NUMERO: 1203

DATA: 27/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Analisi Matematica II,Temi D'esame + Eserc.

Prof. Lancelotti

ESERCITAZIONE ANALISI II

sempre con Lancelotti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 392

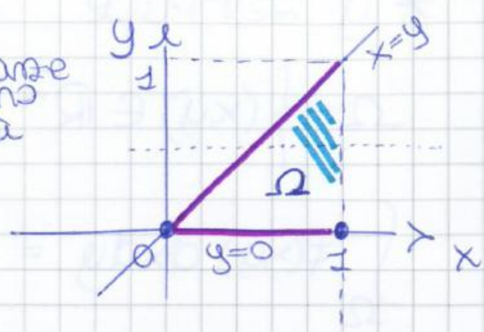
① calcolare $\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$ con

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x\}$$

Ω è y-semplice

le disuguaglianze si implicano a vicenda

disegno Ω



Ω è anche x-semplice

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \le y \le 1,\; y \le x \le 1\}$$

formula y-semplice

$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2+y^2)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 + x^2 y\right]_0^x dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^3\right) dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x^3\,dx =$$

$$= \left[\frac{\cancel{4}}{3}\frac{1}{\cancel{4}}x^4\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

formula x-semplice

$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_y^1 (x^2+y^2)\,dx\right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_y^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3}y^3 - y^3\right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{4}{3}y^3 + y^2 + \frac{1}{3}\right) dy$$

$$= \left[-\frac{\cancel{4}}{3}\frac{1}{\cancel{4}}y^4 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}y\right]_0^1 = -\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

i 2 risultati combaciano

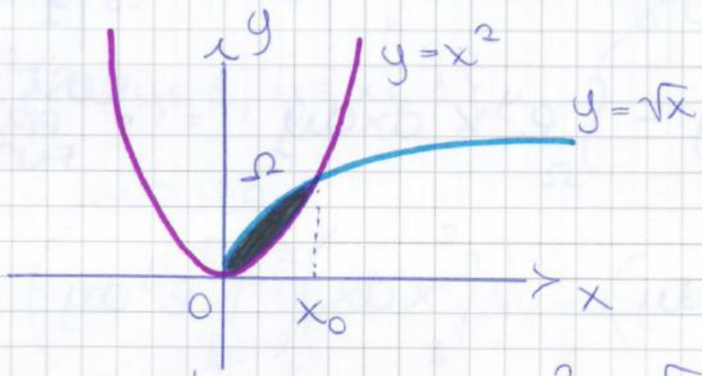
③ $\int_\Omega xy\,dx\,dy$ con $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ 2.1 e

non c'è scritto dove sta x : x?

deve essere un insieme limitato!

MAI illimitato!!

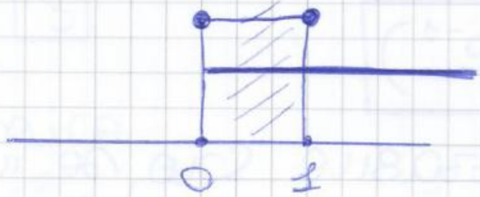
- metodo algebrico → l'unico che serve → bisogna risolvere disequazioni
- grafico



devo trovare x_0! risolvo $x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x = 1$

oppure

$$x^2 \le \sqrt{x} \longrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^4 \le x \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x(x^3-1) \le 0 \end{cases}$$



soluzione

Ω è y-semplice : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 1 ,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

ma è anche x-semplice!

FORMULA Y-SEMPLICE

$$\int_\Omega xy \, dx dy = \int_{-2}^{6} \left[\int_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} xy \, dy \right] dx =$$

SPEZZO IL VALORE ASSOLUTO MA STAVOLTA E' SUPERFLUO

$$= \int_{-2}^{6} x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{|x|}^{\frac{1}{2}x+3} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{6} x \left(\frac{1}{4}x^2 + 9 + 3x - |x|^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{6} \left(\frac{1}{4}x^3 + 9x + 3x^2 \quad x^3 \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{4}\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}x^3 \right]_{-2}^{6}$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{16} 6^4 + \frac{9}{\cancel{2}} \cancel{36}^{18} + 6^3 + \frac{3}{\cancel{16}} \cancel{16} - \frac{9}{\cancel{2}} \cancel{4}^2 + 8 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(216 + 162 + \cancel{8} - \cancel{18}_{-10} + 3 - \frac{3}{\cancel{2^4}} \cancel{6^4}^{3^4} \right] =$$

$$= \frac{(371 - 3 \cdot 3^4)}{2} = \frac{128}{2} = \boxed{64}$$

5) $\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$

2.1 d

$1 \le x^2 + y^2 \le 4$

$1 - x^2 \le y^2 \le 4 - x^2$

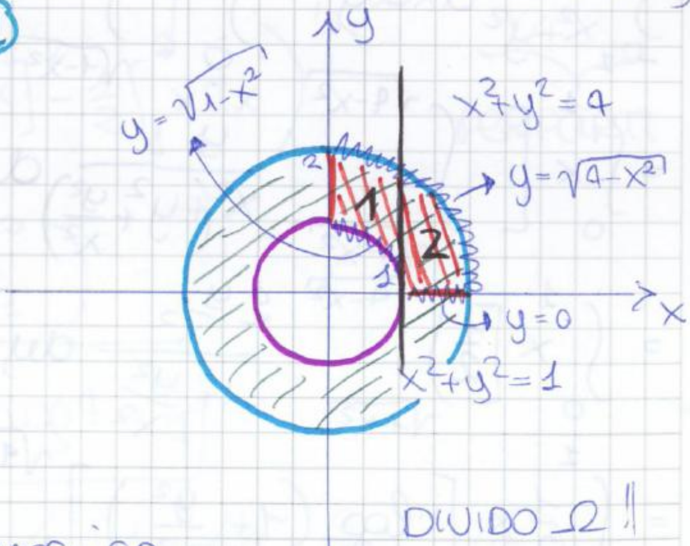
visto che $y \ge 0$

$\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$

ma dove sta x?

$0 \le x \le 2$

è un insieme x e y semplice



$$\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\log 4 - \cancel{\log x^2} - \underbrace{\log 1}_{=0} + \cancel{\log x^2}\right]dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x\log 4\,dx = \frac{1}{2}\log 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]^1 = \boxed{\frac{\log 4}{4}}$$

$$\int_{\Omega_2}\frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^2\left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{x^2+y^2}\,dy\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\log(x^2+y^2) - \log(x^2)\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\log 4 - \log x^2 - \cancel{\log x^2} + \cancel{\log x^2}\right)dx =$$

$\to$ xe $x>0$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x\log 4 - 2x\log x)\,dx = \frac{1}{2}\log 4\int_1^2 x\,dx - \underbrace{\int_1^2 x\log x\,dx}_{\text{PER PARTI}}$$

$$= \frac{1}{2}\log 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \left(\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{4}\log 4 - \left(2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\log 4 - \log 4 + \frac{3}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{4}}$$

$$\int_{\Omega}\frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\cancel{\log 4} - \frac{1}{4}\cancel{\log 4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

19 ottobre 2012

6) $\int_\Omega xy\,dxdy \quad , \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 1, \ x^2+y^2 \leq 2x, \ y \geq 0\}$

2.1 e

DISEGNO Ω: (x sapere se è x o y- semplice)

in più, COORDINATE POLARI CENTRATE in (0,0)

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \qquad |\det J_\Phi(\rho,\theta)| = \rho$$

$$\int_\Omega xy\,dxdy = \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\theta\sin\theta \; d\rho\, d\theta$$

DEVO TROVARE Ω':

$$(x,y) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 1 \\ \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 2\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 \leq 1 \\ \rho^{\cancel{2}} \leq 2\cancel{\rho}\cos\theta \\ \cancel{\rho}\sin\theta \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ \sin\theta \geq 0 \\ \cos\theta \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

DEVO SISTEMARE QUELLE DI ρ

$$1 \leq 2\cos\theta \rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos\theta \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

SOLUZIONE FINALE

$$\underbrace{\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}}_{\Omega_1} + \underbrace{\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \\ \frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}}_{\Omega_2} = \Omega'$$

7 $\int_{\Omega} (4+4x-3x^2-4y^2)\,dxdy$, 32 b

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2\sqrt{x^2+y^2} \le x+2\}$

RISCRIVERE Ω

$$\underbrace{2\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{POSITIVA DI SICURO}} \le \underbrace{x+2}_{\text{IMPONGO SIA } \ge 0} \rightarrow \text{COSÌ ELEVO AL 2}$$

$$\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 4x^2+4y^2 \le (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -2 \\ 4x^2+4y^2 \le x^2+4x+4 \quad (a) \end{cases}$$

(a) $3x^2+4y^2-4x-4 \le 0$ STESSO POLINOMIO DELL'INTEGRALE!!

se $= 0 \rightarrow$ è una curva

METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

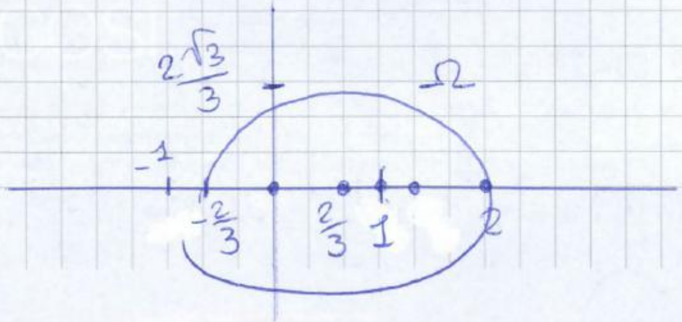
$$\left(\sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3} + 4y^2 - 4 \le 0$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + 4y^2 \le \frac{16}{3}$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{16/9} + \frac{y^2}{4/3} \le 1 \quad \text{ellisse} \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a = 4/3$

$b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 392

$$\int_{\Omega'} \left(\frac{128}{27}\sqrt{3}\right)(1-\rho^2)\rho \, d\rho \, d\theta =$$

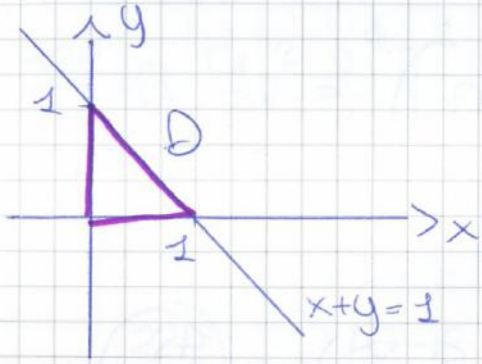
$$\left(\frac{128}{27}\right)\sqrt{3}\int_0^1 (\rho-\rho^3)\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{128}{27}\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{128}{27}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)2\pi =$$

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_0^{1-x-y} 1\,dz\right] dx\,dy =$$

$$= \int_D (1-x-y)\,dx\,dy$$

ORA È UN INTEGRALE DOPPIO!



D è x e y semplice

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$

Lo consideriamo y-semplice

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x^2) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}(0+1) = \frac{1}{6}$$

(3) $\int_\Omega \frac{x}{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 1 < x^2+z^2 < 2x,\ 0 < y < \sqrt{x^2+z^2}\}$

INTEGRALE x FILI // asse y

$$\int_\Omega \frac{x}{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{x}{x^2+z^2}\,dy\right] dx\,dz = \int \frac{x}{x^2+z^2}\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy$$

OTTENUTO L'INTEGRALE DOPPIO

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1 < x^2+z^2 < 2x\}$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_{1}^{2\cos\theta}\rho\cos\theta\,d\rho\right]d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{1}^{2\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)d\theta$$

CERCO Ω'

$$(x,y,z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi \leq 4 \\ \rho\cos\theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 \leq 4 \\ \rho\cos\theta \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 < \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ \cos\theta \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Omega' = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 / \ 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

è un parallelepipedo:

$$\int_{\Omega'} \rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta \, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \left[\int_0^2 \rho^4 d\rho\right]\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\right]\left[\int_0^{2\pi} d\phi\right]$$

$$= \frac{32}{5} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = 64\pi\, \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{64}{15}\pi$$

$$\Phi \begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\phi & \rho \geq 0 \\ y = \rho \cos\theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ z = \rho \sin\theta \sin\phi & 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \qquad |\det| = \rho^2 \sin\theta$$

CERCO Ω'

$$(x,y,z) \in \Omega \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 < 2 \\ x^2+z^2 < y \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \rho^2 < 2 \\ \rho \geq 0 \\ \rho^{\cancel{2}} \sin^2\theta \sin^2\phi + \rho^2 \sin^2\theta \cos^2\phi < \cancel{\rho} \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ \rho \sin^2\theta < \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow 0 \leq \rho \sin^2\theta < \cos\theta \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho < \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 / \ ?$$

x RISOLVERE ρ

DEVO SCEGLIERE $\sqrt{2}$ O $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ → IL SECONDO MI VERREBBE UN INTEGRALE $\frac{\cos^7\theta}{\sin^{12}\theta}$

SCELGO UN'ALTRA STRATEGIA !!!

(NON È VERO CHE QUANDO HO UNA SFERA DEVO x FORZA FARE COORD. SFERICHE)

$\Omega' = \{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi,\ \rho^2 < y < \sqrt{2-\rho^2} \}$

$\Omega' = \{ (\rho, \vartheta, y) \in \mathbb{R}^3 / (\rho, \vartheta) \in D,\ \rho^2 < y < \sqrt{2-\rho^2} \}$

con $D = \{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \}$

INTEGRO × FILI // asse y

$$\int_{\Omega'} \left([\rho^3 - \rho] y + y^3 \rho \right) d\rho\, d\vartheta\, dy =$$

$$\int_D \left[\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \left([\rho^3 - \rho] y + y^3 \rho \right) dy \right] d\vartheta\, d\rho =$$

$$\int_D \left[\frac{\rho^3 - \rho}{2} y^2 + \frac{\rho}{4} y^4 \right]_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} d\vartheta\, d\rho =$$

$$= \int_D \left[\frac{\rho^3 - \rho}{2} (2 - \rho^2) + \frac{\rho}{4} (2 - \rho^2)^2 - \frac{\rho^3 - \rho}{2} \rho^4 - \frac{\rho}{4} \rho^8 \right] d\vartheta\, d\rho =$$

$$= \int_D \left(\cancel{\rho^3} - \cancel{\rho} - \cancel{\frac{\rho^5}{2}} + \frac{\rho^3}{2} + \cancel{\rho} + \frac{\rho^5}{4} - \cancel{\rho^3} - \frac{\rho^9}{4} - \frac{\rho^7}{2} + \cancel{\frac{\rho^5}{2}} \right) d\vartheta\, d\rho$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\vartheta \right] \left[\int_0^1 \left(\frac{\rho^3}{2} + \frac{\rho^5}{4} - \frac{\rho^7}{2} - \frac{\rho^9}{4} \right) d\rho \right] =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{8} \rho^4 + \frac{1}{24} \rho^6 - \frac{1}{16} \rho^8 - \frac{\rho^{10}}{40} \right]_0^1 =$$

$$\int_{\Omega} = \int_{\Omega_3} - \int_{\Omega_4} = \frac{8}{3}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

$$\Omega_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+z^2 \leq y \leq 2 \right\}$$

$$\Omega_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 1+x^2+z^2 \leq y \leq 2 \right\}$$

Ω_3 $\quad x^2+z^2 \leq y \leq 2$ $\qquad$ Ω_4 $\quad 1+x^2+z^2 \leq y \leq 2$

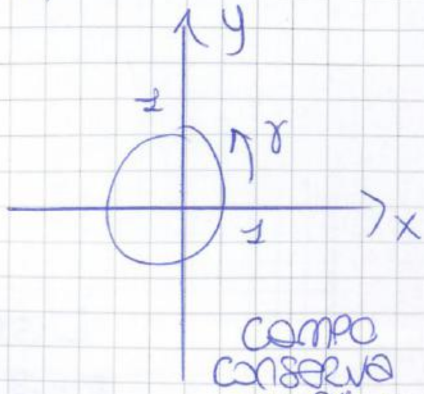
$x^2+z^2 \leq 2$ $\qquad$ $x^2+z^2 \leq 1$

Fili // asse y $\qquad$ Fili // asse y

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 392

(2) $\int_\gamma F \cdot dP$, $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{y}{x^2+y^2} \right)$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$



x DEF:

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$F(\gamma(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t = 0$

CAMPO CONSERVATIVO!! =

$$\int_0^{2\pi} 0\, dt = 0 \quad ✓$$

(3) $\int_\gamma F \cdot dP$, $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ CUGINO ANTIPATICO

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

x DEF:

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$F(\gamma(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ $\quad \gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \quad ✓$$

INTEGRALI DI LINEA

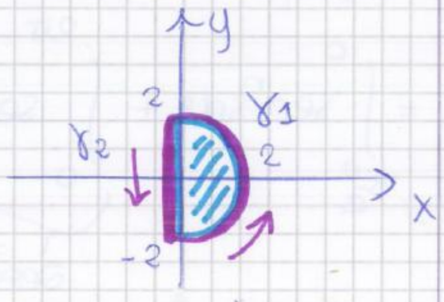
① CALCOLO $\int_\gamma F \cdot dP$ con $F(x,y,z) = (y, xz, xy)$
e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$F(\gamma(t)) = (\operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t \cos t)$$
$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos t)$$
$$" \cdot " = -\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t \cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos^2 t =$$
$$= \operatorname{sen} t\,(-\operatorname{sen} t + 2\cos^2 t)$$ SOSTITUISCO

$$\int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t)\, dt =$$
$$= \left[-\frac{1}{2}(t - \operatorname{sen} t \cos t) - \frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi} =$$
$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi - \cancel{\frac{2}{3}} + \cancel{\frac{2}{3}} = -\pi \ \checkmark$$

② CALCOLARE $\int$ DI LINEA DEL CAMPO $F(x,y) = (xy, x^2+y^2)$ LUNGO IL BORDO DEL SEMICERCHIO DI CENTRO $O=(0,0)$ E RAGGIO 2 NEL SEMIPIANO $x \geq 0$ PERCORSO IN VERSO ANTIORARIO.

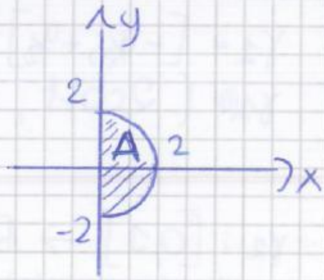


- DISEGNO
- DEVO TROVARE UNA PARAMETRIZZAZIONE
- ∂ BORDO = RETTA + SEMIC.
- γ è una curva regolare a tratti x gli spigoli $(0,2)$ e $(0,-2)$
- $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP \ !$$

SECONDO MODO: USO GREEN

$$\oint_{\gamma} F \cdot dP = \oint_{\partial\gamma} F \cdot dP = \qquad F = (f_1, f_2)$$



$$= \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy =$$

$$= \int_A (2x - x)\, dx\,dy = \int_A x\, dx\,dy$$

x-semplice
y-semplice
coord. polari

$$\int_{A'} \rho^2 \cos\theta \, d\rho\, d\theta \quad \text{con } A' = [0,2] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

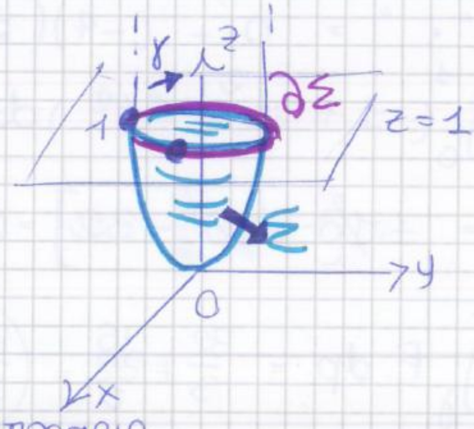
$$\left[\int_0^2 \rho^2 d\rho\right]\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\right] = \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^2 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{8}{3}\right]\left[1 - (-1)\right] = \frac{16}{3} \checkmark$$

x facile e con meno calcoli

3. Calcolare $\int$ di linea del campo $F(x,y,z) = (y, -x, z^2)$ lungo la curva γ che parametrizza il bordo di $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = y^2 + x^2, \ x^2 + y^2 \le 1\}$ inducendo su di esso un orientamento positivo rispetto al vettore normale uscente dal paraboloide $z = x^2 + y^2$.

attenzione al verso di γ!
γ è una circo di raggio 1 e centro in $(0,0,1)$



$$\gamma(t) = (x,y,z) \,/\, \begin{cases} z = y^2 + x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \pm \operatorname{sen} t, 1)$ + antiorario
− orario

attenzione al verso

DEVO TROVARE σ PARAMETRIZZ. DI UNA SUPERFICIE SFERICA

$\sigma\,[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ $\quad\theta$ = COLATITUDINE $\quad\phi$ = LONGITUDINE

$$\sigma(\theta,\phi)=(2\,\text{sen}\,\theta\cos\phi,\ 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi,\ 2\cos\theta)$$

$$N(\theta,\phi)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\theta\,\text{sen}\,\phi & -2\,\text{sen}\,\theta \\ -2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi & 2\,\text{sen}\,\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(+4\,\text{sen}^2\theta\cos\phi,\ +4\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\phi,\ 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\cos^2\phi + 4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}^2\phi)$$

$$=(4\,\text{sen}^2\theta\cos\phi,\ 4\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\phi,\ 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)$$

$$\|N(\theta,\phi)\|=\sqrt{16\,\text{sen}^4\theta+16\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}=4|\text{sen}\,\theta|=4\,\text{sen}\,\theta$$

$\forall\, 0\le\theta\le\pi$ $\quad \text{sen}\,\theta\ge 0$

$$f(\sigma(\theta,\phi)) = 4\,\text{sen}^2\theta$$

$$\text{"}\quad\text{"}\quad = 16\,\text{sen}^3\theta$$

$$K=[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

$$\int_K 16\,\text{sen}^3\theta\,d\theta\,d\phi = 16\left[\int_0^\pi \text{sen}^3\theta\,d\theta\right]\left[\int_0^{2\pi} d\phi\right]=$$

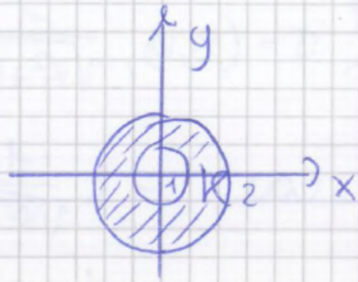
$$16\left[\int_0^\pi \text{sen}^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\right]2\pi=$$

$$=32\pi\left[\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\right]=$$

$$=32\pi\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = +\frac{128}{3}\pi$$

$$\int_K (x^2+y^2)\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

COOR. POLARI



$$\int_{K'} \rho^2\sqrt{1+\rho^4}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$K' = [1,2]\times[0,2\pi]$$

$$\int_{K'} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\,d\rho\,d\theta =$$

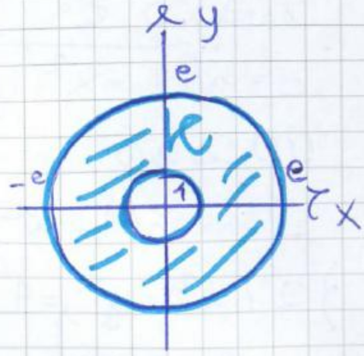
$$\frac{1}{4}\int_1^2 4\rho^3\sqrt{1+\rho^4}\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \cancel{2}\pi\,\frac{1}{\underset{\cancel{2}}{4}}\left[(1+\rho^4)^{3/2}\right]_1^2 \frac{\cancel{2}}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}\left[(1+16)^{3/2}-(2)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{3}\left(17^{3/2}-2^{3/2}\right)$$

$$\frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-\frac{17}{64}\sqrt{17}\right)$$

USO COOR. POLARI :

$K' = [1, e] \times [0, 2\pi]$



$$\int_K = \frac{\log(\rho^2)}{\sqrt{\rho^2}} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{K'} \frac{\log(\rho^2)}{\cancel{\rho}} \cancel{\rho}$$

$$= 2 \int_K \log\rho \, d\rho \, d\theta = 2 \left[\int_1^e \overset{\text{PARTI}}{\log\rho \, d\rho} \right] 2\pi =$$

$$= 4\pi \left[\rho(-1 + \log\rho) \right]_1^e = 4\pi \left[\underbrace{e(-1+1)}_{0} + 1(+1) \right] = 4\pi$$

INTEGRALI DI FLUSSO DI UN CAMPO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma \underset{\Sigma = \sigma(K)}{=} \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v) \, du \, dv$$

$N(u,v)$ è $\perp$ a Σ nel punto $\sigma(u,v)$
entrante o uscente!

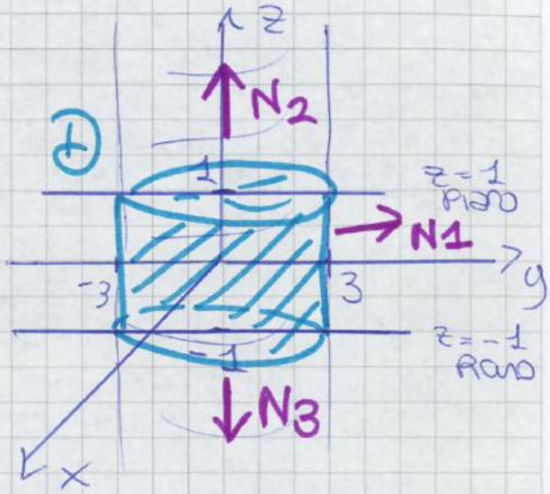
$N(u,v)$ dipende dall'orientamento di Σ

① Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (3xz, 3yz, x^2+y^2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ orientata in modo che il versore normale (al piano tangente) a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z (DA QUIZ)

$$= \cancel{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\cancel{4}} 2^4 = \pi 2^5 = 32\pi \checkmark$$

(2) CALCOLARE IL FLUSSO USCENTE DI $F(x,y,z) = (x, 0, z^2)$ DAL BORDO DI $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2 \le 9}_{\text{CILINDRO}}, -1 \le z \le 1\}$.

DISEGNO D: BARATTOLO



$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma \quad \text{con}$$

$$\partial D = \underbrace{\Sigma_1}_{\text{lat}} \cup \underbrace{\Sigma_2}_{\text{cerchio}} \cup \underbrace{\Sigma_3}_{\text{cerchio}}$$

$$= \int_{\Sigma_1} \ldots + \int_{\Sigma_2} \ldots + \int_{\Sigma_3} \ldots =$$

(Σ_1) SUPERFICIE LATERALE CILINDRO

$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad x^2+y^2 = 9, -1 \le z \le 1\}$

PARAM. Σ_1 USO "COORD. CILINDRICHE"

$\Sigma_1 = \sigma_1(\theta, z), \quad \sigma_1 : k_1 \to \mathbb{R}^3, \sigma_1(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, z)$

$k_1 = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \theta \le 2\pi, -1 \le z \le 1\}$

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma = \int_{k_1} F(\sigma_1(\theta, z)) \cdot N(\theta, z) \, d\theta \, dz$$

$F(\sigma_1(\theta, z)) = (3\cos\theta, 0, z^2)$

$N_1(\theta, z) \perp$ a Σ_1 in $\sigma_1(\theta, z)$ e uscente

$$N(\theta, z) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta}(\theta, z) \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(\theta, z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3\sin\theta & 3\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Sigma_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ z = -1, \ x^2+y^2 \leq 9\}$

$\Sigma_3 = \sigma_3(K_3)$, $\sigma_3 : K \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_3(x,y) = (x,y,-1)$

$F(\sigma_3(x,y)) = (x,0,+1)$

$N(x,y) = (0,0,1)$ non è uscente

$N_3(x,y) = (0,0,-1)$ ora è uscente! $= -N(x,y)$

$$\int_\Sigma F\cdot n \, d\sigma = \int_{K_3 = \text{cerchio}, r=3} F(\sigma_3(x,y))\cdot N_3(x,y)\, dx\,dy = \int_{K_3} -1 \, dx\,dy$$

$= -m(K_3) = -9\pi$ ✓ uguale e opposto xké l'insieme è simmetrico (caso speciale) e x il campo

$$\text{TOT} = \int_{\partial D} F\cdot n\, d\sigma = 18\pi + \cancel{9\pi} - \cancel{9\pi} = \boxed{18\pi}$$ ✓

★ alternativa: applico Gauss! (molto + breve!)

$$\int_{\partial D} F\cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$\operatorname{div} F(x,y,z) = 1 + 0 + 2z$

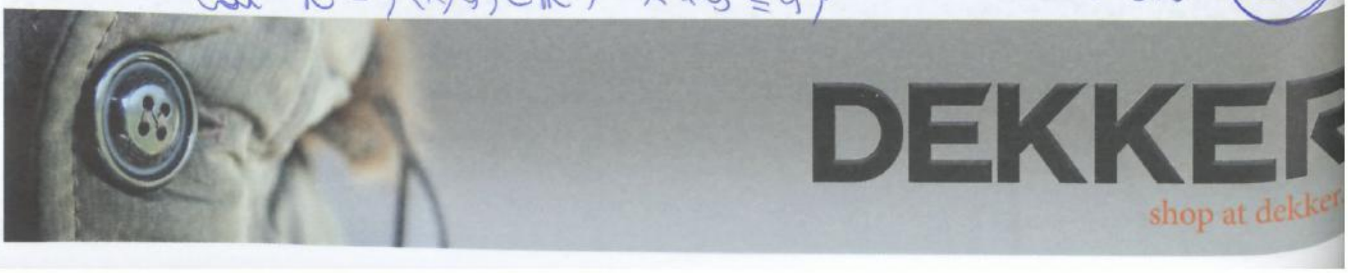
$= \int_D (1+2z)\, dx\,dy\,dz$ su D = cilindro $\begin{cases} -1 \leq z \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$

- coordinate cilindriche
- x fili // asse z (z compreso tra 2 funz così.)

$$\int_K \left[\int_{-1}^{1} (1+2z)\, dz\right] dx\,dy = \int_K \left[z+z^2\right]_{-1}^{1} dx\,dy =$$

$$= \int_K 2 + \cancel{1} - \cancel{1} \, dx\,dy = \int_K 2\, dx\,dy = 2\int_K dx\,dy = 2m(K)$$

con $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 9\}$ $= 2\cdot 9\pi = 18\pi$



alternativa

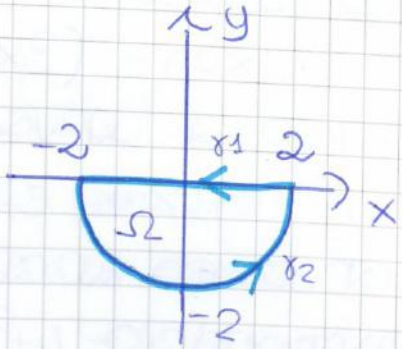
$$\int_{\bigtriangledown} = \underbrace{\int_{\bigtriangledown \atop \partial D}}_{\text{GAUSS}} \quad \int_{\downarrow S \text{ tappo}}$$

(flusso entrante)
metto il meno x Gauss
mi da l'uscente

$F \in \mathbb{R}^2$

① DEFINIZIONE

BISOGNA PARAMETRIZZ. Ω



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dp = \int_{\gamma_1} F \cdot dp + \int_{\gamma_2} F \cdot dp$$

QUANDO FACCIO $F(\gamma(t))$ ARRIVANO I PROBLEMI...

② USO GREEN!

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dp = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\,dy =$$

$$= \int_{\Omega} (-5 - (12y - 5 - x))\, dx\,dy =$$

$$= \int_{\Omega} (\cancel{5} - 12y + \cancel{5} + x)\, dx\,dy = \int_{\Omega} (x - 12y)\, dx\,dy$$

USO COOR. POLARI

$$\int_{\Omega'} (\rho\cos\theta - 12\rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

→ OTTENGO RACCOLGO ρ^2

$$\Omega' = [0,2] \times [\pi, 2\pi]$$

$$= \int_{\Omega'} \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta - \int_{\Omega'} 12\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_\pi^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + 12 \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_\pi^{2\pi} -\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}8(0) + \overset{4}{\cancel{12}}\left(\frac{1}{\cancel{3}}8\right)(2) = 64 \checkmark$$

$= \left(27 - \frac{81}{4}\pi\right)$ ✓

se la percorrenza era oraria (meno −)

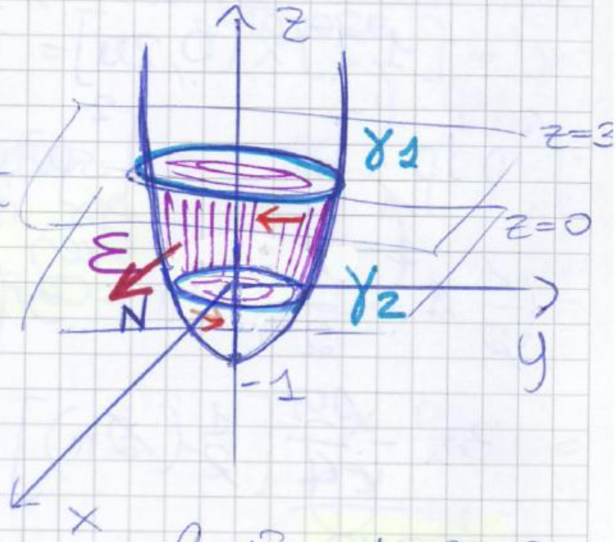
③ Calcolare l'integrale di linea del campo $F(x,y,z) = (y, x^3, z^2)$ lungo il bordo della superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2+y^2-1,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ percorso in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto come il versore normale uscente dal paraboloide $z = y^2 + x^2 - 1$

① Def

$$\oint_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

γ_1 arco su, γ_2 arco giù

$\partial\Sigma = \gamma_1 + \gamma_2$



② Stokes

$$\oint_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n \, d\sigma$$

$$\mathrm{rot}F = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^3 & z^2 \end{vmatrix} = (0, +0, 3x^2 - 1)$$

$x^2+y^2 = 1,\ z = 0$
$x^2+y^2 = 4,\ z = 3$

$\mathrm{rot}F = (0, 0, 3x^2 - 1)$ se $g(x,y) = x^2+y^2-1$

$N_g(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = (-2x, -2y, 1)$ è entrante

$N(x,y) = (2x, 2y, -1)$ uscente

$\Sigma = \sigma(K)$, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ $\sigma(x,y) = (x, y, x^2+y^2-1)$

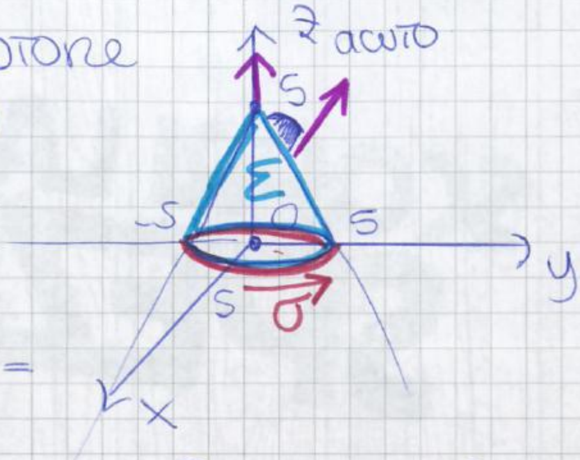
$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

$\mathrm{rot}F(\sigma(x,y)) = (0, 0, 3x^2 - 1)$

① DEF

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \int_K \text{rot}F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx\,dy$$

È DIFFICILE CALCOLARE IL ROTORE DI F! NO!! O.o

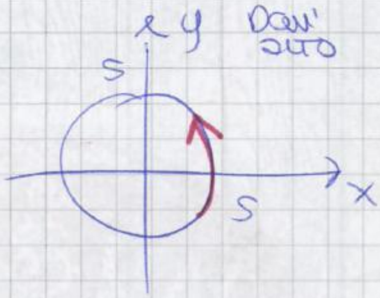


② USO STOKES: !!!

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot n \, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} F \cdot dP =$$

COSÌ NON CALCOLO IL ROTORE

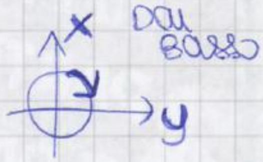
$$= \int_\gamma F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$



DOBBIAMO TROVARE UNA PARAMETRIZ. DI $\partial\Sigma$ → CON 3 COMPONENTI, XK SONO NELLO SPAZIO

$\gamma(5\cos t, 5\sin t, 0)$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$



$\gamma'(t) = (-5\sin t, 5\cos t, 0)$

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot (-5\sin t, 5\cos t, 0) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 0 - 4(5)\cos t, 20\cos t - 2 \cdot 25\cos^2 t(5)\sin t) \cdot$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, -20\cos t, 20\sin t - 250\sin^2 t\cos t) \cdot (-5\sin t, 5\cos t, 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} (-100\cos^2 t) \, dt = -100\left[\frac{1}{2}(t + \sin t\cos t)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -100\pi \checkmark$$

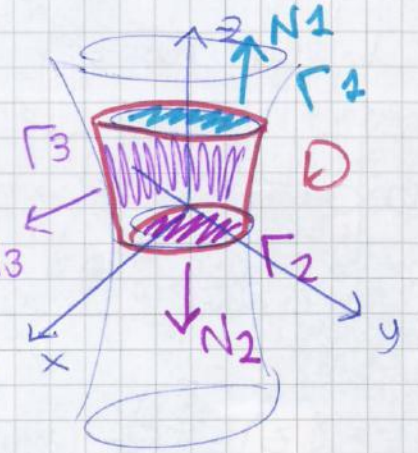
$$\frac{6\pi}{5}\cdot 32\left[+1-\frac{1}{3}\right]+\frac{16\pi}{3} = \frac{\cancel{6}^{2}\pi}{5}32\cdot\frac{2}{\cancel{3}}+\frac{16\pi}{3} = \frac{384+80}{15}$$

$$= \frac{464}{15}\pi \quad ✓$$

⑥ Calcolare il flusso uscente di $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ dal bordo di $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2-z^2 \le 4,\ 0 \le z \le \sqrt{5}$

1 modo: def.

D iperboloide a 1 falda compreso tra 2 piani



2 modo: Gauss

$$\int_{\partial D} F\cdot n\, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_D (3x^2+3y^2+1)\, dx\,dy\,dz$$

Guardo D x integrare x strati // piano xy

$$x^2+y^2-z^2 \le 4$$
$$x^2+y^2 \le z^2+4$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le z \le \sqrt{5},\ (x,y) \in D_z\}$$
$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le z^2+4\}$$

$$\int_D (3x^2+3y^2+1)\, dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{5}} \left[\int_{D_z} (3x^2+3y^2+1)\, dx\,dy\right] dz$$

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & z \end{vmatrix} = (-x, 0, z-x)$$

$$\int_{\partial\Sigma} F\, dP = \int \mathrm{Rot}F(\sigma(x,y)) \cdot N_1(x,y)\, d\sigma$$

CURVA PERCORSA IN SENSO ANTIORARIO xke ORIENTATO POSITIVAMENTE

$\sigma: K \to \mathbb{R}^3$, $\Sigma = \sigma(K)$, $\sigma(x,y) = (x, y, x^2-y^2)$ cioè punta verso il basso

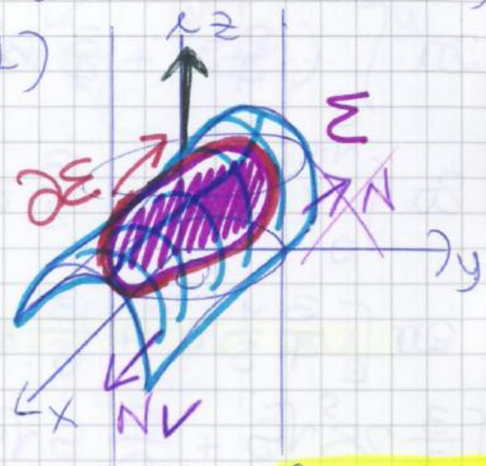
e $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

$\mathrm{ROT}F(\sigma(x,y)) = (-x, 0, x^2-y^2-x)$

$g(x,y) = x^2-y^2$

$N(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = (-2x, 2y, 1)$

$N(x,y) = -N_1(x,y) = (2x, -2y, -1)$



$\int_K \mathrm{rot}F(\sigma(x,y)) \cdot N_1(x,y)\, dx\,dy =$

$\int_K (-2x^2 - x^2+y^2+x)\, dx\,dy =$

$\int_K (-3x^2+y^2+x)\, dx\,dy =$ COOR POLARI $\Rightarrow \int_K x\,dy\,dx = 0$

$\int_{K'} (-3\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{K'} \rho^3(\sin^2\theta - 3\cos^2\theta)\, d\rho\, d\theta$

$K' = [0,1] \times [0, 2\pi]$ RETTANGOLO

$\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - 3\cos^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\left[-\frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{4}\left[-\frac{3}{2}\cdot 2\pi + \frac{1}{2}\pi 2\right] = -\frac{3}{4}\pi + \pi = -\frac{2}{4}\pi = -\frac{\pi}{2}$ V

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$F(\gamma(t)) = (\sin t, 0, \cos^2 t)$$
$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \, dt = -\left[\frac{1}{2}(t - \sin t \cos t)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi = -\pi \checkmark$$

CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

① Sia $F(x,y) = (3x^2+y, 2y+x)$
dire se F è conservativo e se sì determinare un potenziale f di F.

F è di classe C^∞. $F = (f_1, f_2)$

$$\boxed{C.S. : \begin{cases} \Omega = \text{dom} F \text{ semplicemente connesso} \\ CN = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \end{cases}}$$

$\mathbb{R}^2$ è sempl. conn. $=$ dom F ✓

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1 = 1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \checkmark$$

F è conservativo, per il teorema (C.S. per i campi di classe C^1)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 392

② $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$
CONSERVATIVITÀ + POTENZIALE

F è di classe C^∞, $\text{dom}F = \mathbb{R}^3$ è sempl. connesso

$\text{rot}\,F(x,y,z) = 0 \quad \forall x,y,z \in \text{dom}\,f$

$$\text{rot}\,f(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1, 1-1, 1-1) = (0,0,$$

F è conservativo.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f_1(x,y,z) = y+z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = f_2(x,y,z) = x+z \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f_3(x,y,z) = x+y \end{cases} \quad \text{se } F = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = f(x,y,z) = \int (x+y)\,dz = xz + yz + C(x,y)$$

ora $\frac{\partial f}{\partial x} = \cancel{z} + \frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = y + \cancel{z}$

$\frac{\partial C}{\partial x}(x,y) = y \longrightarrow C(x,y) = \int y\,dx = xy + k(y)$

ora sostituisco $f(x,y,z) = xz + yz + xy + k(y)$

ora $\frac{\partial f}{\partial y} = z + x + k'(y) = x + z$

$\rightarrow k'(y) = 0 \longrightarrow k(y) = c,\ c \in \mathbb{R}$

QUINDI $f(x,y,z) = (x+z)z + xy + c,\ c \in \mathbb{R}$
e verifico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 392

QUINDI $f(x,y)=e^{xy}-yx^2+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(\pi y)+c,\ c\in\mathbb{R}$

TORNO AL CALCOLO:

$$\int_\gamma F\cdot dP = f(e,1)-f(1,0) = e^e-e^2+\cancel{\frac{1}{3}\operatorname{sen}\pi}-1+0-\cancel{\frac{1}{3}\operatorname{sen}}$$

$$\boxed{\int_\gamma F\cdot dP = e^e-e^2-1}$$ OK

④ CALCOLARE $\int_\gamma F\cdot dP$ DI $F(x,y)=\left(6xe^{3x^2+4y^2}+8y^2-5x,\ 8ye^{3x^2+4y^2}+16xy+7\right)$
LUNGO LA CURVA
$\gamma\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\to\mathbb{R}^2 \,/\, \gamma(t)=(\cos^6 t,\sin^5 t)$

MODO ① DEF

MODO ② CONS.

$$\int_\gamma F\cdot dP = f(\gamma(\pi))-f\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = f(1,0)-f(0,1)$$

CONTROLLO SE F È CONS.

$\operatorname{dom} F=\mathbb{R}^2$ S.C., F È DI CLASSE C^1 SU $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 16y+48xye^{3x^2+4y^2} = 16y+48xye^{3x^2+4y^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$\rightarrow$ F È CONSERVATIVO

CERCO UN POTENZIALE $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ DI F SU $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xe^{3x^2+4y^2}+8y^2-5x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8ye^{3x^2+4y^2}+16xy+7$$

$$f(x,y)=\int\left(6xe^{3x^2+4y^2}+8y^2-5x\right)dx = c(y)-\frac{5}{2}x^2+8y^2x+e^{3x^2+4y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = c'(y)+\cancel{16xy}+\cancel{8ye^{3x^2+4y^2}} = \cancel{8ye^{3x^2+4y^2}}+\cancel{16xy}+7$$

$$c(y)=\int c'(y)\,dy=\int 7\,dy = 7y+k,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\rightarrow f(x,y)=e^{3x^2+4y^2}+8y^2x-\frac{5}{2}x^2+7y+k,\ k\in\mathbb{R}$$

⑥ sia $F(x,y) = \left(|x^2-y^2| + 3xy \,,\, \frac{3}{2}x^2 + x(y-|y|)\right)$
il campo F è conservativo sull'insieme

ⓐ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| < -y\}$

ⓑ $\{ \quad // \quad |x| < y \}$

ⓒ $\{ \quad // \quad |x| < |y| \}$

ⓓ $\{ \quad |x| > |y| \}$

ⓔ $\{ \quad x > y \}$

$F(f_1, f_2)$

dove $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$?

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -2y + 3x & x^2-y^2>0 \,,\; x^2>y^2 \\ 2y + 3x & x^2-y^2<0 \,,\; x^2<y^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 3x & y>0 \\ 3x+2y & y<0 \end{cases}$$

coincidono quando $x^2-y^2<0$ e $y<0$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \iff \begin{cases} x^2-y^2<0 \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2<y^2 \\ y<0 \end{cases}$$

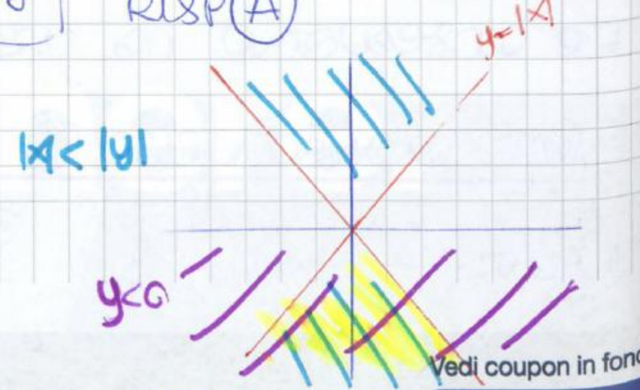
$$\iff \begin{cases} |x|<|y| \\ y<0 \end{cases} \iff \begin{cases} y<-|x| \,,\; \cancel{y>|x|} \\ y<0 \end{cases}$$

non va bene con

$$\sqrt{t^2} = |t|$$

$$\iff y<-|x| \iff \boxed{|x|<-y}$$

RISP Ⓐ



SERIE NUMERICHE

1) STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

CATALOGHIAMO LA SERIE

$a_n \geq 0, \ \forall n$ è una serie a termini positivi.
Quindi o converge o diverge positivamente.
Controlla la condizione necessaria:

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{n}{(n+1)!} = 0 \qquad n = o(n!) \quad n = o((n+1)!), \ n \to \infty$$

Vale la C.N. → non possiamo concludere nulla!

CRITERIO DEL RAPPORTO: (uso con i fattoriali)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n}$$

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)!$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{n} = \frac{n+1}{(n+2)\,n}$$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n+1}{n^2+2n} = \lim_n \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n})} = 0$$

x il criterio del rapporto la serie converge.

CERCO LA SOMMA:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} =$$

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+3} = \frac{Bk + Ak + 3A}{k(k+3)}$$

$$Bk + Ak + 3A = 1 \iff \begin{cases} A+B=0 \\ 3A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{k} + \frac{-\frac{1}{3}}{k+3} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$$

non è telescopica $\quad \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} \dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$ DIPENDE DA 6 TERMINI (xk c'è n+3)

$$\lim_n S_n = \frac{1}{3}\lim_n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$$

③ STUDIO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+n^2-1}$ $\quad a_n \geq 0, \forall n$ T.POS < CONV. / DIV. POS.

$$\frac{2n-1}{n^3+n^2-1} \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}, \quad n \to \infty$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ARMONICA $\rightarrow$ CONVERGE x l'ALGEBRA DELLE SERIE $\rightarrow$ x IL CRIT. DEL CONFR. ASINT. $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2n-1}{n^3+n^2-1}$ CONVERGE

$\forall n \geq 3 \quad \log n \geq 1 = \log e$

$$\frac{1}{\log n} \leq 1$$

$$\frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 3$$

armonica $p > 1$ converge

x il criterio del confronto $\sum \frac{1}{n^2 \log n}$ conv.

⑥ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, $a_n = \frac{1}{\log n} > 0$ S.T.P < conv. / div. ris.

$\log n = o(n^p) \quad \forall p > 0 \quad n \to \infty$

$\frac{1}{n^p} = o\left(\frac{1}{\log n}\right) \quad \forall p > 0, \ n \to \infty$

per $p = 1$, $\frac{1}{n^p}$ diverge x C.C.A $\sum \frac{1}{\log n}$ div.

posso prenderlo xk la relazione vale x $\forall p > 0$.

($p = 2$ è una scelta utile x il nostro scopo)

⑦ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$, $a_n = \frac{1}{n \log n} \geq 0$ S.T.P < conv. / div. ris.

$\frac{1}{n^p} = o\left(\frac{1}{\log n}\right) \quad \forall p > 0, \ n \to \infty$

$\frac{1}{n^{p+1}} = o\left(\frac{1}{n \log n}\right) \quad \forall p > 0, \ n \to \infty$

$\to \sum \frac{1}{n^{p+1}}$ armonica converge xk $p + 1 > 1, \ \forall p > 0$

x il CCA non posso dire niente!

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} 6^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

$a_n = 6^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{3} \geq 0 \quad, \forall n \geq 1$ S.T.P < CONV. / DIV. POS.

CRITERIO RADICE

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{6^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}} = \lim_n 6\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} =$$

$$= 6\lim_n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \frac{6}{e} > 1$$ LIMITE NOTEVOLE

X IL CRITERIO DELLA RADICE, $\sum a_n$ DIVERGE.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$, $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geq 0$, S.T.P < CONV. / DIV.

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} = \lim_n\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1$$

X IL CRITERIO DELLA RADICE → NSPCN!

NON FACCIO IL CRITERIO DEL RAPPORTO!

(XK lim RAPP o = 1, o ∄)

CONDIZIONE NECESSARIA

$$\lim_n a_n = \lim_n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_n\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{e}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \neq$$

NON VALE LA COND. NEC.

QUINDI $\sum a_n$ DIVERGE!

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$ SIA FATTORIALE CHE ESPO → MEGLIO RAPPORTO!!

$a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}} \geq 0, \forall n$ S.T.P < CONV. / DIV. POS.

(12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^n}{2^{n!}}$, $a_n \geq 0$ $<$ CON / DIV+

PROVO A FARE

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{2^{n!}}} = \lim_n \frac{n!}{\sqrt[n]{2^{n!}}} = \lim_n \frac{n!}{2^{\frac{n!}{n}}}$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$\lim_n \frac{n!}{2^{\frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{n}}}} = \lim_n \frac{n!}{2^{(n-1)!}}$$

$2^k = o(k!)$, $k \to \infty$ MA NON SERVE...

USO IL CRITERIO DEL RAP. X LA SUCC

$$\frac{n!}{2^{(n+1)!}} = b_n$$

$$\lim_n \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_n \frac{(n+1)!}{2^{(n)!}} \frac{2^{(n-1)!}}{n!} =$$

$$\lim_n \frac{(n+1)\cancel{n!}}{2^{n(n-1)!}} \frac{2^{(n-1)!}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{2^{n(n-1)!-(n-1)!}} = \lim_n \frac{n+1}{2^{(n-1)!(n-1)}} = ($$

$0 < 1 \rightarrow \lim_n b_n = 0$

QUINDI $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n b_n = 0 < 1$

X IL CRIT. DELLA RADICE, $\sum a_n$ CONVERGE

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3+2n^2-4}{n^2\sqrt[3]{n^5} - 12\log(n^{14}+1)}$

NUM POS $\forall n \geq 1$
DEN ~~POS~~ POS } $a_n \geq 0$ DEFINITIVAM. (CIOÈ $\forall n \geq n_0$)

x il crit del confr $\sum |a_n|$ conv!

$\sum a_n$ conv. ass $\to$ x il crit. conv. ass $\to$ $\sum a_n$ conv.

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$

$a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n-\log n}$ $\quad b_n \geq 0$ $\quad$ S.T. segno alterno ("variab")

$\sum |a_n| = \sum \dfrac{1}{n-\log n} \geq 0$ $\quad$ < conv / div pos

$\dfrac{1}{n-\log n} = \dfrac{1}{n+o(n)} \sim \dfrac{1}{n}, \quad n \to \infty$

$\log = o(n), \quad n \to \infty$

$\downarrow$

diverge

x il C.C.A $\sum |a_n|$ diverge $\to$ $\sum a_n$ non converge ass, e non posso concludere altro!

uso criterio di Leibniz

(1) $b_n \geq 0$ $\quad (a_n = (-1^n) b_n)$

(2) $\lim_n b_n = 0$ $\quad$ x $\lim \frac{1}{n} = 0$

(3) b_n decres.? $\forall n \geq 1, \quad b_{n+1} \leq b_n$

Dif di 2 succ. cresc....

considero la fnz. associata:

mai derivare la successione! ma solo la funzione associata

$f(x) = \dfrac{1}{x-\log x}, \quad \forall x \geq 1$

$f'(x) = -\dfrac{1-\frac{1}{x}}{(x-\log x)^2} = -\dfrac{x-1}{x(x-\log x)^2} \leq 0$ sempre

$f(x) = \frac{x}{2x^2-1}, \quad \forall x \geq 1$

$f'(x) = \frac{2x^2-1-4x^2}{(2x^2-1)^2} = -\frac{1+2x^2}{(2x^2-1)^2} \leq 0$

$f'(x) \leq 0 \rightarrow f$ decr $\rightarrow b_n$ decr

x il criterio di Leibniz $\exists$ $\sum a_n = \sum (-1)^n b_n$ converge

(18) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$ ≥ 0

è una serie a segno alterno

$\sum |a_n| = \sum \left| (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n} \right| = \sum \frac{1}{n+(-1)^n}$ S.T.P < conv. / div.

$\frac{1}{n+(-1)^n} \sim \frac{1}{n}$ diverge

x il C.C.A, quindi divergono entrambe

$\sum |a_n|$ diverge, $\sum a_n$ non converge assolutam.

$b_n = \frac{1}{n+(-1)^n} \geq 0$ ✓, $\lim_n b_n = 0$ ✓, b_n decrescente? NO

dimo x esercizio
- non posso usare la funz. associata

$b_{n+1} \leq b_n, \forall n \geq 2$

$\frac{1}{n+1+(-1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+(-1)^n}$

$\left. \begin{array}{l} b_{2n+1} \geq b_{2n} \\ b_{2n-1} \geq b_{2n} \end{array} \right\}$ non è né crescente né decrescente

Non si può applicare Leibniz

Uso algebra serie!

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n} \cdot \frac{n-(-1)^n}{n-(-1^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-(-1)^n)}{n^2-1} =$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 392

$$f'(x) = \frac{x^2+\cancel{5x}+\cancel{6}-2x^2-\cancel{5x}-2x-5}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x+3)^2(x+2)^2} \leq 0$$

DERIVATA NEGATIVA, → $f(x)$ DECRESCENTE → b_n è DECR.
x il CRITERIO DI LEIBNIZ
Σa_n CONVERGE!

② $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^{n+1}-(n+2)!}{(2\boxed{-3n})^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^{n+1}-(n+2)!}{(-1)^{n+2}(3n-2)^{n+2}}$$

TERMINE DI SEGNO ALTERNO

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^{n+1}-(n+2)!}{(-1)^n(-1)^2(3n-2)^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+3)^{n+1}-(n+2)!}{(3n-2)^{n+2}}$$

$$\boxed{(-1)^n = \frac{1}{(-1)^n}}$$

$n! = o(n^n)$, $n \to +\infty$

$(n+2)! = (n+2)(n+1)n! = o((n+2)(n+1)n^n)$, $n \to \infty$

$(2n+3)^{n+1} = 2^{n+1}n^{n+1}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n+1}$

$(n+2)! = o(o(2n+3)^{n+1}) = o((2n+3)^{n+1})$, $n \to +\infty$

→ $b_n \geq 0$ S.T.S. ALTERNO x ALT.

$$\Sigma|a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+3)^{n+1}-(n+2)!}{(3n-2)^{n+2}}$$

$$\frac{(2n+3)^{n+1}-(n+2)!}{(3n-2)^{n+2}} \sim \frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n-2)^{n+2}}, \; n \to +\infty$$

PROVO $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n-2)^{n+2}}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}n^{n+1}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n+1}}{3^{n+2}n^{n+2}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n+2}}} =$$

$$\lim_n \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{2\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n+1}}{9n\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n+2}}} = \frac{2}{3} < 1$$ x. CRIT. RADICE Σa_n CONVERGE

x CUI $\Sigma|a_n|$ x il CRIT. C. AS. CONVERGE.
Σa_n CONVERGE ASSOLUTAMENTE

PROVO LEIBNIZ

$b_n = e^{-S_n} \geq 0$

① $\lim_n b_n = \lim_n e^{-S_n} = 0$?

se $\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \lim_n S_n \to +\infty$,
cioè $S_n \to \infty$, $n \to \infty$

$\lim_n e^{-S_n} \simeq \lim_n e^{(-\infty)} \simeq = 0$! ✓

② b_n è decrescente?

non posso passare alla funzione associata

$b_n = e^{-S_n} = \frac{1}{e^{S_n}}$

$S_n \geq S_{n-1}$

se $a_n \geq 0 \to S_n \geq 0 \to S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$

QUINDI (S_n) è crescente $\to (e^{S_n})$ è crescente
(GUARDO NELLE DIMOSTRAZIONI)

$b_n = \frac{1}{e^{S_n}}$ è decrese ✓

QUINDI x LEIBNIZ
$\sum (-1)^n b_n$ CONVERGE.

ORA CONTROLLO $\sum |(-1)^n b_n| = \sum e^{-S_n} = \sum \frac{1}{e^{S_n}}$

$\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE, $\exists S_n$ tale che $n = e^{S_n}$? sì: $S_n = \log n$

$\exists a_n / S_n = \log n$? sì

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\log(n+1) - \log n] \xrightarrow{\text{la cui}} S_n = \log n$

QUINDI $a_n = \log n - \log(n-1)$, $\forall n \geq 2$

x algebra serie

$\sum \left(|b_n|^3 + sen^2(b_n) \right)$ converge

x il crit. confronto

$\sum | b_n^3 + sen^2(b_n) |$ converge

$\to$ la serie data converge!

SERIE di POTENZE

① $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$

devo cercare il raggio

$$\boxed{a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}}$$

coeff. binomiale

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n)!\,(n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad \text{T. rapporto}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \text{ma } a_n \geq 0 = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}} \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 4 \quad \text{per il teorema del rapporto} \quad R = \frac{1}{4}$$

conv. ass in $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

unif in $[-k, k] \quad \forall\, 0 < k < \frac{1}{4}$

controllo gli estremi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 392

SERIE FOURIER

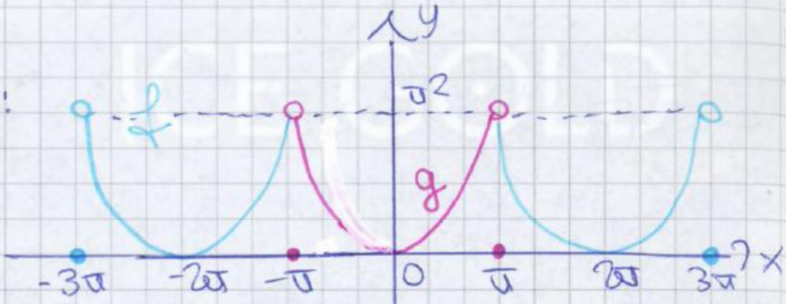
11 Gennaio 2013

(1) SCRIVO LA SERIE DI FOURIER DELLA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ OTTENUTA PROLUNGANDO X PERIODICITÀ A TUTTO $\mathbb{R}$ LA FUNZIONE

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$$

E DISCUTO LA CONVERGENZA QUADRATICA PUNTUALE E UNIFORME DELLA SERIE DI FOURIER DI f

g È DISCONTINUA → f È DISCONTINUA



- STUDIO CONV. QUADR:

$f = g$ in $[-\pi, \pi]$

g È CONTINUA A TRATTI IN $[-\pi, \pi]$ (PUNTI DI DISC. SALTO)

QUINDI, X IL TEOREMA SULLA CONV. QUADR, LA SERIE DI FOURIER DI f CONVERGE QUADRATICAMENTE A f.

- STUDIO CONV. PUNTUALE:

f È CONTINUA A TRATTI IN $[-\pi, \pi]$, CONTROLLO SE $\exists$ LE PSEUDO DERIVATE

g È DERIVABILE IN $(-\pi, \pi)$ → f È DERIVABILE IN $\forall$ $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$
PUNTI DISPARI

X IL TEOREMA DELLA CONV. PUNT., $\forall x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ LA SERIE DI FOURIER DI f CONVERGE IN x A $f(x)$ (XK f È ANCHE CONTINUA)

g DISCONTINUA IN $x = \pm\pi$ → f È DISCONTINUA $\forall$ $x = (2k+1)\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, MA LE PSEUDO-DERIVATE?

$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x'} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k}$ DOVE $f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x)$

SE' C^1 A TRATTI IN $[-\pi,\pi]$ $\rightarrow$ LA SERIE DI FOURIER DI $S=$ CONVERGE UNIFORM A S SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SCRIVIAMO LA SERIE DI FOURIER DI f:

g è PARI, $\rightarrow$ f è PARI $\rightarrow$ $\forall n \geq 1 \rightarrow b_n = 0$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{con}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx =$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\cancel{\pi}}\frac{1}{3}\pi^{3^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

e $\forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2\cos(nx)}_{\text{pari}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \quad \text{PARTI} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\cdot x^2\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2}{n}x\operatorname{sen}(nx)\,dx\right\} \overset{\text{PER PARTI}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{0 - \frac{2}{n}\left[\left[-\frac{1}{n}(\cos(nx))x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)\,dx\right]\right. =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{2}{n}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi}\right]\right.$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\left\{\frac{2\cancel{\pi}}{n^2}\cos(n\pi)\right] = \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -5x\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 5\pi\cos x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-5x\,\mathrm{sen}\,x\right]_{0}^{-\pi} + 5\int_{-\pi}^{0}\mathrm{sen}\,x\,dx + \left[5\pi\,\mathrm{sen}\,x\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + 5(-\cos x)_{-\pi}^{0} + 5\pi(-1)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[5\left[-1 - -1\right] - 5\pi\right] = \frac{1}{\pi}(-10-5\pi) = -\frac{10}{\pi} - 5$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -5x\,\mathrm{sen}\,x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}} 5\pi\,\mathrm{sen}\,x\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[5x\cos x\right]_{-\pi}^{0} + 5\pi\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}(-5\pi + 5\pi) = 0$$

$$P_1(x) = \frac{5}{2}\pi - \left(\frac{10}{\pi} + 5\right)\cos x. \checkmark$$

• 2) uso Parseval!

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) =$$

$$= 2\pi a_0^2 + (a_1^2 + b_1^2)\pi + \pi\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\rightarrow \pi\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)^2|\,dx - 2\pi a_0^2 + \pi(a_1^2 + b_1^2$$

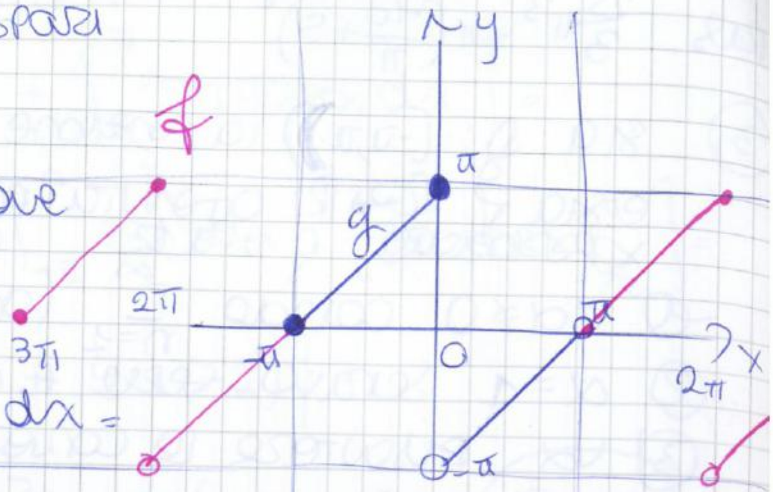
$$= -2\pi\left(\frac{5}{2}\pi^2\right)^2 + \pi\left(-\frac{10}{\pi} - 5\right)^2 + \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx$$

...

g è dispari $\to$ f dispari
$\to \forall n \geq 0,\ a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$, dove

$\forall n \geq 1$



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \operatorname{sen}(nx)}_{\text{pari}} dx =$$

dis disp

$$= \frac{1}{\pi} 2\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

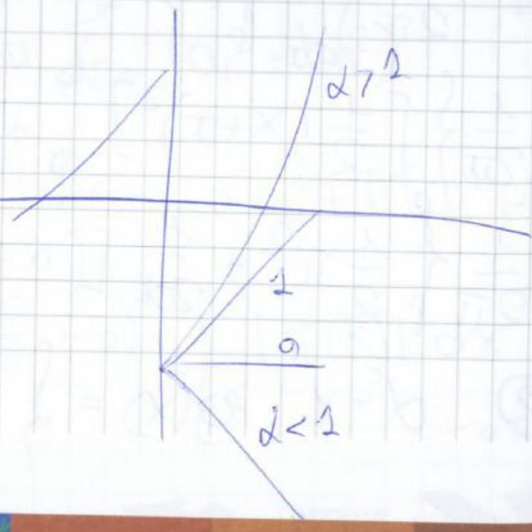
parti!
$$\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}(x-\pi)\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right\} =$$

$$\frac{2}{\cancel{\pi}}\left\{-\frac{\cancel{\pi}}{n} + \underbrace{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi}}_{0}\right\} = -\frac{2}{n} \checkmark$$

la serie di Fourier di f è

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) \checkmark$$

3) f continua a tratti



(2) Sia $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}$ $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \geq 1$.

Stesse domande di prima

(a) $\forall x \in [-1,1]$, (il limite puntuale è $f(x)=0, \forall x \in [-1,1]$)

$x = \pm 1 \to 0$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_n \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2} = 0$ $\quad x$ t.c. $-1<x<1 \to$ la radice sarà $\to 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty$

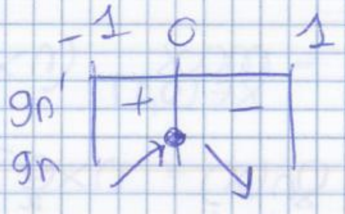
$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2} - 0 \right| = \sup_{x\in[-1,1]} \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2} =$

$= \max_{x\in[-1,1]} \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}$ Weierstrass (è continua su intervallo limitato)

$g_n(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}$

$g_n'(x) = \dfrac{1}{n^2} \dfrac{-2nx^{(2n-1)}}{2\sqrt{1-x^{2n}}} = -\dfrac{1}{n} \dfrac{x^{(2n-1)}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ $\quad \forall x \in (-1,1)$

$g_n'(x) = 0 \iff x = 0$ studio il segno



$x=0$ è di max per $g_n(x)$

$\max_{x\in[-1,1]} g_n(x) = g_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$

$\lim_n \dfrac{1}{n^2} = 0$ la funzione converge uniformemente a $f(x)=0$ in $[-1,1]$

(3) Sia $f_n(x) = \dfrac{2n}{(x-2)^2+n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$

a) calcolare il limite puntuale e

b) stabilire se la convergenza è uniforme

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_n f_n(x) = \lim_n \dfrac{2n}{(x-2)^2+n} = \lim_n \dfrac{\cancel{n}(2)}{\cancel{n}\left(1+\frac{(x-2)^2}{n}\right)} = 2$
$\quad \frac{(x-2)^2}{n} \to 0$

il limite puntuale è $f(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f_n(x)$ sono funzioni limitate

$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{2n}{(x-2)^2+n} - 2 \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2(x-2)^2}{(x-2)^2+n} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{-2(x-2)^2}{(x-2)^2+n} \right| =$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[1,a]} \Big| \underbrace{\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}}_{<0} \underbrace{- \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}_{<0} \Big| =$$

$$= \sup_{x\in[1,a]} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right) - \operatorname{arctg}(nx) = \max_{x\in[1,a]} g_n(x)$$

$$g_n(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right) - \operatorname{arctg}(nx)$$

$$g_n'(x) = -\frac{n}{1+n^2x^2} + \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{x^2}{n^2}\right)} = -\frac{n}{1+n^2x^2} + \frac{n}{n^2+x^2} =$$

$$= \frac{(-n^2 - x^2 + 1 + n^2x^2)}{(1+n^2x^2)(n^2+x^2)}\, n = n\,\frac{1-n^2-x^2(1-n^2)}{(1+n^2x^2)(n^2+x^2)} =$$

$$= n\,\frac{\overbrace{(1-n^2)(1-x^2)}^{<0}}{(1+n^2x^2)(n^2+x^2)} \to <0$$

$\boxed{- \cdot - = +}$

$g_n'(x)=0 \iff x=1$ ma non posso sapere derivata sx

$g_n'(x)>0 \to g_n(x)$ è cres in $[1,a]$

$$\max_{x\in[1,a]} g_n(x) = g_n(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(na) + \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{n}\right)$$

$$\lim_n \Big(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(na)}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{n}\right)}_{0}\Big) = 0$$

(f_n) converge unif a f su $[1,a]$, $\forall a>1$

QUIZ

(6) Calcolare il limite puntuale $f_n(x) = \frac{2nx}{1+2n} + \frac{1}{n}\log[(2+x^2)^n + 3^x]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_n \frac{2nx}{1+2n} + \frac{1}{n}\log[\underbrace{(2+x^2)^n}_{\substack{\geq 2 \\ 2^n=\infty}} + 3^x] = , \forall x\in\mathbb{R}$$

$\frac{1}{n} \to 0$ $\cdot$ ∞

lo elimino xè sta fermo

$$= \lim_n \frac{n(2x)}{n(2+\frac{1}{n})}$$

$\frac{1}{n} \to 0$

$$\frac{1}{n}\log[(2+x^2)^n] = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\log(2+x^2)$$

$$= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \log(2+x^2)$$