x\to c} f(x)=l \Rightarrow l<0, l=-\infty$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO $l<0$, GUARDO $I(c)\cap I'(c)\setminus\{c\}$

COROLLARIO I $\left.\begin{array}{l} f(x)\neq 0 \\ f \text{ è continua}\end{array}\right] \Rightarrow \exists I(x_0) / \forall x\in I(x_0)$, $f(x)$ e $f(x_0)$ STESSO SEGNO

DIMOSTRAZIONE DEF. CONTINUITÀ + T. DI PERMANENZA DEL SEGNO

TEOREMA DEL CONFRONTO $f,g,h: I(x_0)\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$
$\boxed{x_0=c}$
$\left.\begin{array}{l} f(x)\leq g(x)\leq h(x) \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=l \\ \lim \ldots \end{array}\right\}$ $\lim_{x\to x_0} g(x)=l$

ZERI DI UNA f $f: [a,b] \to R$ CONTINUA
se $f(c) = 0 \to c \in [a,b]$ è uno ZERO

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI $f: [a,b] \to R$, CONTINUA
se $f(a) f(b) < 0$, f HA ALMENO 1 ZERO IN $[a,b]$
se f STRETT. MONOTONA, f HA 1 SOLO " " "
$f(x_1) < f(x_2)$, $x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$, $x_1 < x_2$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI $f: [a,b] \to R$ CONTINUA

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } \exists x_\alpha \in [a,b] \,/\, f(x_\alpha) = \alpha \\ \exists x_\beta \in [a,b] \,/\, f(x_\beta) = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ assume tutti i valori in } (\alpha, \beta)$$

DIMOSTRAZIONE: DEFINISCO $g: [x_\alpha, x_\beta] \to R$ CONTINUA
$g(x) = f(x) - \gamma \quad \gamma \in (\alpha, \beta)$
$g(x_\alpha) = f(x_\alpha) - \gamma = \alpha - \gamma = < 0$
$g(x_\beta) = f(x_\beta) - \gamma = \beta - \gamma = > 0$
USO TEOREMA DEGLI ZERI! $g(x_\alpha) g(x_\beta) < 0 \Rightarrow g(c) = 0$
$f(c) - \gamma = 0$
$f(c) = \gamma$

COROLLARIO f CONTINUA $\Rightarrow f(I) = I'$
I INTERVALLO   IMMAGINE

TEOREMA DI WEIERSTRASS $f: [a,b] \to R$, CONTINUA
$\Rightarrow f$ HA $\min f$ e $\max f \in [a,b]$

TEOREMA $f: [a,b] \to R$, CONTINUA e INVERTIBILE, $\exists f^{-1}$
$\Rightarrow f^{-1}$ è CONTINUA

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$
- $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$
- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$
- $\log_a(1+x) = \frac{x}{\log a} + o(x)$ per $x \to 0$ $\forall a>0, a\neq 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
- $a^x = 1 + x\log a + o(x)$ per $x \to 0$, $\forall a > 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$

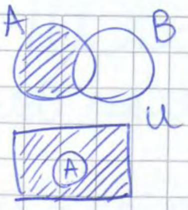
ANALISI I

ESERCITAZIONI

★ $A \setminus B = \{x / x \in A, x \notin B\}$

★ $A' = \complement A = \{x / x \notin A\}$

$x \in A' \iff x \notin A$



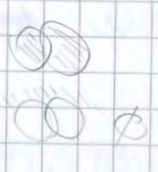
DIFFERENZA INSIEMISTICA

COMPLEMENTO
COMPLEMENTARE

• LEGGI DI DE MORGAN:

① $(A \cap B)' = A' \cup B'$

② $(A \cup B)' = A' \cap B'$



$A \setminus B = A \cap B'$

• $A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

• $A \subset B \iff B' \subset A'$ DIMOSTRO

infatti : $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \iff (x \in B'$

$\iff B' \subset A'$

• INSIEME VUOTO: insieme che non ha nessun elemento

SBAGLIATO $\{\emptyset\}$ → GIUSTO $\emptyset$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 269 di 526

ESERCIZI:

1. CONSIDERO $p(x,y)$ = "x è un multiplo di y" con $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
INDICO (V) e (F). NEGO LE PROPOSIZ FALSE

- $\forall x \forall y \; p(x,y)$: FALSO $\rightarrow N(\forall x \forall y \; p(x,y)) \Leftrightarrow \exists x \exists y \; N p(x,y)$ tale che x NON è multiplo di y
- $\forall y \exists x \; p(x,y)$: VERA
- $\exists y \forall x \; p(x,y)$: FALSO $\rightarrow \forall y \exists x$, x non è multiplo di y
- $\forall x \exists y \; p(x,y)$: ~~V~~ F
- $\exists x \exists y \; p(x,y)$: V
- $\exists x \forall y \; p(x,y)$: V

2. $p(x,y)$: $x^2+y^2<4$ con $x, y \in \mathbb{Z}$. INDICO (V) e (F)

$\forall x \forall y \; p(x;y)$: FALSO $\rightarrow \exists x \exists y \; x^2+y^2 \geq 4$

$\forall x \exists y$ NOT $p(x;y)$: VERA

$\exists x \exists y \; p(x;y)$: VERA

$\forall x \forall y$ NOT $p(x;y)$: F

$\exists x \forall y \; p(x;y)$: F

$\exists x \exists y$ NOT $p(x;y)$: V

$\forall x \exists y \; p(x;y)$: F

$\exists x \forall y$ NOT $p(x,y)$: V

3. MOSTRO CON 1 ES CHE LA SEGUENTE PROPOSIZ È FALSA.
per qualsiasi scelta di 3 insiemi A, B e C, $A \cup C = A \cup B \Rightarrow B = C$

INVENTO 3 INSIEMI: $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,2\}$ $C = \{3,4\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4\} = A = A \cup C \Rightarrow B \neq C$

• EQUAZIONI & DISEQUAZIONI

2° GRADO

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a\neq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b^2-4ac=\Delta=$ DISCRIMINANTE

$\mathbb{R}$ $\quad \Delta>0$: 2 soluz. reali distinti $x_1\neq x_2$

$\mathbb{R}$ $\quad \Delta=0$: 2 soluzioni coincidenti $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

$\mathbb{C}$ $\quad \Delta<0$: complesse (coniugata)

$\sqrt{2}$, π, e $\in\mathbb{R}$, $\notin\mathbb{Q}$ $\rightarrow$ numeri irrazionali (ecompleta la retta reale)

$x^2+1=0$ $\rightarrow$ numeri complessi
$x=\pm\sqrt{-1}$

• PROPRIETÀ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$ DIVIDO PER a, PERCHÉ $a\neq 0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

ESERCIZI:

① $$\frac{x^2+2x-3}{1-7x}\geq 0$$

STUDIO IL SEGNO DELL'EQ. FRATTA

$$\frac{(x+3)(x-1)}{-7x+1}\geq 0$$ 3 FATTORI

$x\neq\frac{1}{7}$ TROVO GLI ZERI $x=-3$, $x=1$, $x=\frac{1}{7}$

$x+3$	$x\geq -3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$x\geq 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$1-7x$	$x<\frac{1}{7}$	$+$	$+$	$-$	$-$

CASO 1: $x < -\frac{1}{3}$

CASO 2: $-\frac{1}{3} < x \leq 1$

CASO 3: $x \geq 1$

S_f = Unione dei 3 casi

CASO 1 $\quad x < -\frac{1}{3}$

PRENDO -1
SOSTITUISCO
$-1-1=-2$
QUINDI $\longrightarrow$ IDEM

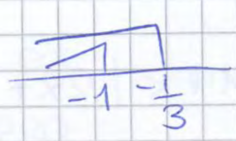
$$-(x-1) - -(3x+1) \leq 0$$

$$-x+\cancel{1}+3x+\cancel{1} \leq 0$$

$$2x \leq -2$$

$$x \leq -1$$

POI $\begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x \leq -1 \end{cases}$



$S_1\ (-\infty; -1]$

CASO 2 $\quad -\frac{1}{3} < x \leq 1$

PRENDO 0
SOSTITUISCO
$0-1=-1$
QUINDI $\longrightarrow$ IDEM

$$-(x-1) - (3x+1) \leq 0$$

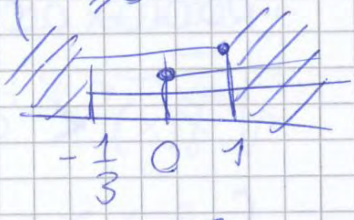
$$-x+\cancel{1}-3x-\cancel{1} \leq 0$$

$$-4x \leq 0$$

$$-x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

POI $\begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$



$S_2: [0; 1]$

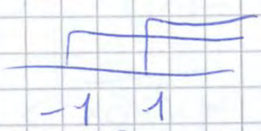
CASO 3 $\quad x \geq 1 \quad$ BLA...BLA...

$$x-1-3x-1 \leq 0$$

$$-2x \leq 2$$

$$x \geq -1$$

$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$



$S_3 \{x \geq 1;\} = [1; +\infty)$

$$S_{finale} = (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$$

COMPITI

OK ① $\frac{2x-3}{x^2-25} \geq \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5}$ PORTO A SX SCOMPONGO m.c.m.

② $|x^2-5|x|+4| > 1$ SUPPORRE I CASI

RIFO / SAPERNE / ESEGU

CASO ① $x \geq 0 \rightarrow |x^2-5x+4| > 1$

CASO ② $x < 0 \rightarrow |x^2+5x+4| > 1$

$S_f = \cup$ CASO 1+2

③ $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-1} > 0$ PASSO A DX

OK

$\underbrace{\sqrt{x+2}}_{POS} > \underbrace{-\sqrt{3x-1}}_{NEGATIVO}$ SEMPRE VERO

④ $\frac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1 > 0$

GUARDO PG DOPO

⑤ DETERMINARE I SEGUENTI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

$A = \{x / (x+2)(x-1)(x-5) < 0\} \cap \{x / \frac{3x+1}{x-2} \geq 0\}$

$B = \{x / x-4 \geq \sqrt{x^2-6x+5}\} \cup \{x / x+2 > \sqrt{x-1}\}$

COMPITO 1

$\frac{2x-3}{x^2-25} \geq \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5} \rightarrow \frac{2x-3}{(x-5)(x+5)} - \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+5} \geq 0$ $\boxed{x \neq \pm 5}$

$\frac{\cancel{2x}-3-\cancel{x}-\cancel{5}-\cancel{x}+\cancel{5}}{(x-5)(x+5)} \geq 0 \rightarrow \frac{-3}{(x-5)(x+5)} \geq 0 \rightarrow \frac{3}{(x-5)(x+5)} \leq 0$

Ⓝ $3 \leq 0$ $\emptyset$

Ⓓ $x-5 \leq 0$ $\quad x \leq 5$ $\qquad x+5 \leq 0$ $\quad x \leq -5$

$\oplus \; -5 \; \ominus \; 5 \; \oplus$

$S: [-5; 5]$

COMPITO 2

IL SEGNO CAMBIA IN:

$x^2-5x+4=0 \qquad -x^2+5x-4=0$

$x^2+5x+4=0 \qquad -x^2-5x-4=0$

$|x^2-5|x|+4| > 1$

CASO ① $\begin{cases} |x^2-5x+4| > 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ QUINDI $\frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{+5 \pm 3}{2} =$

CASO ② $\begin{cases} |x^2+5x+4| > 1 \\ x < 0 \end{cases}$ QUESTI ④ ① ① ① + 4 CASI

COMPITO 5

$A = \{x / (x+2)(x-1)(x-5) < 0\} \cap \{x / \frac{3x+1}{x-2} \geq 0\}$

$x+2<0 \quad x<-2$
$x-1<0 \quad x<1$
$x-5<0 \quad x<5$

$-2 \quad 1 \quad 5$
$+ \quad - \quad + \quad -$

$\frac{3x+1}{x-2} \geq 0 \quad x \neq 2 \quad 3x+1 \geq 0 \quad x \geq -\frac{1}{3}$
$x-2 \geq 0 \quad x \geq 2$

$+ \quad -\frac{1}{3} \quad - \quad 2 \quad +$

$A = \{-2<x<1,\ x>5\} \cap \{x \leq -\frac{1}{3},\ x>2\}$

$A = \{(-2;1),(5;+\infty)\} \cap \{(-\infty;-\frac{1}{3}],(2;+\infty)\}$

$A = \{(-2;-\frac{1}{3}] \cup (5;+\infty)\}$

$B = \{x / x-4 \geq \sqrt{x^2-6x+5}\} \cup \{x / x+2 > \sqrt{x-1}\}$

$x-4 \geq \sqrt{x^2-6x+5}$

$\sqrt{x^2-6x+5} \leq x-4$

$\begin{cases} x^2-6x+5 \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ \cancel{x^2}-6x+5 \leq \cancel{x^2}-8x+16 \end{cases}$

$\frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$
$5 \quad 1 \quad \cup$

$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 5 \\ x > 4 \\ 2x \leq 11 \quad x \leq \frac{11}{2} \end{cases}$

$1 \quad 4 \quad 5 \quad \frac{11}{2}$

$B = \{[5,\frac{11}{2}]\} \cup \{[1;+\infty)\}$

$B = \{[1,+\infty)\}$

$x+2 > \sqrt{x-1}$

$\sqrt{x-1} < x+2$

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \\ x-1 < x^2+4x+4 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > -2 \\ x^2+3x+5 > 0 \quad \mathbb{R} \end{cases}$

$-3 \pm \sqrt{9-20}$
$\Delta < 0$
$\cup$

$-2 \quad 1$

16. Trovare opportune restrizioni di $f(x) = x^2 - 2|x|$ che siano invertibili. Disegnare i grafici delle funzioni inverse corrispondenti specificandone dominio e immagine.

17. Date le funzioni $f(x) = x - \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, determinare le espressioni delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

18. Date le funzioni $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = |x|$, determinare il loro dominio e le espressioni delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Disegnare i grafici di $g \circ f$ and $f \circ g$.

19. Date le funzioni $f(x) = 1 + x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, determinare dominio, immagine e intervalli di monotonia. Disegnare il grafico di $g \circ f$.

20. Verificare che $f : x \mapsto x - 2$ e $g : x \mapsto -x + 3$ sono biiettive. Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ e dimostrare che sono anch'esse biiettive. Verificare inoltre che

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

21. Trovare, se esiste, la funzione inversa di

$$y = f(x) = \arctan\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$

specificandone il dominio.

22. Funzioni pari e dispari. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

$$\text{PARI}\quad f(x) = x\sin x, \qquad g(x) = \frac{3x}{2 - x^2},\ \text{D} \qquad \overset{\text{P}}{h(x) = e^{x^2}}, \overset{\text{P}}{l(x) = \log(x^2 - 1)},$$

$$\overset{\text{DISP}}{m(x) = x|x|}, \qquad \overset{\text{DISP}}{p(x) = e^{x^3}}, \qquad \overset{\text{PARI}}{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}, \qquad \overset{\text{DISP}}{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}.$$

23. Funzioni periodiche. Dire se le seguenti funzioni sono periodiche ed eventualmente esplicitarne il periodo minimo.

$$\frac{2\pi}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{2\pi}{2} = \pi \qquad f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad g(x) = \sin(x^2), \qquad h(x) = e^{\tan x},$$

$$\frac{2\pi}{15} \qquad l(x) = \sin(3x) + \cos(5x), \qquad m(x) = 3\tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right), \qquad p(x) = 3(\cos x)^2. \quad 2\pi$$

24. Determinare il dominio di $g(x) = \arcsin(2x - \sqrt{x+1})$.

25. Siano

$$f(x) = x^2 + x - 2, \qquad g(x) = \log(1 - 2x).$$

Determinare i domini di $g \circ f$ e $f \circ g$.

26. Date le funzioni $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = e^x$, determinare dominio, immagine, intervalli di monotonia. Tracciare il grafico della funzione composta $g \circ f$.

27. Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = \arctan x$, $g(x) = 2\arctan x$, $h(x) = \arctan(2x)$, $l(x) = \arctan(|x|)$, $m(x) = |\arctan(x)|$.

ⓒ $\dfrac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1 > 0$

VALORE ASSOLUTO SOTTO RADICE, SAPPIAMO CHE RADICE È ⊕ MA NON SAPPIAMO CHI È IL VALORE ASSOLUTO

CASO ① $x^2-4>0$

$x<-2 \vee x>2 \rightarrow$ ambiente

$|x^2-4| = x^2-4 \rightarrow$ RISCRIVO DISEQU. !!

$\dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} > 1 \rightarrow x\sqrt{x^2-4} > x^2-4$

$x^2-4 \rightarrow$ sempre positivo!! moltiplico x e non cambia la diseq.

$x\sqrt{x^2-4}$ → sempre +++

$x\sqrt{x^2-4} > x^2-4$ → sempre +++

→ non può essere negativo: $-x\sqrt{x^2-4} > x^2-4$

$-x > +$ NO!!

quindi $\Rightarrow x>0$

AMBIENTE $\begin{cases} x<-2 \vee x>2 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \{x>2$!! ambiente

elevo al quadrato: $x^2(x^2-4) > x^4-8x^2+16$

$\cancel{x^4}-4x^2 > \cancel{x^4}-8x^2+16$

$4x^2>16$

$x^2>4$

$x^2-4>0$!! $\rightarrow x<-2 \vee x>2$

$\cap$ con l'ambiente

$S_1 = \{x / x>2\} = (2, +\infty)$

CASO ② interno del valore assoluto negativo

$x^2-4<0$ x^2-4 è negativo

$-2<x<2 \rightarrow$ ambiente

$|x^2-4| = -x^2+4 \rightarrow$ RISCRIVO DISEQ !!

$\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2-4} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2-4} > 1 \rightarrow x\sqrt{4-x^2} < x^2-4$

x^2-4 — è negativo!! cambio la diseq.!!

$x\sqrt{4-x^2} < x^2-4$ → negativo ---

→ deve essere negativo ---

quindi $\Rightarrow x<0$

AMBIENTE $\begin{cases} -2<x<2 \\ x<0 \end{cases}$ $\{-2<x<0$!!

a) DOMINIO & IMMAGINE

$f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$

• $\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$dom(f) = \sin x - 1 \geq 0$

perché • $|\sin x| \leq 1$
• $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\sin x \geq 1 <$ $\sin x > 1$ $\emptyset$; $\sin x = 1 \to x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$dom(f) = \{x / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$Im(f) = \{0\}$

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \sqrt{sen(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - 1} = 0 = 1 - 1 = 0$

NO INIETTIVA
NO SURIETTIVA

b) CONTROIMMAGINE IN UN PUNTO $\{0\}$ E NELL'INTERVALLO $[2, +\infty)$

$f(x) = \frac{x-1}{2-x}$

$f^{-1}(\{0\}) = \{x / f(x) = \frac{x-1}{2-x} = 0\}$

$f(1) = \frac{1-1}{2-1} = \frac{0}{1} = 0$

$\frac{x-1}{2-x} = 0$, $x - 1 = 0$, $x = 1$

$f^{-1}(\{0\}) = \{1\}$

$f^{-1}([2, +\infty)) = \{x / f(x) \in [2, +\infty)\}$

$2 \leq \frac{x-1}{2-x} < +\infty \to \frac{x-1}{2-x} \geq 2 \to \frac{x-1}{2-x} - 2 \geq 0$

$\frac{x-1-4+2x}{2-x} \geq 0 \to \frac{3x-5}{2-x} \geq 0$

N: $x \geq \frac{5}{3}$
D: $x < 2$

N	−	+	+
D	+	+	−
	$\frac{5}{3}$		2

$\to \frac{5}{3} \leq x < 2$

$f^{-1}([2, +\infty)) = [\frac{5}{3}, 2)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 285 di 526

- **BIETTIVITÀ** $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

④ VERIFICO CHE LA FUNZIONE $f(x) = 2x - 1$ È BIETTIVA

$\cancel{2}x - \cancel{1} = \cancel{2}y - \cancel{1}$ $\quad x = y$

$x = y$

- **SURIETTIVITÀ** $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = y$

④ VERIFICO CHE LA FUNZIONE $f(x) = 2x - 1$ È SURIETTIVA

$2x - 1 = y$
$2x = y + 1$
$x = \frac{y+1}{2}$

DATO QUALSIASI NUM. NELL'ARRIVO POSSO TROVARE LA PARTENZA

ex $y = 7$
$x = 4$
$f(4) = 7$

NO SURIETTIVA: $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$

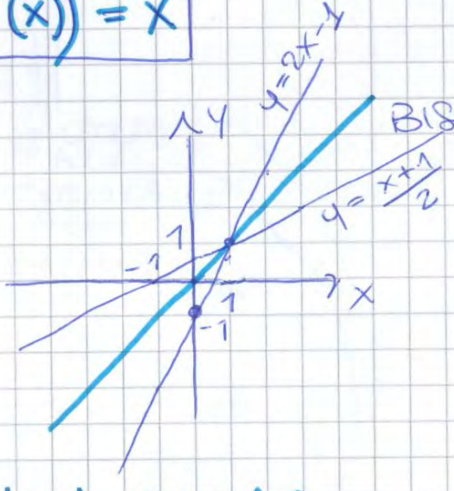
SE UNA FUNZIONE È **BIETTIVA** (INIETTIVA) ALLORA LA SUA **INVERSA** È UNA FUNZIONE

ex: $f(x) = 2x - 1$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \rightarrow f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x$

$$\boxed{f(f^{-1}(x)) = x}$$

GRAFICI:



- **FUNZIONI INVERSE**

⑤ DETERMINO IL DOMINIO DI $f(x) = \arcsin\left(2x - \sqrt{x-1}\right)$

RICORDO CHE: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$b^{\lg_b x} = x$

$$x = \log\left(\frac{1+tg^2 y}{1-tg^2 y}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \log\left(\frac{1+tg^2 x}{1-tg^2 x}\right) \rightsquigarrow \text{FACCIO IL DOMINIO}$$

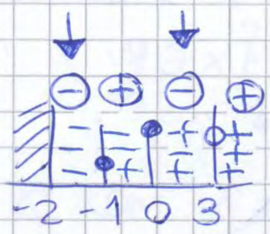
ESAME

① SOLUZIONI $\frac{x \cdot \log(x+2)}{x-3} \leq 0$ OK! RISP B

a) $[-2,0]$
b) $(-2,-1] \cup [0,3)$
c) $[-1;0]$
d) $(-2,+\infty)$
e) $(3,+\infty)$

DOMINIO $x \neq 3,\ x > -2$

$x \geq 0$
$x > 3$
$\log(x+2) > 0 \rightarrow x+2 > 1 \rightarrow x > -1$



② SOLUZIONI $\operatorname{sen} 5x + \cos 5x \leq 2$ RISP B

a) $[0,10\pi]$
b) $\mathbb{R}$
c) $[0,72]$
d) $[0,\frac{2}{5}\pi]$
e) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k\pi, 5\pi + k\pi] \longrightarrow$ $k=0$ $[0,5\pi] \cup$ $k=1$ $[2\pi,6\pi] \cup$ $k=2$ $[4\pi,7\pi] \cup \ldots$

$5x = t$
$\operatorname{sen} t + \cos t \leq 2$

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} 5x \leq 1 \\ \cos 5x \leq 1\end{array}\right\}$ QUINDI SEMPRE ≤ 2 SOLUZ. $\mathbb{R}$

③ SOLUZIONI $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 1$ OK RISP A

a) $(-1,0)$
b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
c) $[0,+\infty)$
d) $[0,1]$
e) $(-1,1)$

$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} - 1 > 0$ $\quad \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} > 0$

DOMINIO $\frac{1-x}{1+x} > 0$ $\quad x < 1$, $x > -1$
$-1 < x < 1$

$\sqrt{1-x} > \sqrt{1+x}$
$1-x > 1+x$
$0 > 2x$
$0 > x$
$x < 0$!!

④ SOLUZ $e^{\frac{x^2-1}{x+3}} \geq 1$ $\quad$ DOM $x \neq -3$ $\quad$ RISP D

a) $(-3,-1]$
b) $(-1,1)$
c) $(1,+\infty)$
d) $(-3,-1] \cup [1,+\infty)$
e) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$e^{\frac{x^2-1}{x+3}} \geq e^0$ $\quad \frac{x^2-1}{x+3} \geq 0$

N: $x \leq -1 \vee x \geq 1$
D: $x > -3$

S: $-3 < x \leq -1 \vee x \geq 1$

20/10/11

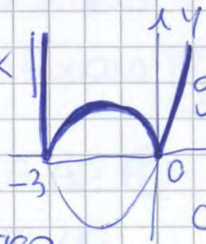
Funzioni composte

① Date le funzioni $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = |x|$
Det. dominio e le composte $g \circ f$ e $f \circ g$ e ne disegno i G.

$$\left.\begin{array}{l} dom(f) = \mathbb{R} \\ dom(g) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{R}$$

- $f(x)$ = parabola
  no iniettiva
- $g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ no iniettiva

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{per definizione}}{=} g(f(x)) = g(x^2+3x) = |x^2+3x|$$



no iniettiva
Dom = R
Im = [0+

calcolo vertice

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 + 3|x|$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 3|x| = \begin{cases} x^2+3x & x \geq 0 \\ x^2 - 3x & x < 0 \end{cases}$$

↓ grafico

Composizione delle funzioni: serve x derivare le CS ⊕ difficili

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

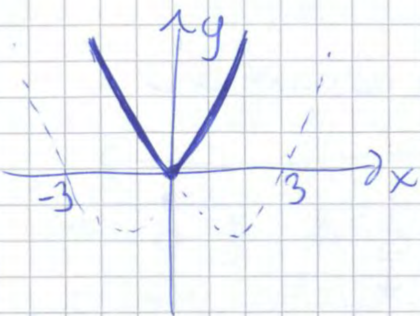
$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

$g \circ f$

$$g \circ f = g(f(x))$$

$g \circ f \neq f \circ g$ ⇝ ci sono delle eccezioni

Grafico $(f \circ g)(x)$



no iniettiva

$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$ → proprietà associativa
(mai commutativa)

REGOLETTE LOGARITMI:

$\log_{43} 43^x = x$

$43^{\log_{43} x} = x$

in qualunque base

$\log e^x = x$

$e^{\log x} = x$

in base e

③ $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+1}$ FACCIO DOMINIO E CALCOLO L'INVERSA.

$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

PROVO L'INIETTIVITA':

$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y$

$\dfrac{x-2}{2x+1} = \dfrac{y-2}{2y+1} \rightarrow (x-2)(2y+1) = (y-2)(2x+1)$

$\cancel{2xy} + x - 4y \cancel{-2} = \cancel{2xy} - 4x \cancel{-2} + y$

$x + 4x = y + 4y$

$\cancel{5}x = \cancel{5}y$

$x = y$

RESTRINGO L'ARRIVO ALL'IMMAGINE

$y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ ISOLO LA x $\quad 2xy + y = x - 2$

$x - 2xy = y + 2 \qquad x(1-2y) = y+2 \qquad x = \dfrac{y+2}{1-2y} \qquad \boxed{y \neq \frac{1}{2}}$

QUINDI L'INVERSA È

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-2x} = \dfrac{-x-2}{2x-1}$ ➜ PROVO CON $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2x+1}\right) = \dfrac{-2-\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)}{2\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)-1}$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = \frac{\frac{-4x-\cancel{2}-x+\cancel{2}}{\cancel{2x+1}}}{\frac{\cancel{2x}-4-\cancel{2x}-1}{\cancel{2x+1}}} = \frac{-5x}{-5} = x$$

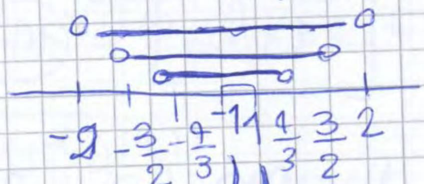
ESAME

$\boxed{\text{RISP } D}$

① Sia $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ allora

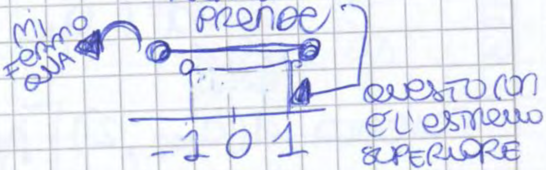
NÉ SERVO a) $\sup A = 1$, $1 \notin A$
NO b) $\max A = 1$
NO c) $\inf A = -2$
d) $\forall\varepsilon>0, \exists x\in A, -\varepsilon<x<0$
e) boh

$A = (-2,2)\cap\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\cap\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\dots$
$\dots\cap(-1,1)$ → esclusi



n è il + piccolo, ma non è mai $(-1,1)$

$\cap$ di ∞ intervalli, motivati con successioni → $\boxed{\text{SBAGLIATO! VEDO DOPO}}$

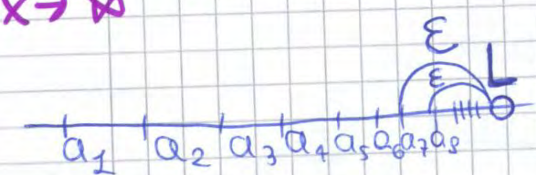


• LIMITI!! delle successioni

① Usando la definizione, dimostro che:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2 \qquad \frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2+\frac{1}{n}\to 0}{1+\frac{1}{n}\to 0} = \frac{2}{1} = 2 \quad n\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon>0 / \forall n>n_\varepsilon, |a_n-L|<\varepsilon$$



Da ε in poi la distanza dal limite di a_n è + piccola di ε

$\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon>0 / \forall n>n_\varepsilon, |a_n-L|<\varepsilon$?

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right|<\varepsilon \qquad \left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon$$

$\frac{1}{|n+1|}<\varepsilon$ → sempre positivo

$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ → positivo, non mi cambia il senso della

$1<\varepsilon(n+1)$ $\quad -\varepsilon+1<\varepsilon n$

$\boxed{n<\frac{1}{\varepsilon}-1}$ condizionante x dire quando...