



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1202

DATA: 24/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Analisi dei Segnali

Prof. Visintin

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Analisi dei Segnali

VISINTIN

esercitazione: lei e Guido Pagano

TEORIA

io Presti, nezi "L'analisi dei segnali", CWT
" " "INTRODUZIONE AI PROCESSI CASUALI", CWT

DAVIS, MAGLI "ESERCIZI SVOLTI DI TEORIA DEI SEGNALE",
CWT

ESAME: SCRITTO (2h)

domande teoria (dimostraz.)

3 eser ← S. A TEMPO CONTINUO
PROCESSI CASUALI
S. A TEMPO DISCRETO

Bisogna parlare come lei

Orale facoltativo (noi)
dalle 8,30 a oltrepassa 1 off solo
→ convezione compito

OBBLIGATORIO PER ≤ 17
MAGGIORANZA HA PREZO 1300

NON SI RIFIUTA IL VOTO

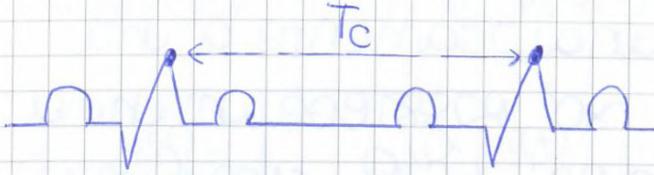
Octave

www.cvberry.com/octave

- Calcolatrice
- NO Fogli
- Documento d'identità
- Pubblica la soluzione a fine esame
- 1 settimana x la correzione del compito

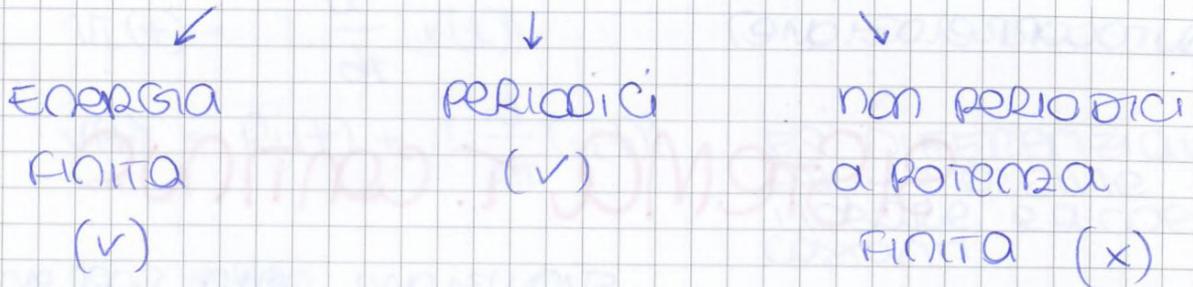
ESISTONO DEI CASI IN CUI n È UN NUMERO INTERO E NON SI PUESSA AD ASSOCIARE UN TEMPO

ex:

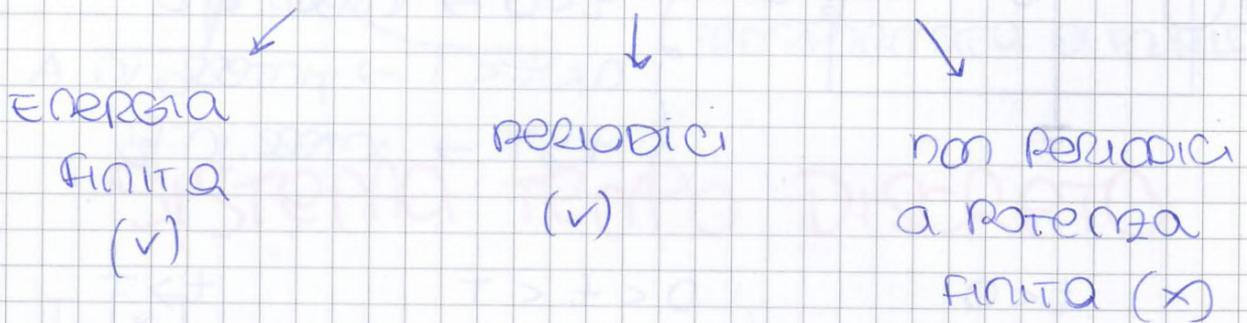


$T_c[n]$ → non si può associare a n un tempo

DETERMINATO
SEGNALE TEMPO CONTINUO

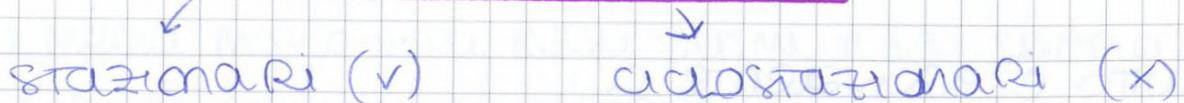


DETERMINATO
SEGNALE TEMPO DISCRETO



Segnali a potenza ∞ non esistono nella realtà (servono solo x paradossi matematici)

CASUALE
SEGNALE TEMPO CONTINUO



CASUALE
SEGNALE TEMPO DISCRETO (x)



Posso pensare di avere a che fare con un sistema con ingresso $v(t)$ e uscita $i(t)$

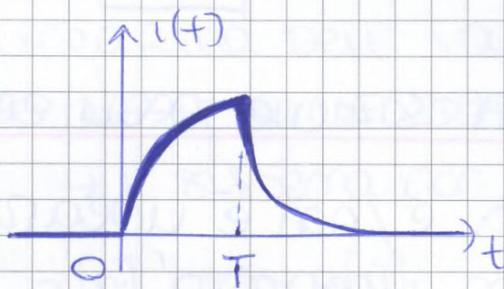


$$v(t) = Ri(t) + v_L(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} (i(t))$$

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} (i(t))$$

EQ. DIFFERENZIALE
DEL 1° ORDINE
LINEARE e a COEFF.
CONSTANTI



INTEGRALI e DERIVATE
SI GESTIRANNO CON
TRASFORMATA DI FOURIER

SISTEMA TEMPO DISCRETO

$$T_c[n]$$

$$\hat{T}_c[n] \quad \text{stima di } T_c[n] = \text{MEDIA MOBILE}$$

$$\hat{T}_c[n] = \frac{T_c[n] + T_c[n-1] + T_c[n-2]}{3}$$

LA MEDIA MOBILE SI FA SUGLI ULTIMI n (3) CAMPIONI
E COSÌ SI TOGLIE IL "RUMORE"



Esempio:



$$y_1[n] = x_1[n] + 1$$

$$y_2[n] = x_2[n] + 1$$

$$y[n] = x[n] + 1 = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + 1$$

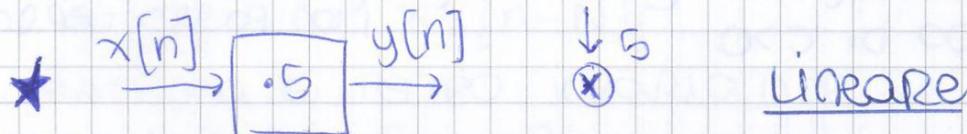
$$\rightarrow y[n] \neq a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] =$$

$$= a_1 (x_1[n] + 1) + a_2 (x_2[n] + 1) =$$

$$= a_1 x_1[n] + a_1 + a_2 x_2[n] + a_2 =$$

$$= a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_1 + a_2$$

la linearità deve valere per qualsiasi $\forall a_1, a_2$
 invece qui le 2 relazioni sono uguali solo x certe a_1, a_2 - \rightarrow il sistema non è lineare.



$$y_1[n] = 5x_1[n]$$

$$y_2[n] = 5x_2[n]$$

$$y[n] = 5x[n] = 5a_1 x_1[n] + 5a_2 x_2[n] =$$

$$= a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$$

il sistema è quindi lineare.

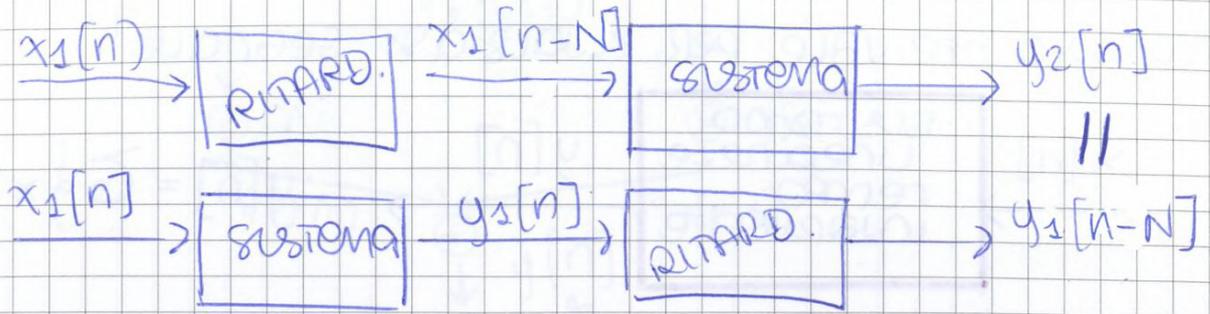
sul libro possiamo trovare:

$$y_1[n] = \mathcal{Z} \{ x_1[n] \}$$

dove \mathcal{Z} "trasformazione" indica il sistema
 che è lineare se e solo se:

$$\mathcal{Z} \{ a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \} = a_1 \mathcal{Z} \{ x_1[n] \} + a_2 \mathcal{Z} \{ x_2[n] \} \quad \square$$

ESISTE UN SISTEMA RITARDATEORE DI N PASSI :



IL SISTEMA È TEMPO INVARIANTE SE L'USCITA NON CAMBIA SCAMBIANDO RITARDATEORE E SISTEMA (CIOÈ SCAMBIANDO LA LORO POSIZIONE RELATIVA)

SUL LIBRO :

$$y_1[n] = \mathcal{O}\{x_1[n]\}$$

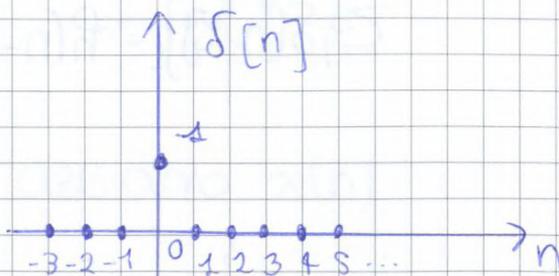
$$y_2[n] = \mathcal{O}\{x_1[n-N]\}$$

IL SISTEMA È TEMPO INVARIANTE SE

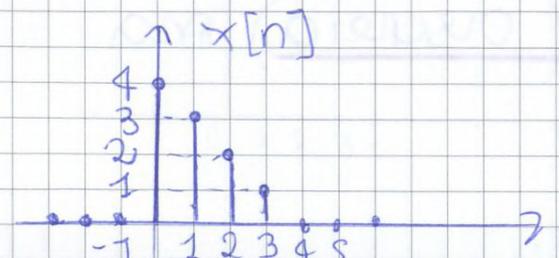
$$y_2[n] = y_1[n-N]$$

DELTA

UN TIPO DI SEGNALE È DELTA



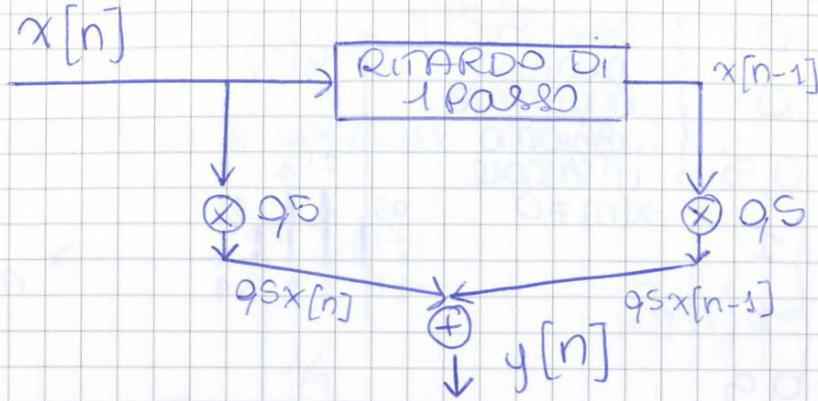
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$



$$x[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$x[n] = \sum_k x[k] \delta[n-k]$$

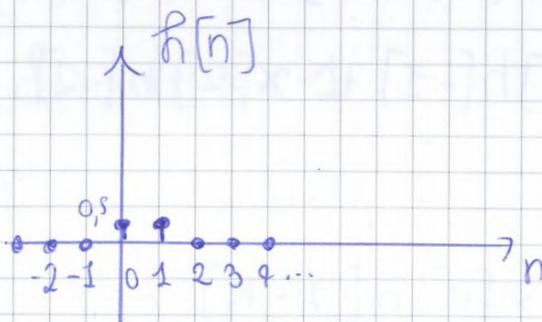
ESEMPIO :



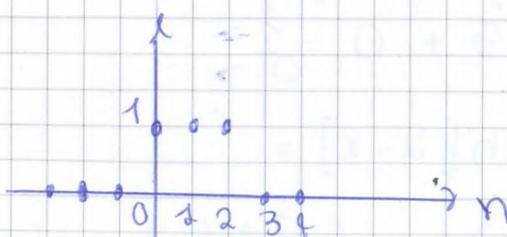
$$y[n] = 0,5 x[n] + 0,5 x[n-1]$$

$$h[n] = 0,5 d[n] + 0,5 d[n-1]$$

n	d[n]	h[n]
-2	0	0 + 0 = 0
-1	0	0 + 0 = 0
0	1	0,5 + 0 = 0,5
1	0	0 + 0,5 = 0,5
2	0	0 + 0 = 0



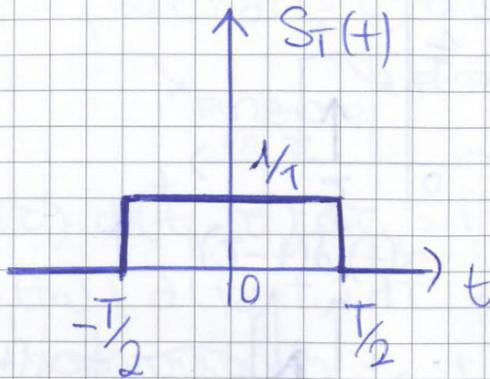
abbiamo x(n)



13 MARZO 2013

DELTA di DIRAC $\delta(t)$

DEFINISCO IL SEGNALE $S_T(t)$:



$$S_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

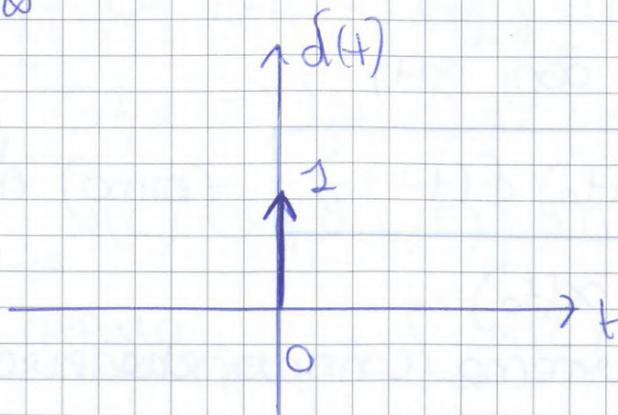
$$\int_{-\infty}^{\infty} S_T(t) dt = \underbrace{T}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{altezza}} = 1 \quad (\text{Area Rett.})$$

LA DELTA di DIRAC:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} S_T(t)$$

$$\delta(0) = \lim_{T \rightarrow 0} S_T(0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



L'altezza della
freccia RAPPRESENTA
l'area (1)

in Pw:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

Dimo:

$$x(t) = \int x(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau$$

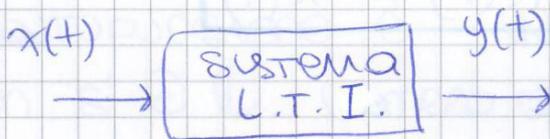
Parametro
 Funzione di τ Funzione di τ

uso la prima formula

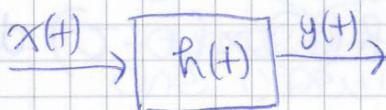
$$\int x(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau = \int x(t_0) \delta(t_0 - \tau) d\tau = x(t_0) \int \delta(t_0 - \tau) d\tau = x(t_0) \cdot 1 = x(t_0)$$

ORA SOSTITUISCO A t_0 , t E MUOVO LA FORMULA

nel tempo discreto, corrisponde a $x[n] = \sum x[k] \delta[n-k]$
 così arriva alla convoluzione x il tempo continuo



se $x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t) =$ risposta
 (devo sempre distinguere mat. casi e uscire) all'ingresso



$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{x(\tau) \delta(t-\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{x(\tau) \delta(t-\tau)\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} d\tau = \text{TUTTO } \times \text{ UNITA' } \end{aligned}$$

ORA APPROCCIO
 TEMPO INVARIANZA

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

convoluzione ma x e h

$$= x(t) * h(t)$$

$$\underline{x} = \sum_k C_k \underline{u}_k$$

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{A} \sum_k C_k \underline{u}_k = \sum_k C_k \underline{A} \underline{u}_k = \sum_k C_k \lambda_k \underline{u}_k$$

CERCO $w(t) / w(t) * h(t) = \lambda w(t) !$

$$\text{cioè } w(t) / \int h(\tau) w(t-\tau) d\tau = \lambda w(t)$$

DOBBIAMO MOVARE $w(t-\tau) = w(t) g(\tau)$

una funzione che soddisfa questa proprietà è e^{-t} infatti

$$e^{\alpha(t-\tau)} = e^{\alpha t} e^{-\alpha \tau}$$

l'autofunzione è $w_s(t) = e^{st}$ ($s = \text{parametro}$)

con $s \in \mathbb{C}$ (numero complesso qualsiasi)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) w_s(t-\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau = \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} \lambda_s = e^{st} H(s) \end{aligned}$$

numero = autovalore
che dipende da s

$H(s) = \text{TRASFORMATA DI LAPLACE di } h(t)$

$$w_s(t) = e^{st} \quad s \in \mathbb{C}$$

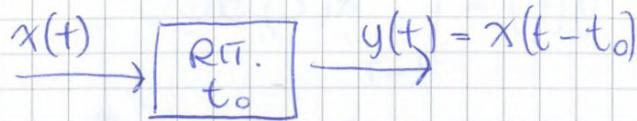
$$w_s(t) * h(t) = w_s(t) H(s) \quad H(s) \in \mathbb{C}$$

è legata ai S.L.T.I.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

esempio: RITARDATEORE

sistema L.T.I.



$t_0 > 0$

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

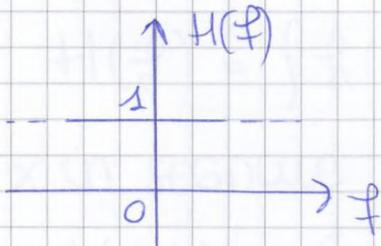
ora calcolo $H(f)$

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi f t_0} dt = e^{-j2\pi f t_0} \cdot 1 \end{aligned}$$

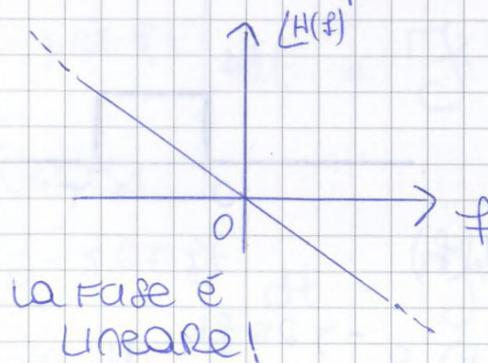
$$H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

x disegna sempre 2 grafici
 o modulo/fase o p. reale/p. imm.

$$|H(f)| = 1$$



$$\angle H(f) = -2\pi f t_0$$



si disegna
 la fase solo
 nell'intervallo
 $[-\pi, \pi]$

la fase è
 LINEARE!

si dice anche

$$\begin{aligned} H(f) &= \text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA} \\ &= \text{RISPOSTA IN FREQUENZA} \end{aligned}$$

se metto $t_0 = 0$, allora $h(t) = \delta(t)$ e quindi

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

è la trasformata di Laplace della delta di Dirac

$$= e^{-j\pi fT} \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

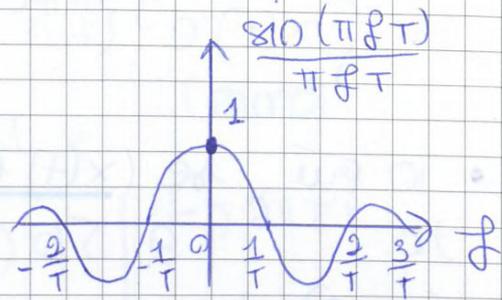
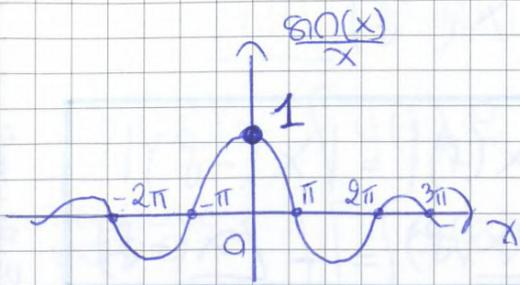
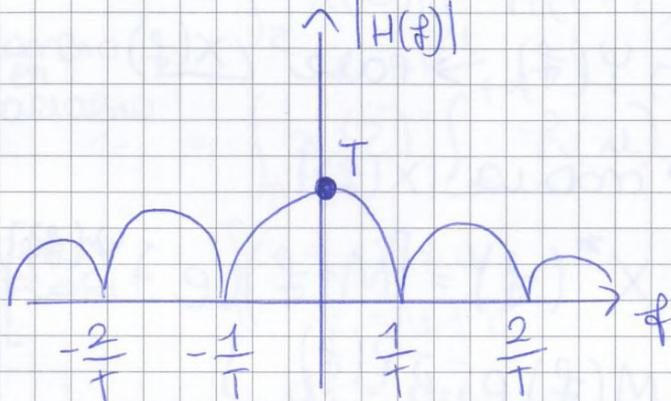


GRAFICO DEL MODULO :



$$\begin{aligned} \sin(0) &\rightarrow f=0 \\ \sin(\pi fT) &\rightarrow \pi fT = \pi \rightarrow f = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

TRASFORMATE DI FOURIER

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

x un segnale qualsiasi

$$X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

↓ MAIUSCOLA ↓ MINUSCOLA

SONO DUE PROPRIETÀ :

★ LINEARITÀ :

$$\mathcal{F}\{d_1 x_1(t) + d_2 x_2(t)\} = d_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + d_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

★ se $x(t) \in \mathbb{R}$, allora $X^*(f) = X(-f)$
(simmetria)

$$X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

★ TRASFORMATA DI FOURIER DELLA CONVOLUZIONE

$x(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(f) = \int y(t) e^{-j2\pi ft} dt =$ (conv)

INTEGRALE
DOPPIO
scambio
2 INTEGRALI

$= \int_t \left[\int_z x(z) h(t-z) dz \right] e^{-j2\pi ft} dt =$

$= \int_z x(z) \left[\int_t h(t-z) e^{-j2\pi ft} dt \right] dz =$

camBio
in
variabili

$= \int_z x(z) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-j2\pi f(u+z)} du \right] dz =$

PORTO
FUORI

$\begin{cases} t-z = u \\ t = u+z \\ dt = du \end{cases}$

$Y(f) = \int_z x(z) e^{-j2\pi fz} \left[\int_u h(u) e^{-j2\pi fu} du \right] dz$

$= \int_z x(z) e^{-j2\pi fz} H(f) dz =$ PORTO
FUORI f

$= H(f) \int_z x(z) e^{-j2\pi fz} dz =$

$\boxed{Y(f) = H(f) X(f)}$

$\boxed{\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h(t)\}}$

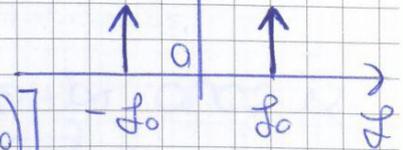
idem
x
LAPLACE

$$= \int \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \} =$$

$$= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$\mathcal{F}(\cos 2\pi f_0 t)$



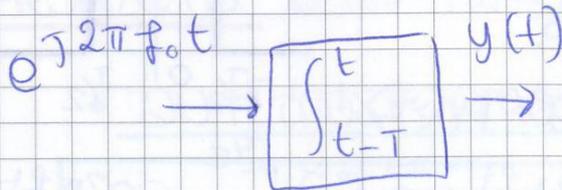
$$\textcircled{7} \mathcal{F} \{ \sin(2\pi f_0 t) \} = \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

$$\textcircled{8} \mathcal{F} \{ \cos(2\pi f_0 t + \theta) \} = \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\theta} e^{-j2\pi f_0 t} \} = \text{non ce sarebbe tavolo!}$$

$$= \frac{1}{2} [e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0)]$$

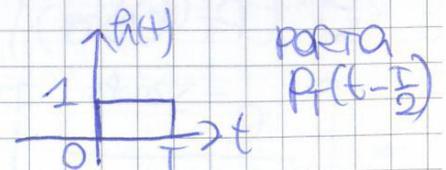
esempio:



$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$H(f) = e^{-j\pi f T} \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$



$$X(f) = \delta(f - f_0)$$

$$Y(f) = X(f) H(f) = \delta(f - f_0) H(f) = H(f_0) \delta(f - f_0)$$

$$y(t) = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t}$$

segnale iniziale moltiplicato per un numero complesso

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ H(f_0) \delta(f - f_0) \} = H(f_0) \mathcal{F}^{-1} \{ \delta(f - f_0) \}$$

Se ne voglia fare il grafico su octave:

$$f = [f_{min} : df : f_{max}];$$

$$T = 1;$$

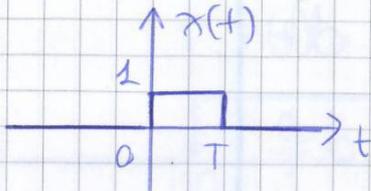
$$Z = T * \text{sinc}(f * T);$$

plot(f, Z); grid on

x octave

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$$

Definisco $x(t)$:



$$p_T(t) \xrightarrow{\left[\begin{array}{c} \text{Rit. di} \\ T/2 \end{array} \right]} x(t)$$

$$p(t) = \delta(t - T/2)$$

$$H(f) = e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = e^{-j\pi f T}$$

substituisco a:
to il mio $T/2$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{p_T(t)\} H(f) =$$

$$= T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T}$$

Stessa del vecchio calcolo!

Proprietà della trasformata di Fourier:

• INTEGRAL TRASFORMATA:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df \quad (\text{omo})$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df =$$

$$= \int_f \left[\int_u x(u) e^{-j2\pi f u} du \right] e^{+j2\pi f t} df$$

SCAMBIO
L'ORDINE DI
INTEGRALE

$$= \int_u \left[\int_f x(u) e^{-j2\pi f (t+u)} df \right] du =$$

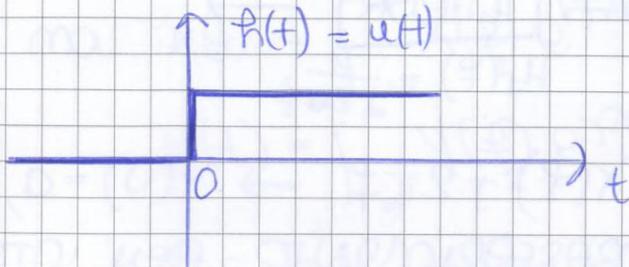
$$= \int_u x(u) \left[\int_f e^{-j2\pi f (t+u)} df \right] du =$$

una derivazione corrisponde quindi a una moltiplicazione \times una costante:

• INTEGRAZIONE

$x(t) \rightarrow \left[\int_{-\infty}^t \right] y(t) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$

segnale gradino unitario $u(t)$

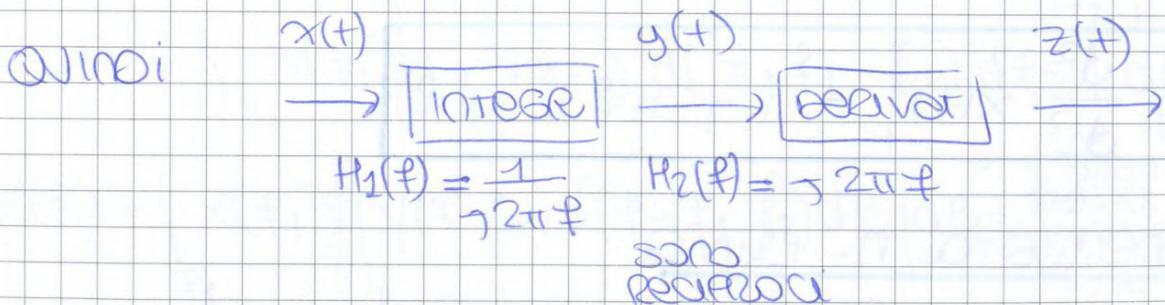


$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-j2\pi f t} dt$

$H(f) = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$ (no orma)

$Y(f) = X(f)H(f) = X(f) \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f} \right] =$
 $= \frac{1}{2} X(0) \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} X(f)$

se $X(0) = 0 \rightarrow \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(u) du \right\} = \frac{1}{j2\pi f} X(f)$



$Y(f) = X(f)H_1(f) \Rightarrow$

$Z(f) = Y(f)H_2(f) = X(f)H_1(f)H_2(f)$

TRASFORMATA DEL PRODOTTO

21 MARZO 2013
PRIMA VERBA

DEFINISCO

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = ?$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ma } x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f_2) e^{j2\pi f_2 t} df_2 \end{aligned} \right\} \text{ANTITRASFORMATE}$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{f_1=-\infty}^{\infty} X(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \right] \left[\int_{f_2=-\infty}^{\infty} Y(f_2) e^{j2\pi f_2 t} df_2 \right] e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f_1=-\infty}^{\infty} \int_{f_2=-\infty}^{\infty} X(f_1) e^{j2\pi f_1 t} \cdot Y(f_2) e^{j2\pi f_2 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt df_1 df_2$$

INTEGRO IN t!

$$Z(f) = \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1) Y(f_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (f - f_1 - f_2)t} dt \right] df_1 df_2 =$$

$$Z(f) = \int_{f_1} \int_{f_2} X(f_1) Y(f_2) \delta(f - f_1 - f_2) df_1 df_2 =$$

$$Z(f) = \int_{f_1} X(f_1) \left[\int_{f_2} Y(f_2) \delta(f - f_1 - f_2) df_2 \right] df_1 =$$

$$Z(f) = \int_{f_1} X(f_1) \left[\int_{f_2} Y(f - f_1) \delta(f - f_1 - f_2) df_2 \right] df_1$$

↳ ARGOMENTO
DELLA δ SI
ANNULLA PER
 $f_2 = f - f_1$

$$= \int_{f_1} X(f_1) Y(f - f_1) \left[\int_{f_2} \underbrace{\delta(f - f_1 - f_2)}_{=1} df_2 \right] df_1 =$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1) Y(f - f_1) df_1 = X(f) * Y(f)$$

ESEMPIO:

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$ esempio di un $x(f)$ qualsiasi

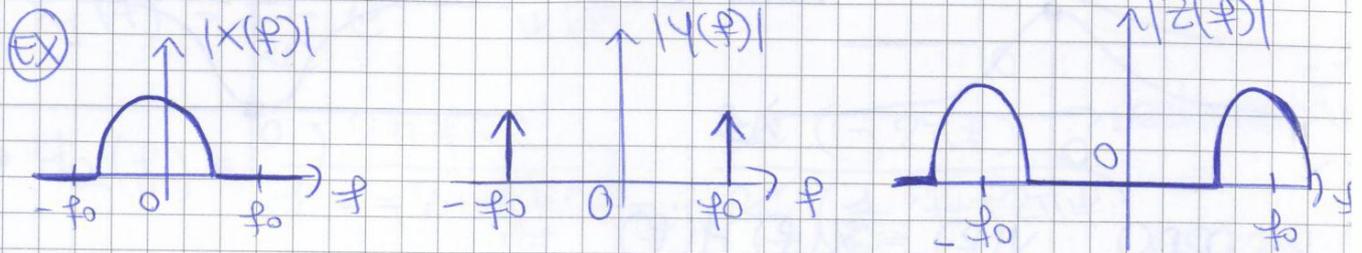
$$y(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$z(t) = x(t) y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f)?$$

$$Z(f) = X(f) * Y(f) \quad \text{ma } Y(f) = \frac{A}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

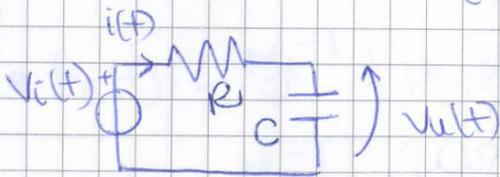
$$Z(f) = \frac{A}{2} [X(f) * \delta(f-f_0) + X(f) * \delta(f+f_0)] =$$

$$Z(f) = \frac{A}{2} [X(f-f_0) + X(f+f_0)].$$



Si è spostata la sinusoide alle frequenze intorno a f_0 .

CIRCUITI (vedi anche esercitazione)

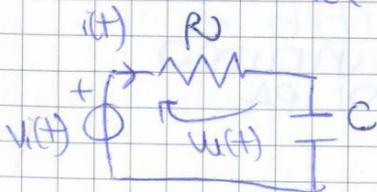


$$I(f) = \frac{V_i(f)}{R + \frac{1}{j2\pi f C}}$$

$$V_u(f) = \frac{1}{j2\pi f C} I(f)$$

$$V_u(f) = \frac{1}{j2\pi f C} \frac{V_i(f)}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} = V_i(f) \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$H_1(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$



$I(f)$ è la stessa

$$V_u(f) = R I(f) = R \frac{V_i(f)}{1 + j2\pi f RC}$$

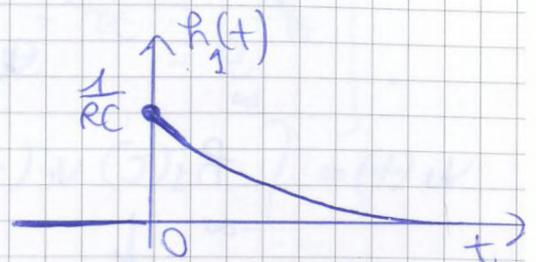
$$\bullet H_1(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1}{RC \left(\frac{1}{RC} + j2\pi f \right)} =$$

$$= \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{RC} + j2\pi f}_{=a}} = \frac{1}{RC} \mathcal{F}\left\{ e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \right\}$$

Poiché $\frac{1}{RC} \bar{e} > 0!$

$$H_1(f) = \frac{1}{RC} \mathcal{F}\left\{ e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \right\}$$

$$h_1(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



$$\bullet H_2(f) = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC} = \frac{RC (j2\pi f) \rightarrow \text{derivazione}}{RC \left(\frac{1}{RC} + j2\pi f \right)} =$$

$$= \frac{d}{dt} \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \right\}$$

in particolare $\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$
 perché $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

$$h_2(t) = \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \right\} \star$$

$$\bullet h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 - H_1(f)\} =$$

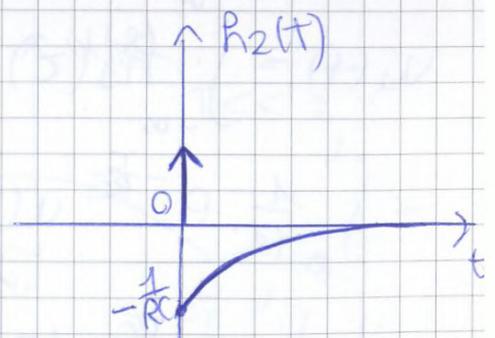
$$= \mathcal{F}^{-1}\{1\} - \mathcal{F}^{-1}\{H_1(f)\} = \delta(t) - h_1(t)$$

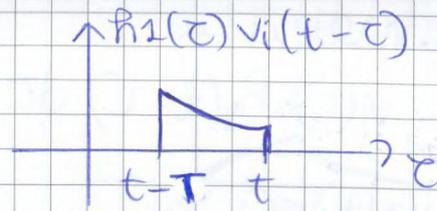
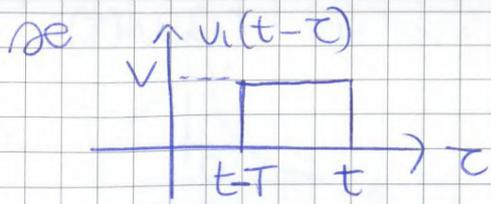
$$= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$\star h_2(t) = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t)$$

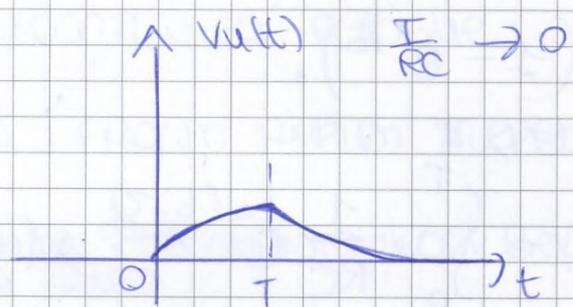
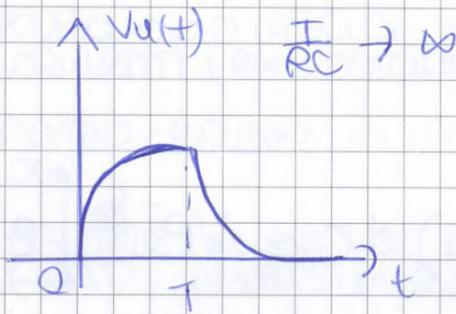
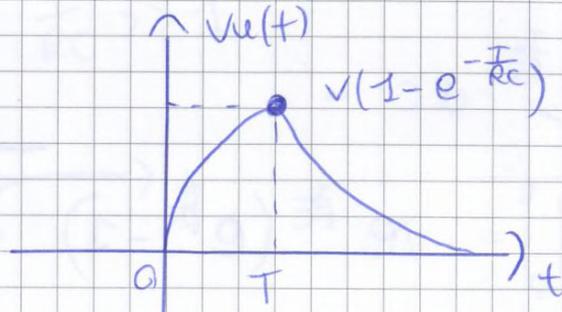
$$h_2(t) = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + e^0 \delta(t) =$$

$$= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

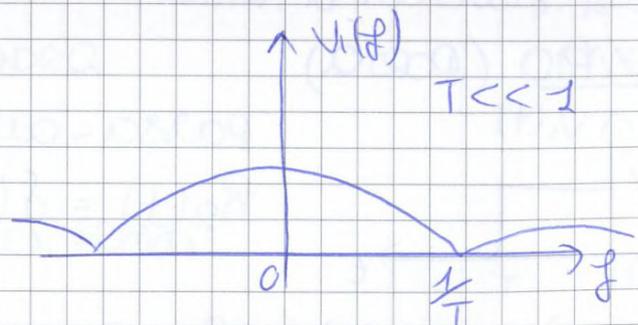
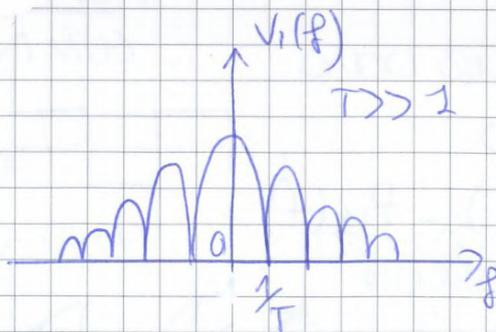




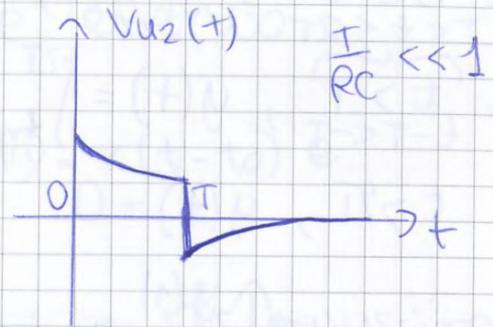
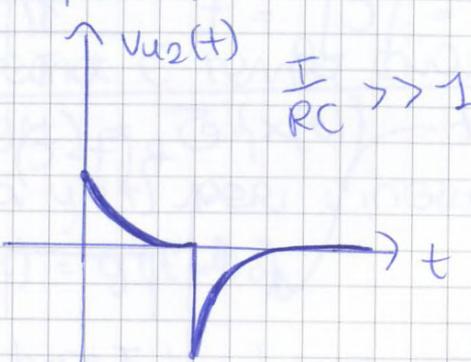
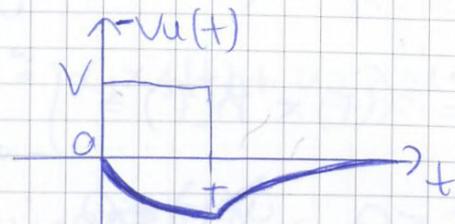
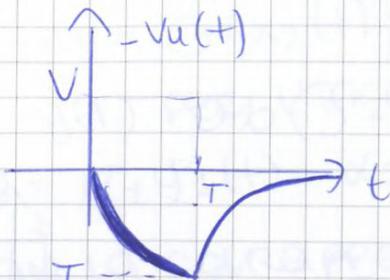
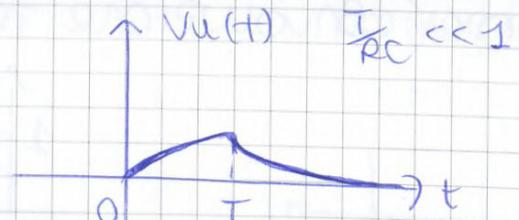
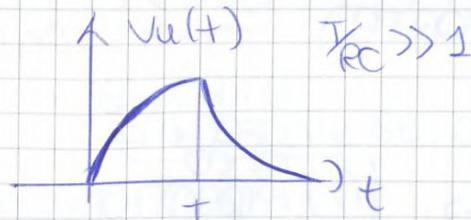
$$v_u(t) = \int_{t-T}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(\tau) V d\tau = -V \left[e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \right]_{t-T}^t = -V \left[e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t-T}{RC}} \right] = V \left[e^{-\frac{t-T}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$



$RC =$ costante di tempo del sistema (s)



filtri = se lasciano passare certe frequenze e ne bloccano altre
sistemi L.T.I.



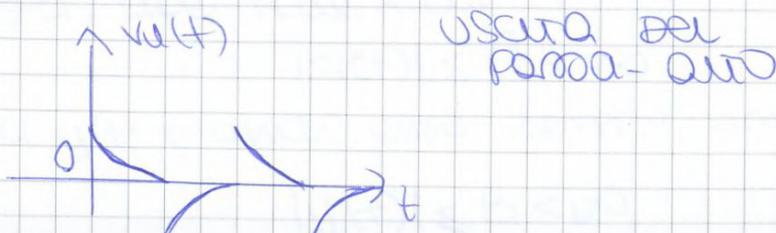
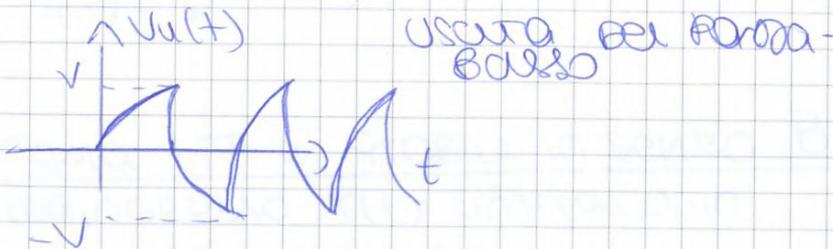
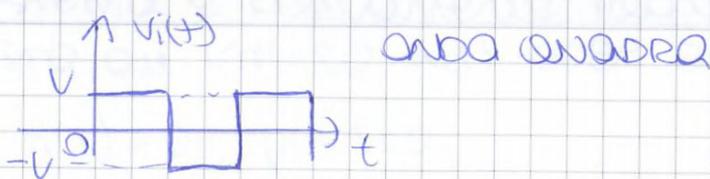
il passa-alto lascia le discontinuità e toglie i valori lenti (ex. costanti)

il passa-basso elimina i fronti ripidi troppo veloci

x togliere un offset da uno strumento non ben tarato, metti un passa-alto

x togliere un rumore metti un passa-basso

esempio:



SISTEMI LTI

27 MARZO 2013

Un sistema è lineare se, avendo

$$\begin{cases} y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} \\ y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} \end{cases}$$

uscita $y(t)$ per l'ingresso $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ è
 $y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$!

quò vale la sovrapposizione degli effetti)

Un sistema è tempo invariante se, essendo

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$$

uscita $y'(t)$ per l'ingresso $x'(t) = x(t-t_0)$ è
 $y'(t) = y(t-t_0)$

La risposta all'impulso di un sistema LTI è l'uscita $h(t)$ del sistema quando l'ingresso è $\delta(t)$.

La funzione di trasferimento o risposta in frequenza di un sistema LTI è $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ la trasformata di Fourier della risposta all'impulso

se il sistema non è LTI non si può parlare di risposta all'impulso e di funzione di trasferimento

Un sistema è fisicamente realizzabile se la sua risposta all'impulso $h(t)$ gode delle seguenti proprietà

$$\begin{cases} h(t) = 0, \text{ per } t < 0 \\ h(t) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Un sistema LTI è stabile in senso BIBO } BOUNDED-UNITARY
INPUT
BOUNDED
OUTPUT
 se per ogni ingresso $x(t)$ limitato in ampiezza, cioè tale che

$$|x(t)| \leq A < \infty \quad [A = \text{costante}]$$

l'uscita $y(t)$ è anch'essa sempre limitata in ampiezza, cioè

$$|y(t)| \leq B < \infty$$

in sistema stabile in senso BIBO sono i ritardatori.

FILTRI

FILTRO PASSA-BASSO

HA UNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN MODULO:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



Lascia passare basse frequenze e taglia quelle alte!

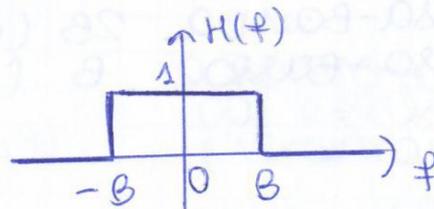
(ex. passa la $x(f)$ e non passa la $x'(f)$)

naturalmente dipende molto dall'unità di misura (μHz , kHz ,...)

FILTRO PASSA-BASSO IDEALE DI BANDA B

HA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

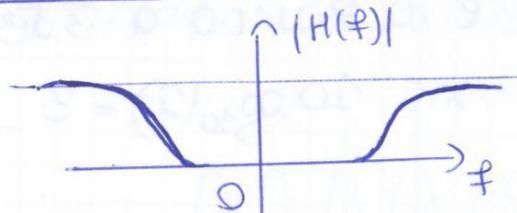


B = banda del filtro

è ideale e non può essere realizzato fisicamente!
ne esistono di realizzabili che ci assomigliano molto (=costo)

FILTRO PASSA ALTO

HA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN MODULO:



$$H(f) = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC}$$

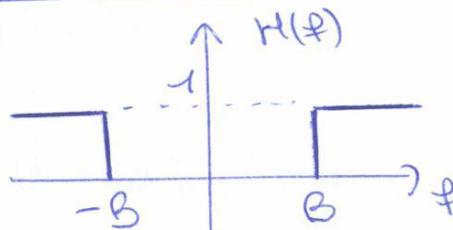
$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Lascia passare le alte frequenze e taglia quelle basse!

FILTRO PASSA-ALTO IDEALE DI TAGLIO B

HA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \geq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



B = frequenza di taglio

4 Aprile 2013

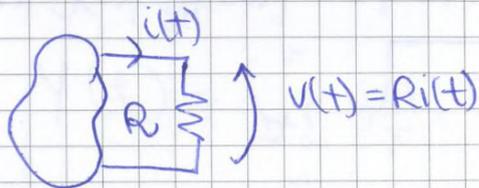
Segnali a Energia Finita

Energia di un segnale

L'energia E_x del segnale $x(t)$ è definita come

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

esempio:



la potenza assorbita dal resistore:
(istantanea)

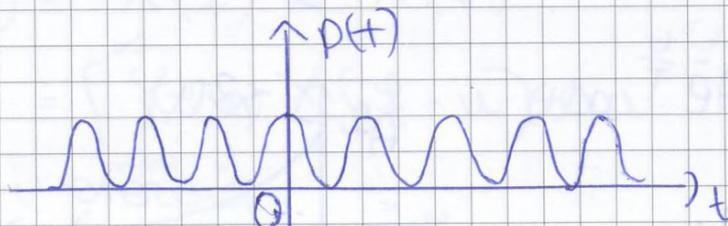
$$p(t) = i(t)v(t)$$

$$p(t) = Ri^2(t)$$

la potenza assorbita dal resistore: (media)

$$P = \text{media temporale di } p(t)$$

suppongo: $i(t) = \cos(2\pi f_0 t)$



se voglio l'energia assorbita in 1s:

$$E = \int_0^1 p(t) dt$$

cerco l'energia assorbita in un intervallo temporale $t_0 - t_1$

$$E = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} Ri^2(t) dt = R \cdot \int_{t_0}^{t_1} i^2(t) dt$$

TEOREMA DI PARSEVAL (o equivalenza)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

quindi posso calcolare l'energia sia nel tempo che nel dominio delle frequenze!

(Dimostrazione, da sapere!)

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(f)$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \quad \leftarrow \text{da ricordare}$$

definisco $y(t) = x^2(t)$ con $x(t)$ Reale

$$Y(f) = X(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u) X(f-u) du \quad \text{convoluzione}$$

cerco l'energia

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = Y(0)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} X(u) X(-u) du \quad \text{ma essendo } x(t) \text{ Reale } X^*(u) = X(-u)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} X(u) X^*(u) du$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

CAMBIO DI
VARIABLE

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df =$$

$$= \int_{f_0-B}^{f_0+B} |X(f)|^2 df + \int_{-f_0-B}^{-f_0+B} |X(f)|^2 df$$

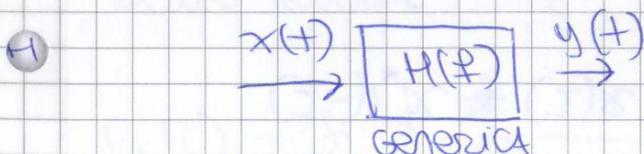
l'energia di $y(t)$ coincide con la porzione di energia di $x(t)$ contenuta nell'intervallo di frequenze $[f_0-B, f_0+B]$ (idem nelle frequenze negative)

$|X(f)|^2$ ci dice come l'energia di $x(t)$ è distribuita in frequenza →

$$|X(f)|^2 = \text{SPETTRO DI ENERGIA} = S_x(f)$$

"spettro di" va dire "come la quantità è distribuita in frequenza"

ex: l'integrale dello spettro di energia deve dare l'energia



legame tra $S_x(f)$ e $S_y(f)$

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$$

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

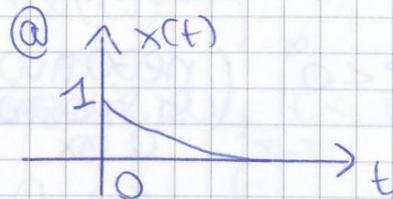
VALIDO x TUTTI I TIPI DI segnali

la delta di DIRAC al QUADRATO NON esiste!
se c'è e ne abbiamo sbacciato!

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

nuova definizione di funzione di autocorrelazione, che può così essere calcolata sia nel tempo che in frequenza.

esempio:



$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

calcolo $R_x(\tau) = ?$

calcolo in frequenza (prima modo $|X(f)|^2$)

$$X(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

dalle tavole $|X(f)| = \frac{T}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}}$

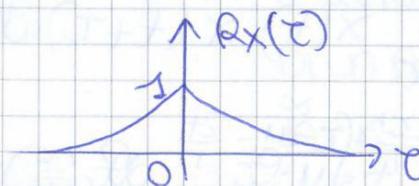
$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2} \quad \text{maius!!} \quad \text{tab 60 T!!}$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2}\right\}$$

dalle tavole $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2}\right\} = \frac{T}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2/T}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2}\right\}$$

$$R_x(\tau) = \frac{T}{2} e^{-\frac{|\tau|}{T}}$$



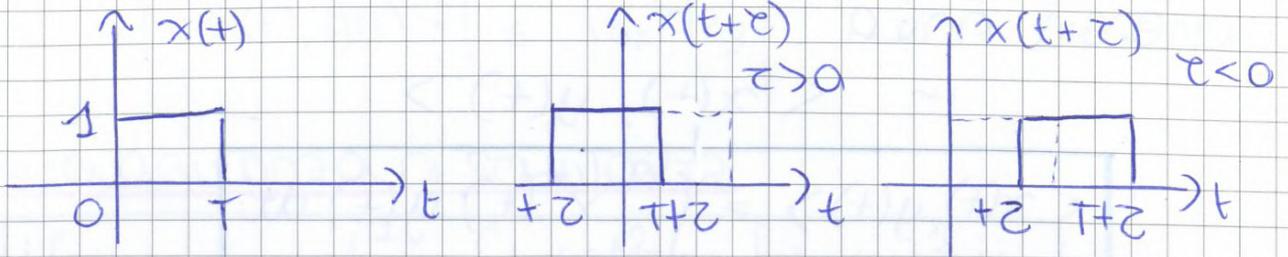
verifichiamo:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = E_x$$

$$R_x(0) = E_x$$

da prima: $E_x = A \frac{T}{2}$ ($A=1$) $E_x = \frac{T}{2} = R_x(0)$

⑥ calcolo AUTOCORR. di $x(t) = P_T(t - \frac{T}{2})$



calcolo nel tempo: (4 casi)

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

• per $\tau > 0, \tau < T \rightarrow \boxed{0 < \tau < T}$

$$R_x(\tau) = \int_0^{T-\tau} x(t) x(t+\tau) dt = \int_0^{T-\tau} dt = T - \tau$$

• per $\tau > 0, T - \tau < 0 \rightarrow \tau > 0, \tau > T \rightarrow \boxed{\tau > T}$

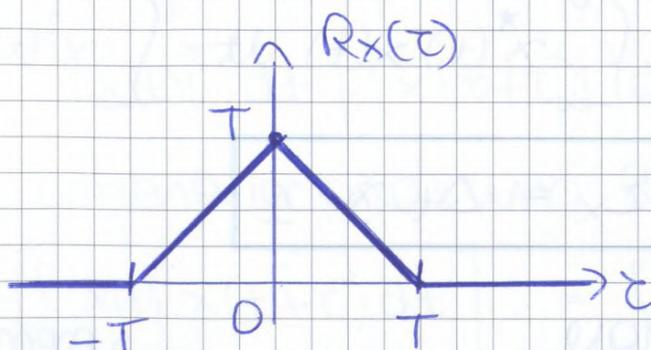
$$R_x(\tau) = 0$$

• per $\tau < 0, \tau > -T \rightarrow \boxed{-T < \tau < 0}$

$$R_x(\tau) = \int_{-\tau}^T x(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\tau}^T dt = T + \tau$$

• per $\tau < 0, -\tau > T \rightarrow \tau < 0, \tau < -T \rightarrow \boxed{\tau < -T}$

$$R_x(\tau) = 0$$



l'autocorrelazione di un rettangolo è un triangolo (non traslato)

↓
come se fosse la convoluzione in 2 parte

$T - |\tau|$

$$0 \leq | \langle x(t), y(t) \rangle | \leq \sqrt{E_x} \sqrt{E_y}$$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

$$\left| \int x(t)y(t) dt \right|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \int |y(t)|^2 dt$$

massimo quando $f(t) \propto g(t)$

quindi:

$$R_x(\tau) = \langle x(t), x(t+\tau) \rangle$$

e x la disuguaglianza di SCHWARTZ tra cui

* $R_x(\tau)$ è massimo per $\tau=0$ $x(t) \propto x(t+\tau)$

$$R_x(\tau)_{\max} = R_x(0) = E_x$$

il massimo dell'auto correlazione assume il valore dell'energia del segnale

11 aprile 2013

$$\begin{aligned} |R_x(\tau)|^2 &= \left| \int x(t) x(t+\tau) dt \right|^2 \leq \\ &\leq \int |x(t)|^2 dt \int |x(t+\tau)|^2 dt \leq E_x^2 \end{aligned}$$

ciò si ottiene in massimo se $\tau=0$

$$R_x(0) = \left[\int x(t) x(t+\tau) dt \right]_{\tau=0} = \int x^2(t) dt = E_x$$

Togliendo il qua resto:

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = E_x$$

$$E_e = 2(E_x - R_x(\tau))$$

(posso usare x dico che $R_x(\tau) < E_x$, se no E_e viene < 0 , che non può essere possibile!)

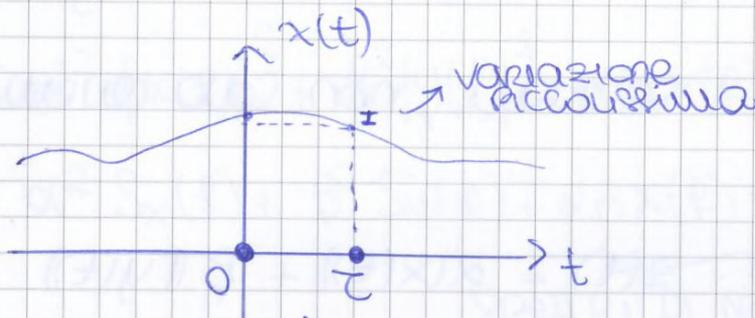
E_e = energia del segnale differenza e^-

• Accolla: se $R_x(\tau) \approx E_x$

→ $x(t)$ è simile a $x(t+\tau)$

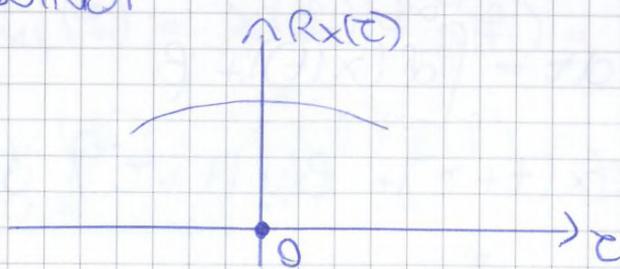
→ $x(t)$ varia lentamente in un intervallo di durata τ

Disegno un $x(t)$ qualsiasi, ma con un "andamento lento"

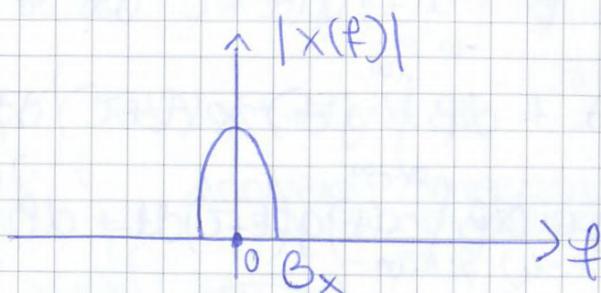


↑ non c'è molta variazione tra $x(0)$ e $x(\tau)$!

quindi:



anche la funzione di autocorrelazione decade lentamente dal massimo



$X(f)$ ha una banda B_x accolla

(idem $S_x(f) = |X(f)|^2$)

Funzioni di MUTUA CORRELAZIONE (CROSS CORRELATION)

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t+\tau) dt$$

CERCO LO SPETTRO DI ENERGIA DI $z(t)$:

$$Z(f) = \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = Z(f)Z^*(f) =$$

$$= [\alpha X(f) + \beta Y(f)][\alpha X^*(f) + \beta Y^*(f)] =$$

$$= \alpha^2 |X(f)|^2 + \beta^2 |Y(f)|^2 + \alpha\beta X(f)Y^*(f) + \alpha\beta X^*(f)Y(f) =$$

$$= \alpha^2 S_x(f) + \beta^2 S_y(f) + \underbrace{\alpha\beta X(f)Y^*(f) + \alpha\beta X^*(f)Y(f)}_{\text{SPETTRI DI MUTUA CORRELAZIONE}}$$

SPETTRI DI MUTUA CORRELAZIONE

SPETTRI DI MUTUA CORRELAZIONE

$$S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\}$$

$$S_{yx}(f) = X^*(f)Y(f) = \mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\}$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{F}\{R_{yx}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

scambio i 2 integrali +
cambio di variabile

$$\begin{cases} t+\tau = u \\ \tau = u-t \\ d\tau = du \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j2\pi f(u-t)} du \right] dt =$$

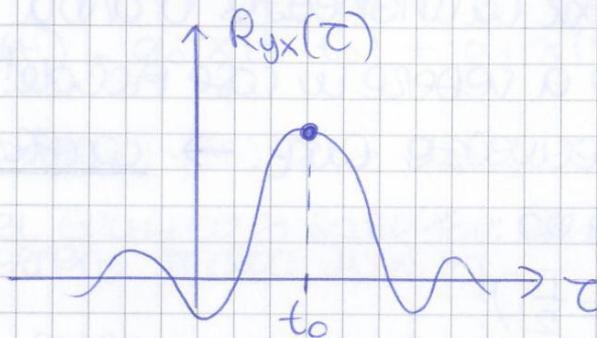
$R_x(\tau - t_0)$ è massimo se $\tau - t_0 = 0 \rightarrow \tau = t_0$ ($R_x(\tau - t_0) = E$)
 Quindi il massimo di $\langle x(t - \tau), y(t) \rangle$ o c'è quando $\tau = t_0$



$t_0 = \text{incognita!}$

Si calcola la mutua correlazione tra $x(t)$ e $y(t)$ e se ne cerca il massimo. Il valore di τ per il quale si trova il massimo è la stima di t_0 .

(non il valore esatto)



considero la velocità di propagazione del suono nel corpo umano costante (in realtà non è così)

la velocità: $v = \frac{2d}{t_0} \rightarrow$ 2 volte lo spazio perché c'è l'andata e il ritorno

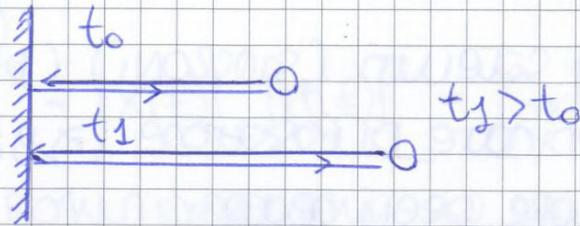
$$d = \frac{v t_0}{2}$$

attenuazione ($\frac{\text{dB}}{\text{cm MHz}}$)	TESSUTO
0,18	SANGUE
0,6	GRASSO
0,85	CERVELLO
20	CRANIO
40	POLMONE
90022	ACQUA

} misurate a 1 MHz
 se aumenta la frequenza, l'attenuazione aumenta

Attenuazione Media: 0,5 $\frac{\text{dB}}{\text{cm MHz}}$

T piccolo serve per misurare la risoluzione nella stima di t_0 ($1 \mu s$) e perche' così diventa possibile distinguere 2 echi da ritardi diversi ma vicini



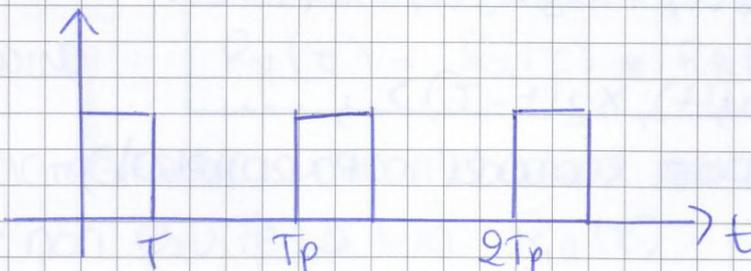
se $t_1 - t_0 < T$ non si distinguono i 2 tempi t_1 e t_0

$$y(t) = \alpha_0 x(t-t_0) + \alpha_1 x(t-t_1)$$

$$\langle x(t-\tau), y(t) \rangle = \alpha_0 R_x(\tau-t_0) + \alpha_1 R_x(\tau-t_1)$$

(nel grafico si sarebbe 2 rombi, che non devono essere troppo vicini!!!)

il segnale mandato dal ricevitore

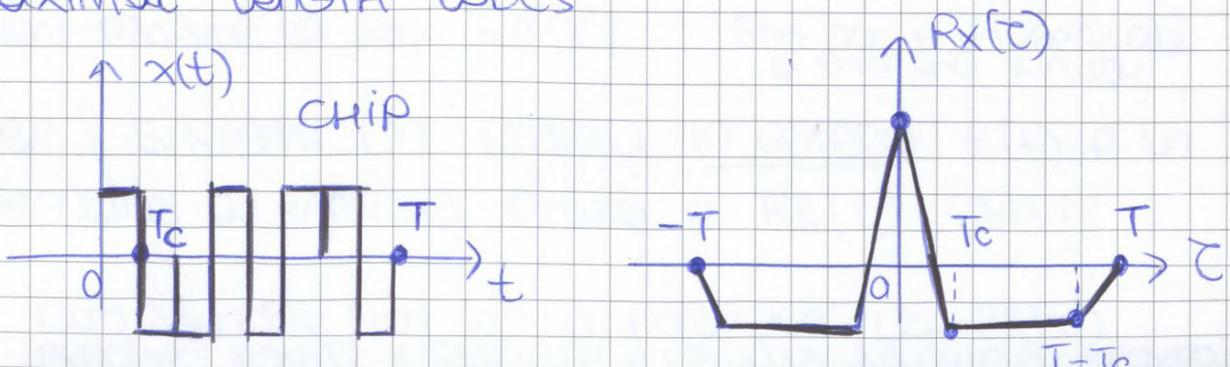


T_p non deve essere troppo ampio perche' non deve passare troppo tempo tra i 2 impulsi

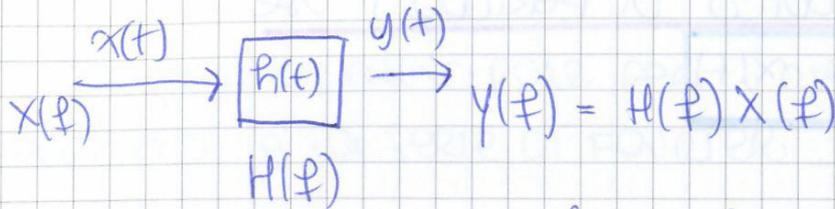
GPS

conviene che $x(t)$ sia a banda larga

MAXIMAL LENGTH CODES



Segnale a energia finita



$$S_y(f) = |y(f)|^2 = |x(f)|^2 |H(f)|^2 = S_x(f) |H(f)|^2$$

ORA PASSO NEL DOMINIO DEL TEMPO E CALCOLO:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f) \cdot |H(f)|^2\} = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \\ &= R_x(\tau) * \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} \end{aligned}$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) \rightarrow |H(f)|^2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_h(\tau)$$

$h(t)$ lo vedo come un segnale

$R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $h(t)$

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t+\tau) dt$$

$h(t)$ è sempre un segnale a energia finita

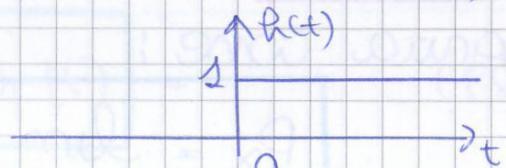
QUINDI: $R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$

MA:

* L'INTEGRATORE HA RISPOSTA ALL'IMPULSO $h(t) = u(t)$

11 e non esiste la sua $R_h(\tau)$

perché $h(t)$ non è un segnale a energia finita.



$u(t)$ = non segnale a energia finita

* IL RITARDATEORE HA RISPOSTA ALL'IMPULSO $h(t) = \delta(t-t_0)$

che non è un segnale a energia finita, per cui non esiste la sua $R_h(\tau)$

$\delta(t)$ non è un segnale a energia finita

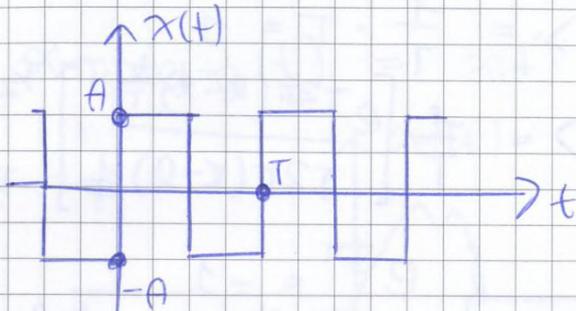
PER I SISTEMI LTI STABILI IN GENERALE $h(t)$ È UN SEGNALE A ENERGIA FINITA E $R_h(\tau)$ ESISTE.

ex: RITARDATEORE NON USO LA FORMULA CON $R_h(\tau)$ PERCHÉ TANTO IL SEGNALE È USUALE MA UN PO' SPORADICO

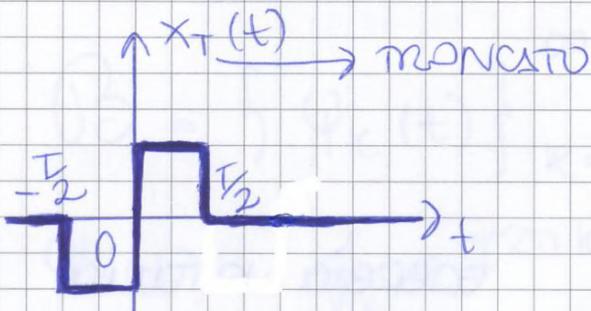
NON ESISTONO IN NATURA segnali veramente periodici,
 dal BIG BANG a OGGI

Lo strumento principale per l'analisi dei segnali periodici è la serie di FOURIER.

segnale periodico di periodo $T \rightarrow$ ONDA QUADRA :



estraggo un periodo :



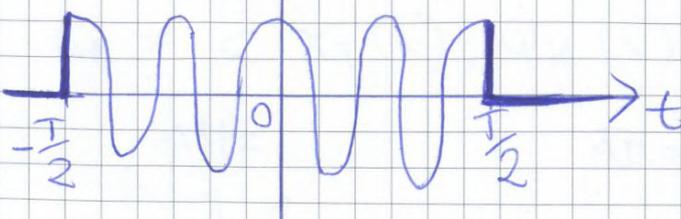
$$x_T(t) = x(t) p_T(t)$$

ne calcolo la serie di FOURIER :
 definisco, $k \in$ interi POS o NEG

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi k t / T} \cdot p_T(t) = \quad (PSI)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) + j \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \right] p_T(t)$$

\uparrow $\text{Re} \{ \psi_k(t) \}$



17 Aprile 2013

Segnale periodico di T $x(t)$



$$x_{\text{TRONCATO}}(t) = x(t) p_T(t)$$

SEGNALE TRONCATO



$$B = \left\{ \psi_k(t) \right\}_{k=-\infty}^{\infty} \quad \text{BASE ORTONORMALE}$$

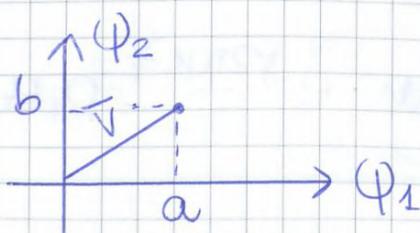
$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} p_T(t)$$

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } k=l \\ 0 & \text{se } k \neq l \end{cases}$$

la base B è completa per i segnali $x_T(t)$:
cioè $x(t)$ è esprimibile come combinazione lineare dei segnali della base:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \psi_k(t)$$

$$C_k = \langle x_T(t), \psi_k(t) \rangle$$



$$\bar{v} = a \bar{\psi}_1 + b \bar{\psi}_2$$

$$a = \bar{v} \cdot \bar{\psi}_1$$

$$b = \bar{v} \cdot \bar{\psi}_2$$

da geometria

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} p_T(t)$$

MEMO

$$\text{con } \mu_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T(f) \Big|_{f=\frac{k}{T}}$$

μ_k è il k -esimo coefficiente della serie di FOURIER, dove $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$ è la SERIE DI FOURIER.

ORA SALTIAMO DAI SEGNALE TRONCATI A QUELLI PERIODICI:

IL SEGNALE PERIODICO $x(t)$ VALE $x_T(t)$ NEL PERIODO FONDAMENTALE $t \in [-T/2, T/2]$

IL SEGNALE $x(t)$ È PERIODICO DI PERIODO T

IL SEGNALE $e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$ È ANCHE PERIODICO DI PERIODO T PER OGNI k .

→ QUINDI POSSO SCRIVERE CHE:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad -\infty < t < \infty$$

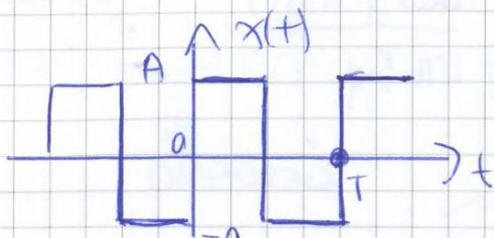
ESTENDO SIA IL SEGNALE SIA LA SERIE PERIODICI DELLO STESSO PERIODO, ESTENDO LA SERIE DAL TRONCATO AL GENERICO PERIODICO

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

PER UN GENERICO SEGNALE $x(t)$ PERIODICO

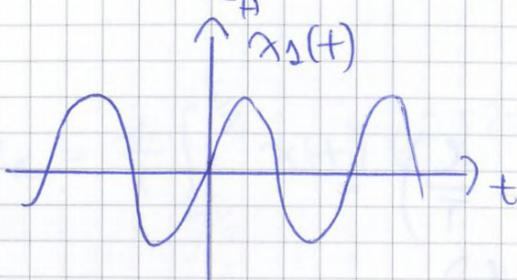
$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

esempio:



$\mu_0 = 0$

TEST
DA
FARE
FACILMENTE



$\mu_0 = 0$

esempio: DATO $x(t)$ (\uparrow)
CALCOLO LA SERIE DI FOURIER

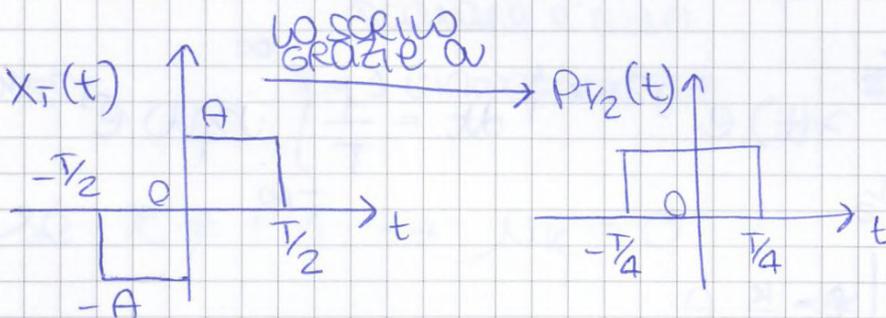
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

con $\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j2\pi k \frac{t}{T}} dt$

scelgo
x imiei
calcoli

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

CARCO IL SEGNALE TRONCATO:



$$x_T(t) = \left[p_{T/2} \left(t - \frac{T}{4} \right) - p_{T/2} \left(t + \frac{T}{4} \right) \right] A$$

$$= A \left[p_{T/2}(t) * \delta \left(t - \frac{T}{4} \right) - p_{T/2}(t) * \delta \left(t + \frac{T}{4} \right) \right]$$

$$= A p_{T/2}(t) * \left[\delta \left(t - \frac{T}{4} \right) - \delta \left(t + \frac{T}{4} \right) \right]$$

$$X_T(f) = \mathcal{F} \{ x_T(t) \} = A \frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f} \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} - e^{j2\pi f \frac{T}{4}} \right)$$

Moltiplico e divido per (-2j)

$$= -2j A \frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f} \sin(\pi f \frac{T}{2})$$

SEGNALE SINUSOIDALE

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad , \quad T = \frac{1}{f_0}$$

↓
AMPIEZZA

↓
FASE

↗ non servono x determinare il PERIODO

$$M_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t + \theta) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

USO EULERO :

$$M_k = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{j2\pi \frac{t}{T} + j\theta} + e^{-j2\pi \frac{t}{T} - j\theta}) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

$$M_k = \frac{A}{2T} e^{j\theta} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(k-1)\frac{t}{T}} dt + \frac{A}{2T} e^{-j\theta} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(k+1)\frac{t}{T}} dt$$

$k \neq 1$ il prodotto scalare è nullo

$k = 1$ l'integrale FAT

$k \neq -1$ "

$k = -1$ l'integrale FAT

se $k \neq \pm 1 \rightarrow M_k = 0$

se $k = \begin{cases} 1 \rightarrow M_1 = \frac{A}{2T} e^{j\theta} T = \frac{A}{2} e^{j\theta} \\ -1 \rightarrow M_{-1} = \frac{A}{2T} e^{-j\theta} T = \frac{A}{2} e^{-j\theta} \end{cases}$

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} = \\ &= M_1 e^{j2\pi 1 \frac{t}{T}} + M_{-1} e^{-j2\pi 1 \frac{t}{T}} = \\ &= \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j2\pi \frac{t}{T}} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j2\pi \frac{t}{T}} \end{aligned}$$

$$X(f) = M_1 \delta(f - \frac{1}{T}) + M_{-1} \delta(f + \frac{1}{T})$$

nel Dominio del tempo :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

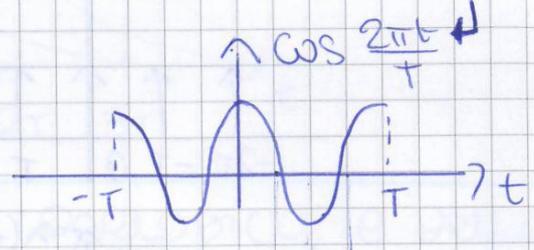
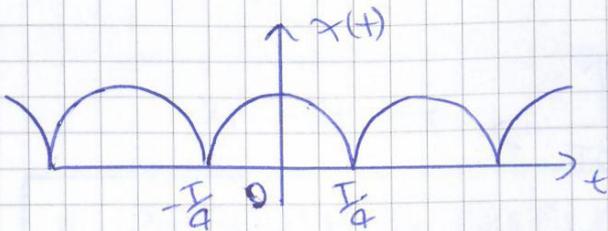
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

FORMULA GENERALE TRACCIA
dei segnali periodici

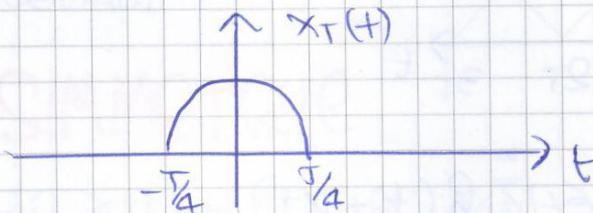
ad esempio :

$$x(t) = \left| \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right|$$

il periodo fondamentale è $\frac{T}{2}$
cioè la metà del periodo:

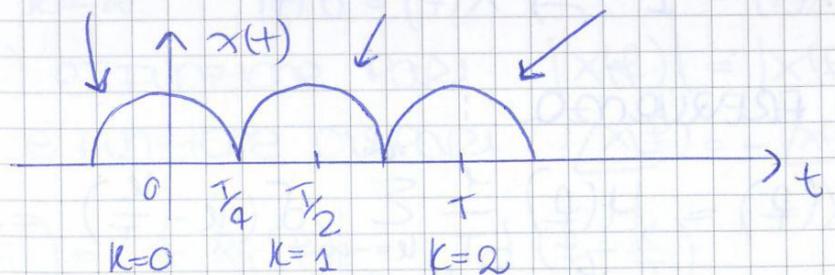


il segnale troncato $x_T(t)$



possò scrivere : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t - k\frac{T}{2})$

$$= x_T(t) + x_T(t - \frac{T}{2}) + x_T(t - T) \dots$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t - k\frac{T}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t) * \delta(t - k\frac{T}{2})$$

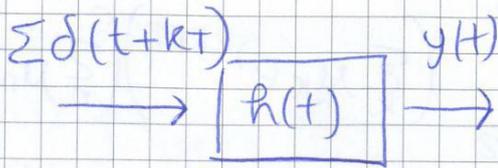
$$= x_T(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{T}{2})$$

schema a Blocchi:

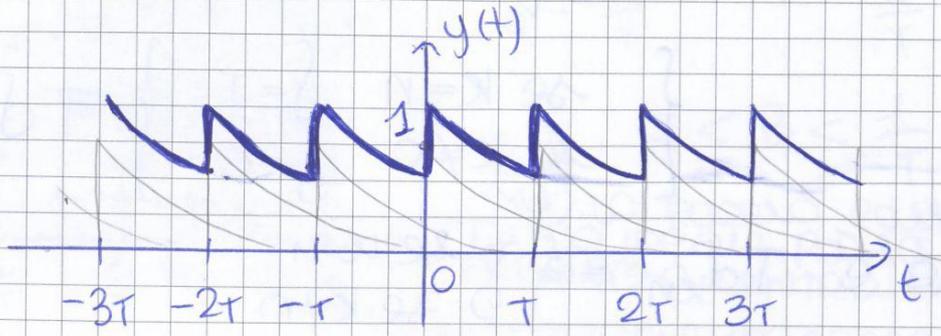
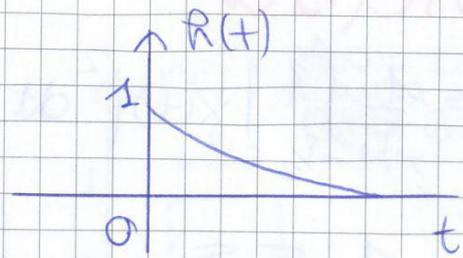


ma $x_T(t)$ non è la
risposta d'impulso
di un sistema
fisicm. realizzabile!

esempio:



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t+kT)$$



il segnale è comunque periodico, e dello stesso periodo del segnale di ingresso!

SIMMETRIE

se $x(t)$ è reale, $x_T(t)$ è reale e $X(\omega)$ è tale che

$$X_T(-\omega) = X_T^*(\omega) \quad \times \text{LA PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER}$$

$$X(\omega) = X_T(\omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{k}{T})$$

IL MODULO DI $X(\omega)$ È FUNZIONE PARI $|X(\omega)| = |X(\omega)|$

LA FASE DI $X(\omega)$ È FUNZIONE DISPARI $\angle X(\omega) = -\angle X(\omega)$

$$X(\omega) = \mu_k \delta(\omega - \frac{k}{T}) = \frac{1}{T} X_T(\omega) \Big|_{\omega = \frac{k}{T}} \delta(\omega - \frac{k}{T})$$

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T(\omega) \Big|_{\omega = \frac{k}{T}}$$

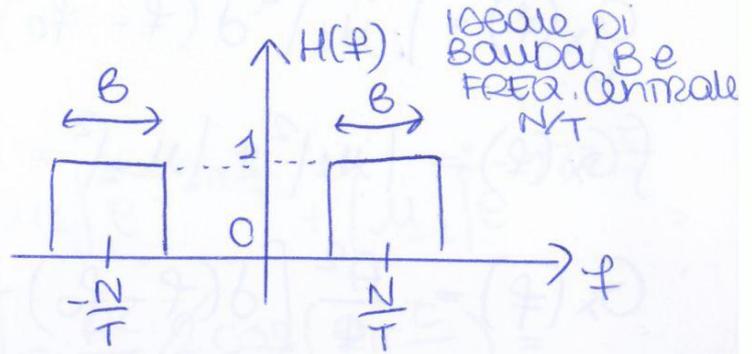
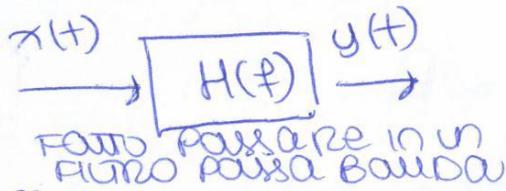
$$|\mu_{-k}| = |\mu_k|$$

$$\angle \mu_{-k} = -\angle \mu_k$$

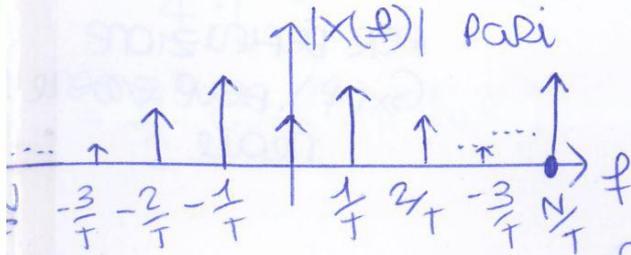
μ_{-k}

SPETTRO DI POTENZA

$x(t)$ periodico di periodo T



$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



$$0 < B < \frac{1}{T}$$

$x(t)$ lo faccio passare in un filtro ideale passa banda di frequenza centrale N/T e banda B all'uscita mi rimangono solo 2 pezzi

$$Y(f) = H(f)X(f) = \mu_N \delta\left(f - \frac{N}{T}\right) + \mu_{-N} \delta\left(f + \frac{N}{T}\right)$$

segnale sinusoidale a freq. N/T

$$P_y = \sum_k |\mu_k|^2 = |\mu_N|^2 + |\mu_{-N}|^2$$

dato in ingresso un segnale (onda quadra/dente di sega..) in un filtro passa banda opportuno, l'uscita mi dà sempre un segnale sinusoidale

NON STUDIO NEL TEMPO, MA IN FREQUENZA

DEFINISCO LO SPETTRO DI POTENZA DEL SEGNALE PERIODICO $x(t)$ DI PERIODO T LA FUNZIONE

$$G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \neq |X(f)|^2$$

segnali a energia finita

il suo integrale deve darmi la potenza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) df$$

scambio sommatoria e integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 = P_x$$

1, $\forall k$

lo spettro mi dice anche quanta potenza c'è alle frequenze fondamentali

se $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

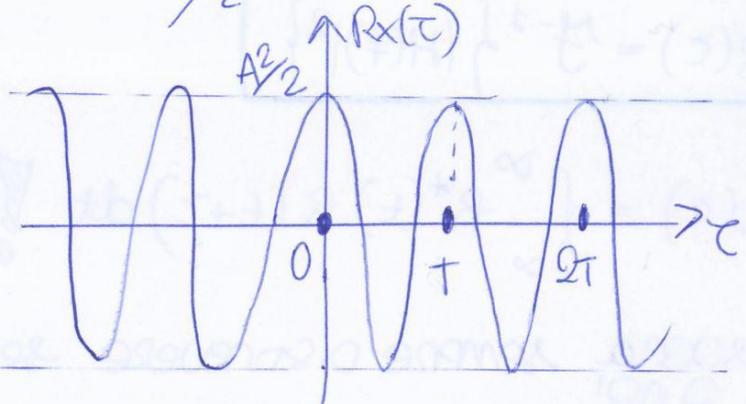
con $T = \frac{1}{f_0}$

$\mu_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}$ $\mu_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\theta}$

$R_x(\tau) = \sum_k |\mu_k|^2 e^{j2\pi k \frac{\tau}{T}} = |\mu_1|^2 e^{j2\pi \frac{\tau}{T}} + |\mu_{-1}|^2 e^{-j2\pi \frac{\tau}{T}} =$

$= \frac{A^2}{4} [e^{j2\pi \frac{\tau}{T}} + e^{-j2\pi \frac{\tau}{T}}] = \frac{A^2}{4} \cdot 2 \cos(2\pi \frac{\tau}{T}) =$

$= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$



Si DIMOSTRA che

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ G_y(\#) \} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

assomiglia
alla formula
x la potenza

$x(t)$ periodico



$x(\#) = \sum_k \mu_k \delta(\# - \frac{k}{T})$
 $y(\#) = x(\#) H(\#) = H(\#) \sum_k \mu_k \delta(\# - \frac{k}{T})$

cerco $G_y(\#)$ in funzione di $G_x(\#)$ noto e $H(\#)$ noto

$y(\#) = \sum_k H(\#) \mu_k \delta(\# - \frac{k}{T}) = \sum_k \underbrace{\mu_k H(\frac{k}{T})}_{\nu_k} \delta(\# - \frac{k}{T})$

$y(t) = \sum_k \nu_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$, $\nu_k = \mu_k H(\frac{k}{T})!$

$G_y(\#) = \sum_k |\nu_k|^2 \delta(\# - \frac{k}{T}) = \sum_k |\mu_k H(\frac{k}{T})|^2 \delta(\# - \frac{k}{T}) =$
 $= \sum_k \underbrace{|\mu_k|^2}_{G_x(\#)} |H(\frac{k}{T})|^2 \delta(\# - \frac{k}{T}) = |H(\#)|^2 \sum_k |\mu_k|^2 \delta(\# - \frac{k}{T})$

19 Aprile 2013

SEGNALE CARDIACO

Battito Atriale + Battito Ventricolare

nel \heartsuit ben funzionante, questi 2 tipi di battiti si alternano

il battito principale è quello ventricolare, mentre quello atriale è secondario

circa 60 battiti al minuto

- Extra sistole = salti un battito ventricolare ne soffrono 3 persone su 100
- Extra sistole ventricolare = parte un battito ventricolare in +
- Blocco Atrio-ventricolare 1° grado = filtro passa/basso (12 battiti si alternano lentamente)
- BAV 2° grado = costante che poi si perde 1 bat. ventr
3/4
- Blocco di branca α o β = anomalia nella contrazione
tratta + veloce
- Emblocco anteriore α = blocco contrazione del ventricolo
- Flutter atriale con conduzione 3:1 = atrio ha un battito comp. irregolare, molto + veloce di quello ventricolare
- Fibrillazione atriale = atrio non riesce più a contrarsi (\neq campo)
- Extra ventricolare
 ↓
 tachicardia ventricolare
 ↓
 fibrillazione ventricolare
 ↓
 defibrillazione efficace \leftarrow si interviene con
- Defibrillazione inefficace = cuore si ferma

Molti segnali biomedici non sono funzioni del tempo

ex: TAC o Risonanza \rightarrow sono funzioni dello spazio

La dinamica di ogni fenomeno reale misurabile deriva dall'integrazione tra sorgenti di energia e modulatori (dissipatori) di energia

Emissione del segnale \rightarrow assorbito dal corpo \rightarrow sensori registrano la dissipazione di energia

il complesso ECG è dato dalle onde P Q R S
 nel corpo non c'è dissociazione elettromeccanica.

P (1^a onda) = battito atriale (da alto verso basso)

QRS (2^a onda) = " ventricolare (complesso)

R = mi dà la frequenza cardiaca
 CONTRAZIONE VENTRICOLO

PR = distanza tra i 2 battiti

x l'ECG, gli elettrodi vengono messi

-1 PIEDE (L'ALTRO FUNGE DA MASSA)

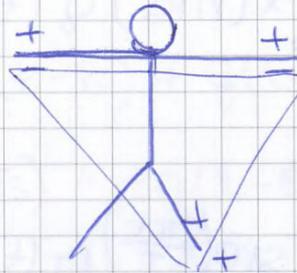
-2 BRACCIA

secondo il triangolo di EINTHOVEN

IL CUORE FA IL POLO NEGATIVO

T = onda ventricolare

QRS = misura depolarizzazione



Numero di Reynold

$$N_{re} = \rho D \cdot v \frac{1}{\eta}$$

ρ = densità

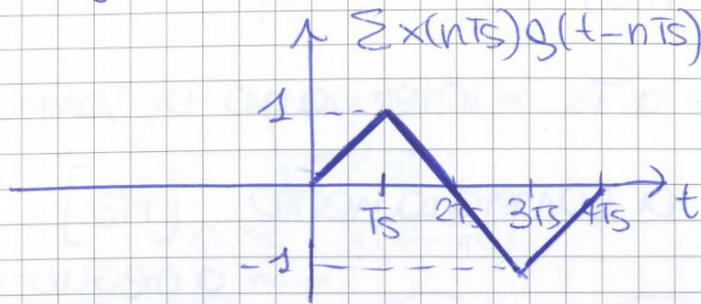
D = diametro

v = velocità

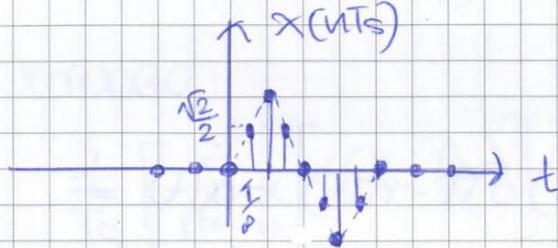
η = viscosità

SOFFIO = FLUSSO TURBOLento non laminare

$$= 1g(t - T_s) - g(t - 3T_s)$$



ora uso $T_s = \frac{T}{8}$



sopravvivono 6 termini

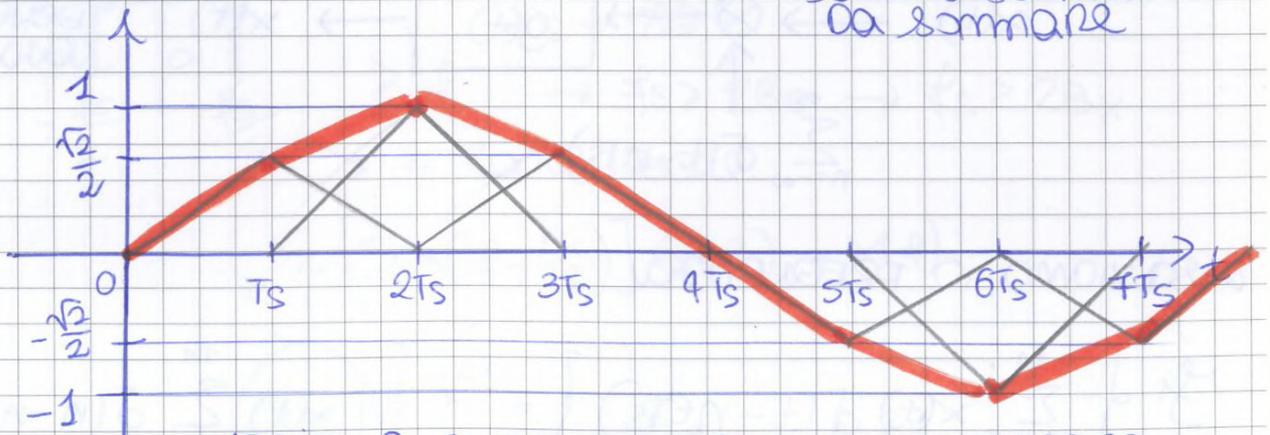
$$x(nT_s) = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \text{Pr}\left(\frac{nT}{8} - \frac{T}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)g(t-nT_s) = \frac{\sqrt{2}}{2}g(t-T_s) + g(t-2T_s) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}g(t-3T_s) - \frac{\sqrt{2}}{2}g(t-5T_s) - 1g(t-6T_s) - \frac{\sqrt{2}}{2}g(t-7T_s)$$

sono 6 segnali da sommare

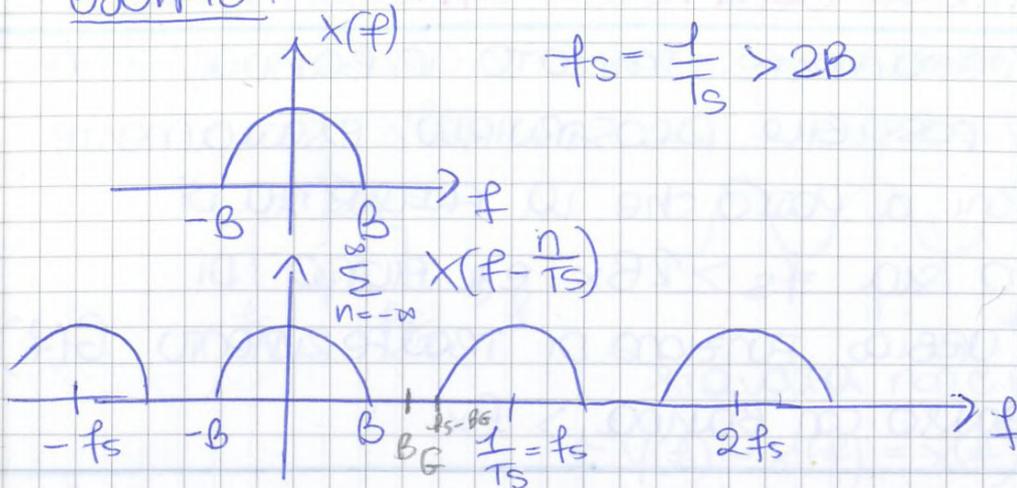


debiamo fare l'interpolazione lineare tra i campioni

L'intervallo di campionamento maggiore e minore di quello minore

di sicuro sarà sempre un'approssimazione e non avremo mai $x(t)$

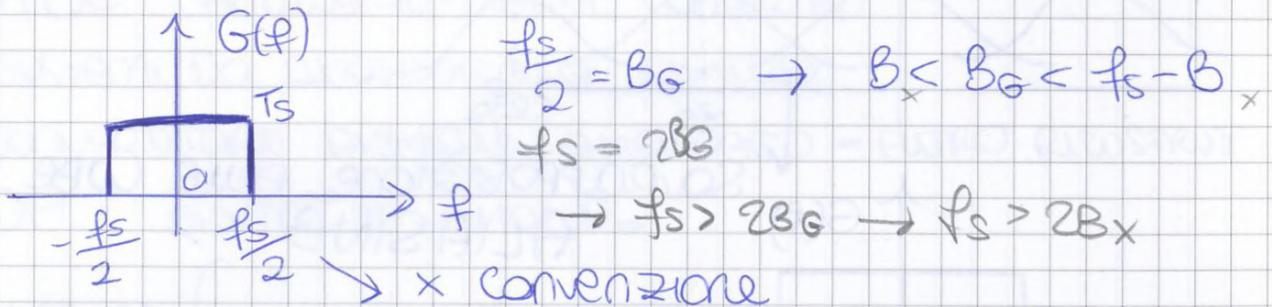
esempio:



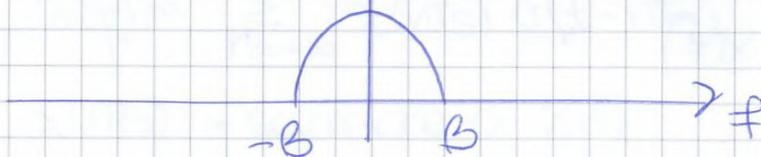
Impongo:

$$\frac{1}{T_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right] G(f) = X(f)$$

Guardando il disegno, devo prendere $G(f) =$ porta, filtro passa basso:



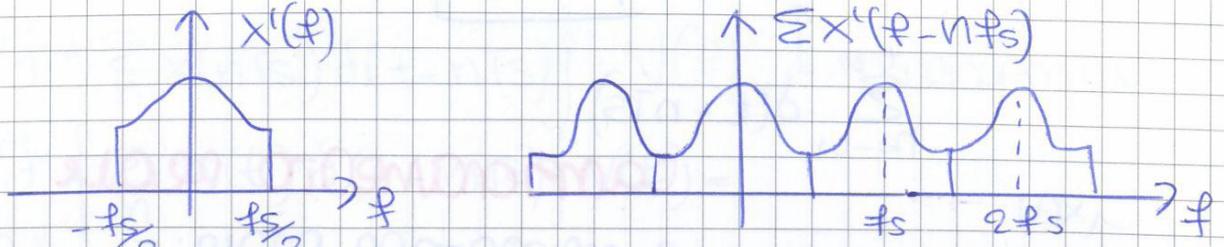
$$\left[\sum X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right] G(f) = X(f)$$



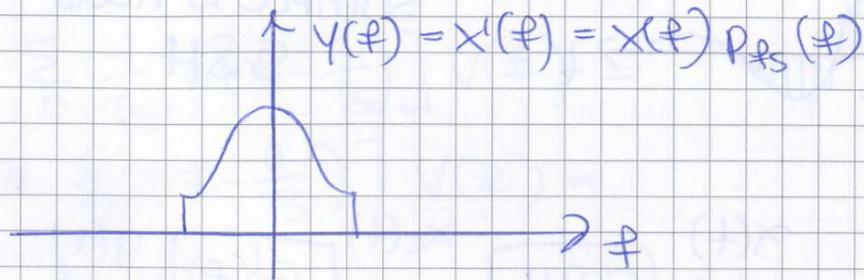
CONDIZIONI:

- LA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO DEVE ESSERE ABBASTANZA GRANDE
- $X(f)$ DEVE ESSERE STRETTAMENTE LIMITATO IN BANDA (BANDA B_x)

IL PRIMO FILTRO È IL FILTRO ANTI-ALIASING) che sono uguali!
 IL SECONDO FILTRO È IL FILTRO RICOSTRUTTORE



stava non c'è aliasing!



traccio il segnale iniziale, ma almeno la parte che c'è e' ricostruita perfettamente!!

ADC ANALOG-TO-DIGITAL CONVERTER
 SISTEMI DA ANALOGICO A DIGITALE

CONVERTITORE DIGITALE / ANALOGICO = FILTRO RICOSTRUTTORE
 DA DIGITAL-TO-ANALOG

$x(t)$ di banda B_x

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) g(t - nT_s)$$

$x(nT_s)$ = campione di $x(t)$

T_s = INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO

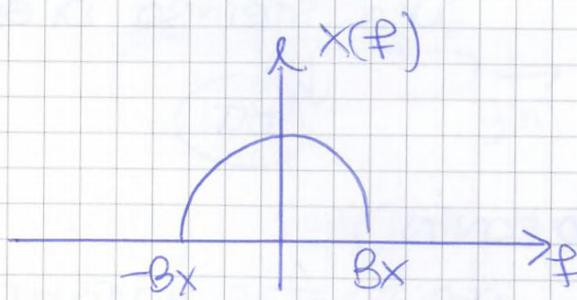
f_s = FREQUENZA " "

IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO:

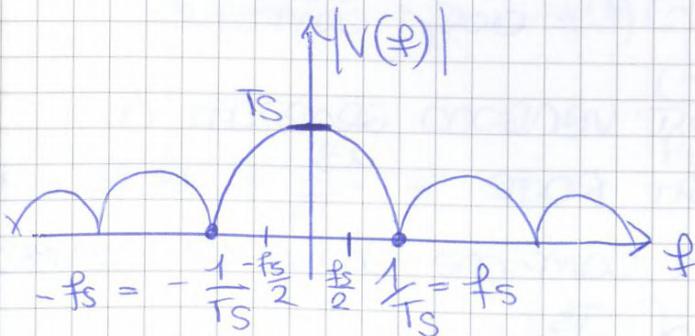
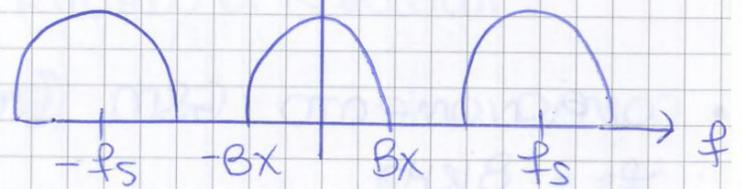
occorre che f_s sia $> 2B_x$ e che $g(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ G(f) \}$

con $G(f) = \begin{cases} T_s & |f| < f_s/2 \\ 0 & \text{altre} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 X_c(f) &= \mathcal{F}\left\{ \left[\sum_n x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * v(t) \right\} = \\
 &= \mathcal{F}\left\{ \sum_n x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right\} \cdot V(f) = \text{da ricordare} \\
 &= \mathcal{F}\left\{ \sum_n x(t) \delta(t - nT_s) \right\} V(f) = \\
 &= \mathcal{F}\left\{ x(t) \sum_n \delta(t - nT_s) \right\} V(f) = \\
 &= \left[X(f) * \sum_n \frac{1}{T_s} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right] V(f) = \\
 &= \left[\sum_n X(f) * \frac{1}{T_s} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right] V(f) = \\
 &= \left[\frac{1}{T_s} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right] V(f) = X_c(f)
 \end{aligned}$$



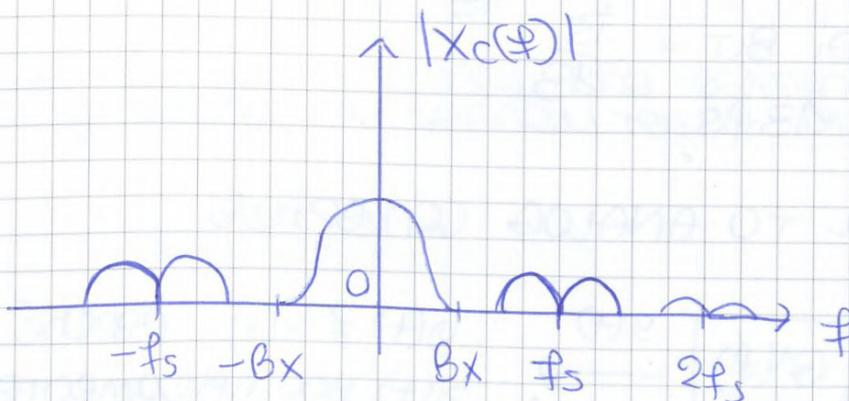
$$\sum X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \sum X(f - n f_s)$$



$$v(t) = \text{rect}_{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) = \text{rect}_{T_s}(t) * \delta\left(t - \frac{T_s}{2}\right)$$

$$V(f) = \frac{\sin \pi f T_s}{\pi f} e^{-j 2 \pi f \frac{T_s}{2}}$$

modulo e fase



vengono abbassati i valori alle frequenze più alte