NUMERO: 1204 DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Analisi Matematica II
Prof. Lancelotti

Anno accademico: **2011-2012**

Corso di laurea in **Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Energetica**

Programma di **Analisi Matematica II (6 CFU)** (codice: **22ACILZ e 22ACIMK**)

Docente: **Lancelotti Sergio**

Richiami di topologia di $\mathbb{R}^n$ e di calcolo differenziale in più variabili

Richiami di topologia di $\mathbb{R}^n$: intorno sferico aperto e chiuso di un punto, punto interno, isolato, di accumulazione, aderente (o di frontiera) di un insieme.
Parte interna e frontiera di un insieme.
Insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi per archi in $\mathbb{R}^n$.
Richiami di calcolo differenziale in più variabili: differenziale e gradiente di una funzione, matrice Jacobiana, differenziale e derivate parziali delle funzioni composte.
Teorema di Weierstrass e Lemma di Schwarz.

Integali multipli

Integrale multiplo di una funzione limitata. Significato geometrico dell'integrale di una funzione limitata.
Misura di un insieme. Insiemi misurabili e insiemi trascurabili.
Proprietà dell'integrale multiplo: linearità, monotonia, integrale su un insieme trascurabile, additività rispetto al dominio.
Integrali doppi. Insiemi x-semplici e y-semplici. Integrazione di una funzione continua su un insieme x-semplice e y-semplice.
Teorema del cambiamento di variabile negli integrali doppi. Coordinate polari e ellittiche nel piano.
Integrali tripli. Integrazione per fili paralleli ad un asse coordinato e per strati paralleli ad un piano coordinato.
Teorema del cambiamento di variabile negli integrali tripli. Coordinate polari (o sferiche) e cilindriche nello spazio.
Volume di un solido di rotazione ottenuto dalla rotazione di un sottoinsieme limitato di uno dei piani coordinati intorno ad uno degli assi. Primo teorema di Guldino.

Integrali su curve e superfici

Richiami sulle curve parametriche: definizione di curva parametrica, sostegno di una curva, curve semplici, chiuse, regolari e regolari a tratti, vettore tangente ad una curva in un punto, orientamento indotto da una curva sul sostegno, curve equivalenti.
Superfici parametriche in $\mathbb{R}^3$. Definizione di superficie parametrica. Superfici semplici e regolari.
Piano tangente ad una superficie in un punto. Vettore normale e versore normale alla superficie in un punto.
Orientamento indotto da una superficie sul sostegno. Superfici equivalenti. Proprietà delle superfici equivalenti.
Esempi di superfici parametriche: equazioni parametriche di un cilindro, di una sfera, del grafico di una funzione di due variabili.

<u>Integrali su curve</u>

Richiami sull'integrale curvilineo (o di linea di prima specie) di una funzione reale continua su una curva semplice e regolare e su una curva semplice e regolare a tratti.
Indipendenza dell'integrale curvilineo di una funzione dalla parametrizzazione della curva.

Integrale di linea (o di linea di seconda specie) di un campo vettoriale continuo lungo una curva semplice e regolare e lungo una curva semplice e regolare a tratti. Interpretazione fisica.

Circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva.

Dipendenza dell'integrale di linea di un campo vettoriale dall'orientamento indotto dalla parametrizzazione sulla curva.

<u>Integrali su superfici</u>

Calotta regolare. Integrale superficiale di una funzione reale continua su una superficie. Interpretazione fisica.

Area di una calotta regolare. Area del grafico di una funzione di due variabili. Indipendenza dell'integrale superficiale di una funzione dalla parametrizzazione della superficie.

Integrale di flusso (o flusso) di un campo vettoriale continuo attraverso una superficie. Interpretazione fisica. Dipendenza dell'integrale di flusso di un campo vettoriale dall'orientamento indotto dalla parametrizzazione sulla superficie.

Relazione fra i due tipi di integrali di superficie.

Teorema di Green (o formula di Gauss-Green nel piano).

Insiemi con bordo orientato positivamente. Misura di un insieme limitato nel piano il cui bordo è orientato positivamente.

Bordo di una calotta regolare. Bordo di una calotta orientato positivamente.

Teorema di Stokes (o del rotore).

Aperto con bordo in $\mathbb{R}^3$.

Teorema di Gauss (o della divergenza).

Campi conservativi

Definizione di campo vettoriale conservativo. Potenziali di un campo conservativo. Proprietà dei potenziali.

Campi vettoriali radiali. Esempio: il campo gravitazionale.

Proprietà dei campi conservativi: calcolo dell'integrale di un campo conservativo tramite un potenziale.

Indipendenza dell'integrale di un campo conservativo dal cammino. Annullamento della circuitazione di un campo conservativo.

Teorema di equivalenza per i campi conservativi su insiemi connessi per archi.

Insiemi semplicemente connessi.

Condizione necessaria affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo. Irrotazionalità.

Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale di classe C^1 sia conservativo.

Determinazione di un potenziale di un campo conservativo: integrazione lungo una curva e integrazione indefinita delle componenti del campo .

Serie numeriche

Definizione di serie numerica, di successione delle somme parziali, di serie convergenti, divergenti, indeterminate. Somma di una serie.

Esempi: serie geometrica, serie armonica, serie armonica generalizzata, serie telescopiche, serie di Mengoli.

Proprietà delle serie: indipendenza del carattere di una serie da un numero finito di termini.

Algebra delle serie.

<u>Criteri di convergenza</u>

Condizione necessaria per la convergenza di una serie.

Convergenza o divergenza di una serie a termini positivi.

Criteri del confronto e del confronto asintotico.

Criteri del rapporto e della radice.
Criterio di McLaurin.
Criterio della convergenza assoluta.
Criterio di Leibniz. Serie armonica a termini di segno alterno.

Prodotto di Cauchy di due serie. Teorema di Mertens.
Serie numeriche complesse.

Successioni di funzioni

Convergenza puntuale di una successione di funzioni. Convergenza uniforme di una successione di funzioni limitate.
Legame fra la convergenza uniforme e la convergenza puntuale. Esempi di successioni di funzioni che convergono puntualmente, uniformemente.
Continuità del limite uniforme di una successione di funzioni continue e limitate.

Serie di funzioni

Definizione di serie di funzioni. Convergenza puntuale e assoluta. Somma di una serie.
Serie di funzioni limitate. Convergenza uniforme e totalre (o normale). Legame fra convergenza totale, uniforme, assoluta e puntuale di funzioni limitate.
Continuità della somma di una serie di funzioni continue e limitate che converge uniformemente.
Criterio di Weierstrass.
Integrazione e derivazione per serie.

Serie di potenze

Serie di potenze. Raggio di convergenza. Insieme di convergenza di una serie di potenze. Teorema di Abel.
Continuità della somma di una serie di potenze.
Teoremi della "radice" (o di Hadamard) e del "rapporto" (o di D'Alembert) per determinare il raggio di convergenza.
Integrazione e derivazione per le serie di potenze.
Somma e prodotto di serie di potenze. Raggio di convergenza della serie somma e della serie prodotto.
Serie di potenze complesse.

Serie di Taylor

Serie di Taylor di una funzione di classe C^∞ centrata in un punto. Funzioni analitiche.
Sviluppi in serie notevoli di McLaurin: $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sinh x$, $f(x) = \cosh x$, $f(x) = \log(1+x)$, $f(x) = \arctan x$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.
Determinazione degli sviluppi di McLaurin di alcune funzioni utilizzando gli sviluppi in serie notevoli.
Calcolo della somma di una serie utilizzando gli sviluppi in serie notevoli e i teoremi di integrazione e derivazione per serie.

Serie di Fourier

Richiami sulle funzioni periodiche.
Definizione di serie di Fourier di una funzione periodica. Coefficienti della serie di Fourier.

Polinomio trigonometrico di grado n associato ad una funzione.

Armoniche: ampiezza, frequenza e fase.

Funzioni continue a tratti e funzioni C^1 a tratti.

Approssimazione in norma quadratica di una funzione periodica con il polinomio trigonometrico di grado n associato alla funzione.

Convergenza quadratica, puntuale e uniforme della serie di Fourier. Indentità di Parseval. Pseudo derivata destra e sinistra.

Calcolo della somma di una serie utilizzando la serie di Fourier di una funzione.

Teoremi studiati nell'insegnamento di Analisi Matematica II

Testo di riferimento: "S. Lancelotti, *Appunti di Analisi Matematica II*" (materiale didattico reperibile sul portale della didattica per gli studenti iscritti all'insegnamento di Analisi Mateamtica II codici 22ACILZ e 22ACIMK).

Cap.	Enunciato	Enunciato e dimostrazione
1	Proposizione (1.4) Proposizione (1.5) Proposizione (2.3) Lemma (2.8) Teorema (2.9)	
2	Teorema (1.3) Proposizione (1.6) Proposizione (1.7) Teorema (1.10) Osservazione (1.11) Teorema (1.13) Osservazione (1.20) Teorema (1.22)	
3	Proposizione (1.7) Proposizione (1.8) Teorema (2.4)	Teorema (3.4)
4	Proposizione (1.7) Proposizione (1.8) Teorema (2.5) Teorema (3.6) Teorema (4.2) Corollario (4.4) Teorema (4.11) Teorema (4.14)	
5		Osservazione (1.5) Proposizione (1.7) Teorema (1.9) Teorema (1.11) Teorema (1.13) Teorema (1.17)
6	Proposizione (2.3) Teorema (2.8) Teorema (2.13) Teorema (2.19) Teorema (2.23) Osservazione (2.27) Teorema (2.28) Teorema (2.34) Teorema (2.38) Teorema (3.2) Osservazione (4.2)	Proposizione (2.1) Teorema (2.4) Teorema (2.6) Teorema (2.35)
7	Proposizione (1.8) Teorema (2.1) Teorema (2.2)	Proposizione (1.7)
8	Proposizione (1.6) Teorema (1.10) Teorema (1.11) Teorema (2.2) Teorema (2.3) Osservazione (2.5) Osservazione (2.10) Osservazione (2.14) Teorema (2.16) Teorema (2.18) Teorema (2.19) Teorema (2.20) Teorema (2.25) Teorema (2.27) Teorema (2.30) Proposizione (3.2) Teorema (3.13) Teorema (3.15) Teorema (3.17) Teorema (3.20)	Proposizione (1.4) Teorema (1.8) Teorema (2.6) Teorema (2.8)

Analisi Matematica II (Ing. Bio+Ener, A-L)

Welcome

1) *Dati del corso e del docente*
2) *Argomenti studiati nel corso*
3) *Prerequisiti*
4) *Organizzazione delle lezioni e delle esercitazioni*
5) *Testi consigliati e materiale in rete*
6) *Consulenza*
7) *Esame*
8) *Disciplina*
9) *Conclusioni*
10) *Test iniziale*

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 278

2) Argomenti studiati nel corso

- Integrali doppi e tripli.
- Integrali su curve e superfici.
- Teoremi di Green, Gauss, Stokes.
- Campi conservativi.
- Serie numeriche.
- Successioni e serie di funzioni. Serie di potenze, di Taylor e di Fourier.

Analisi Matematica II (Ing. Bio+Ener, A-L)

4) Organizzazione delle lezioni e delle esercitazioni

Lezioni. Tutti insieme.
Docente: Sergio Lancelotti **Ore:** 36 (o 40) **Pausa:** 0 minuti
Modalità: lezioni alla lavagna. **DOVRETE PRENDERE APPUNTI**

Esercitazioni. Tutti insieme.
Docente: Sergio Lancelotti **Ore:** 24 (o 20) **Pausa:** 0 minuti
Modalità: lezioni alla lavagna. **DOVRETE PRENDERE APPUNTI**

Orario lezioni e esercitazioni

6) Consulenza

Mercoledì dalle 12 alle 13.30. **SOLO PER APPUNTAMENTO**

Prenotazioni: 011 090 7536 oppure **D2570@studenti.polito.it** oppure **durante le lezioni.**

Avete dei problemi durante lo studio individuale?

- Non capite degli argomenti o delle dimostrazioni?
- Non sapete affrontare degli esercizi?
- Non riuscite a trovare la soluzione corretta a degli esercizi?

VENITE A CONSULENZA.

7) Esame (segue)

- La prova orale può essere richiesta dal docente per motivi legati alla valutazione della prova scritta o dallo studente che ha riportato una valutazione della prova scritta ≥ 18, e verte su tutto il programma del corso e verranno chiesti definizioni, enunciati e dimostrazioni di teoremi, esempi.

- I risultati della prova scritta appariranno sulla vostra pagina web nel

Portale della didattica

Insieme ai risultati verrà indicato il giorno della registrazione dell'esame.
E' obbligatorio presentarsi alla registrazione.
Chi non si presenta PUNTUALE verrà considerato RITIRATO.
NON INVIATEMI email e NON telefonatemi per giustificare la vostra assenza dalla registrazione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 278

8) Disciplina

Lezioni e esercitazioni

Quando io insegno voi state zitti.

Durante le lezioni e le esercitazioni i telefonini vanno tenuti SPENTI (non in modalità SILENZIOSO).

Se non capite alzate la mano e io vi darò la parola.

Quando qualcuno fa una domanda gli altri stanno zitti.

Quando io rispondo tutti state zitti.

La pausa dura 10 minuti SOLO se abbiamo TRE ore consecutive.

Decido io quando è il momento di fare la pausa.

Dopo 9 minuti dall'inizio della pausa chi è fuori dall'aula deve rientrare.

TUTTI avete una possibilità di disturbare (BONUS).

Esaurito il BONUS, ogni altro richiamo comporterà un esame ORALE della durata di almeno **un'ora**.

Le scuse di chi ha disturbato e viene richiamato sono più che gradite.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 278

10) Test iniziale

Test iniziale.lnk

QUIZ (20) → I QUIZ GIUSTI DEVONO ESSERE 4 O PIÙ
ES (10) (PIÙ DELLA METÀ)

FILE VOTI < NUMERO (QUIZ SUPERATI)
RESPINTO (QUIZ NON SUPERATI)

STUDIARE ANCHE LA TEORIA!

CONSULENZA 12 - 13,30 MERCOLEDÌ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 278

Analisi Matematica II (Ing. Bio+Ener, A-L)

6) Consulenza

Mercoledì dalle 12 alle 13.30. **SOLO PER APPUNTAMENTO**

Prenotazioni: 011 090 7536 oppure **D2570@studenti.polito.it** oppure **durante le lezioni.**

Avete dei problemi durante lo studio individuale?

- Non capite degli argomenti o delle dimostrazioni?
- Non sapete affrontare degli esercizi?
- Non riuscite a trovare la soluzione corretta a degli esercizi?

VENITE A CONSULENZA.

Analisi Matematica II (Ing. Bio+E

7) Esame

- Prova scritta + eventuale Prova Orale. In questo a.a. avete 4 APPE
- Vi DOVETE iscrivere alla prova scritta. Chi non si iscrive NON
  La prova scritta verte su tutto il programma del corso, si comp
  risposta multipla (5 di calcolo e 3 teorico-applicativi) e un eser
- La prova scritta va SCRITTA A PENNA NERA O BLU. Si
  ORDINATO, COMPRENSIBILE E LEGGIBILE.
- Durante la prova scritta non si possono utilizzare appunti, li
  computer, telefonini, ecc..
- Correzione prova scritta: risposta corretta ad un quiz: **2,5 punti**, e
  non data: **0 punti**; svolgimento dell'esercizio tutto corretto: **10 pu**
  - **Risposte quiz esatte ≤ 3**: non correggo esercizio.
    SUPERATO
  - **Risposte quiz esatte ≥ 4**: correggo l'esercizio.
- L'esame è superato se il punteggio totale è **≥ 18.**

Analisi Matematica II (Ing. Bio+Ener, A-L)

7) Esame (segue)

- La prova orale può essere richiesta dal docente per motivi legati alla valutazione della prova scritta o dallo studente che ha riportato una valutazione della prova scritta ≥ 18, e verte su tutto il programma del corso e verranno chiesti definizioni, enunciati e dimostrazioni di teoremi, esempi.
- I risultati della prova scritta appariranno sulla vostra pagina web nel
  Portale della didattica

Insieme ai risultati verrà indicato il giorno della registrazione dell'esame.
E' obbligatorio presentarsi alla registrazione.
Chi non si presenta PUNTUALE verrà considerato RITIRATO.
NON INVIATEMI email e NON telefonatemi per giustificare la vostra assenza dalla registrazione.

Analisi Matematica II (Ing. Bio+

7) Esame (segue)

Statistiche esami anni precedenti

Analisi Matematica II (Ing. Bio+Ener, A-L)

8) Disciplina

Lezioni e esercitazioni
Quando io insegno voi state zitti.
Durante le lezioni e le esercitazioni i telefonini vanno tenuti SPENTI (non in modalità SILENZIOSO).
Se non capite alzate la mano e io vi darò la parola.
Quando qualcuno fa una domanda gli altri stanno zitti.
Quando io rispondo tutti state zitti.
La pausa dura 10 minuti SOLO se abbiamo TRE ore consecutive.
Decido io quando è il momento di fare la pausa.
Dopo 9 minuti dall'inizio della pausa chi è fuori dall'aula deve rientrare.

TUTTI avete una possibilità di disturbare (BONUS).
Esaurito il BONUS, ogni altro richiamo comporterà un esame ORALE della durata di almeno **un'ora**.
Le scuse di chi ha disturbato e viene richiamato sono più che gradite.

Analisi Matematica II (Ing. Bio-

9) Conclusione

Il corso di Analisi Matematica II è più difficile di quello di Analisi
motivi:

1) **gli argomenti sono più complessi;**
2) **in molti casi gli argomenti sono una estensione in più variabili di**
   variabile;
3) **aumenta la complessità geometrica e talvolta è impossibile dar**
   grafica dei concetti;
4) **è necessario conoscere BENE i concetti di Analisi Matematica I e**
5) **la complessità degli argomenti richiederebbe un numero maggio**
   ore a disposizione in aula, per poter essere affrontati nel modo mi

Pertanto vi invito sin da questa settimana a venire a consulenza.

NON aspettate la prossima settimana. Sarà già troppo tardi.

L'esame è superato se la valutazione è maggiore o uguale a 18.
Lo studente che ha ottenuto una valutazione maggiore o uguale a 18 nella prova scritta può chiedere anche una prova orale.
La prova orale può anche essere richiesta dal docente per motivi legati alla valutazione della prova s

7) Chi entra in aula **può** ritirarsi solamente dopo **un'ora** dall'inizio della prova.

8) L'esito di ciascun esame verrà registrato sul registro del docente.

9) Risultati della prova scritta, registrazione e calendario della eventuale prova orale: i risultati dell appariranno sulla pagina web personale di ciascuno studente nel Portale dell Verranno anche fornite indicazioni sulle modalità di registrazione del voto e sull'eventuale **Gli studenti sono invitati ad attenersi scrupolosamente a queste indicazioni.**

10) Registrazione dell'esame: la registrazione dell'esame con esito positivo (voto maggiore o uguale a 1 fatta sul libretto dello studente e sul registro del docente alla presenza dello studente stesso.

Informazioni logistiche

Il Dipartimento di Matematica si trova al terzo piano dell'edificio principale del Politecnico in C.so Duca n.
La segreteria didattica del Dipartimento di Matematica è online all'indirizzo http://calvino.polito.it/segret

ex $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots 0)$

$\bar{e}_2 = (0, 1, 0 \dots 0)$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (0, 0 \dots 0, 1)$

QUESTI VETTORI $(e_1, \dots, e_n)$ COSTITUISCONO LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

SE $v = (v_1, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$ ALLORA:

$$v = (v_1, \dots v_n) = (v_1, 0 \dots, 0) + \dots + (0, \dots 0, v_n) =$$

$$v = v_1 (1, 0, \dots 0) + \dots + v_n (0, 0, \dots 0, 1) =$$

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + \dots + v_n \bar{e}_n$$

PRODOTTO SCALARE

SE $x = (x_1, \dots, x_n)$ $y = (y_1, \dots, y_n)$ $\in \mathbb{R}^n$

ALLORA $x \bullet y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

NORMA

LA NORMA / MODULO DI x È $\underbrace{\|x\|}_{\text{norma}} = \underbrace{|x|}_{\text{modulo}}$

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$$

VETTORE $\bar{0}$ È $\bar{0} = (0, \dots 0)$ $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$

QUINDI $x - 0 = x \Rightarrow \|x\| = \|x - \bar{0}\|$

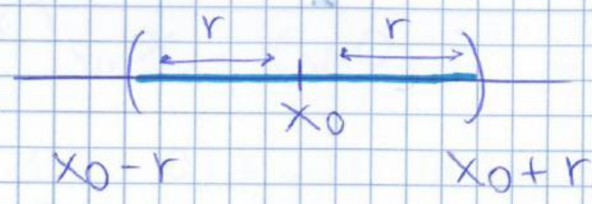
SE $n = 1 \Rightarrow \|x\| = |x| = \sqrt{x^2}$

ESEMPI

- $n = 1$,

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - x_0| < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -r < x - x_0 < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x_0 - r < x < x_0 + r\}$$
$$= (x_0 - r, x_0 + r)$$

INTERVALLO SIMMETRICO RISPETTO A x_0

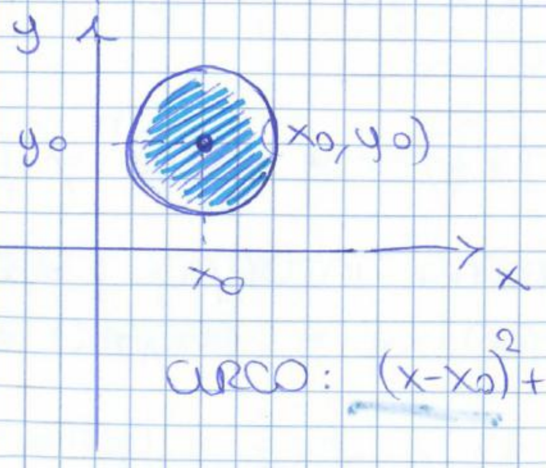


$$\overline{B_r(x_0)} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

$n = 2$,

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < r\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x - x_0, y - y_0)\| < r\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

PUNTI DENTRO LA CIRCO



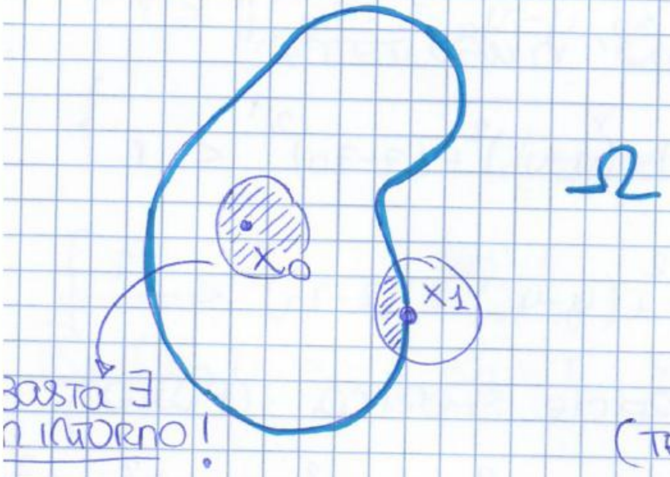
CIRCO: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

PUNTI INTERNI / ISOLATI / DI ACCUMULAZIONE / FRONTIERA

Siano Ω contenuto in $\subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- Diciamo che x_0 è un punto **interno** a Ω se $\exists r > 0 \ / \ B_r(x_0) \subseteq \Omega$ $\Longrightarrow$ evidentemente $x_0 \in \Omega$.

(appartenere $\neq$ essere interni)



$x_0 \in \Omega$
x_0 è interno

$x_1 \in \Omega$
x_1 non è interno

(Teorema di Fermat)

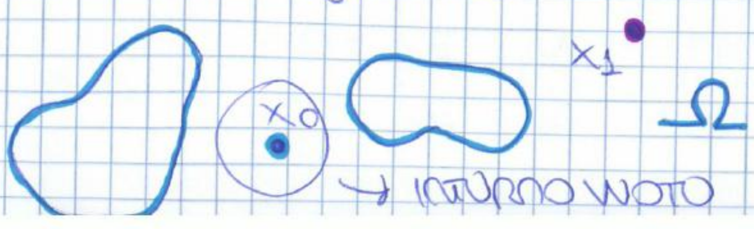
Si chiama **parte interna** di Ω l'insieme dei punti interni di Ω e si denota con $\text{int}(\Omega)$

Si ha che $\text{int}(\Omega) \subseteq \Omega$.

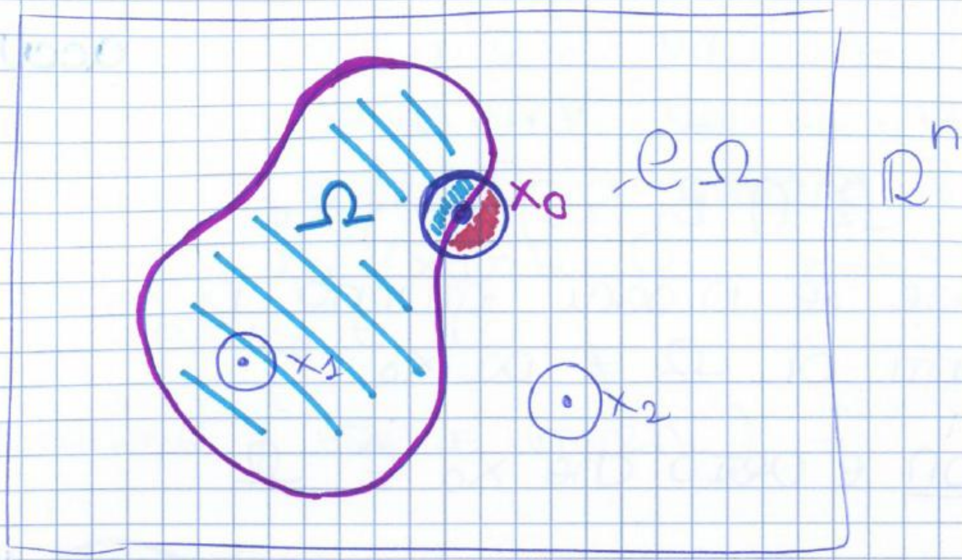
Diciamo che x_0 è un punto **isolato** di Ω se $\exists r > 0 \ / \ \Omega \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$

($\exists$ un intorno così piccolo / l'unico punto dell'intorno che sia in Ω è l'elemento stesso)

Evidentemente $x_0 \in \Omega$



$x_0 \in \Omega$
$x_1 \notin \Omega$



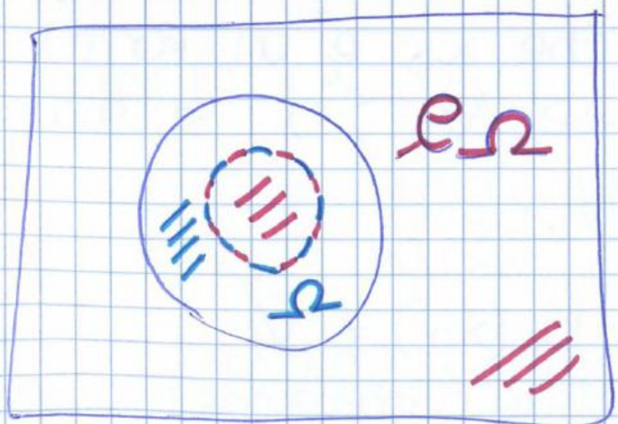
x_0 è di frontiera
x_1 e x_2 no!

L'insieme dei punti di frontiera di Ω si chiama **FRONTIERA / BORDO** di Ω

$$Fr(\Omega) = \partial\Omega$$

NB $\quad Fr(\Omega) = Fr(\complement\Omega)$

La frontiera di un insieme coincide con la frontiera del suo complementare



La frontiera sono i 2 contorni

Si chiama **chiusura** di Ω l'insieme

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup Fr(\Omega)$$

NB Ω chiuso $\Longleftrightarrow$ $\overline{\Omega} = \Omega$

PROPRIETÀ

Valgono i seguenti fatti

1) L'unione qualunque di 2 insiemi aperti è un insieme aperto

2) L'intersezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto → di un numero finito di insiemi

3) L'unione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso

4) L'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso

PROPRIETÀ

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora si ha che

1) se A è aperto $\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$ è aperto

2) se A è chiuso $\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$ è chiuso

dove $f^{-1}(A)$ è la controimmagine (preimmagine) di A tramite f, cioè $f^{-1}(A) = \{x \in \Omega \,/\, f(x) \in A\}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 2x^2 + 3y^4 < 1\}$$

→ VERIFICO CHE È APERTO COME ESERCIZIO

REGOLA:

$<$ → APERTO

$\leq$ ⇒ CHIUSO

$=$ ⇒

- $B = (-\infty, 1]$ CHIUSO XKE $\complement B = (1, +\infty)$ APERTO
- $\{1\}$ CHIUSO XKE $\complement\{1\}$ APERTO

In particolare se $\bar{v} = \bar{e}_i \Rightarrow$ si ha la **derivata parziale di f in x_0 rispetto a x_i** che si denota con $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione.
Diciamo che **f è differenziabile in x_0** se esiste un'applicazione lineare (e continua) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

In tal caso L è detta **differenziale di f in x_0** e si denota con

$$df(x_0) \quad \text{oppure} \quad d_{x_0} f$$

In particolare:

$df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ xke è un'applicazione lineare

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = o(\|x - x_0\|)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ per $x \to x_0$

f(x) si può approssimare

a meno di errore

$z = f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)$
è l'equazione del piano tangente alla funzione nel punto $x_0, f(x_0)$

un'applicazione è lineare se

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$
$$L(\lambda x) = \lambda L(x)$$
$$\Downarrow$$
$$L(ax+by) = aL(x) + bL(y) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

3) una condizione sufficiente affinché f sia differenziabile:

se f ammette tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in Ω e se queste derivate sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0

Osservazioni

se $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow \exists\, df(x_0) / \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare

rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^m$ e di $\mathbb{R}^n$ si associa a $df(x_0)$ una matrice detta Jacobiana, indicata con $J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$f = (f_1, \dots, f_m)$
$f_1, \dots f_m$ sono funzioni $\Omega \to \mathbb{R}$ e sono le componenti di f

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 278

$$df(x_0)(v) = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\,dx_n\right]}_{\text{FUNZIONE}}(v)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow\ df(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\,dx_n \\ df(x_0) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,dx_i \end{aligned}}$$

Caso speciale $n = 1$

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto non vuoto,
$f : I \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$.
Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è differenziabile in x_0 e si ha che

$\forall x \in \mathbb{R}$: $df(x_0)(x) = f'(x_0)\,x$

In particolare $df(x_0)(1) = f'(x_0)$

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione.
Diciamo che f è di **classe C^0** su Ω se f è continua su Ω.
Diciamo che f è di **classe C^1** su Ω se f ammette tutte le derivate parziali (prime) in Ω e sono continue in Ω.
(è più che essere differenziabile)

Differenziale della funzione composta

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

f sia differenziabile in x_0
g sia differenziabile in $f(x_0)$

$\Rightarrow g \circ f$ è differenziabile in x_0
e si ha che $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$d(g \circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))(df(x_0)(x))$$

(come la derivata $(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$)

$$df(x_0) \iff J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$dg(f(x_0)) \iff J_g(f(x_0)) \in \mathbb{R}^{k,m}$$

$$dg \circ f(x_0) \iff J_{g \circ f}(x_0) \in \mathbb{R}^{k,n}$$

xke

$$J_{g \circ f}(x_0) = \underbrace{\underset{k,\cancel{m}}{J_g f(x_0)} \cdot \underset{\cancel{m} \times n}{J_f(x_0)}}_{k \times n}$$

② $n = 1$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$g \circ f$

$$(g \circ f)'(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0))\, f_j'(x_0)$$

SE GUARDO:

$$\nabla g(f(x_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0))\right)$$

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$$

$$(g \circ f)'(x_0) = \nabla g(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

insieme

misurabile | non misurabile

insieme a cui si può associare un valore numerico

ex piano → area
spazio → volume
....

ci sono 2 teorie sull'integrazione:

- Riemann (basata sulla teoria della misura di Peano-Jordan)
- Lebesque (basata sulla sua omonima teoria della misura)

nel seguito considereremo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Notazione

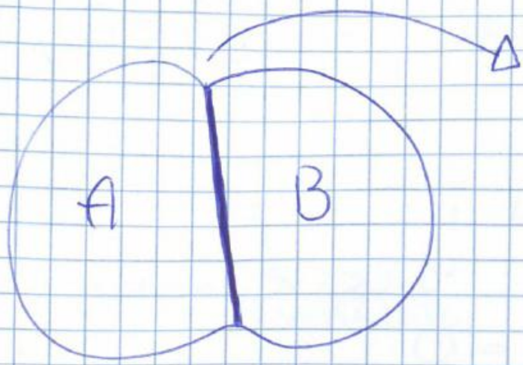
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato non vuoto.
Diciamo che Ω è **misurabile** se a Ω si può associare una misura che

x $n=2$ → è l'area
x $n=3$ → è il volume
x $n=1$ → lunghezza

Si denota con $m_n(\Omega)$ o $m(\Omega)$

$m_n(\Omega)$: misura o valore n-dimensionale
$m(\Omega)$: misura

misura ≥ 0 sempre!



misura della linea

$m(/) = 0$

cioè $m(A \cap B) = 0$

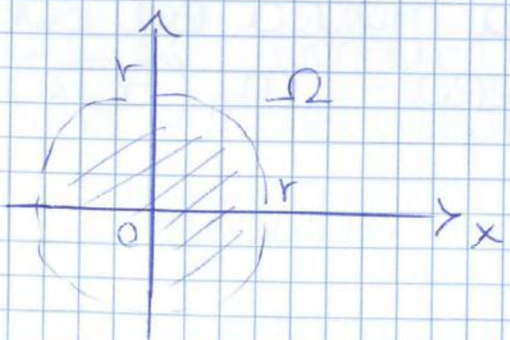
In particolare, se Ω è un aperto, misurabile, limitato allora la misura della chiusura di Ω è data da

$$m(\overline{\Omega}) = m(\Omega) + \underbrace{m(Fr\,\Omega)}_{\text{zero}} - \underbrace{m(\Omega \cap Fr\,\Omega)}_{\text{zero}}$$

$m(\overline{\Omega}) = m(\Omega)$ con $\overline{\Omega} = \Omega \cup Fr\,\Omega$

esempio:

$\Omega = B_r((0,0))$ in $\mathbb{R}^2$, con $r > 0$



$m(\Omega) = \pi r^2$

cerchio senza circonferenza

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, diciamo che Ω è **trascurabile** se $m_n(\Omega) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 278

$$\underbrace{\int \cdots \int_\Omega}_{n \text{ volte}} f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

se $n=2 \Rightarrow$ INTEGRALE DOPPIO $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$

se $n=3 \Rightarrow$ INTEGRALE TRIPLO $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

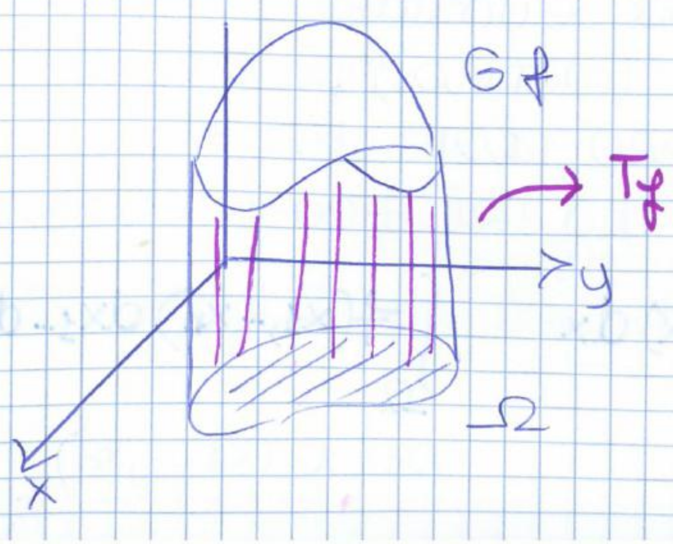
Ω è detto **DOMINIO DI INTEGRAZIONE**

se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega \Rightarrow \int_\Omega f(x)\,dx$ è il **VOLUME $n+1$ DIMENSIONALE DEL TRAPEZOIDE** della funzione f

$$T_f = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x = (x_1, \dots x_n) \in \Omega,\ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x) \}$$

esempio:

$n=2$



$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = m_3(T_f)$$

tutto ciò che è in mezzo a dominio e grafico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 278

③ se $f \leq g$ su Ω allora $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$ monotonia

④ $\left|\int_\Omega f\right| \leq \int_\Omega |f|$ valore assoluto

PROPRIETÀ

siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua, allora si ha che:

additività rispetto al dominio

① se Ω è trascurabile $(m(\Omega)=0) \to \int_\Omega f = 0$

② se $\Omega = A \cup B$ con A, B misurabile e $A \cap B$ trascurabile $\to \int_\Omega f = \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$

③ $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$

④ se $f \geq 0$ su Ω e $A \subseteq \Omega$ è misurabile

$\to \int_A f \leq \int_\Omega f$ monotonia rispetto al dominio

io lo divido xke mi fa comodo
non mi interessa la linea
xke il suo contributo è nullo

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f + \underbrace{\int_{/} f}_{=0}$$

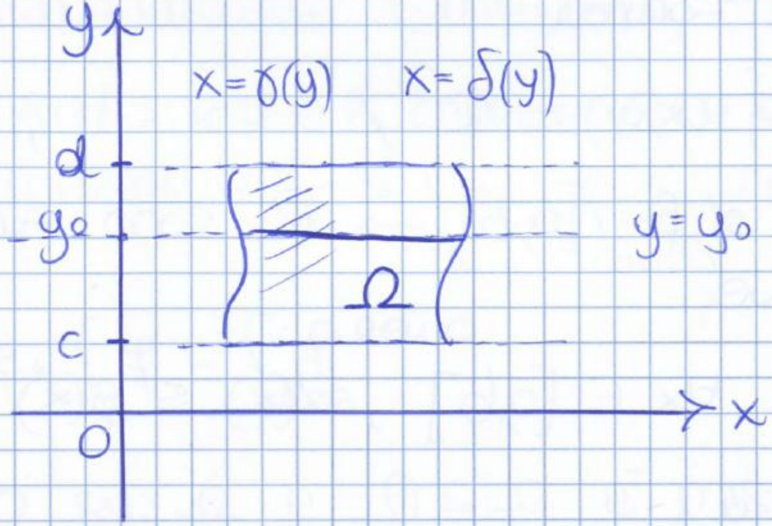
INSIEME X-SEMPLICE

DICIAMO CHE Ω È X-SEMPLICE (O ORIZZONTALMENTE CONVESSO) SE È NELLA FORMA

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

DOVE $\gamma, \delta\ [c,d] \to \mathbb{R}$ SONO FUNZIONI CONTINUE

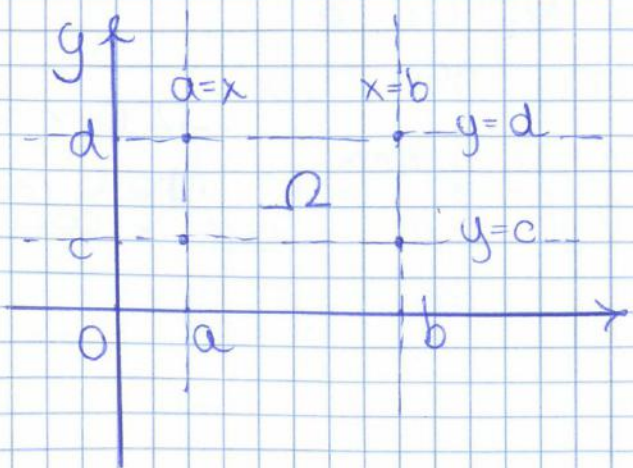
QUESTI INSIEMI SONO MISURABILI



OVVERO

$\forall y \in [c,d]$ SI HA $\gamma(y) \leq \delta(y)$

GLI INSIEMI SIA X/Y-SEMPLICI $\to$ UN RETTANGOLO



se Ω è l'insieme x-semplice

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$

con $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\boxed{\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\overbrace{\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx}^{F(y)} \right] dy}$$

OSSERVAZIONE (CASO PARTICOLARE)

se Ω è un rettangolo con lati // agli assi coordinati, cioè se Ω è della forma

$\Omega = [a,b] \times [c,d]$ e se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è la funzione $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ con

$f_1 [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue,

allora

$$\boxed{\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= \int_\Omega f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \\ &= \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)\end{aligned}}$$

- f in tutti i casi è limitata
- Ω chiuso e limitato = compatto

applichiamo la formula di x-s

$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{2}x^2 + yx \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2}(1-y^2) + y\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}y^2 - y^2 \right) dy =$$

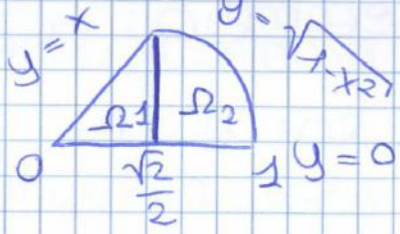
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2y^2 + y\sqrt{1-y^2} \right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{3}(1-y^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{2^{3/2}}{\cancel{2}} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}_2}\right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

applichiamo la formula y-s

$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy \longrightarrow$ scompongo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$= \int_{\Omega_1} (x+y)\,dx\,dy + \int_{\Omega_2} (x+y)\,dx\,dy$$

$\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \le y \le x$

$\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$

TEOREMA (del cambiamento di variabile negli integrali doppi)

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti misurabili,

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, limitata e

$\phi : \Omega' \to \Omega$ una funzione /

1) ϕ è biettiva

2) ϕ è di classe C^1 su Ω' con

$$\det J_\phi (u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega'$$

allora:

valore assoluto del determinante

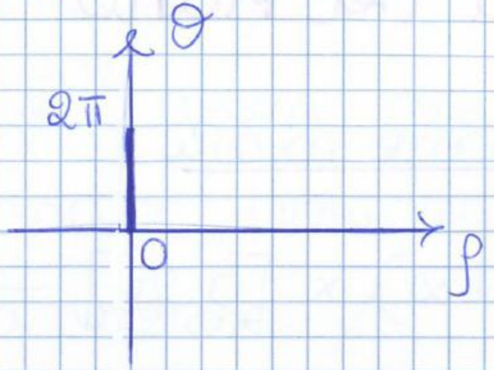
$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \left| \det J_\phi (u,v) \right| du\,dv$$

in una variabile gli intervalli sono orientati, quindi il valore assoluto scompare

OSSERVAZIONE

Se ϕ non è iniettiva su $A \subseteq \Omega'$ di misura nulla, o se $\det J_\phi = 0$ su $A \subseteq \Omega'$ di misura nulla, allora la formula si può applicare lo stesso.

$\rho = 0 \rightarrow \det J_\Phi = 0$ su $\{0\} \times [0, 2\pi]$



② COORDINATE ELLITTICHE

sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e siano $a, b > 0$

$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\Phi(\rho, \theta) = (x_0 + a\rho\cos\theta \,,\, y_0 + b\rho\sin\theta)}$$

se $a = b = 1 \rightarrow$ coordinate polari

se $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si ha

$\Phi(\rho, \theta) = (a\rho\cos\theta \,,\, b\rho\sin\theta)$

$$J_\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\Phi(\rho, \theta)| = |ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta| =$$

$$= |ab\rho| = ab\rho \quad \text{xk} \quad \begin{matrix} a, b > 0 \\ \rho > 0 \end{matrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 278

CI SONO 4 CASI: — LE FUNZIONI DISPARI, E SIMMETRICHE RISPETTO A UNO DEI 2 ASSI, HANNO INTEGRALE DOPPIO $= 0$

1) SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ MISURABILE E SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE X E SIA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA E LIMITATA / $\forall (x,y) \in \Omega$,

$f(x,-y) = f(x,y)$ (FUNZIONE PARI RISPETTO ALLA VARIABILE y)

ALLORA

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy$$

2 VOLTE SOLO LA PARTE SOPRA (UGUALE A QUELLA SOTTO)

CON $\Omega' = \{(x,y) \in \Omega \ / \ y \geq 0\}$ OPPURE $y < 0$

2) SIA Ω SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE X, $\forall (x,y) \in \Omega$, $f(x,-y) = -f(x,y)$

ALLORA $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 0$ (FUNZIONE DISPARI RISPETTO A y)

3) SIA Ω SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y, $\forall (x,y) \in \Omega$, $f(-x,y) = f(x,y)$

ALLORA

2 VOLTE SOLO LA PARTE DX (UGUALE A QUELLA SX)

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy, \text{ con } \Omega' = \{(x,y) \in \Omega \ / \ x > 0\}$$

OPPURE $x < 0$

4) SIA Ω SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y, $\forall (x,y) \in \Omega$, $f(-x,y) = -f(x,y)$, ALLORA

$\int f(x,y)\,dx\,dy = 0$ (FUNZIONE DISPARI)

★ asse x

Sia ora $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (y,z) \in D,\ \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$
allora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right] dy\,dz$$

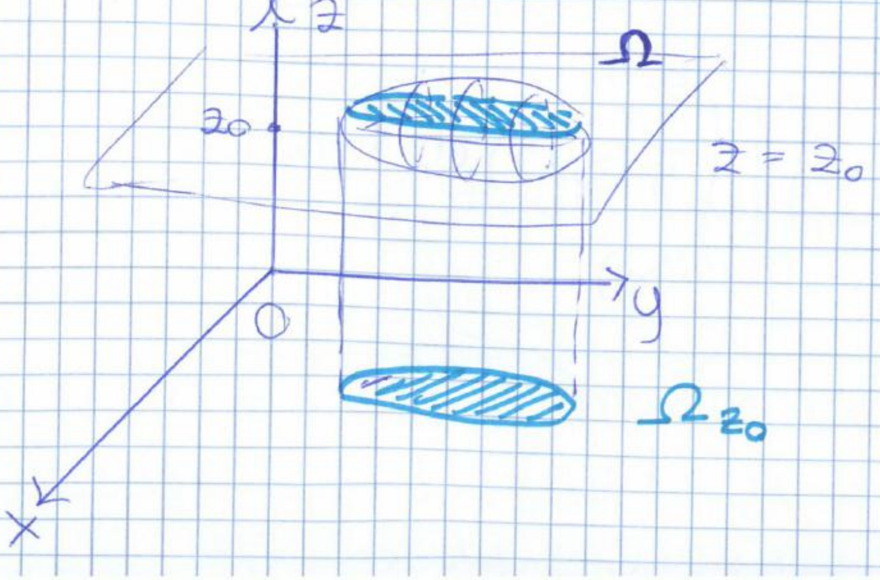
★ asse y

Sia ora $\Omega = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D,\ \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$
allora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dx\,dz$$

Integrazione x strati paralleli a un piano coordinato

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato, $\forall z_0 \in \mathbb{R}$
poniamo $\Omega_{z_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y,z_0) \in \Omega\}$



no y,z

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a \leq x \leq b \,,\, (y,z) \in \Omega_x \}$, dove $\forall x \in [a,b]$

$_x = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y,z) \in \Omega \}$

$$f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\Omega_x} f(x,y,z)\,dy\,dz \right] dx$$

SSERVAZIONE

Ω è un parallelepipedo con spigoli // agli
si cartesiani, cioè

$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [h,k]$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è

$f(x,y,z) = f(x)\, f(y)\, f(z)$ con

$f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, $f_3 : [h,k] \to \mathbb{R}$

unzioni continue,
llora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega f_1(x)\, f_2(y)\, f_3(z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)\,dx \right) \left(\int_c^d f_2(y)\,dy \right) \left(\int_h^k f_3(z)\,dz \right)$$

DIMO (x esercizio)

ESEMPI:

① $\int_{\Omega} (x^2+y^2)\, z \, dx\,dy\,dz$ con

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \ ,\ z \geq 0 \right\}$$

2 relazioni con z!

$x^2+y^2+z^2 \leq 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} z^2 \leq 1-x^2-y^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$ $\rightarrow$

$z \geq 0$

$\rightarrow \quad 0 \leq z^2 \leq 1-x^2-y^2$

negativo

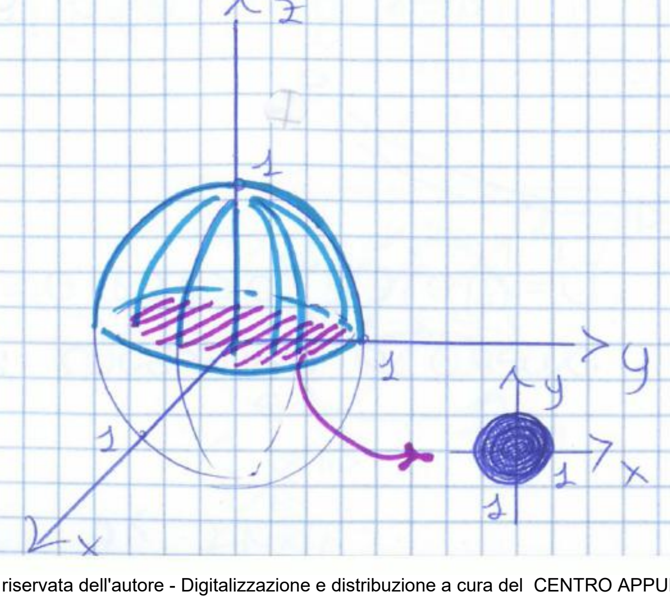
$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

metto assieme

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} & \rightarrow \text{relazione su } x \\ x^2+y^2 \leq 1 & \rightarrow \text{insieme } D \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \in D \ ,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}$$

dove $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1 \right\}$



$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\pi)\left[\frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

☆ FORMULA STRATI // PIANO xy :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1-z^2 \\ 1-z^2 \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \longrightarrow$$

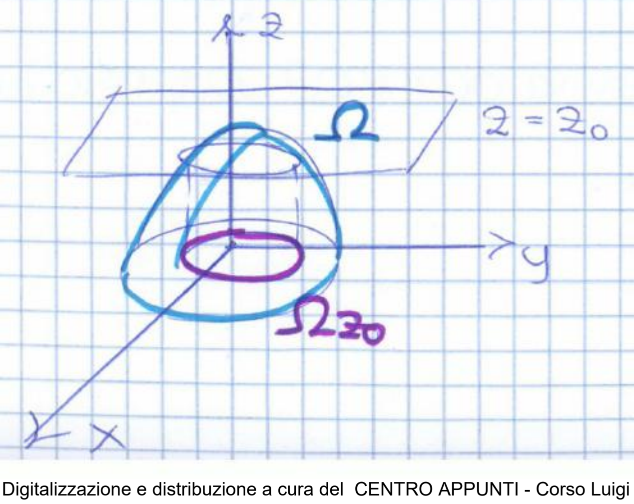
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1-z^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq z \leq 1,\ (x,y) \in \Omega_z\right\}$$

con $\Omega_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1-z^2\right\}$

L'INTEGRALE DIVENTA:

$$\int_\Omega (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left[\int_{\Omega_z} (x^2+y^2)z\,dx\,dy\right] dz$$



18 ottobre 2012

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI TRIPLI

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua e limitata e $\phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che

① ϕ è biiettiva

② ϕ è di classe C^1 su Ω' con

$$\det J_\phi(u,v,w) \neq 0 \qquad \forall (u,v,w) \in \Omega'$$

allora

$$\int_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v,w)) \left| \det J_\phi(u,v,w) \right| du\,dv\,dw$$

$(x,y,z) = \phi(u,v,w)$

$\phi(\Omega') = \Omega$ xk è biiettiva

OSSERVAZIONE

se ϕ non è iniettiva su $A \subseteq \Omega'$ con $m(A)=0$ oppure se $\det J_\phi = 0$ su $A \subseteq \Omega'$ con $m(A)=0$ allora la formula continua a valere!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 278

La matrice Jacobiana:

$$J_\phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante: (rispetto ultima riga)

$$|\det J_\phi| = \Big| \cos\theta \begin{pmatrix} \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta\sin\varphi & +\rho\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} +$$

$$+ (-\rho\sin\theta)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}(-1)$$

$$= \big|\cos\theta\,(\rho^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin^2\varphi)$$

$$(\rho\sin\theta)(\rho\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho\sin^2\theta\sin^2\varphi)\big| =$$

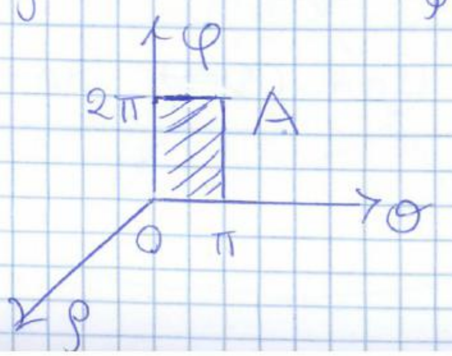
$$= |\rho^2\sin\theta\cos^2\theta + \rho^2\sin\theta\sin^2\theta| = |\rho^2\sin\theta|$$

$= \rho^2\sin\theta$ x qualunque sia l'asse!!

$\downarrow$

in $0 \le \theta \le \pi \to \sin\theta \ge 0$

se $\rho = 0 \to \det J_\phi = 0 \to A = \{0\}\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$



misura su A

$m_3(A) = 0$

la matrice Jacobiana:

$$J_\phi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\phi| = |1(\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta)| = |\rho| = \rho$$

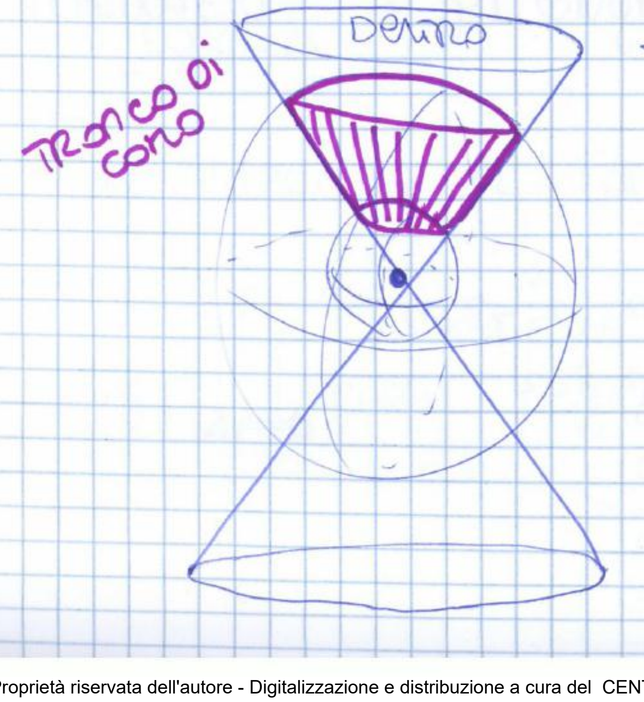
x qualsiasi asse!

se $\rho = 0 \to |\det J_\phi| = 0 \to A = \{0\} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$

e $m(A) = 0$

applicazioni! (esempio)

① $\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+y^2} \, dx dy dz =$ con $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /$
$/ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2, \; x^2+y^2-z^2 \le 0, \; z \ge 0\}$



solo metà sup.

sfera raggio $\sqrt{2}$

sono qui in mezzo

sfera raggio 1

$x^2+y^2 = z^2$ cono

ma $z \ge 0$!!

$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

$z = +\sqrt{x^2+y^2}$

$z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ dentro

$$\begin{cases} 1 \le \rho^2 \le 2 \\ \rho^2 \sin^2\theta \le \rho^2 \cos^2\theta \\ \rho\cos\theta \ge 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \rho \ge 0 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \quad \cancel{-1 \le \rho \le -\sqrt{2}} \\ \sin^2\theta \le \cos^2\theta \\ \cos\theta \ge 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \rho \ge 0 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

TOLGO ^{2} e TOLGO VALORE ASSOLUTO

$$\begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ \sin\theta \le \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\Omega' = \{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 / \ 1 \le \rho \le \sqrt{2}, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \}$$

PARALLELEPIPEDO CON SPIGOLI // AGLI ASSI COORDINATI

USO FORMULA

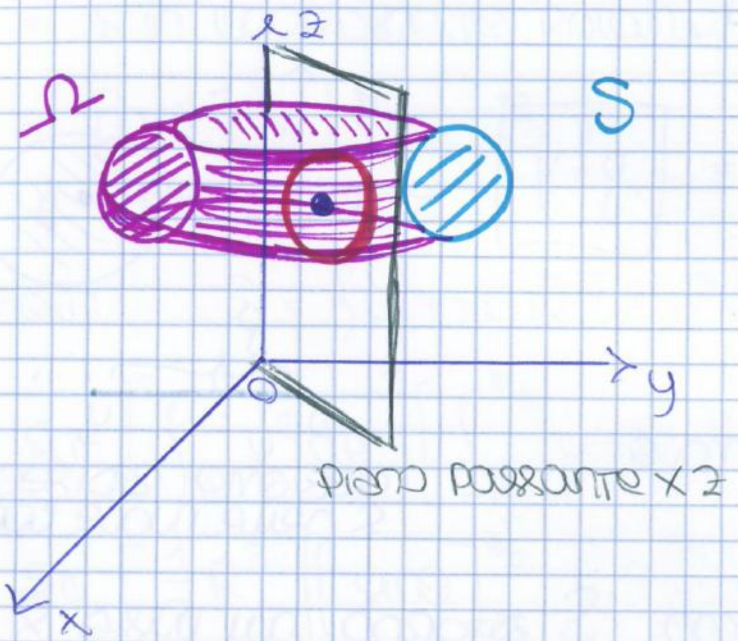
$$\int_{\Omega'} \rho^2 \sin\theta \cos^2\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^{\sqrt{2}} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} \left[\underbrace{\frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}_{\text{MEMO}}\right]_0^{2\pi}$$

22 ottobre 2012

CALCOLO DEL VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

- SIA $S \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$ MISURABILE E SIA Ω IL SOLIDO RICAVATO DALLA ROTAZIONE COMPLETA DI S ATTORNO ALL'ASSE Z.



S = CERCHIO
Ω = CIAMBELLA

$m_3(\Omega) = ?$

OVVERO VOGLIO CALCOLARE IL VOLUME DI Ω

X DEFINIZIONE:

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$$

COORDINATE CILINDRICHE CON ASSE // ASSE Z

$$\phi \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad |\det(J)| = \rho$$

$$= \int_{\Omega'} 1 \cdot \rho \cdot d\theta\, d\rho\, dz$$

$\Omega' = \Omega$ IN COORD. CILINDRICHE

PRENDO UN PUNTO DI Ω $(x,y,z) = (\rho,\theta,z)$

FACENDO LE COORDINATE POLARI NEL PIANO yz

$$\Phi \begin{cases} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{matrix} \qquad |\det J| = \rho$$

$$= 2\pi \int_{S'} \rho\cos\theta \, \rho \, d\theta \, d\rho = 2\pi \int_{S'} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta$$

$S' = S$ IN COORDINATE POLARI

$$S' = \underbrace{[0,R]}_{\rho} \times \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_{\theta}$$

INFATTI $S = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 / y^2 + z^2 \leq R^2, \, y \geq 0\}$

$$= 2\pi \left[\int_0^R \rho^2 d\rho\right]\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta\right] =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}R^3\right]\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi R^3 [1+1] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

NEL LIBRO: VOLUME CIAMBELLA = TORO

$m(R) = 2\pi^2 y_0 R^2$ (y_0 CENTRO CERCHIO)

$$m(R) = \underbrace{2\pi y_0}_{y \text{ DEL BARICENTRO}} \underbrace{\pi R^2}_{\text{AREA } S}$$ PRIMO TEOREMA DI GULDINO

ESEMPIO

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA CON $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, SIA $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ E Ω OTTENUTO DALLA ROTAZIONE COMPLETA DI S ATTORNO ALL'ASSE x.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 278

INTEGRALI CURVILINEI

Pagine 63-65

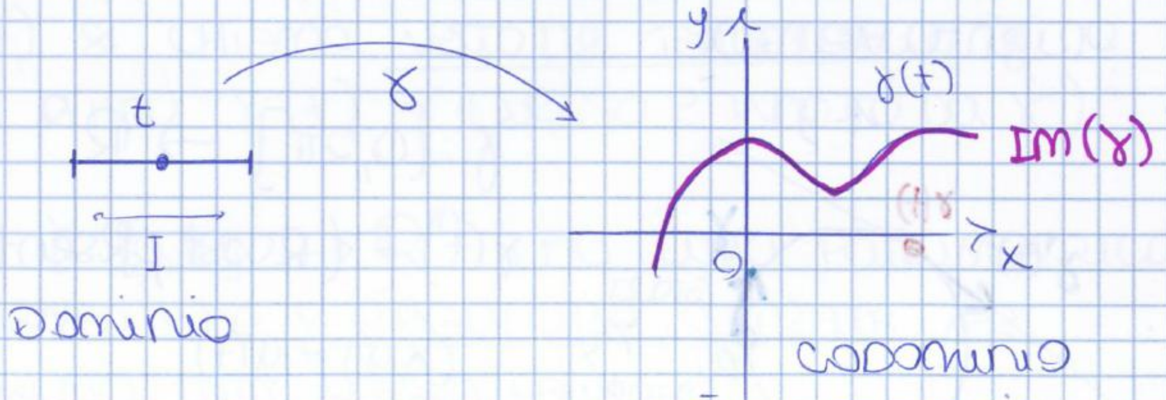
RICHIAMI ALLE CURVE PARAMETRICHE

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualunque.
Si chiama curva parametrica, una funzione continua e definita da:

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Si chiama sostegno della curva γ, l'immagine della funzione γ



(non è il grafico di γ, che vive in $\mathbb{R}^3$)

Diciamo che γ è semplice se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implica $t_1 = t_2$ o che t_1 e t_2 sono gli estremi dell'intervallo I, se I contiene i suoi estremi se il centro non è (0,0)

$\gamma(t) = (x_0 + R\cos t, \; y_0 + R\sin t)$
$\eta(t) = (x_0 + R\cos t, \; y_0 - R\sin t)$

sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica, diciamo che γ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica, diciamo che γ è regolare se γ è derivabile con derivata continua (cioè se è di classe C^1) con $\gamma'(t) \neq 0$, $\underbrace{\forall t \text{ interno a } I}_{\text{vuol dire punto interno}}$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$
$\gamma'(t) \neq (0, 0 \dots 0, 0, 0)$

$\gamma'(t)$ si chiama vettore tangente a γ nel punto $\gamma(t)$ (il verso è indotto da γ)

sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica, diciamo che γ è regolare a tratti se valgono tutti questi fatti:

- γ è derivabile in $[a,b]$ con derivata continua tranne che in un numero finito di punti
- dove γ è derivabile si ha che $\gamma' \neq 0$ in quel punto, tranne che in un numero finito di punti
- dove γ non è derivabile, esistono però le derivate laterali (finite = numero $\mathbb{R}$)

(d) – γ e η INDUCONO LO STESSO ORIENTAMENTO SUL SOSTEGNO
(SE SONO EQUIVALENTI, SONO 2 PARAMETRIZZAZIONI DELLA STESSA LINEA)

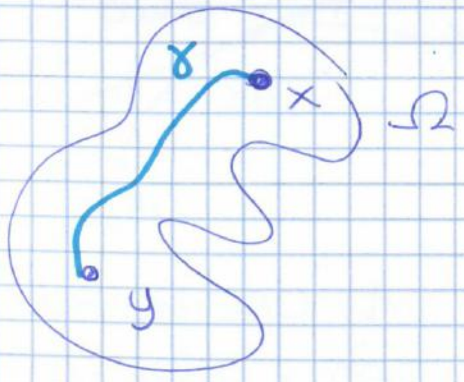
PROPRIETÀ

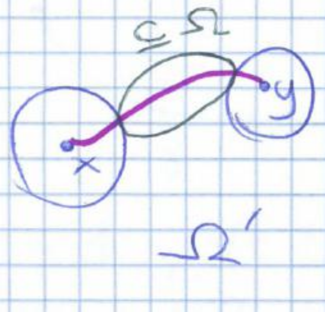
SIANO $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ e $\eta: J \to \mathbb{R}^n$ CURVE PARAMETRICHE e SIA $\alpha: J \to I$ COME (*) TRANNE CHE PER IL SEGNO DI α' e SUPPONIAMO CHE $\alpha'(\tau_0) < 0 \quad , \forall \tau_0 \in J$

ALLORA VALGONO (a) (b) (c) e

(d') γ e η INDUCONO VERSI OPPOSTI DI PERCORRENZA SUL LORO SOSTEGNO

SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO NON VUOTO. DICIAMO CHE Ω È CONNESSO PER ARCHI SE $\forall x, y \in \Omega$ ESISTE UNA CURVA PARAMETRICA
$\gamma: [a,b] \to \Omega \;/\; \gamma(a) = x \;,\; \gamma(b) = y$





Ω CONNESSO x ARCHI
Ω' NON È CONNESSO x ARCHI

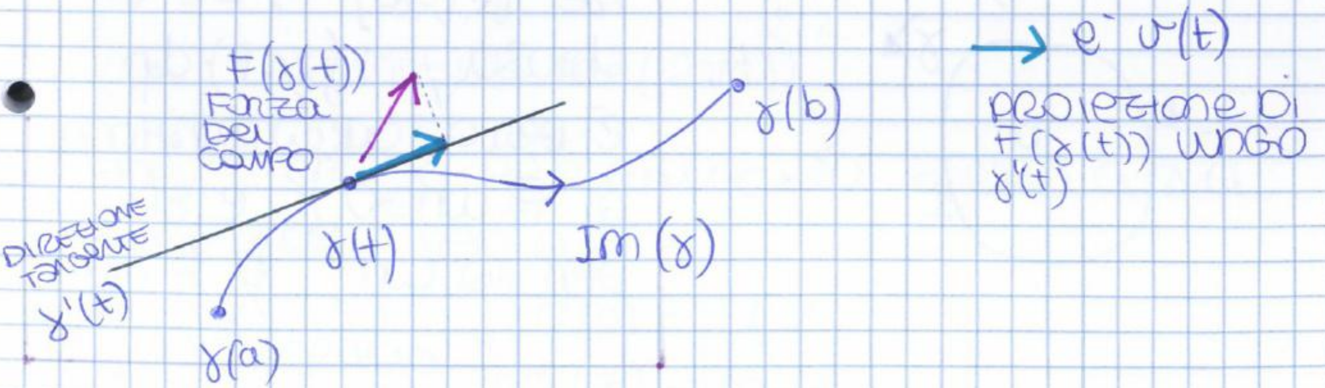
SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO NON VUOTO, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETTORIALE CONTINUO e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ UNA CURVA PARAMETRICA SEMPLICE E REGOLARE, SI CHIAMA INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE (O INTEGRALE DI LINEA) DI F LUNGO γ, IL NUMERO REALE:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

↓ PRODOTTO SCALARE

ALTRO SIMBOLO $\int F \cdot dT$

QUESTO INTEGRALE RAPPRESENTA IL LAVORO COMPIUTO DAL CAMPO DI FORZE F x "TRASFERIRE" LA GRANDEZZA FISICA IN OGGETTO DA $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ LUNGO (IL SOSTEGNO DELLA CURVA) γ.



SUPPONIAMO CHE $\|\gamma'(t)\| = 1$, $\forall t \in [a,b]$

(POSSIBILE x OGNI CURVA, CIOÈ x OGNI CURVA SEMPLICE E REGOLARE POSSO TROVARNE UNA EQUIVALENTE CON $\|\gamma'(t)\| = 1$)

$$v(t) = [F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)]\, \gamma'(t)$$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t) \quad \forall t, \gamma'(t) \neq 0$

γ è regolare e anche semplice

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$\star$ $F(\gamma(t)) = F(\cos t, -\operatorname{sen} t) = (-\operatorname{sen} t, 1)$

$\star$ $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, 1) \cdot (-\operatorname{sen} t, -\cos t) =$

$= \operatorname{sen}^2 t - \cos t$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t - \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos t\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2} [t - \operatorname{sen} t \cos t] - \operatorname{sen} t \right]_0^{2\pi} = \pi \checkmark$$

cerchiamo una curva equivalente a γ

$\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\eta = (\cos(2\pi t), -\operatorname{sen}(2\pi t))$

sia η che γ descrivono la stessa curva nello stesso verso:

verso orario $\begin{cases} \eta(0) = (1,0) \\ \eta(\frac{1}{4}) = (0,-1) \end{cases}$

$\eta(t) = \gamma(2\pi t)$: osservazione!

$\eta(t) = \gamma(2\pi t) = \gamma(\alpha(t)) = (\gamma \circ \alpha)(t) \qquad [\alpha = 2\pi t]$

$\alpha'(t) = 2\pi > 0$

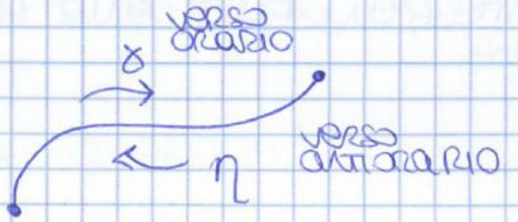
$\alpha([0,1]) = [0, 2\pi]$

$$\int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b - F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$\alpha' < 0 \Rightarrow \alpha \searrow$ DECRESCENTE $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $\alpha(c) = b$

$\alpha[c,d] = [a,b]$ $\qquad$ $\alpha(d) = a$

$$= -\int_\gamma F \cdot dP$$



$\longrightarrow$ STESSO INTEGRALE

$\longrightarrow$ INTEGRALE OPPOSTO

SIANO Ω CONTENUTO IN $\mathbb{R}^n$ UN APERTO NON VUOTO, $F: \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETTORIALE CONTINUO E $\gamma: [a,b] \to \Omega$ UNA CURVA PARAMETRICA SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI. CONFORMEMENTE ALLA DEFINIZIONE DI CURVA REGOLARE A TRATTI, SIANO $t_0 = a < t_1 < t_2 \dots < t_m = b$ (ESISTONO $m+1$ PUNTI) TALI CHE

$\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ È REGOLARE, $\forall k = 1, \dots m$

SI CHIAMA INTEGRALE DI LINEA DI F LUNGO γ IL NUMERO REALE

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \dots + \int_{t_{m-1}}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$\Rightarrow \quad x_A \leq x \leq x_B$

idem x la y...

$y_A \leq y \leq y_B$

invece nello spazio:

se $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ abbiamo

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A))$

serve x gli esercizi!

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso x archi,
- si chiama superficie parametrica, una funzione continua $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$.
- si chiama sostegno di σ l'immagine di σ. È chiaramente una superficie in $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \sigma(A) = Im(\sigma) = \{\sigma(u,v) \;/\; (u,v) \in A\} =$$

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = \sigma(u,v), \; (u,v) \in A\}$$

- Diciamo che σ è semplice se σ è iniettiva.
- Diciamo che σ è regolare se σ è di classe C^1 su A e il rango della matrice jacobiana di σ in ogni $(u,v) \in A$ è massimo, cioè 2.

- Si chiama calotta regolare la restrizione di una superficie parametrica σ semplice e regolare ad un compatto $K \subseteq A$ / (∂K) il bordo di K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti.

- come sapere se σ è regolare

$$\sigma : A \to \mathbb{R}^3 \qquad (A \subseteq \mathbb{R}^2)$$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$$

$$J_\sigma(u,v) = \Big(\underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)}_{\in \mathbb{R}^3} , \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)}_{\in \mathbb{R}^3} \Big)$$

matrice 3×2
3 righe
2 colonne

in particolare:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma'(u_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \eta'(v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0) \end{array}\right\}$$

sono linearmente indipendenti

vettori tangenti a γ ed a η nel punto •

$\Downarrow$

individuano un piano che li contiene: questo piano è tangente a Σ in •

una superficie è regolare se è definito un piano tangente in ogni suo punto

(il  non è regolare!)
(il  non è regolare!) } non devo mai avere spigoli

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso x archi, $(u_0,v_0) \in A$ e $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica regolare. Si chiama vettore $\perp$ normale al piano tangente a $\Sigma = \sigma(A)$ nel punto $\sigma(u_0,v_0)$, (oppure chiamato vettore normale alla superficie Σ in $\sigma(u_0,v_0)$), il vettore:

$$N(u_0,v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)$$

$\downarrow$ prodotto vettoriale

Si chiama versore normale alla superficie Σ in $\sigma(u_0,v_0)$, il versore:

$$n(u_0,v_0) = \frac{N(u_0,v_0)}{\| N(u_0,v_0) \|} \quad \text{con } \|n(u_0,v_0)\| = 1$$

(se $\exists$ in ogni punto $\to$ la superficie è regolare)

PROPRIETÀ

Siano σ, τ e α come nella definizione di superficie equivalenti tranne che x il segno di $\det J_\alpha(x,y)$ e supponiamo che $\det J_\alpha(x,y) < 0$, $\forall (x,y) \in B$.
Allora σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti.

esempi ($\cong$ coord. cilindr.)

Sia $\rho > 0$ fissato.
Sia $\sigma : \mathbb{R} \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da
$\sigma(u,v) = (\rho\cos v, \rho\sin v, u)$
Cerco il sostegno (= l'immagine) e mi chiedo se è regolare.

$$\Sigma = Im(\sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = \sigma(u,v) \text{ con } u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < 2\pi\}$$

$$(x,y,z) = \sigma(u,v) = (\rho\cos v, \rho\sin v, u)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos v \\ y = \rho\sin v \\ z = u \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \mathbb{R} \\ 0 < v < 2\pi \end{matrix}$$ equazioni parametriche di Σ

se faccio $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2 v + \rho^2\sin^2 v = \rho^2$

x cui $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = \rho^2, z (= u) \in \mathbb{R}\}$

cilindro retto con asse di simmetria che è l'asse z

Poiché $v \neq 0$, $v \neq 2\pi \Rightarrow x \neq \rho$, $y \neq 0$ — tolgo sempre gli estremi

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = \rho^2, z \in \mathbb{R}\} \setminus \{(\rho,0,z) / z \in \mathbb{R}\}$$

ESEMPIO: ($\equiv$ COORD. POLARI)

SIA $\rho > 0$ FISSATO.

SIA $\sigma : (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ DEFINITA DA

$$\sigma(u,v) = (\rho \sin u \cos v, \rho \sin u \sin v, \rho \cos u)$$

STESSE DOMANDE

$$\Sigma = Im(\sigma) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = \sigma(u,v), \; 0 < u < \pi, \; 0 < v < 2\pi\}$$

$$(x,y,z) = \sigma(u,v) = (\rho \sin u \cos v, \rho \sin u \sin v, \rho \cos u)$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin u \cos v \\ y = \rho \sin u \sin v \\ z = \rho \cos u \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

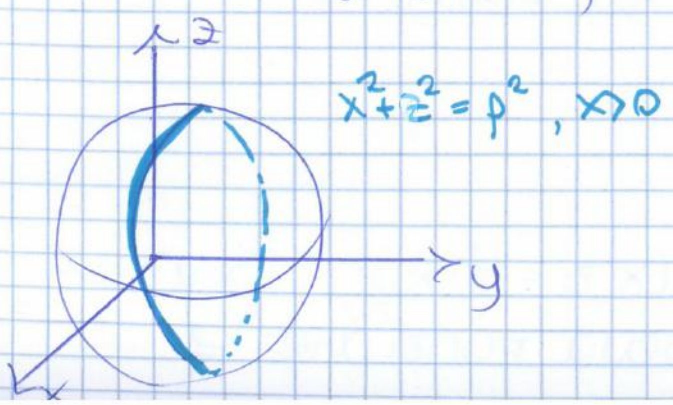
$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$$

$v \neq 0, 2\pi \implies x \neq \rho \sin u, \; y \neq 0, \; z \neq \rho \cos u$

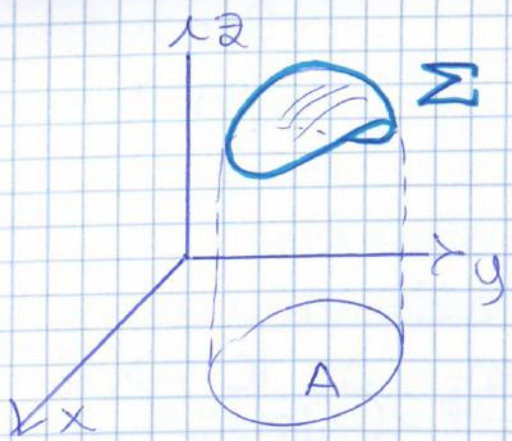
$\implies x^2 + z^2 = \rho^2, \; x > 0$

QUESTI PUNTI SONO ESCLUSI

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\} \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = \rho^2, \; x > 0\}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 109 di 278



e la matrice

$$J_\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Σ è regolare!

$$\begin{array}{c} \\ \overline{N} = \end{array} \begin{array}{ccc} u_x & u_y & u_z \end{array}$$
$$\overline{N} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)$$

OSSERVAZIONE:

siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso x archi, $K \subseteq A$ un compatto / ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti, $g: A \to \mathbb{R}$ di classe C^1

e $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in K,\ z = g(x,y)\}$

quindi Σ è il grafico della funzione g ristretta all'insieme K

cioè $\boxed{\Sigma = G_{g|_K}}$

possiamo dire che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ è

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y))$$

calcolo il vettore normale:

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \qquad \sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,\bar{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,\bar{j} + \bar{k} =$$

$$\boxed{N = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ 1\right)}$$ a memoria!

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}$$

- SOSTITUISCO:

$$\boxed{A_\Sigma = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} \, dx\,dy}$$

IDEM x GLI ALTRI 2 CASI.

ESEMPIO:

$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (PARABOLOIDE)

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 8\}$

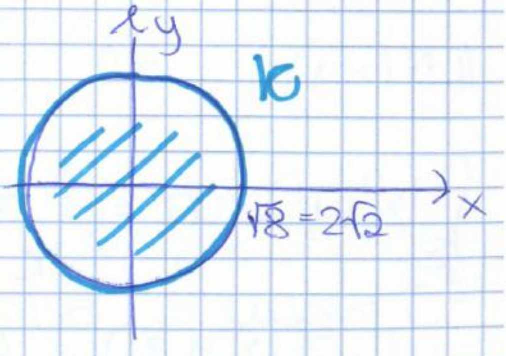
$\Rightarrow \sigma(x,y) = (x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2))$

$$N(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right) =$$
$$= (-x, -y, 1)$$

$\|N(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2+1}$

$$A_\Sigma = \int_\Sigma 1 \, d\sigma = \int_K \|N(x,y)\| \, dx\,dy =$$

$$A_\Sigma = \int_K \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx\,dy$$



USO COORD. POLARI

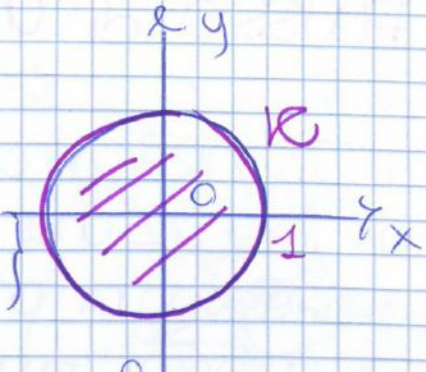
$$A_\Sigma = \int_{K'} \sqrt{1+\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

$K' = [0, 2\sqrt{2}] \times [0, 2\pi]$

$$A_\Sigma = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\rho^2} \, \rho \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{52}{3}\pi$$

USO COORDINATE POLARI:

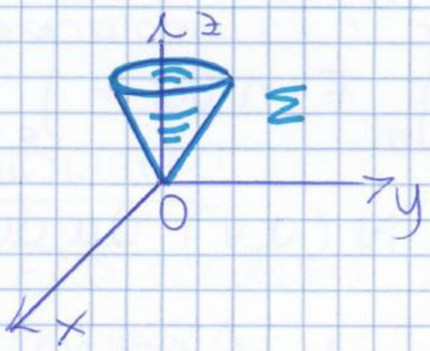
$$= \sqrt{2} \int_{K'} \rho^3 \rho \, d\rho \, d\theta$$



$$K' = \{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \, / \, 0 \le \rho \le 1, \, 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

$$= \sqrt{2} \, 2\pi \int_0^1 \rho^4 \, d\rho = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \pi \sqrt{2}$$

Σ è



non è regolare ma il calcolo si può fare xke l'unico punto O dove non $\exists$ il piano tangente è di misura nulla

TEOREMA (INDIPENDENZA DELL'INTEGRALE DI SUPERFICIE DALLA PARAMETRIZZAZIONE)

Siano $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ e $\tau: K' \to \mathbb{R}^3$ due calotte polari equivalenti,

$\Sigma = \sigma(K) = \tau(K')$ è il loro comune sostegno, e $f: \sigma \to \mathbb{R}$ una funzione continua $\Rightarrow$ allora

$$\int_\sigma f = \int_\tau f$$

se $\tau = \sigma \circ \alpha$ con α biettiva, di classe C^1 e $\det J_\alpha < 0$, allora

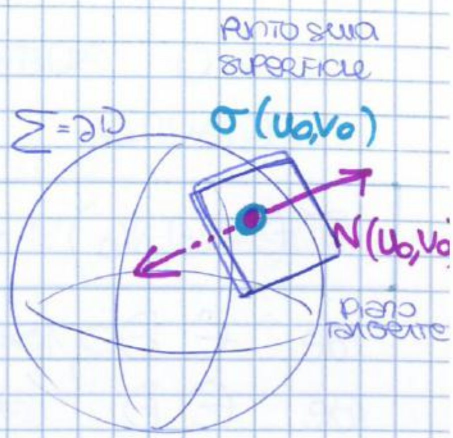
$$\int_\sigma f = \int_\tau f \quad \text{sempre}$$

TRE MODI:

① GRAFICO:

- DISEGNO Σ
- CONSIDERO $\sigma(u_0,v_0)$
- PRENDO $N(u_0,v_0)$, LO DISEGNO SU $\sigma(u_0,v_0)$

(DEVO SAPER DISEGNARE QUALSIASI COSA $\mathbb{R}^3$)



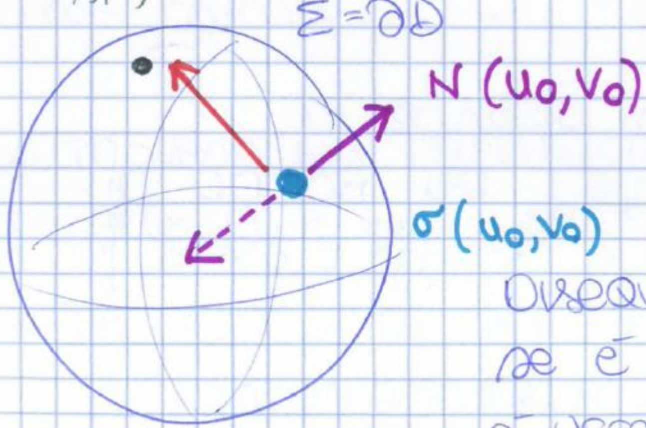
② VETTORIALE:

SE D È CONVESSO (PRESA UNA QUALSIASI COPPIA DI PUNTI IL SEGMENTO CHE LI UNISCE STA NELL'INSIEME) SI CONSIDERA:

$$\forall (x,y,z) \in D, \quad \boxed{[(x,y,z) - \sigma(u_0,v_0)] \cdot N(u_0,v_0)}$$

VETTORE $\mathbb{R}^3$ $\cdot$ VETTORE $\mathbb{R}^3$ = NUMERO REALE

$(x,y,z) \in \Sigma$

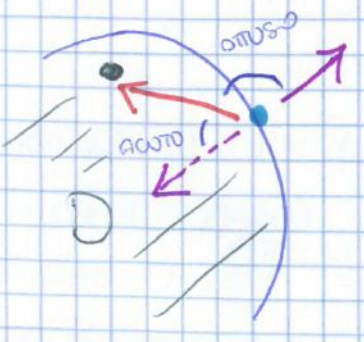


↖ È $(x,y,z) - \sigma(u_0,v_0)$

DISEQUAZIONE IN 3 VARIABILI

SE È $\leq 0 \Rightarrow N(u_0,v_0)$ È USCENTE

SE È $\geq 0 \Rightarrow N(u_0,v_0)$ È ENTRANTE



(SCELGO UN PUNTO CON PIÙ ZERI POSSIBILE)

$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ è una cerchio di misura nulla

$$\int_{\partial D} \bar{F}\cdot\bar{n} = \iint_{\Sigma_1} \bar{F}\cdot\bar{n} + \iint_{\Sigma_2} \bar{F}\cdot\bar{n}$$

voglio il vettore normale uscente (disegno)

• se non riuscivo a fare il disegno

$x^2+y^2<z<1$

① $x^2+y^2=z, \quad x^2+y^2<1 \quad \rightsquigarrow \Sigma_1$

② $z=1 \quad , \quad x^2+y^2(<z)<1 \quad \rightsquigarrow \Sigma_2$

$\Sigma_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=x^2+y^2, \ x^2+y^2<1\}$

$\Sigma_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=1, \ x^2+y^2<1\}$

$\int_{\Sigma_1} \bar{F}\cdot\bar{n}$ calcolo:

devo trovare una parametrizz di Σ_1

$\Sigma_1 = f(x,y) = G_f$ ⇦

$\Sigma_1 = \sigma_1(K_1) \ / \ \sigma_1 : K_1 \to \mathbb{R}^3$ è $\sigma_1(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$

con $K_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2<1\}$

allora $\int_{\Sigma_1} \bar{F}\cdot\bar{n}\, d\Sigma_1 = \int_{K_1} F(\sigma_1(x,y)\cdot N_1(x,y)\,dx\,dy$

dove N_1 è esterno a D!

questi componente è sempre +1 punta sempre verso l'alto

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = (-2x, -2y, 1)$$

devo controllare sia uscente (sennò prendo l'opposto

$$\underbrace{\left[\int_0^1 2\rho^4 d\rho\right]\underbrace{\left[\int_0^{2\pi}(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)\, d\rho\, d\theta\right]}_{0}}_{0} - \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) 2\pi$$

$$= -2\pi \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

OSSERVAZIONE

se $n \in \mathbb{N}$ è dispari $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n t\, dt = 0$

e $\int_0^{2\pi} \cos^n t\, dt = 0$ (DIMOSTRO)

DISEGNO

USO CAMBIAMENTO DI VARIABILE $s = t - \pi$ SUL SENO

IMPO x GLI ESERCIZI

ORA CALCOLO L'INTEGRALE SU Σ_2

$\Sigma_2 = f(x,y) = G_f$

$\sigma_2(K_2) = \Sigma_2$, $\sigma_2 : K_2 \to \mathbb{R}^2$ è $\sigma_2(x,y) = (x, y, 1)$

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot \bar{n} = \int_{K_2} F(\sigma_2(x,y)) \cdot N_2(x,y)\, dx\, dy$$

con N_2 esterno a D.

$$N(x,y) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) = (0, 0, 1)$$

QST VETTORE (SI VEDE ANCHE SENZA DISEGNO) È USCENTE RISPETTO A Σ_2 (DA D) $N_2(x,y) = N(x,y)$

con $\alpha|_{K}: K' \to K$ biettiva e con $\det J_\alpha(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in K'$ / $\tau = \sigma \circ \alpha$,

allora $\displaystyle\int_\sigma \bar{F}\cdot\bar{n} = -\int_\tau \bar{F}\cdot\bar{n}$

(in K e K' non posso fare le derivate parziali ma devo scegliere A, B)

TEOREMI (GREEN, STOKES, GAUSS)

PAGINE 97-112

rotore, divergenza

importante sapere quando applico cosa

sono delle uguaglianze tra integrali di dimensioni diverse:

doppi, flusso, sup: dim 2

curvilinei, linea: dim 1

tripli: dim 3

riguardano sempre campi vettoriali (importante l'orientamento)

TEOREMA di GREEN

siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato non vuoto tale che ∂A é il sostegno di una curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti.

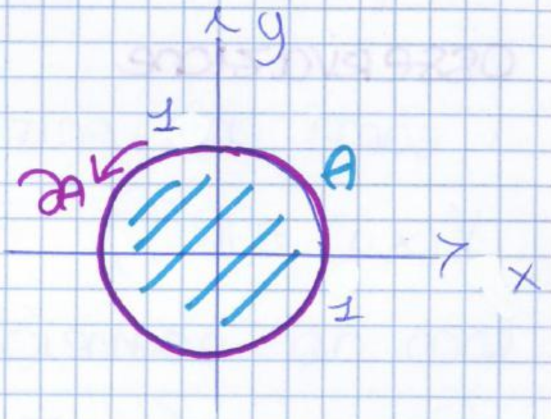
Diciamo che ∂A é orientato positivamente se la curva induce su di esso un verso di percorrenza antiorario, in altri termini se percorrendo idealmente ∂A si vedono i punti di A alla propria allora $\boxed{m(A) = \oint_{\partial A} \bar{F} \cdot d\bar{P}}$ DIMO IMMEDIATA

8 Novembre 2012

ESEMPI DI APPLICAZIONE

① CALCOLO L'INT. DI LINEA DI $F(x,y) = (y^2, x)$ LUNGO IL BORDO DI $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$ ORIENTATO POSITIVAMENTE

$\partial A \sim x^2+y^2 = 1$



MODO [a] USO LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI LINEA (DEVO PARAMETRIZZARE LA CURVA)

MODO [b] USO TEOREMA DI GREEN

$F(x,y) = (y^2, x) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy =$$

$$= \int_A (1 - 2y)\, dx\,dy$$

(DEVO RISOLVERE L'INTEGRALE DOPPIO)

USO LE COOR. POLARI:

$$\int_{A'} (1 - 2\rho \sin\theta)\, \rho \, d\rho\, d\theta$$

RICAVO t IN FUNZIONE DI x O y E SOSTITUISCO
$\rightarrow$ non è POSSIBILE, VIENE UNA FORMULA CON TROPPI NUMERI COMPLESSI

x il TEOREMA DI GREEN (COROLLARIO)

$$m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP = \oint_{\gamma} F \cdot dP =$$

con F che scelgo io! $\quad F(x,y) = (-y, 0)$

$$= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \ !$$

$$F(\gamma(t)) = (t^3 - t, 0)$$

$$\gamma'(t) = (3t^2 - 6t + 2,\ 1 - 3t^2)$$

$$\text{" } \cdot \text{ "} = (t^3 - t)(3t^2 - 6t + 2) =$$

$$= 3t^5 - 6t^4 + 2t^3 - 3t^3 + 6t^2 - 2t =$$

$$= 3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t$$

$$= \int_0^1 (3t^5 - 6t^4 - t^3 + 6t^2 - 2t)\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^6 - \frac{6}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + 2t^3 - t^2 \right]_0^1 =$$

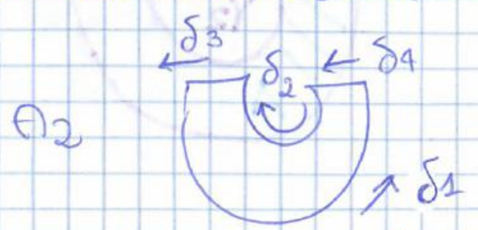
$$= \frac{1}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} + 2 - 1 = \frac{10 - 24 - 5 + 20}{20} = \frac{1}{20} \checkmark$$

OSSERVAZIONE:

Se il $\partial A = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \gamma_n$,
con $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ sostegni a 2 a 2 (non si intersecano mai)
disgiunti di curve parametriche chiuse semplici e regolari a tratti, e il

$$= \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_4} F \cdot dP + \int_{A_2} (\dots)\, dx\, dy$$

anche il discorso su A_2 è uguale



e applico anche qui Green

$$= \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots + \int_{\gamma_4} \dots + \int_{\delta_1} F \cdot dP + \int_{\delta_2} F \cdot dP + \int_{\delta_3} F \cdot dP + \int_{\delta_4} F \cdot dP$$

$\gamma_3 \rightarrow$
$\leftarrow \delta_3$ $\qquad \int_{\gamma_3} = -\int_{\delta_3} \qquad \int_{\gamma_3} + \int_{\delta_3} = 0$

$\gamma_4 \rightarrow$
$\leftarrow \delta_4$ $\qquad \int_{\gamma_4} = -\int_{\delta_4} \qquad \int_{\gamma_4} + \int_{\delta_4} = 0$

$\int_{\gamma_1} + \int_{\delta_1} = \gamma_1$ cerchio sopra

$\int_{\gamma_2} + \int_{\delta_2} = \gamma_2$ cerchio sotto

$$TOT = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

abbiamo dimostrato!

(3) Calcolare l'integrale di linea del campo $F(x,y) = (x^2y^3, y)$ lungo il bordo dell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ orientato positivamente.

TEOREMA di STOKES

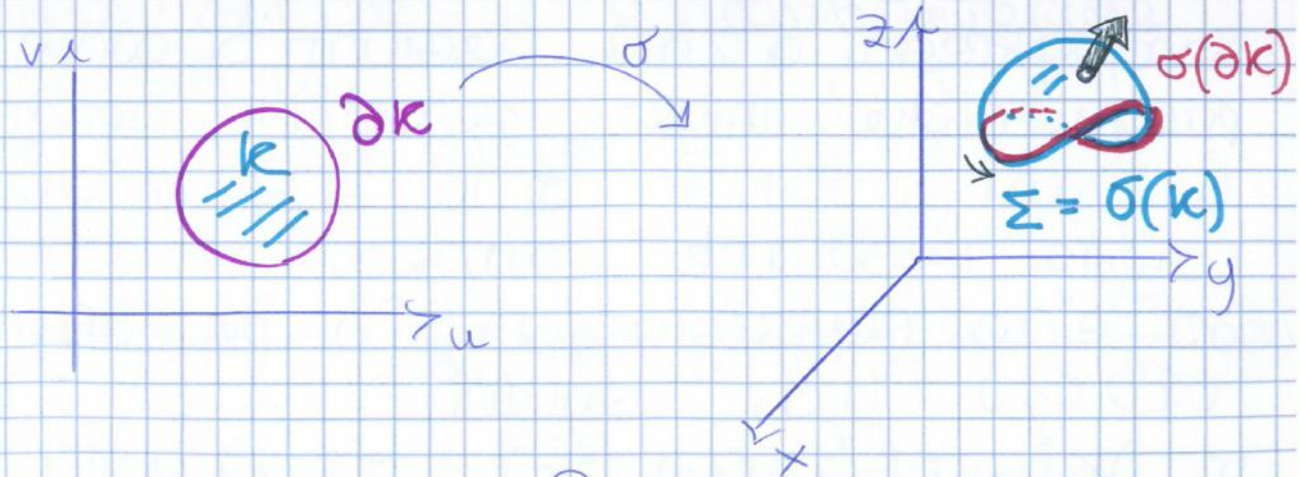
TEOREMA DEL ROTORE

CIRCUITAZIONE = FLUSSO

DOVE LA LINEA È IL BORDO DELLA SUPERFICIE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso x archi, tale che ∂A è il sostegno di una curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti, $K = \bar{A}$ chiusura di A, $K = \bar{A} = A \cup \partial A$, ($K$ è compatto e $\partial K = \partial A$), $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare, $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ e $N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$, $\forall (u,v) \in K$.

Si chiama bordo di σ, $\partial\sigma$ la restrizione di σ a bordo di K ∂K.



Lo denotiamo con $\partial\sigma$. Diciamo che $\partial\sigma$ è orientato positivamente se è orientata in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il vettore N

positivamente nel senso della definizione precedente.

12 Novembre 2012

ENUNCIATO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale, C^1, $F = (f_1, f_2, f_3)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso x archi tale che ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse semplici e regolari a tratti, $K = \bar{A}$ e $\sigma: K \to \Omega$ una calotta regolare con $\partial\sigma$ orientato positivamente. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$\boxed{\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot}\, F \cdot n \, d\sigma},$$

circuitazione linea = flusso rotore superficie

dove $\text{rot}\, F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ è il campo vettoriale definito da

$$\forall (x,y,z) \in \Omega \;/\; \text{rot}\, F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2() & f_3() \end{vmatrix} =$$

$$\text{rot}\, F(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \right)$$

x ricordarsi il rotore: $\underset{\text{no } x}{3\;2}$, $\underset{\text{no } y}{1\;3}$, $\underset{\text{no } z}{2\;1}$

$y - z \to z - x \to x - y$

$$K = \underset{\theta}{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \times \underset{\phi}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$\int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K} \text{rot} F(\sigma(\theta,\phi)) \cdot N(\theta,\phi) \, d\theta \, d\phi$$

$\text{rot} F(\sigma(\theta,\phi)) = (1,0,0)$

$N(\theta,\phi)$ è il vettore $\perp$ a Σ <u>uscente</u> da $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

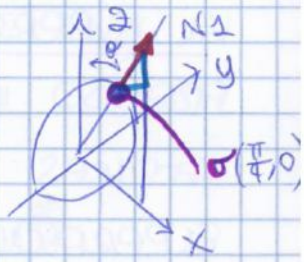
$$N_1(\theta,\phi) = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta,\phi) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta,\phi) =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta \,\text{sen}\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} = (\text{sen}^2\theta \cos\phi, + \text{sen}^2\theta \sin\phi, \text{sen}\theta\cos\theta)$$

$N_1(\theta,\phi) = (\text{sen}^2\theta\cos\phi, \text{sen}^2\theta \sin\phi, \text{sen}\theta\cos\theta)$

metodo grafico

punto $\in K$: $(\theta,\phi) = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ allora



$\sigma\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ disegno qst. oggetto su Σ

$N_1\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}_{\text{positiva}}$ conto a partire da $\sigma\left(\frac{\pi}{4},0\right)$

$\left(\begin{matrix}\text{sen}\theta \\ \cos\theta\end{matrix} \text{ e in } \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ sono sempre} > 0\right)$

il vettore è uscente!

$N(\theta,\phi) = N_1(\theta,\phi)$

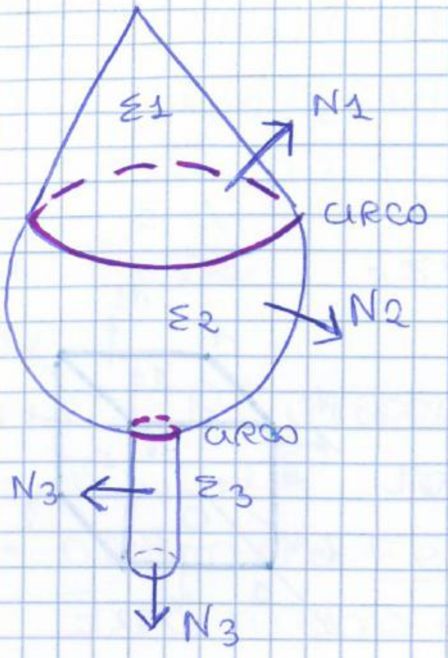
ora faccio il prodotto scalare

"$\cdot$" $= \text{sen}^2\theta\cos\phi + 0 + 0$

quindi

$$\int_K \text{sen}^2\theta \cos\phi \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2\theta \, d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \, d\phi =$$

$$= [\text{sen}\phi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(\theta - \text{sen}\theta\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \checkmark$$



D è TUTTO!

$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 + \Sigma_3$

CONO — SEMI SFERA — CILINDRO (+ BASE)

↓

è una superficie chiusa

ENUNCIATO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non

$F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C_1,

$F = (f_1, f_2, f_3)$ e $D \subseteq \Omega$ un aperto

con bordo / $\partial D \subseteq \Omega$.

allora il flusso uscente di F da ∂D

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}$$

dove $\operatorname{div} F : \Omega \to \mathbb{R}$ /

$\forall (x,y,z) \in \Omega$, $\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,$

(idem x Stokes)

campo classe $C_1 \to \operatorname{div} F$ è una funz. continua e $\int \operatorname{div} = \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE (DIMO x esercizio, conseg. Swartz)

se F è di classe C_2, allora

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x,y,z) = 0 \qquad \forall (x,y,z) \in \Omega$$

15 Novembre 2012

Campi vettoriali conservativi

definizione x orale o quiz

sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. (nelle applicazioni $n=2$ o $n=3$)

PAGINE 113-132

definizione

Siano:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto
- $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale

• diciamo che F e' conservativo se $\exists$ una funzione differenziabile $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$.

• in tal caso f e' detta un potenziale di F su Ω

in altri termini:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

se $F = (f_1, f_2, \dots f_n)$

allora $\nabla f(x) = F$ significa

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = (f_1, \dots, f_n)$$

cioe' le singole componenti devono essere uguali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1 \\ \vdots & \forall x \in \Omega \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) = f_n \end{cases}$$

ESEMPIO:

- campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine (0,0) è

$$F(x,y,z) = -\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

$$F(x,y,z) = \frac{-(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{-z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)$$

un esempio di campo radiale.

OSSERVAZIONE

se $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale radiale e continuo, allora F è conservativo

DIMOSTRAZIONE

dimostriamo che F è conservativo, dimostrando che ammette potenziali.

F è continuo e radiale $F(x) = \varphi(\|x\|)x$ allora φ è continua allora anche $\{t \longmapsto t\varphi(t)\}$ è continua.

x il teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI), qst funzione ammette primitive su un intervallo (a,b).

sia $\phi: (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva, cioè ϕ è derivabile in (a,b) con $\phi'(t) = t\varphi(t)$, $\forall t \in (a,b)$. consideriamo $f: \Omega \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \phi(\|x\|)$, $\forall x \in \Omega$. e dimostriamo che f è un potenziale di F su Ω.

ESEMPIO: CALCOLO DI UN POTENZIALE DI UN CAMPO RADIALE

$$F(x,y,z) = \underbrace{-\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}}_{\varphi(\|(x,y,z)\|)}(x,y,z)$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t^3}$$

$$\phi'(t) = t\,\varphi(t) = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \phi(t) = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \phi(\|(x,y,z)\|) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ESEMPIO:

$$F(x,y) = \left((x^2+y^2)x,\ (x^2+y^2)y\right)$$

F è conservativo?

$$F(x,y) = (x^2+y^2)(x,y)$$

$$F(x,y) = \mathrm{QLCS}(x,y)$$

$$\Downarrow$$

se $x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \|(x,y)\|^2$

$$x^2+y^2 = \varphi(\|(x,y)\|)$$

F è RADIALE e CONTINUO $\rightarrow$ F è CONSERVATIVO.

Sia $\gamma:[a,b]\to\Omega$ semplice e regolare a tratti / $\gamma(a)=x$ e $\gamma(b)=y$, allora $\exists\ t_0=a<t_1<t_2<\dots<t_m=$ tali che γ è di classe C^1 su ciascun intervallo $[t_{k-1}, t_k]$, con $\forall k=1,\dots,n$

con $\gamma'(t)\neq 0$, $\forall t\in[t_{k-1},t_k]$ e negli estremi degli intervalli esistono le derivate laterali.

Sia $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ / $\varphi(t)=(f-g)(\gamma(t))$

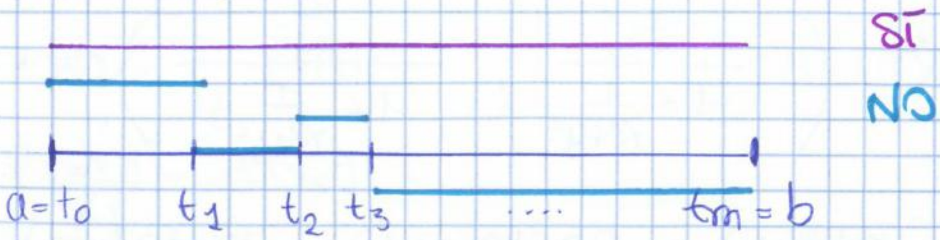
ha senso xk

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \xrightarrow{f-g} \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \gamma(t) \longrightarrow (f-g)(\gamma(t))=\varphi(t)$$

Sicuramente φ è continua su $[a,b]$, φ è anche derivabile in ogni $t\neq t_k$, $\forall k=0,\dots,m$ con $\varphi'(t)=\nabla(f-g)(\varphi(t))\cdot\gamma'(t)$

(riguardo appunti iniziali...)

ma $\nabla(f-g)(x)=0$ quindi $\varphi'(t)=0$
la derivata è tutta nulla e quindi φ è costante in ogni intervallo $[t_{k-1},t_k]$, $\forall k=1,\dots,m$



Può succedere che le costanti siano diverse?
No xk $\varphi(t)$ è continua su $[a,b]$! quindi è costante su tutto $[a,b]$, in particolare $\varphi(a)=\varphi(b)$!

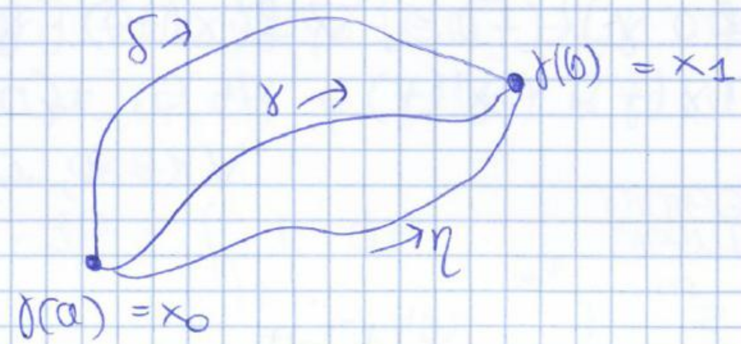
TEOREMA SULL' INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO CONSERVATIVO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti, allora

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dp = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

inoltre se γ è chiusa

$$\boxed{\oint_\gamma F \cdot dp = 0}$$



$$\int_\gamma F \cdot dp = \int_\delta F \cdot dp = \int_\eta F \cdot dp = \cancel{f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))}$$

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

L'integrale non dipende dal percorso (sostegno) ma solo dai punti iniziale e finale!!

(x esame!!!)

$$\int_\gamma F \cdot dP = \varphi(t_m) - \varphi(t_0) = \varphi(b) - \varphi(a) =$$
$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad \blacksquare$$

in particolare, se γ è chiusa e quindi $\gamma(a) = \gamma(b)$:

$$\oint_\gamma F \cdot dP = 0 \quad \blacksquare$$

TEOREMA DI EQUIVALENZA

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso x archi e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo, allora sono fatti equivalenti:

a) F è conservativo,

b) per ogni coppia di curve parametriche semplici e regolari a tratti $\gamma_1: [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2: [c,d] \to \Omega$ tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ si ha che

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

L'integrale non dipende dal percorso!

c) per ogni curva parametrica chiusa semplice e regolare a tratti $\gamma: [a,b] \to \Omega$ si ha che

$$\oint_\gamma F \cdot dP = 0$$

prima $(a \to b, a \to c)$

ora anche $(a \Leftrightarrow b, a \Leftrightarrow c, b \Leftrightarrow c)$

serve x sapere and il campo è conservativo

$$0 = \oint_{\eta} F \cdot dP = \int_a^b F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt + \int_b^{b+d-c} F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt =$$

$$0 = \int_a^b F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1(t)\, dt + \int_b^{b+d-c} F(\gamma_2(b+d-t)) \cdot (-\gamma_2'(b+d$$

$$0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \text{CAMB VARIABILE } \tau = b+d-t \,!! \quad d\tau = -dt \,!!$$

$$0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_d^c F(\gamma_2(\tau)) \cdot (+\gamma_2'(\tau))\, d\tau =$$

$$0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_c^d F(\gamma_2(\tau)) \cdot (\gamma_2'(\tau))\, d\tau =$$

$$0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

QUINDI

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP$$ COSÌ HO PROVATO b)

- $b \to a$

PER DIMOSTRARE CHE F È CONSERVATIVO, PROVIAMO (x DEFINIZIONE) CHE $\exists$ UN POTENZIALE f DI F SU Ω, CIOÈ $\exists$ UNA FUNZIONE $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE TALE CHE $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$, CIOÈ SE $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\forall j = 1, \dots, n$ e $\forall x \in \Omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x) \to \text{COMPONENTE DI F}$$

SIA $x_0 \in \Omega$ FISSATO e SIA $x \in \Omega$ QUALUNQUE

In modo analogo, dimostro il limite $\lim_{h \to 0^-}$ e trovo lo stesso risultato.

uso $-r < h < 0$

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ (x_1 + b - t, x_2, \dots x_n) & \text{se } b < t < b - h \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0^-} = \lim_{h \to 0^+}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} = f_1(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x)$$

analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x), \quad \forall j = 1, \dots n, \forall x \in \Omega$$

Tutte le f_j sono continue, e i $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sono continue quindi

f è diff in Ω con

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = (f_1(x) \dots f_n(x)) = F(x)$$

f è un potenziale di F su Ω e allora F è conservativo. ■

Utile solo dal punto di vista teorico o x dimostrare che il campo non è conservativo negli esercizi

- se $\exists\, i,j = 1,\dots,n$ tali che $\boxed{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \neq \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)}$ allora sicuramente F **non** è conservativo!

- se $n=3$,

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i,j = 1,2,3 \iff \\ \text{rot } F = \bar{0}\end{array}}$$

infatti,

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

allora per $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}, \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$

e quindi $\text{rot} F = (0,0,0)$

in tal caso si dice che F è irrotazionale.

Cioè in breve:

F conservativo $\cancel{\Leftarrow}\!\Rightarrow$ rot $F = 0$ (NO SUF) (NEC)

rot $F \neq 0 \Rightarrow$ F non è conservativo

Definizione (solo x $n=2$, e 3 anche se vale x $\forall n$)

sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso x archi, diciamo che Ω è semplicemente connesso (accresce) se $\forall$ curva parametrica chiusa e semplice γ avente sostegno in Ω, si ha che la parte di piano racchiusa dal sostegno di γ è contenuta in Ω.

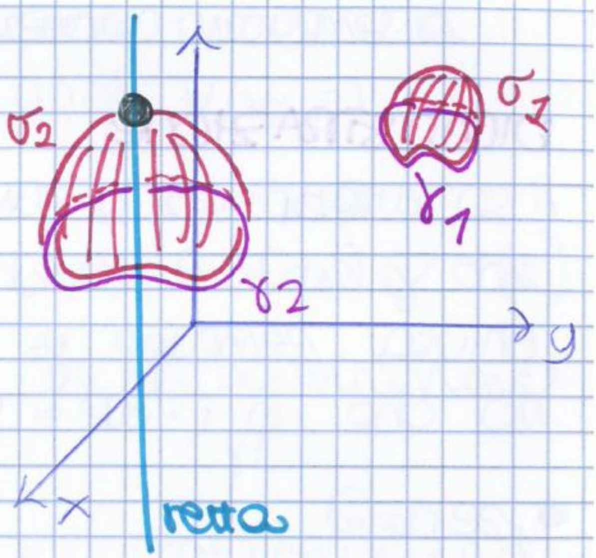
$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ sfera

- Ω é semplicemente connesso!

$\sigma \subseteq \Omega$

$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ retta

- σ_2 interseca la retta x forza
Ω non é semplicemente connesso xe



- $\begin{cases} \in Im(\sigma) \\ \notin \Omega \end{cases} \Rightarrow$

$im(\sigma) \not\subseteq \Omega$

- Ω = corona sferica (intercapedine tra x sfere) é semplicemente connesso

Ω = toro  non é semplicemente connesso

Teorema (condizione sufficiente xi campi di classe C^1)

- siano Ω contenuto in $\mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, \dots f_n)$

allora:

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP \overset{\text{GREEN}}{=} - \int_A \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy = 0$$

per il teorema di equivalenza, F è conservativo

- se $n = 3$

Ω sempl. connesso in $\mathbb{R}^3$ allora $\exists\ \sigma : K \to \Omega$ calotta regolare tale che $\partial\Omega = Im(\gamma)$

x la condizione necessaria,
$rot\, F(x,y,z) = (0,0,0)\ \forall (x,y,z) \in \Omega$

$\sigma(K) = Im(\sigma) \subseteq \Omega$ allora
$rot\, F(x,y,z) = (0,0,0)\ \forall (x,y,z) \in \sigma(K)$

se γ induce su $\partial\sigma$ un orientamento positivo

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial\sigma} F \cdot dP = \text{STOKES} = \int_\sigma rot\, F(x,y,z) \cdot n\, d\sigma = 0$$

se γ (induce su $\partial\sigma$ un orientamento negativo, cioè) non induce un orientamento positivo, allora..

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP \underset{\substack{\text{Stokes e proprietà}\\ \text{dell'integrale di linea}}}{=} - \int_\sigma rot(x,y,z) \cdot n\, d\sigma = 0$$

allora x il teorema di equivalenza, F è conservativo.

osservazione

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω semplicemente connesso e C.N. $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)_{\forall i \neq j}$ $\Rightarrow$ F è conservativo

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t)\,dt$$

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi \quad \neq 0 !!!$$

QUINDI X IL TEOREMA DI EQUIVALENZA F NON È CONSERVATIVO.

$\lim_n a_n = +\infty \; (-\infty) \iff$

$\forall b \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ si ha $a_n > b \; (a_n < b)$

- Diciamo che (a_n) è convergente se $\lim_n a_n \in \mathbb{R}$ (esiste ed è un numero $\mathbb{R}$)
- Diciamo che (a_n) è positivamente (negativamente) divergente se $\lim_n a_n = +\infty \; (-\infty)$
- Diciamo che (a_n) è indeterminata (oscillante) se $\lim_n a_n \nexists$

esempio: (memo)

$a_n = \frac{2n}{n+1}$: convergente xké $\lim_n (a_n) = 2$

$b_n = n!$: pos. divergente xké $\lim_n (b_n) = \infty$

$c_n = -n^3$: neg. divergente xké $\lim_n (c_n) = -\infty$

$d_n = (-1)^n$: indeterminata xké $\lim_n (d_n) = \nexists$

→ come $sen(n)$, $cos(n)$, $tg(n)$

VALGONO:
1. teorema di unicità del limite
2. teorema permanenza del segno e sue conseg.
3. teorema di limitatezza locale
4. ALGEBRA DEI LIMITI (mai scrivere: $\nexists +\infty - +\infty$)

GRAZIE A 5) 6) 7) 8) 9) → SI SCRIVE LA SCALA DEGLI INFINITI

$$\boxed{\log^p n < n^k < a^n < n! < n^n \qquad k>0 \quad a>1}$$

RICORDO

$a_n = o(b_n)$, $n \to \infty \iff \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$

EQUIVALENTE

$a_n \sim b_n$, $n \to \infty \iff \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$

5) $\log^p n = o(n^k)$, $n \to +\infty$, $\forall p \in \mathbb{R}$, $\forall k > 0$

6) $n^k = o(a^n)$, $n \to +\infty$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$

7) $n^k = o\left(\frac{1}{a^n}\right)$, $n \to \infty$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall\, 0 < a < 1$

8) $a^n = o(n!)$, $n \to \infty$, $\forall a > 0$

9) $n! = o(n^n)$, $n \to \infty$

FORMULA DI STIRLING

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad n \to +\infty}$$

DEFINIZIONE

SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE. DICIAMO CHE UNA SUCCESSIONE (b_n) È UNA SOTTOSUCCESSIONE DI (a_n) (ESTRATTA) SE $\exists\ \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ STRETTAMENTE CRESCENTE TALE CHE $b_n = a_{\varphi(n)}$.
SI DENOTA CON a_{n_k}

$h_n = (-1)^n$ è indeterminata.
si dimostra utilizzando il teorema (↑)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_k (-1)^{2k} = 1 \\ \lim_p (-1)^{2p-1} = -1 \end{array}\right\}$$ 2 sottosuccessioni con 2 limiti diversi, quindi h_n è indet.

Teorema del criterio del rapporto x le successioni

sia $a_n \geq 0$, $\forall n$. supponiamo che esista

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty] \text{ cioè}$$

chiuso

$$l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

allora si ha che:

① se $l < 1$, $\Rightarrow \lim_n a_n = 0$

② se $l > 1$ (anche $l = +\infty$) $\Rightarrow \lim_n a_n = +\infty$

x non calcolare il lim di a_n, calcolo il limite di a_{n+1}/a_n, che magari è + facile

③ se $l = 1 \Rightarrow$ non si può concludere nulla sul limite di a_n

Teorema del criterio della radice x le successioni

sia $a_n \geq 0$, $\forall n$. supponiamo che esista

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

abbiamo ①, ②, ③ come sopra (↑)

in generale $\forall n \geq 1$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

S_n è detta somma parziale n-esima della serie di a_n.

Diciamo che la serie di a_n:

- è convergente, se $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$
  S è detta somma della serie e si pone $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$

- è positivamente divergente (negativamente) se $\lim_n S_n = +\infty \; (-\infty)$

- è indeterminata, se non esiste $\nexists \lim_n S_n$

- converge assolutamente se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

RIASSUNTINO

x studiare il carattere di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
prendiamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

calcolo $\lim_{n \to +\infty} S_n$
- $S \in \mathbb{R}$, $\sum a_n$ converge
- $\pm\infty$, $\sum a_n$ diverge pos/neg
- $\nexists$, $\sum a_n$ indeterminata

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \text{DIVERGE POSITIV.}$$

se $a \neq 1 \Rightarrow S_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} = \dfrac{1}{1-a} - \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$

$$\lim_n S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{se } |a| < 1, \ -1 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \quad \text{ma x prima* } a \geq 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

29 novembre 2012

② SERIE ARMONICA
(GENERALIZZATA SE $p \neq 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{CONVERGE} & \text{se } p > 1 \\ \text{DIVERGE POS.} & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

③ SERIE TELESCOPICHE
SONO DELLA FORMA

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + a_{n+1} - \cancel{a_n} =$$

$$= a_{n+1} - a_0 \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (a_{n+1} - a_0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 173 di 278

CRITERI DI CONVERGENZA

PAGINE 136 - 156

☆ PER TUTTE LE SERIE

PROPRIETÀ DELLE SERIE (NO DIMO)

Il carattere di una serie non cambia se si aggiunge, si elimina o si modifica un numero finito di termini della serie.
(solo la somma della serie può cambiare)

OSSERVAZIONE

Se la serie di a_n converge e modifichiamo o aggiungiamo o modifichiamo un numero finito di termini, allora la somma della serie risultante potrebbe cambiare

ESEMPIO:

* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$, suppongo $p \geq 1$

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_{p-1}) =$$

$$= S - (a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{p-1})$$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ serie geometrica con ragione $a = 1/2$ = converge

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

TEOREMA DELLA CONDIZIONE NECESSARIA

sia (a_n) una successione reale.

se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_n a_n = 0}$

DIMOSTRAZIONE:

$\sum a_n$ converge,

sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \Rightarrow \lim_n S_n \exists = \mathbb{R}$ numero reale $= S$

(S_{n-1}) è una sottosuccessione di S_n, e x le sue proprietà: $\lim_n S_{n-1} = S = \lim_n S_n$

in più si ha che:

$S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim_n a_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} =$

$= S - S = 0$ ■

OSSERVAZIONE

$\sum a_n$ convergente $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\lim_n a_n = 0$

$\lim_n a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ non è convergente

cioè è ∞ è $-\infty$, non esiste, è 10 ...

cioè diverge oppure è indeterminata

Esempio:

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \rightarrow a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\lim_n a_n = \lim_n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_n \log(1) = 0$

quindi vale la condizione necessaria, xò la serie non converge! infatti:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \left[\log(k+1) - \log k\right]$ serie telescopica $=$ ne rimangono 2 o meno

OSSERVAZIONE

se $a_n \geq 0$ e $\lim_n a_n \neq 0$ (cioè a_n non verifica la condizione necessaria) allora $\sum a_n$ non converge, cioè diverge positivamente.

■ TEOREMA DEL CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano (a_n) e (b_n) 2 successioni / $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n, $\forall n$.

allora si ha che:

① se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge e $\sum a_n \leq \sum b_n$;

② se la serie $\sum a_n$ diverge (pos) $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge (pos). (no dim)

Ci sono dei casi scoperti:

③ $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ diverge $\rightarrow \sum a_n$?

④ $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\sum a_n$ converge $\rightarrow \sum b_n$?

ESEMPIO! (dimostrazione)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serie armonica generalizzata $\quad a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$

cerco $b_n \geq a_n \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ converge $\quad b_n = \frac{1}{n^2+n}$

osserviamo: $n^2 \geq n^2 - n \quad , \forall n \geq 1$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n} \quad , \forall n \geq 2$

$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n}$ cioè $0 \leq a_n \leq b_n$

Quindi f è decrescente in $[0,+\infty)$

$\Rightarrow \forall x \geq 0, \quad f(x) \leq f(0) = 0$

$\Rightarrow \forall x \geq 0, \quad \log(1+x) - x \leq 0$

$\log(1+x) \leq x$

Preso $x = \frac{1}{n} \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$!

osservo che

$0 \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$

$(0 \leq a_n \leq b_n \checkmark)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge

allora x il criterio del confronto

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema del criterio del confronto asintotico

siano (a_n) e (b_n) 2 successioni tali che

$a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0, \ \forall n$.

supponiamo che esista

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in [0,+\infty)$

allora si ha che:

1. se $l > 0$, allora $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ converge
2. se $l = 0$ e $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
3. se $l = 0$ e $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

a_n tende a zero con
ordine di infinitesimo maggiore
quindi a_n è + piccolo di b_n

(NO DMO)

NO si applica con $\sin^2 n$ o $\cos^2 n$

$\frac{1}{n^2-n+1} \sim \frac{1}{n^2} \quad n \to \infty$ ✓

$\Uparrow$ implica

$n^2-n+1 \sim n^2, \; n \to \infty$

allora le 2 serie hanno lo stesso comportamento x il criterio del confronto asintotico e quindi visto che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2-n+1}$ converge

__esempio:__

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+3}$, $\frac{1}{5n+3} > 0$ e vale la cond. nec.

$5n+3 \geq 5n \quad , \forall n$

$0 \leq \frac{1}{5n+3} \leq \frac{1}{5n} \quad , \forall n$

$\sum \frac{1}{5n}$, ma $\sum \frac{1}{n}$ diverge quindi x l'algebra delle serie $\sum \frac{1}{5n}$ diverge!

ora non posso applicare il crit. del confr.

$5n+3 \sim 5n, \; n \to \infty$

$\frac{1}{5n+3} \sim \frac{1}{5n}, \; n \to \infty$ ✓

$\sum \frac{1}{5n}$ diverge e x il criterio del confronto asintotico, anche $\sum \frac{1}{5n+3}$ diverge.

■ TEOREMA DEL CRITERIO DELLA RADICE

sia (a_n) una successione / $a_n \geq 0$, $\forall n$.
supponiamo esista

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$$

allora si ha che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$ SFRUTTO UNA PROPRIETÀ DEL FATTORIALE

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

x il criterio del rapporto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

OSSERVAZIONE

se $a_n \geq 0$, $\forall n \Longrightarrow$ allora $\lim_n \frac{a_{n+1}}{n} = l \Longrightarrow$ implica $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$

ma se $l = 1$, il criterio del rapporto non funziona e allo stesso modo il criterio della radice!

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{n} = l \Longrightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} - l$$

$$1 \Longrightarrow 1$$

$$\nexists 1 \Longleftarrow 1$$

TEOREMA DEL CRITERIO DI MCLAURIN

sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e decrescente e sia $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Longrightarrow$ allora

$\sum a_n$ converge se e solo se $\Longleftrightarrow$ l'integrale improprio $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ DIVERGE se $p \leq 0$.

OSSERVAZIONE

se $a_n \leq 0 \Rightarrow \sum a_n$?

$\sum a_n$ a termini negativi, noi lavoriamo su $\sum(-a_n)$ che è ≥ 0, che o converge o diverge pos.

se $\sum(-a_n)$ $\begin{cases} \text{converge a } S \geq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge a } -S \\ \text{div. pos.} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge neg.} \end{cases}$

(xk $\sum a_n = -\sum(-a_n) = \sum[-(-a_n)]$)

☆ PER LE SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

■ TEOREMA DEL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia (a_n) una successione reale, se $\sum a_n$ converge assolutamente (cioè $\sum|a_n|$ converge) allora $\sum a_n$ converge, e in tal caso si ha che:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \qquad \text{(NO DIM)}$$

OSSERVAZIONE

$\sum|a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$\not\Leftarrow$

$\sum|a_n|$ diverge / non converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ NSPCN

ESEMPIO

Serie armonica a termini di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1^n) \left(\frac{1}{n}\right) \qquad b_n \geq 0$$

Converge assolutamente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1^n) \frac{1}{n} \right| = \text{converge?}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1^n) \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ serie armonica} \rightarrow \text{diverge}$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ non converge assolutamente

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{n} \geq 0 \\ \lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0 \\ (b_n) \text{ decrescente? cioè } b_{n+1} \leq b_n, \forall n \\ b_n = \frac{1}{n} \geq b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \text{ sì } (b_n) \text{ è decrescente!} \end{cases}$$

Soddisfatte le ipotesi di Leibniz

Quindi x il criterio di Leibniz,

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge.

In particolare $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\log 2$.

Esempio di serie che converge, ma non converge assolutamente

X tutti i criteri, se non sono vere le ipotesi, non si può concludere nulla!

$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$

applicato a una somma ∞

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots)(b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots) =$$
$$= c_0 + c_1 + \dots + c_n + \dots$$

con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

TEOREMA DI MERTENS

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 2 serie convergenti rispettivamente ad A e B e supponiamo che almeno una delle 2 converga assolutamente.

allora la serie prodotto di Cauchy delle serie di a_n e di b_n converge a AB, cioè

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = AB = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)}$$

ESEMPIO: (in negativo)

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$$ serie a termini positivi

confronto asintotico

$$\frac{1}{(n+1)^{1/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{per } n \to \infty \quad (\text{1 è trasc. rispetto a } n)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ serie armonica generalizz. $\to$ DIVERGE

x il criterio del confronto asintotico

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$ diverge $\to$ $\sum a_n = \sum b_n$ non convergono assolutam.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to \geq 0$$

SERIE COMPLESSE

PAGINE 160 - 162

DEFINIZIONE

SIA (z_n) UNA SUCCESSIONE IN $\mathbb{C}$. SI CHIAMA SERIE DI z_n LA SCRITTURA FORMALE

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \left(o \sum z_n\right)$$

PONIAMO $S_0 = z_0$

e $\forall n \geq 1$ $S_n = z_0 + \dots + z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$

e S_n è DETTA SOMMA PARZIALE N-ESIMA DELLA SERIE DI z_n. e SI HA che $\forall n \geq 1$

$$S_n = S_{n-1} + z_n$$

DICIAMO che $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$

- CONVERGE SE $\exists$ IN $\mathbb{C}$ $\lim_n S_n = S$ e IN TAL CASO S è DETTA SOMMA DELLA SERIE e PONIAMO $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$
- NON CONVERGE SE $\nexists \lim_n S_n$ IN $\mathbb{C}$
- CONVERGE ASSOLUTAMENTE, SE $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n\|$ CONVERGE $\xrightarrow{}$ MODULO

RICORDIAMO che SE $z_n \in \mathbb{C}$ POSSIAMO SCRIVERLO $z_n = \mathrm{Re}(z_n) + i\,\mathrm{Im}(z_n)$, DOVE $\mathrm{Re}(z_n)$ e $\mathrm{Im}(z_n) \in \mathbb{R}$ e "i" è $i^2 = -1$

INOLTRE

$|\mathrm{Re}(z_n)| \leq |z_n|$ → MODULO

$|\mathrm{Im}(z_n)| \leq |z_n|$ → VALORE ASSOLUTO

$|z_n| \leq |\mathrm{Re}(z_n)| + |\mathrm{Im}(z_n)|$

f è il limite puntuale di (f_n) in Ω.

Allo stesso modo

$\star$ $$\boxed{\lim_n f_n = f \iff \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in \Omega}$$

DEFINIZIONE

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che (f_n)

- converge uniformemente a f in Ω se

$\heartsuit$ $$\boxed{\begin{gathered}\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\| f_n - f \|_\infty}_{\text{norma}} = 0 \quad \text{dove} \\ \| f_n - f \|_\infty = \underbrace{\sup_{x \in \Omega}}_{\text{estremo superiore}} | f_n(x) - f(x) |\end{gathered}}$$

$\to$ oggetto che non dipende da x ma da n: è una successione numerica.

OSSERVAZIONE

$\forall f: \Omega \to \mathbb{R}$ limitata, $\|f\|_\infty$, che è la norma di f infinito o norma del sup di f,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup \{ |f(x)| \ / \ x \in \Omega \}$$

se $\Omega \in \mathbb{R}^m$ è un compatto non vuoto e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ allora — x il teorema di Weierstrass

$$\|f\|_\infty = \underbrace{\sup_{x \in \Omega} |f(x)|}_{\text{continua}} = \underbrace{\max_{x \in \Omega} |f(x)|}_{\text{è il massimo!}}$$

$\star \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\underline{\underline{x}}, \varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0$ si ha che $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ (solo x locale)

$\heartsuit \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\underline{\underline{\varepsilon}}) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0$ si ha che $\underline{\forall x \in \Omega}$ $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ (x tutti gli x)

ESEMPIO:

$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in [0,1]$

DETERMINIAMO IL LIMITE PUNTUALE E VEDIAMO SE C'È CONVERGENZA UNIFORME

$\forall x \in [0,1], \quad \lim_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$

$$\lim_{n\to\infty} x^n \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x=1 \\ 0 & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

$1^\infty = 1$

$0^\infty = 0$

$$\lim_{n\to\infty} x^n \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x=1 \end{cases} = f(x)$$

(f_n) CONVERGE PUNTUALMENTE A f SU $[0,1]$

(f_n) CONVERGE UNIF. A f SU $[0,1]$? CIOÈ

? $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$ DOVE $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{\forall x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - f(x)| = \begin{cases} x^n & 0 \le x < 1 \\ 1^n - 1 = 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{\forall x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{\forall x \in [0,1)} x^n = 1$$

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow f_n$ NON CONVERGE UNIFORMEMENTE A f SU $[0,1]$

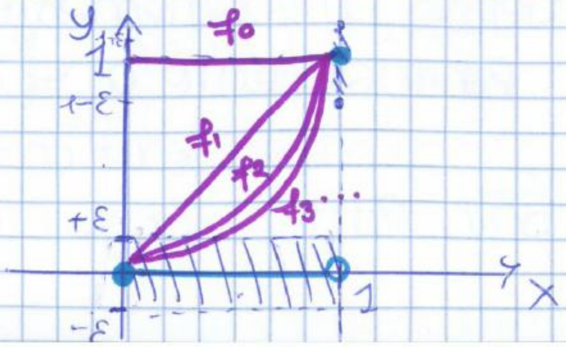


GRAFICO FUNZIONE f

QUALUNQUE CURVA f_n ESSENDO CONTINUA NON STA IN //// → f_n NON CONVERGE UNIF. A f

DIMOSTRAZIONE:

$\forall x \in \Omega : 0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

se (f_n) converge unif. a f in $\Omega \rightarrow$

$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ per $n \to \infty$

per il 2° teorema del confronto dei limiti (teorema dei 2 carabinieri)

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$$\downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

$\Rightarrow \lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0, \ \forall x \in \Omega \Rightarrow$

(f_n) conv. puntua. a f in Ω. ■

PROPRIETÀ

siano $\Omega \in \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) un successione di funzioni continue e limitate e convergente uniform. alla funzione f su Ω allora anche f è continua.

(NO DIMO.)

è importante x stabilire che la convergenza non è uniforme.

prendo l'ex. di prima (☛)

$f_n(x) = x^n, \ \forall x \in [0,1]$

$f_n \to f, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

f_n sono funz. continue, f è discontinua $\longrightarrow$ f_n non converge uniform. a f

Serie di funzioni

PAGINE

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Definizione

Sia (f_n) una successione di funzioni da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto, in $\mathbb{R}$. Si chiama serie di f_n la scrittura formale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Poniamo, $\forall x \in \Omega$: $S_0(x) = f_0(x)$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$$

$\forall n$, S_n è detta somma parziale n-esima della serie di f_n, S_n è una funzione: $\Omega \to \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ (S_n) è la successione delle somme parziali della serie di f_n.
Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente ad una funzione f in Ω se (S_n) converge puntualmente a f in Ω e in tal caso diciamo che f è la somma della serie di f_n e poniamo $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_n S_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \Omega$

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in Ω se converge puntualmente in Ω la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$

Osservazione

La convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza puntuale

* $\sum \|f_n\|_\infty =$ ma $\|f_n\|_\infty = \sup_x |f_n(x)| = \sup_x |a_n| = |a_n|$

$\quad \|$

$\sum |a_n|$ (TOTALE/ASSOLUTA)

* $\sum f_n(x)$ CONV. UNIF $\Leftrightarrow \lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0$

dove $\|S_n - f\|_\infty = \sup_x |S_n(x) - f(x)| = \sup_x |S_n - f| = |S_n - f|$

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n \Rightarrow S_n$ non dipende da x

$\lim_n \|S_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_n (S_n - f) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim_n S_n = f \rightarrow$ convergenza

13 Dicembre 2012

PROPRIETÀ

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni continue e limitate da Ω in $\mathbb{R}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione

se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f in Ω, allora f è continua

(NO DIMO)

Esempi:

① serie che conv. unif, ma non ass!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ serie armonica a segno alterno

x il criterio di Leibnitz converge

$\Rightarrow$ converge uniform., ma non converge assolutamente

$f_n(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ (provo a sostituire x)

$f_n(x)$ è dispari: $f_n(-x) = -f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
e anche f è dispari

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(-x) = f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

la serie del valore assoluto converge!
al valore assoluto di $|f(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$
quindi $\sum f_n(x)$ converge assolutam. in $\mathbb{R}$ a $|f(x)|$.

TEOREMA DEL CRITERIO DI WEIERSTRASS

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e (f_n) una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$. Supponiamo che esista una successione reale (M_n) /

① $\forall x \in \Omega$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq M_n$;

② $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in Ω e quindi converge unif, ass e punt. in Ω.

① f_n sono funzioni limitate

DIMOSTRAZIONE

per ① $0 \leq \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)|$ è il minimo dei maggioranti M_n $\leq M_n$

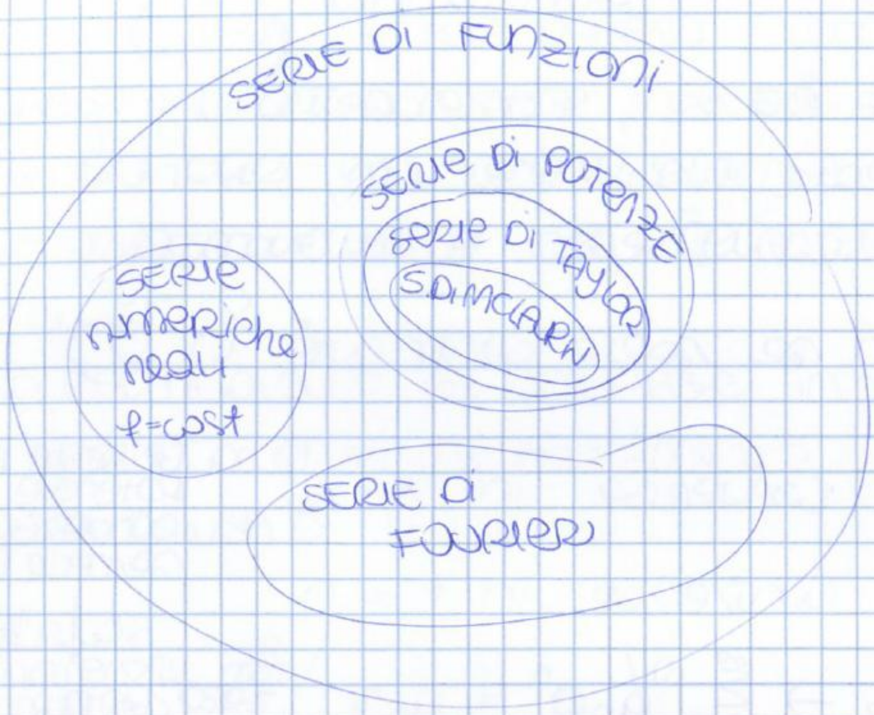
② $\Rightarrow \sum M_n$ converge

x il criterio del confronto $\rightarrow \sum \|f_n\|_\infty$ converge $\rightarrow \sum f_n(x)$ converge totalmente in Ω ■

Teoremi molto impo x le serie di potenze.

RIASSUNTINO

Cosa trattiamo noi:



SERIE DI POTENZE REALI

Definizione

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e (a_n) un successione reale si chiama serie di potenze centrata in x_0 la serie di funzioni:

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n}$ con la convenzione $0^0 = 1$

a_n = coefficiente della serie

$f_n(x) = a_n (x-x_0)^n$

R = raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$= \sup\{t \in \mathbb{R} / \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ è convergente$\}$

CASO SCOPERTO nei ② punti R e $-R$.

TEOREMA DI ABEL (completa quello prima)

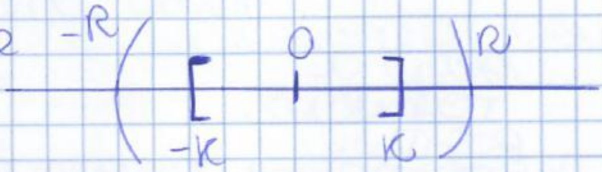
Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0,+\infty)$ il suo raggio di convergenza
se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x=R$ (e rispettiv. in $x=-R$) allora converge uniform. in ogni intervallo $[-K,R]$ (e risp in $[-R,K]$) con $0<K<R$.

In particolare se converge in $x=\pm R$ allora converge uniformemente in tutto l'intervallo $[-R,R]$

(NO DIM)

intervallo simmetrico

si dice così x mantenere la simmetria che hanno le serie di potenze



va bene anche $-R<a<b<R$ se è generalizzato

ESEMPI:

① serie geometrica di ragione x

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{con } a_n = 1 \ \forall n$$

→ converge ⟺ $|x|<1$ e in tal caso
la somma della serie $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(non serve il raggio di convergenza R)

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \,/\, \sum x^n \text{ converge}\} = \sup(-1,1) = 1$$

Quindi x T. sull'int. di conv $\sum x^n$ converge ass. e punt.

OSSERVAZIONE 17 Dicembre 2016

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze, $I \subseteq \mathbb{R}$ il suo insieme di convergenza puntuale e $\forall x \in I$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma della serie

allora f è continua su I. (no dimo)

(se R raggio conv. serie è > 0 $\rightarrow$ allora f è di classe C^∞ sull'intervallo I)

TEOREMA DELLA RADICE O DI CAUCHY-HADAMARD

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze. Supponiamo che esista $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$ allora il raggio di convergenza della serie di potenze

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

TEOREMA DEL RAPPORTO O DI D'ALEMBERT

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze.

Supponiamo $\exists \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$

allora il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < +\infty \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

il raggio serve x capire dove converge la serie di potenze.

$\lim_n \left[\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\downarrow 0} + 1\right] = 1$ non vale la condiz nec!

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]$ diverge!

x cui in $x = \frac{1}{3}$ $\sum a_n x^n$ non converge

- $x = -\frac{1}{3}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)\frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]$

S.T.ALT.

controllo la condiz. necessaria

$\lim_n \underbrace{(-1)^n}_{\downarrow \nexists} \left[\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\downarrow 0} + 1\right] = \nexists$

faccio x controllare il lim a n pari (1) e il lim a n dispari (-1)

non vale la cond. nec

in $x = -\frac{1}{3}$ $\sum a_n x^n$ non converge.

in conclusione

$\sum a_n x^n$ conv. ass $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

conv. punt $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

conv. unif $[-k, k]$, $0 < k < \frac{1}{3}$, $\forall k$

② $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $a_n = n!$ S.T.P.

$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{|(n+1)!|}{|n!|} = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} =$

$= \lim_n \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = +\infty$

x il teorema del rapporto, $R = 0$!

x il teor. di convergenza la serie converge

* se $|x|>1$, uso altre strategie

$\lim_n \operatorname{sen} n \cdot x^n \neq 0$, anzi $\nexists$

$\underset{\nexists}{\downarrow}$ $\begin{cases} x>1, +\infty \\ x<-1, \nexists \end{cases}$

quindi non vale la condiz. necessaria

$\sum \operatorname{sen} n\, x^n$ non converge se $|x|>1$

* se $x=1 \rightarrow \sum \operatorname{sen} n$
* se $x=-1 \rightarrow \sum (-1)^n \operatorname{sen} n$

} non vale la condiz. necessaria

$\sum \operatorname{sen} n\, x^n$ non converge in $x=\pm 1$

l'insieme di convergenza puntualmente è quindi

$\{x \in \mathbb{R} / \sum \operatorname{sen} n\, x^n \text{ converge}\} = (-1,1)$

il raggio di conv è

$R = \sup\{x \in \mathbb{R} / \sum \operatorname{sen} n\, x^n\} = \sup(-1,1) = 1$

quindi:

$\sum a_n x^n$ conv. ass. e punt. in $(-1,1)$

conv. unif. $[-r,r]$, $\forall\, 0<r<1$

Osservazione

siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze centrata in x_0 e sia $R \in [0,+\infty]$ il suo raggio di convergenza. Allora si ha che

1. se $R=0$ la serie converge solo in $x=x_0$
2. se $0<R<+\infty$ la serie converge ass. in (x_0-R, x_0+R) e conv. uniform. in $\forall [a,b]$ con $x_0-R<a<b<x_0+R$
3. se $R=+\infty$ la serie converge ass. e puntual. in $\mathbb{R}$ e converge unif. in $\forall$

- $t=2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{2^n}\log(n+1)} \cancel{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

vale la condiz. necessaria!

$$\left.\begin{array}{l} \log(n+1) = o(n+1) \\ \frac{1}{n+1} = o\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right) \end{array}\right\} n \to \infty$$

$\downarrow$ diverge $\longrightarrow$ $\downarrow$ diverge x C.AS.

- $t=-2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\log(n+1)} (-2)^n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{2^n}\log(n+1)} (-1)^n \cancel{(2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$

non converge ass!

$$\left\{\begin{array}{l} b_n \geq 0 \\ b_n \text{ è decresc} \\ \lim_n b_n = 0 \end{array}\right. \longrightarrow$$ x il criterio di Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n)}{\log(n+1)}$ converge

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\log(n+1)} t^n$ ha raggio $R=2$

conv ass in $(-2,2)$

conv. punt. in $[-2,2)$

conv. unif in $[-2,k]$, $\forall\, 0<k<2$ x Abel!

Quindi $t=x-1$, $x=t+1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\log(n+1)} (x-1)^n$ ha raggio $R=2$

conv. ass. in $(-1,3)$

conv. punt. in $[-1,3)$

conv. unif. in $[-1, k+1]$

$[-1, b]$ meglio $\forall\, -1<b<3$

$R \geq \min\{R_1 R_2\}$

inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \min\{R_1, R_2\}$

si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 219 di 278

SERIE DI TAYLOR

20 dicembre 2012

SERIE DI POTENZE PARTICOLARI

DEFINIZIONE

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ su I. Si chiama serie di Taylor di f centrata in x_0 la serie di potenze centrata in x_0

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n} \quad , a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

dove $f^{(n)}(x_0) = (D^n f)(x_0)$ con la convenzione $f^{(0)}(x) = f($

se $x_0 = 0$, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x^n)}$ è anche detta serie di Maclaurin di f.

OSSERVAZIONE

Per la formula di Taylor con il resto di Peano:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{\text{polinomio di Taylor } P_n(x) \text{ (tutto tranne il resto)}} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{resto Peano}}, \quad \text{per } x \to x_0$$

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

se cerco la somma parziale n-esima della serie di Taylor di f centrata in x_0

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$$\longrightarrow \boxed{S_n(x) = P_n(x)}$$

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0, \quad \forall n \geq 0$$

suppongo $|x-x_0| < 1$, $|x-x_0|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $o((x-x_0)^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

DEFINIZIONE

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ su I. Diciamo che f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0 oppure che f è analitica in x_0 se esiste $\delta > 0$ / la serie di Taylor di f centrata in x_0 converge puntualmente a f nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, cioè:

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ risulta che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$

Diciamo che f è analitica nell'intervallo I se f è analitica in ogni punto di I.

La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ non è analitica in $x = 0$

ESEMPIO DI FUNZIONE ANALITICA

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ è analitica in $x = 0$, $f \in C^\infty$ in (a,b), $\forall a < 0 < b \leq 1$

Calcoliamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ e proviamo che coincide con $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in un intorno $(-\delta, \delta)$ di 0.

$f^{(0)}(0) = f(0) = 1 \qquad = 0!$

$f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \to f'(0) = 1 \qquad = 1!$

$f''(x) = -\frac{-2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \to f''(0) = 2 \qquad = 2!$

$f'''(x) = -\frac{-6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4} \to f'''(0) = 6 = 3!$ eccetera...

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad \to f^{(n)}(0) = n!$

Ora sostituisco nella serie di McLaurin

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{n!}} \cancel{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serie geometrica.

converge se $|x| < 1$, cioè $x \in (-1, 1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$ ✓ quindi f è analitica in $x = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 223 di 278

② $f(x) = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) =$ $x \to 0$

$= f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

③ $f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) =$ $x \to 0$

$= f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

④ $f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

⑤ $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

⑥ $\forall x \in (-1, 1], \quad f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n =$

SI SCRIVE IN 2 MODI

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$

DIMOSTRAZIONE

$\forall x \in (-1,1), \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$\forall x \in (-1,1), \quad \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) dt$

$\left[-\log|1-t|\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,dt$

$\left[-\log(1-t)\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^x$

$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\forall x \in (-1,1)$

$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ SOSTITUISCO $-x \to x$

$\log(1+x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-x)^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (-1)^{n+1} x^{n+1} =$

$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ se $k = n+1$, $n = k-1$

se $\alpha \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots x^n$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

7 Gennaio 2013

SERIE DI FOURIER

FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN

DEFINIZIONE

SIANO $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $T \neq 0$. Diciamo che f è periodica di periodo T se

$$\boxed{\begin{array}{l} ① \ \forall x \in A, \text{ anche } x+T \in A \\ ② \ \forall x \in A, \ f(x+T) = f(x) \end{array}}$$

PROPRIETÀ DI FUNZIONI PERIODICHE

SIA $A \in \mathbb{R}$ non vuoto, allora:

① se $f: A \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T \neq 0$, allora f è periodica di periodo nT, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

② se $f: A \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T \neq 0$, allora la funzione $g(x) = f(kx)$, $k \neq 0$, è periodica di periodo $\frac{T}{k}$

ex: $\operatorname{sen} x \to (2\pi)$ $\quad \operatorname{sen}(2x) \to \pi$

③ le funzioni costanti sono periodiche di qualunque periodo $T \neq 0$

④ l'insieme dei periodi positivi di una funzione periodica ha estremo inferiore nullo se e solo se la funzione è costante, inoltre se tale inf non è nullo (quindi la funzione non è cost) allora è anche minimo $\inf = \min$ ed è detto periodo minimo della funzione.

5) se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T > 0$ ed è integrabile sull'intervallo $[0, T]$ allora $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha che

OSSERVAZIONE:
se f è pari $\rightarrow \forall n \geq 1,\ b_n = 0$!!
se f è dispari $\rightarrow \forall n \geq 0,\ a_n = 0$!!

DEFINIZIONE
Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$ e integrabile nell'intervallo $[0, T]$. Si chiama serie di Fourier di f la serie di funzione

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right]$$

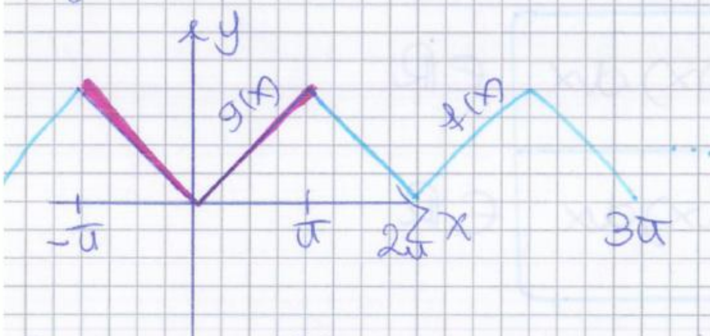
dove $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ sono detti coefficienti di Fourier di f e sono

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \end{aligned}\right\} \forall n \geq 1$$

ESEMPIO
Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando x periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione
$g(x) = |x|$, definita $\forall x \in [-\pi, \pi]$

g è pari $\rightarrow$ f è pari



Scrivo la serie di Fourier di f e calcolo i coeff
$\forall n \geq 1,\ b_n = 0$!

$$\rightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge xk $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$, $n \to \infty$

$\downarrow$ converge x C.C.A. $\quad \downarrow$ converge

x il criterio di Weierstrass la serie converge totalmente e quindi assolutam., puntualm., uniform. in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e integrabile in $[-\pi, \pi]$ si chiama polinomio trigonometrico di grado n associato a f la funzione

$$\boxed{p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\right)}$$

con a_0, a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier della funzione f

$\to$ $p_n(x)$ è la somma parziale n-esima della serie di Fourier di f

$\forall n \geq 1$ la funzione $a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ è detta armonica n-esima di f

se $n = 1$ la funzione $a_1 \cos(x) + b_1 \operatorname{sen}(x)$ è detta armonica fondamentale

Si chiama frequenza dell'armonica n-esima il numero reale $\frac{n}{2\pi}$ (il reciproco del periodo)

Si chiama ampiezza dell'armonica n-esima il numero reale $\rho_N = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Si chiama fase dell'armonica n-esima l'angolo θ_N di figura

$a_n = \rho_n \operatorname{sen} \theta_n$

$b_n = \rho_n \cos \theta_n$

TEOREMA

Siano $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e

$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$ il polinomio trigonometrico di grado n associato a f. Allora vale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

OSSERVAZIONE

f continua a tratti in $[-\pi,\pi] \to f$ integrabile su $[-\pi,\pi] \to$ coeff Fourier!

Si dimostra che tra i polinomi trigonometrici $p_n(x)$ di grado $\leq n$,

$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ è quello che approssima meglio in media o in norma quadratica la funzione f.

cioè se $(\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R})$

$$Q_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$

allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - Q_n(x)|^2 dx$$

TEOREMA (CONVERGENZA PUNTUALE)

Siano $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π, continua a tratti nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che esistano

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$ PSEUDO DERIVATA SX DI f IN x_0

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$ PSEUDO DERIVATA DX DI f IN x_0

dove $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

allora la serie di Fourier di f calcolata in x_0 converge a $\boxed{\frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]}$

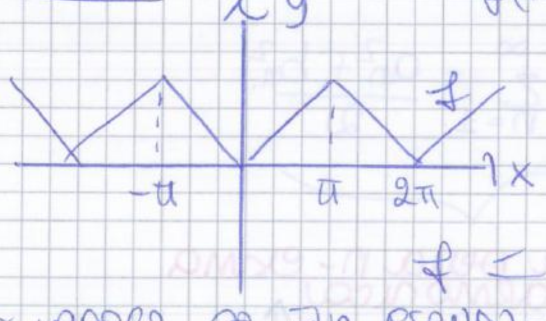
Inoltre, se f è anche continua in x_0, allora la serie di Fourier di f calcolata in x_0 converge a $\boxed{f(x_0)}$.

OSSERVAZIONE

se $\exists$ la derivata sx di $f(x_0)$ cioè se $\exists\ D^- f(x_0)$
allora $f'(x_0^-) = D^- f(x_0)$
se $\exists$ la derivata dx di $f(x_0)$ cioè se $\exists\ D^+ f(x_0)$
allora $f'(x_0^+) = D^+ f(x_0)$
se $\exists\ f'(x_0)$ allora $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

La convergenza della serie di Fourier di f dipende solo dalle ipotesi su f (non serve calcolare la serie di Fourier)

ESEMPIO: $f(x) = |x|,\ \forall x \in [-\pi,\pi]$



la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

f — è periodica di 2π
— è continua a tratti (in $\mathbb{R}$)

x vedere se $\exists$ le pseudo-der. guardo l'intervallo principale di periodicità

f non è derivabile in $0, 2\pi, -2\pi \dots$
e neanche in $\pi, -\pi, 3\pi$
f è derivabile in ogni $x \neq k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Per esercizio, ricavo la somma della serie di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = ?$$

$$\frac{\pi^2}{16}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi^2}{2}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4\right)\frac{\pi^2}{16}$$

$$\frac{\pi}{16}\int_{-\pi}^{\pi} ||x||^2 dx - \frac{\pi^4}{32} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4$$

$$\frac{\pi}{16}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{16}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right) - \frac{\pi^4}{32} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4$$

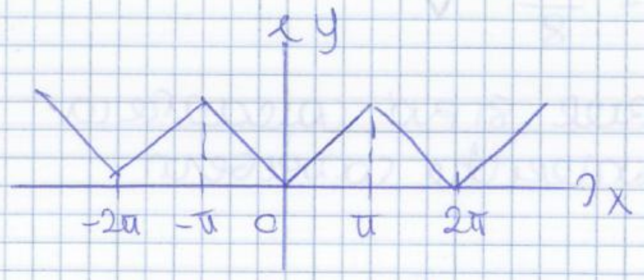
$$\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^4}{32} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

TEOREMA (CONVERGENZA UNIFORME)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e continua a tratti in $[-\pi,\pi]$ e di classe C^1 a tratti in $(\alpha,\beta) \subseteq [-\pi,\pi]$, allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni intervallo $[a,b] \subseteq (\alpha,\beta)$. Inoltre se f è di classe C^1 a tratti in tutto $[-\pi,\pi]$ allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su tutto $\mathbb{R}$.

Esempio:

$f(x) = |x|$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$ è C^1 a tratti in $[-\pi,\pi]$



La serie di Fourier di f converge uniformemente a f in tutto $\mathbb{R}$.

Non è necessario scrivere la serie di Fourier.

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{inx}\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2i}b_n\right) + e^{-inx}\left(\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2i}b_n\right)\right]$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{inx}\left(\frac{1}{2}a_n - i\frac{1}{2}b_n\right) + e^{-inx}\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}ib_n\right)\right]$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{inx}c_n + e^{-inx}c_{-n}\right) \quad e \quad c_0 = c_0 e^{i0x}$$

PONIAMO $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikn}$ $\quad \uparrow k=-n$

QUINDI:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}}$$

FORMA COMPRESSA O ESPONENZIALE DELLA SERIE DI FOURIER DI f

IN TAL CASO $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

TUTTO IL RESTO UGUALE ALLE SERIE DI FOURIER REALI.

L'IDENTITÀ DI PARSEVAL DIVENTA

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

insieme y-semplice

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $\alpha, \beta: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

insieme x-semplice

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$, $\gamma, \delta\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

sono insiemi misurabili

rettangoli / trapezi / triangoli, cerchi... sono sia x che y semplici

corona circolare: somma di pezzi x-y-semplici

formule integrali doppi

- Ω x-semplice

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

- Ω y-semplice

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

- Ω rettangolo: $[a,b] \times [c,d]$ e $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ $\boxed{\text{TOMO}}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b f_1(x)\,dx \right] \left[\int_c^d f_2(y)\,dy \right]$$

cambiamento variabili

$\phi: \Omega' \to \Omega \implies$ biettiva, C^1 su Ω', $\det J_\phi(u,v) \neq 0\ \forall u,v \in \Omega'$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v))\, |\det J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

vale anche se $<$ ϕ non iniettiva su A $(mA = 0)$ / $\det J_\phi = 0$ su A $(mA = 0)$

① coordinate polari (simmetrie circolari)

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \sin\theta \\ y = y_0 + \rho\cos\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad |\det J_\phi(\rho,\theta)| = \rho$$

anche se $\rho = 0$ / se $\det = 0$ su A / $mA = 0$

② coordinate ellittiche (simmetrie ellittiche)

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho \sin\theta \\ y = y_0 + b\rho\cos\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ a,b > 0 \qquad |\det J_\phi(\rho,\theta)| = ab\rho$$

anche se $\rho = 0$ o $\theta = 0$ o $\theta = 2\pi$

simmetria asse x $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ anche $(x,-y) \in \mathbb{R}^2$

simmetria asse y $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ anche $(-x,y) \in \mathbb{R}^2$

CAMBIAMENTO VARIABILI

$\phi: \Omega' \to \Omega$: BIUNIVOCA, C^1 su Ω', $\det_\phi(u,v,w) \neq 0$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v,w)) \left| \det J_\phi(u,v,w) \right| du\,dv\,dw$$

vale anche se ϕ non iniettiva su A e $\det = 0$ su Δ, con $m\Delta = 0$

① COORDINATE POLARI (SFERICHE) × SIMMETRIE SFERICHE

$x = \rho \sin\theta \cos\phi$
$y = \rho \sin\theta \sin\phi$
$z = \rho \cos\theta$
] COLATITUDINE MISURATA ASSE Z

$|\det J_\phi(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \sin\theta$

$x =$
$y = \rho\cos\theta$
$z =$
} INDIFFERENTE] COST. MISURATA ASSE Y

$\rho \geq 0$
$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \phi \leq 2\pi$

$x = \rho\cos\theta$
$y =$
$z =$
} INDIFFERENTE] COST. MISURATA ASSE X

anche se $\rho = 0$ o $\theta = 0, \pi$

② COORDINATE CILINDRICHE

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$
$z = z$
] asse z

$\left|\det J_\phi\left(\rho,\theta,\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\right| = \rho$

$\rho \geq 0$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$x, y, z \in \mathbb{R}$

$x =$
$y = y$
$z =$
} INDIF.] asse y

$x = x$
$y =$
$z =$
} INDIF.] asse x

anche se $\rho = 0$

①② CENTRATE in $(x_0, y_0) = (0,0)$

SIMMETRIA PIANO xy : $\forall (x,y,z) \in \Omega$, anche $(x,y,-z) \in \Omega$
SIMMETRIA PIANO xz : $\forall (x,y,z) \in \Omega$, anche $(x,-y,z) \in \Omega$
SIMMETRIA PIANO yz : $\forall (x,y,z) \in \Omega$, anche $(-x,y,z) \in \Omega$

PARAMETRIZZAZIONI

CIRCO RAGGIO R ORARIA $\gamma(t) = (R\cos t, -R\sin t)$

" " ANTIORARIA $\gamma(t) = (R\cos t, +R\sin t)$

SEGMENTO $\overline{AB}$ NEL PIANO $\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$

" NELLO SPAZIO $\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A))$

SUPERFICIE CILINDRICA $\sigma(u,v) = (\rho\cos v, \rho\sin v, u)$

SUPERFICIE SFERICA $\sigma(u,v) = (\rho\sin u\cos v, \rho\sin u\sin v, \rho\cos u)$

SE $\Sigma = Gf$ $(x,y,z) = \sigma(x,y) = z$ $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$

LINEA (DIPENDE DAL VERSO)

* PRIMA SPECIE

$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$ se $f = 1$, $\int_\gamma f = l_\gamma$

* SECONDA SPECIE (LINEA)

$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

SUPERFICIE (INDIPENDENTE DAL VERSO)

*

$\int_\Sigma f = \int_K f(\sigma(u,v)) \|N(u,v)\| du\, dv$ se $f = 1$, $\int_\sigma f = A_\Sigma$

$N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$

PARTICOLARI

$N(u,v) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)$ $z = g(x,y)$

$N(u,v) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,z), -1, \frac{\partial g}{\partial z}(x,z)\right)$ $y = g(x,z)$

$N(u,v) = \left(1, -\frac{\partial g}{\partial y}(y,z), -\frac{\partial g}{\partial z}(y,z)\right)$ $x = g(y,z)$

AREA Gf: $A_\Sigma = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dx\, dy$

FLUSSO (DIPENDE DAL VERSO)

$\int_\Sigma F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv$ con N USCENTE/ENTRANTE

* GREEN (∂A ORIENTATO POSITIVAM = VERSO ANTIORARIO = SX)

$\oint_{\partial A} \overline{F} \cdot d\overline{P} = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\, dy$ $F = (f_1, f_2)$

* COROLLARIO

se $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1 \Rightarrow m(A) = \oint_{\partial} F \cdot dP$

ESEMPI $F(x,y) = (0, x) = (-y, 0) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x) = (-\frac{1}{3}y, \frac{2}{3}x)$

PARAMETRIZZAZIONI

• CILINDRO $\sigma: \mathbb{R}\times(0,\pi)\to\mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v)=(\rho\cos v, \rho\sin v, u)$

$N=(-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, 0)$

• SFERA $\sigma: (0,\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v)=(\rho\sin u\cos v, \rho\sin u\sin v, \rho\cos u)$

$N=(\rho^2\sin^2 u\cos v, -\rho^2\sin^2 u\cos v, \rho^2\sin u\cos u\cos^2 v+\rho^2\cos u\sin u\sin^2 v)$

• se $\Sigma=G_{g|K}$

1 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x,y)\in K, z=g(x,y)\}$

$\sigma(x,y)=(x,y,g(x,y))$, $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$, $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ldots$

2 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(y,z)\in K, x=g(y,z)\}$

$\sigma(y,z)=(g(y,z),y,z)$

3 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/(x,z)\in K, y=g(x,z)\}$

$\sigma(x,z)=(x,g(x,z),z)$

$N_1(x,y)=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)$

$N_2(y,z)=\left(1, -\frac{\partial g}{\partial y}(y,z), -\frac{\partial g}{\partial z}(y,z)\right)$

$N_3(x,z)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,z), -1, \frac{\partial g}{\partial z}(x,z)\right)$

* INTEGRALE DI SUPERFICIE $\longrightarrow$ NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZ

$\int_\Sigma f\,d\sigma=\int_K f(\sigma(u,v))\,\|N(u,v)\|\,du\,dv$ se $f=1$ $\int_\sigma f=A_\Sigma$ AREA

area grafico funzione: $z=f(x,y)$

$A_\Sigma=\int_K\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dx\,dy$

* FLUSSO $\longrightarrow$ DIPENDE DAL VERSO DI ATTR. DELLA SUP.

$\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=\int_K F(\sigma(u,v))\cdot N(u,v)\,du\,dv$

SCELGO N < ENTRANTE / USCENTE (3 METODI < GRAFICO / VETTORIALE / ANALITICO)

DATI $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO NON VUOTO
$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETTORIALE

F È CONSERVATIVO SE $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE / $\nabla f(x) = F(x)$, $\forall x \in \Omega$
ALLORA f È UN POTENZIALE DI F SU Ω

$$\nabla f(x) = F(x) \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i$$

F AMMETTE INFINITI POTENZIALI SE CONSERVATIVO, INFATTI $\forall c \in \mathbb{R}$ $\nabla(f+c) = \nabla f + \cancel{\nabla c} = \nabla f$

ex
- C.V. NULLO
- C.V. COSTANTE
- C. RADIALI CONTINUI

DATI $0 \leq a < b \leq +\infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / a < \|x\| < b\}$
$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETT.
F È RADIALE SE $F(x) = \varphi(\|x\|)\, x$, ($\|x\|$ → DISTANZA DI x DALL'ORIGINE)
$\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE

★ SE $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ È RADIALE E CONTINUO → F È CONSERVATIVO

$\boxed{\text{DIMO}}$

★ DATI $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO CONNESSO x ARCHI
$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO
$f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ 2 POTENZIALI DI F SU Ω, $\Rightarrow$
$\exists c \in \mathbb{R} / f(x) - g(x) = c$, $\forall x \in \Omega$ $\boxed{\text{DIMO}}$
CIOÈ 2 POTENZIALI DI UN CAMPO CONSERVATIVO SU UN APERTO CONNESSO x ARCHI DIFFERISCONO AL + x UNA COSTANTE

★ DATI $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO NON VUOTO
$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETT. CONTINUO E CONSERVATIVO
$f: \Omega \to \mathbb{R}$ UN POTENZIALE DI F SU Ω
$\gamma: [a,b] \to \Omega$ UNA CURVA PARAMETRICA SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI

$\Rightarrow$ $\int_\gamma F \cdot dp = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ $\boxed{\text{DIMO}}$
$\oint_\gamma F \cdot dp = 0$

★ DATI $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ UN APERTO CONNESSO x ARCHI
$F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETTORIALE CONTINUO
FATTI EQUIVALENTI
- F CONSERVATIVO
- $\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$ — $\gamma_{1,2}$ CURVE PARAM. SEMPLICI E REGOLARI A TRATTI
- $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$ — γ CURVA PARAM. CHIUSA SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI

$\boxed{\text{DIMO}}$

RIPASSO SUCCESSIONI

SUCCESSIONE $\mathbb{R}$ $\quad a: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{N}$, $\sup A = +\infty$

FUNZIONI CONTINUE
FUNZIONI NON DERIVABILI $\quad (a_n)$

$l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(a_n) HA LIMITE l PER $n \to \infty \iff \forall I(l), \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in I$

$\lim_n a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |a_n - l| < \varepsilon$

$\lim_n a_n = \pm\infty \iff \forall b \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, a_n > b \ (a_n < b)$

$\lim_n a_n$
- $l \in \mathbb{R}$, a_n CONVERGE
- $+\infty$ a_n DIV. POS.
- $-\infty$ a_n DIV. NEG.
- $\nexists$ a_n è INDETERMINATA $\to$ ex $(-1)^n$, $\sin(n)$, $\cos(n)$, $tg(n)$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_n \sqrt[n]{n^p} = 1$, $\forall p \in \mathbb{R}$

$\lim_n \sqrt[n]{a^p} = 1$, $\forall p \in \mathbb{R}, \forall a > 0$

$\lim_n \sqrt[n]{n!} = \infty$

$\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$\lim_n \frac{\log^p n}{n^k} = 0$, $\forall p \in \mathbb{R}, \forall k > 0$

$\lim_n \frac{n^k}{a^n} = 0$ $\quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall a > 1$

$\lim_n n^k a^n = 0$ $\quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall a, 0 < a < 1$

$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ $\quad \forall a > 0$

$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

SCALA ∞

$\log^p n < n^k < a^n < n! < n^n$

$\log^p n = o(n^k)$, $n \to \infty$

$n^k = o(a^n)$, $n \to \infty$

$n^n = o\left(\frac{1}{a^n}\right)$, $n \to \infty$

$a^n = o(n!)$ $\quad n \to \infty$

$n! = o(n^n)$ $\quad n \to \infty$

STIRLING $\quad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$

(b_n) SOTTOSUCCESSIONE DI (a_n) SE $\exists\ \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ STRETT. CRESCENTE / $\boxed{b_n = a_{\varphi(n)}}$ IN PIÙ $\lim_k a_{n_k} = \lim_n a_n$

($a_n \to$ SUE SOTTO $a_{n+1}, a_{n-1}, a_{n^2}, a_{n^3+1}$)

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS
(a_n) SUCC $\mathbb{R}$ LIMITATA ($|a_n| \leq M, \forall n$) $\to$ C'È ALMENO 1 SOTTO CONVERG

TEOREMA CRITERIO RAPPORTO E RADICE

$S_n = a_{n+1} - a_0 \to \lim_n S_n = \lim_n (a_{n+1} - a_0)$

PIÙ IN GENERALE, $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+p} - a_n) \qquad \text{se } n \geq p \quad \begin{matrix} k = n-p \\ k+p = n \end{matrix}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+p} - a_k) = a_p - a_0 + a_{p+1} - a_1 + a_{p+2} - a_2 + \dots a_{2p-1} - a_{p-1}$$
$$+ a_{2p} - a_p + a_{2p+1} - a_{p+1} \dots + \underbrace{a_{n-1+p}}_{a_n - a_{n-p}} - a_{n-1} + a_{n+p} - a_n$$

$S_n = (a_{n+1} + \dots + a_{n+p}) - (a_0 + \dots a_{p-1}) =$ ABBIAMO 2P TERMINI

ESEMPIO: SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to \lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ CONVERGE A 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$