NUMERO: 1201 DATA: 24/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Bettale

MATERIA: Analisi dei Segnali Temi D'Esame Riassunti + Eserc.

Prof. Visintin

MONICA VISINTIN PROF.

(GUIDO PAGANA) ESERCITATORE

ESERCITAZIONE con temi d'esame finali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 550

ALTRA FORMA DI EULERO:

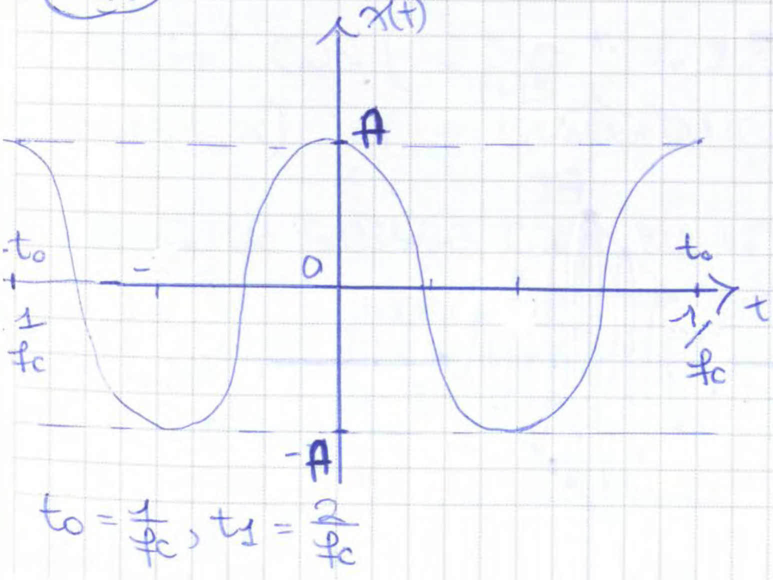
$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} = \mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j} = \mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} \end{aligned}}$$

UTILE x CASI DISPERATI DI TRIGONOMETRIA (ex: $\cos^2\varphi$ ecc..)

③ DISEGNO IL GRAFICO DI: $(t \in \mathbb{R}, (-\infty, +\infty))$

- $x(t) = A\cos(2\pi f_c t) \longrightarrow$ è un segnale!
- $y(t) = \begin{cases} T-|t| & \text{per } |t|<T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$
- $z(t) = x(t)\,y(t)$
- $T = \frac{4}{f_c}$ (PERIODO e FREQUENZA) $_{s \quad Hz}$, $A > 0$

$x(t)$



$t_0 = \frac{1}{f_c}$, $t_1 = \frac{2}{f_c}$

$A\cos(2\pi f_c t)\Big|_{t=0} = A$

$A\cos(2\pi f_c t)\Big|_{t=?\, t_0>0} = A$

$A = A$ se $\cos(2\pi f_c t_0) = 1$

$2\pi f_c t_0 = 2\pi \qquad t_0 = \frac{1}{f_c}$

$\frac{1}{f_c}$ è IL PERIODO DI QUESTO SEGNALE matlab

octave

A=10 si ripete

A=10; non si ripete

fc = 4/T , T = 20

fc = 0,200

pi = (pigreco)

J = (0 + 1i) da non usare come indice di loop
for J = 1 ...

facciamo il grafico solo da −2T a 2T non uso (−∞,∞)
(uso sempre solo degli intervalli)

$t_0 = \frac{1}{fc}$

$dt = \frac{t_0}{S}$ → campione da noi scelto

t = [−2*T : dt : 2*T] (mi fa vedere i campioni)

x = A* cos(2* pi * fc * t)

plot(t,x) (x disegnare)

scrivo le stesse cose su un file (sinu.m)

```
* A=1;
T=20;
fc=4/T;
t0= 1/fc;

Ncoi = 16;   campione da noi scelto
dt = t0/Ncoi;
t = [-2*T : dt : 2*T]';
```

↓ vettore riga (per t = [−2*T : dt : 2*T])

vettore colonna (per t = [−2*T : dt : 2*T]')

(idem x il trasposto di una matrice)

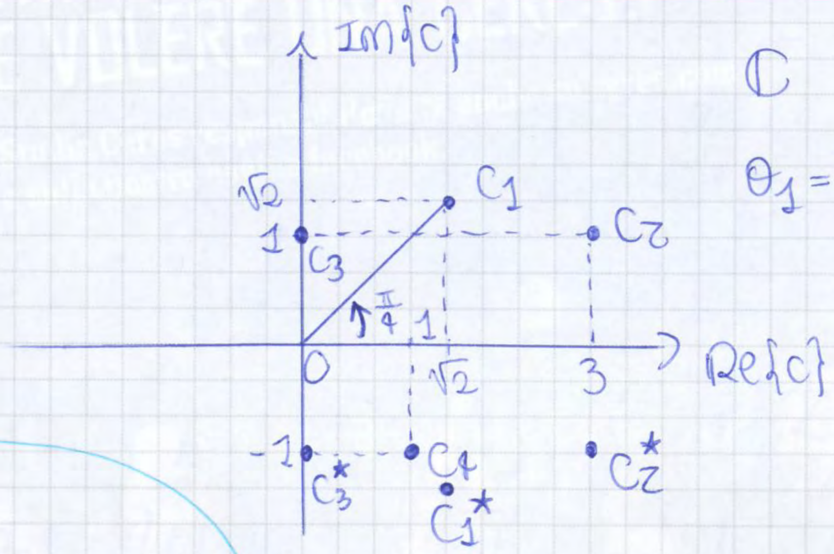
```
x = A*cos(2*pi*fc*t);
figure(1)
plot(t,x), grid on,
xlabel 't', ylabel 'x(t)'
```

console → sinu

* clear all
close all

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}\{c\} &= \frac{c+c^*}{2} \\ \mathrm{Im}\{c\} &= \frac{c-c^*}{2j} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |c|^2 &= \sqrt{(\mathrm{Re}\{c\})^2+(\mathrm{Im}\{c\})^2} = c\cdot c^* \\ \angle c &= \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\{c\}}{\mathrm{Re}\{c\}}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{c\}}{\mathrm{Re}\{c\}}\right) \end{aligned}}$$



$\mathbb{C}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4} = -$

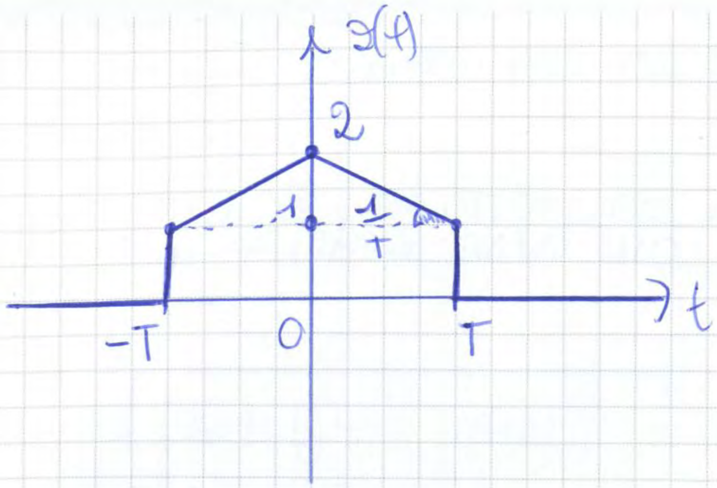
$$e^{j2\pi} = 1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j2k\pi} = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$e^{jk\pi} = (e^{j\pi})^k = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$z(t)$



$\psi(t)$ PSI

$\varphi(t)$ FI

(8) SI CONSIDERI IL SEGNALE COMPLESSO:

$x(t) = e^{-j 2\pi f_c t}$ $\quad$ f_c FREQUENZA DATA POSITIVA

$t \in \mathbb{R} \quad (-\infty, +\infty)$

$x(t) = x_R(t) + j\, x_I(t) = M(t)\, e^{j\varphi(t)}$

TROVO E DISEGNO $x_R(t)$, $x_I(t)$, $M(t)$, $\varphi(t)$.

DISEGNO NEL PIANO COMPLESSO I PUNTI DI $x(t)$

CON $t=0$, $t = \frac{1}{8f_c}$, $t = \frac{1}{4f_c}$, $t = \frac{1}{2f_c}$, $t = \frac{1}{f_c}$, $t = \frac{2}{f_c}$

E LA TRAIETTORIA PERCORSA DA $x(t)$ NELL'INTERVALLO

$t \in \left[0, \frac{1}{f_c}\right]$.

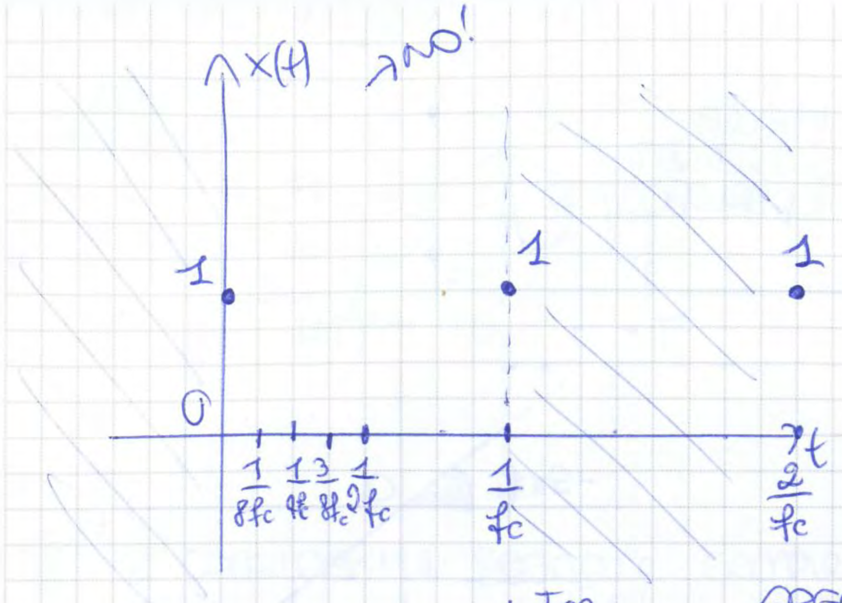
$M(t) = 1$ $\quad$ $x_R(t) = \cos(2\pi f_c t)$

$\varphi(t) = -2\pi f_c t$ $\quad$ $x_I(t) = \sin(2\pi f_c t)$

$x(t) = \cos\varphi(t) + j \sin\varphi(t) = \cos(-2\pi f_c t) + j \sin(-2\pi f_c t$

$x(t) = \cos(2\pi f_c t) - j \sin(2\pi f_c t)$

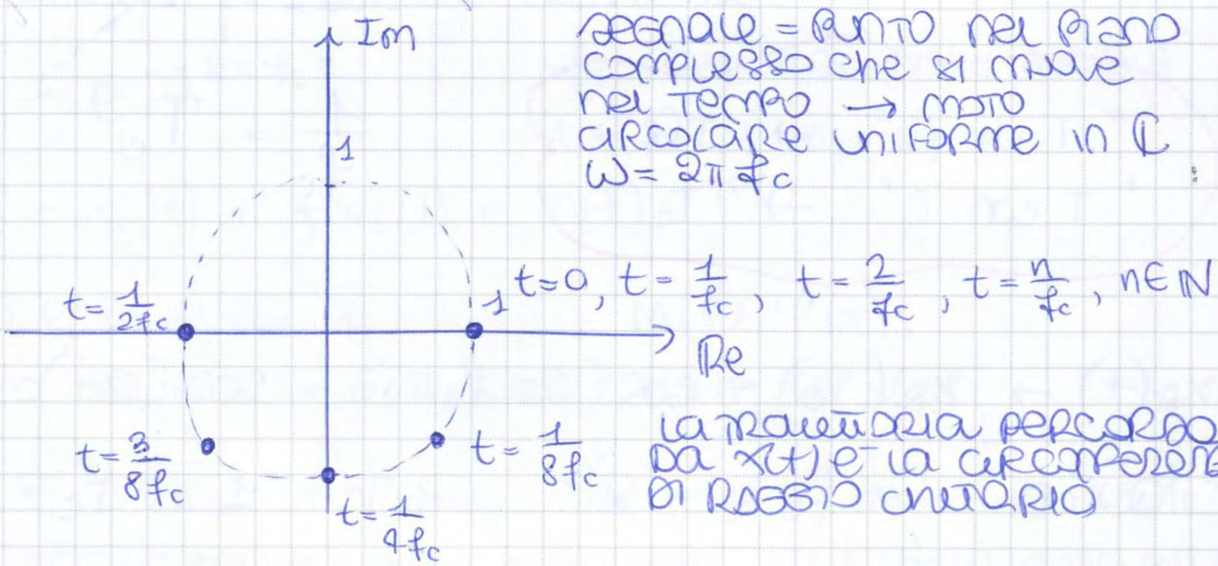
$\varphi(t)$ = É LINEARE, DIPENDE LINEARMENTE DAL TEMPO



HA DETTO DI USARE IL PIANO COMPLESSO

SEGNALE = PUNTO NEL PIANO COMPLESSO CHE SI MUOVE NEL TEMPO → MOTO CIRCOLARE UNIFORME IN $\mathbb{C}$

$\omega = 2\pi f_c$



LA TRAIETTORIA PERCORSA DA $x(t)$ È LA CIRCONFERENZA DI RAGGIO UNITARIO

ORA PASSIAMO A OCTAVE × DISEGNARE IL SEGNALE

$t_k = t_{k-1} + dt$

$N = 20;$ (CAMPIONI) NELL'INTERVALLO $\left[0, \frac{1}{f_c}\right]$

$dt = \frac{1/f_c}{N} = \frac{1}{N f_c}$

PROGRAMMA: FILE.m CREO SEMPRE UN NUOVO TEXT FILE, NON SCRIVO DIRETTAMENTE SULLA CONSOLE

```
N = 20;
fc = 10.;      % freq. centrale in Hz
Tc = 1./fc;
dt = Tc/N;
```

COMMENTO

IL PUNTO È × DIRE CHE SONO REALI (floating point)

9) già

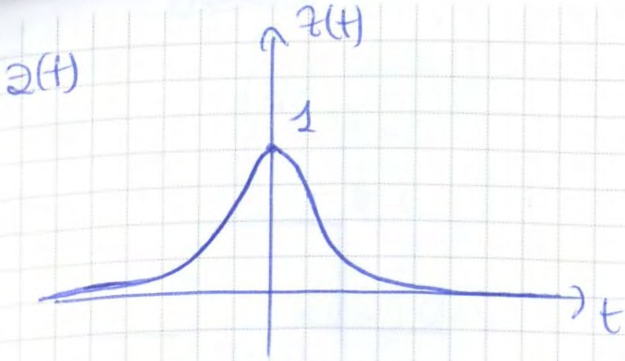
$x(t) = M(t)\, e^{j 2\pi f_c t}$

con $M(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/T & 0 \le t \le T \\ 1 & t > T \end{cases}$ (SPIRALE!)

DISEGNO x(t) NEL PIANO COMPLESSO

```
fc = 1;
Tc = 1/fc;
T = 2*Tc;
M = t/T .*(t<=T) + (t>T);
N = 100;
dt = Tc/N;
t = [0: dt: 5*Tc];
y = x.* M;
figure (3)
plot(y), xlabel 'real(y)', ylabel 'imag(y)', grid on
```

.* PRODOTTO ELEMENTO x ELEMENTO DEI 2 VETTORI



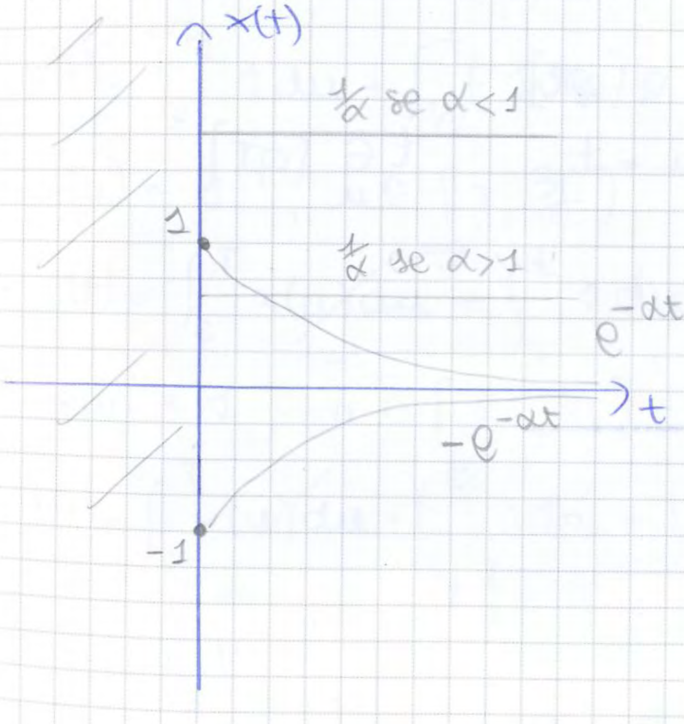
meno spigoloso in 1

(10) Disegno il grafico di $x(t) = \int_0^t e^{-\alpha u}\, du$ per $t > 0$

Suppongo $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha u}\, du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha u}(-\alpha)\, du = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha u}\right]_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

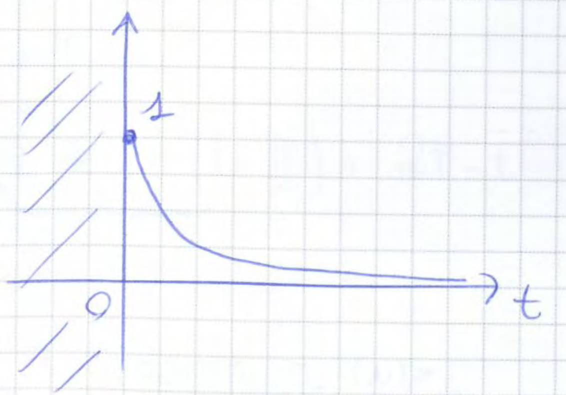


$x(0^+) = 1/\alpha$

$x(\infty) = 0$

$x(t)$ sempre > 0

se $\alpha = 1$

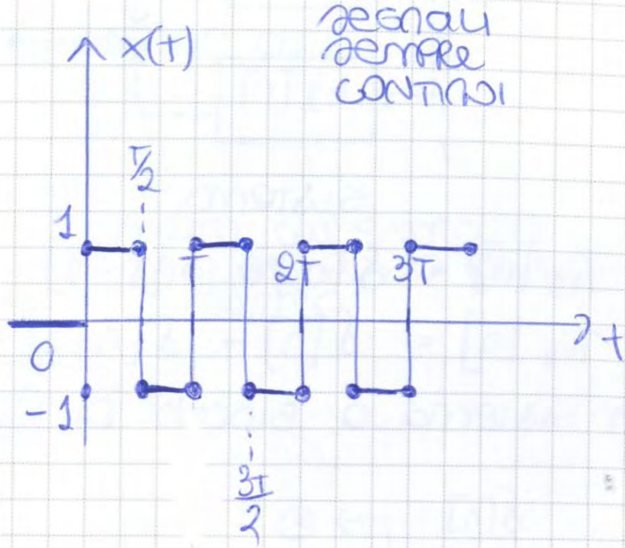


(12) DISEGNO IL GRAFICO

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \in [kT, kT + \frac{T}{2}) \\ -1 & t \in [kT + T/2, kT + T) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N} \ (0, 1, 2, \dots)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$$

SEGNALI SEMPRE CONTINUI



- $x(u) = 0, \ u < 0 \quad (t<0)$

  $y(t) = 0, \ t<0$

- $x(u) = 1, \ u \in [0, \frac{T}{2}]$

  $y(t) = \int_0^t 1\, du = t, \ t \in [0, \frac{T}{2}]$

- $x(u) = -1, \ u \in [\frac{T}{2}, T]$

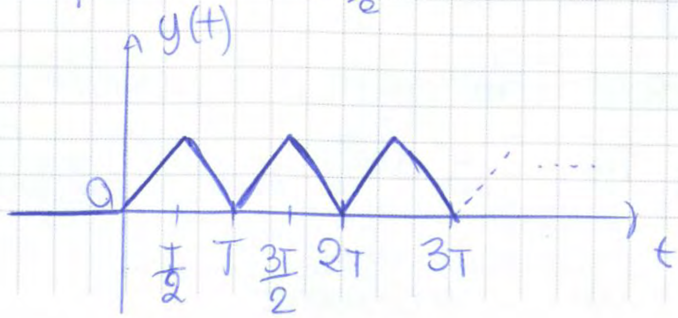
  $y(t) = \int_0^{T/2} 1\, du + \int_{T/2}^{t} -1\, du = \frac{T}{2} - (t - \frac{T}{2}) = T - t$

- $x(u) = 1, \ u \in [T, \frac{3T}{2}]$

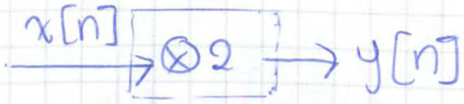
  $y(t) = \underbrace{\int_0^T \cancel{x(u)\, du}}_{=0} + \int_T^t 1\, du = t - T$

- $x(u) = 1, \ u \in [\frac{3}{2}T, 2T]$

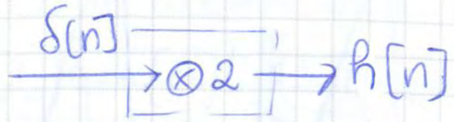
  $y(t) = \underbrace{\int_0^T \cancel{x(u)}\, du}_{=0} + \int_T^{\frac{3T}{2}} 1\, du + \int_{\frac{3T}{2}}^{t} -1\, du = \frac{T}{2} - (t - \frac{3T}{2}) = 2T - t$



ⓐ Disegno uno schema a blocchi alternativo:

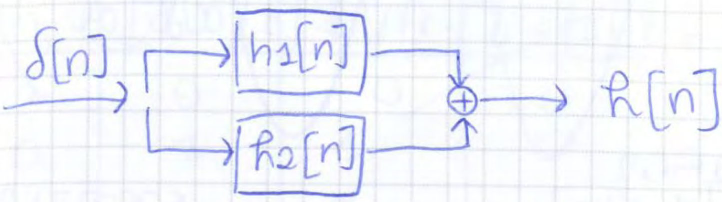


Generico, equivalente al primo ma più semplice



nel nostro caso

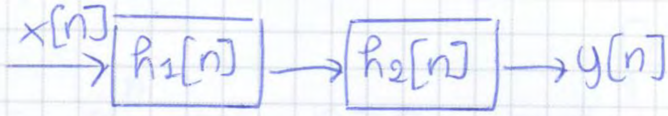
ⓑ Calcolo $h[n]$



metto all'entrata $\delta[n]$ al posto di $x[n]$ generico

ESERCIZIO ②

Stesso esercizio, ma non in //, in serie (o a cascata)



Calcolo $h[n]$:

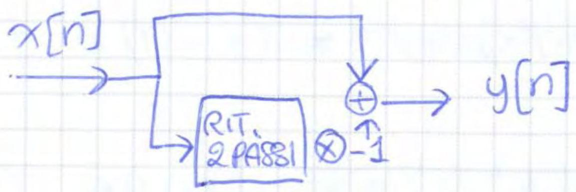
convoluto $x[n] * h[n]$

$$\delta[n] \longrightarrow \underset{\delta[n]+\delta[n-1]}{h_1[n]} \longrightarrow h_2[n] \xrightarrow{h_1[n]*h_2[n]} \underset{\delta[n]+\cancel{\delta[n-1]}-\cancel{\delta[n-1]}-\delta[n-2]}{h[n]}$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-2] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] =$$

e disegni un sistema a blocchi alternativo



↓ oppure 2 blocchi consecutivi che ritardano di 1 unità

ESERCIZIO 3

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$$

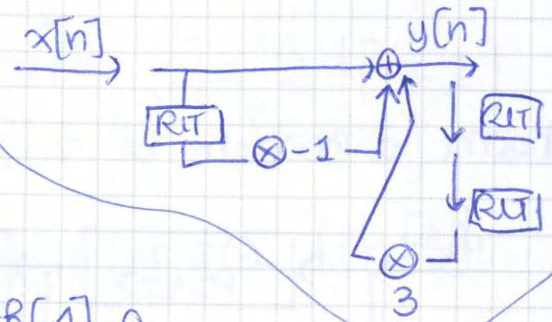
CALCOLO LA RISPOSTA ALL'IMPULSO

SISTEMA RESETTATO
→ $y[n]=0$
QUINDI PER $n<0$, USCITA E INGRESSO SONO 0

n	$\delta[n]$	$h[n]$	$h[n-1]$
-1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	α	1
2	0	α^2	α
3	0	α^3	α^2
4	0	α^4	α^3

3 bis

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 3y[n-2]$$



$h[n] = \alpha^n$ per $n \geq 0$ → cioè $h[n] = \alpha^n u(n)$

$$\begin{cases} h[-1] = 0 \\ h[0] = 1 + \alpha h[-1] = 1 \\ h[1] = 0 + \alpha h[0] = \alpha \\ h[2] = 0 + \alpha h[1] = \alpha^2 \end{cases}$$

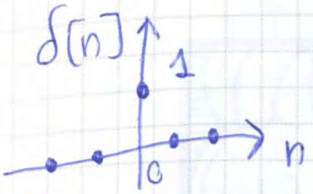
OCTAVE:

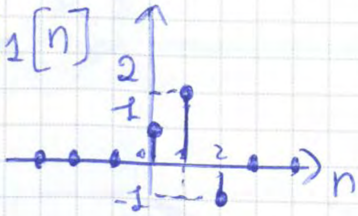
```
alpha = 0,5;
N = 10;
x = zeros(N,1);        → è un vettore colonna di N zeri
x(5) = 1;
for n = 2:N;
y(n) = y(n-1) * alpha + x(n);
end;
plot(y)   oppure   plot(y,'o')   che mette i pallini al posto dei punti
hold on
plot(x)     } sullo stesso grafico disegno x e y
hold off
```

ora con la convoluzione

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]\, h_2[n-k]$$

prendo solo i $k \in [0,2]$





$$h[n] = h_1[0]h_2[n] + h_1[1]h_2[n-1] + h_1[2]h_2[n-2] = h_2[n] + 2h_2[n-1] + -1h_2[n-2]$$

$h_1[0] = \delta[0] + 0 + 0 = 1$

$h_1[1] = 0 + 1 \cdot 2$

$h_1[2] = 0 - 1$

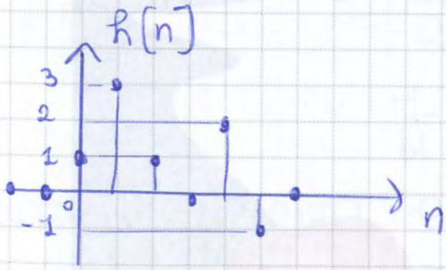
Tabellina

ora sostituisco

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cancel{\delta[n-3]} + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-4] - \delta[n-2] - \cancel{\delta[n-3]} - \delta[n-5] =$$

$$= \delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] + 2\delta[n-4] - \delta[n-5]$$

le 2 risposte all'impulso calcolate nei 2 modi sono uguali.



octave:

```
h1 = [1,2,-1];
h2 = [1,1,0,1];
h = conv(h1,h2);
h
```

estensione = numero di elementi nel vettore

est. 3

est. 4

→ est: 6 cioè ① + ② - 1 = 6

$3 + 4 - 1 = 6$

e mi stampa la risposta di h

IL SISTEMA È LINEARE CON

$$y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_1(t-1) + x_1(t-2)$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2}x_2(t) - \frac{1}{2}x_2(t-1) + x_2(t-2)$$

TEMPO INVARIANZA (RIVEDO anche soluzione)

$$y_1[t] = \mathcal{T}\{x(t-N)\} = \int_{t-1}^{t} x(\tau - N)\,d\tau + x(t^{-N}-2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2(t-N) - \frac{1}{2}x^2(t-1-N) + x(t-N-2)$$

$$y[t-N] = \frac{1}{2}x^2(t-N) - \frac{1}{2}x^2(t-N-1) + x(t-N-2)$$

$\rightarrow y_1(t) = y(t-N)$ IL SISTEMA È TEMPO INVARIANTE

ESERCIZIO 6

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = 4 + e^{x(t)}$$

DISCUTO LINEARITÀ E TEMPO INVARIANZA

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$$
$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} = 4 + e^{x_2(t)}$$
$$y_n(t) = \mathcal{T}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = 4 + e^{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)} =$$
$$= 4 + e^{a_1x_1(t)}\,e^{a_2(x_2(t))} \neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$ non è lineare

TEMPO INVARIANZA

$$y(t-N) = 4 + e^{x(t-N)}$$
$$y_k(t) = \mathcal{T}\{x(t-N)\} = 4 + e^{x(t-N)}$$

$y(t-N) = y_k(t)$ È TEMPO INVARIANTE!

$Z = j\omega L = j2\pi f L$ impedenza = funz di trasf.

Calcolo $v(t)$ supponendo $i(t)$ sinusoide
$i(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$
e calcolare $v(t)$

● 1° modo

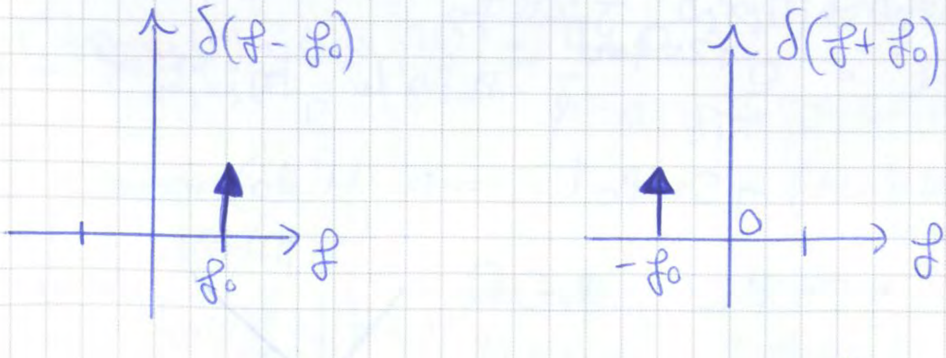
$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\frac{d}{dt}(A\cos(2\pi f_0 t+\theta)) =$
$= -LA\sin(2\pi f_0 t+\theta)\,2\pi f_0 =$
$= -LA\,2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t+\theta)$

● 2° modo

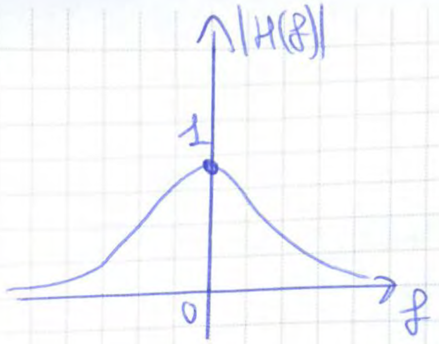
$X(f) = A\frac{1}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]$
$Y(f) = H(f)X(f) =$
$= j2\pi f L A\frac{1}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]$
$= j\pi f LA\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]$

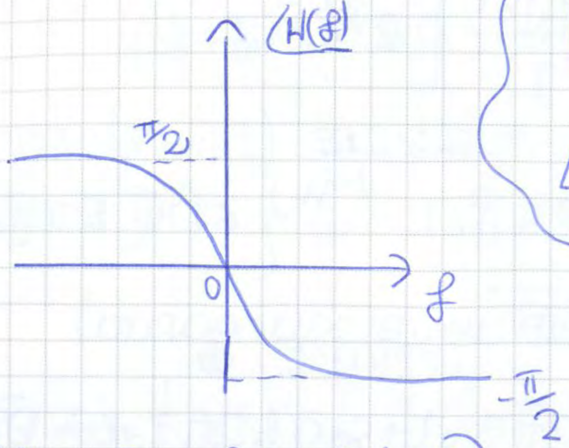
$V(f) = H(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}H(f)\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}H(f)\delta(f+f_0)\right] =$
$= \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}H(f_0)\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}H(-f_0)\delta(f+f_0)\right] =$
$= \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}j2\pi f_0 L\,\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}(-j2\pi f_0 L)\,\delta(f+f_0)\right]$

$V(f) = Aj\pi f_0 L\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) - e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]$



$j = -\frac{1}{j}$





$$\left|\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{|c|} \qquad \angle\frac{1}{c} = -\angle c$$

se l'ingresso é $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]$$

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0)H(f_0) + e^{-j\theta}H(-f_0)\delta(f+f_0)\right]$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0)\frac{T}{1+j2\pi f_0 T} + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\frac{T}{1-j2\pi f_0 T}\right]$$

meglio osservarla come modulo e fase $\rightarrow M(f)e^{j\varphi(f)}$

$$M(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f T)^2}}, \quad \varphi(f) = -\operatorname{arctg}(2\pi f T)$$

$$H(f_0) = M(f_0)e^{j\varphi(f_0)} = \frac{T}{\sqrt{1+(2\pi f_0 T)^2}} e^{j\,tg^{-1}(2\pi f_0 T)}$$

$$\rightarrow Y(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}M(f_0)e^{j\varphi(f_0)}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}M(f_0)e^{j\varphi(f_0)}\delta(f+f_0)\right]$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}M(f_0)\left[e^{j(\theta+\varphi(f_0))}\delta(f-f_0) + e^{-j(\theta+\varphi(f_0))}\delta(f+f_0)\right]$$

$$= AM(f_0)\left[\frac{e^{j(\theta+\varphi(f_0))}\delta(f-f_0) + e^{-j(\theta+\varphi(f_0))}\delta(f+f_0)}{2}\right]$$

$$y(t) = AM(f_0)\cos(2\pi f_0 t + \theta + \varphi(f_0))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{t-T}^{t} A\cos(2\pi f_0 \tau + \theta)\, d\tau =$$

$$= \left[A \frac{\sin(2\pi f_0 \tau + \theta)}{2\pi f_0} \right]_{t-T}^{t} = A\frac{\sin(2\pi f_0 t + \theta)}{2\pi f_0} - \frac{A \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 T}{2\pi f_0}$$

✓ $= \dfrac{A}{2\pi f_0}\left[\sin(2\pi f_0 t + \theta) - \sin(-2\pi f_0 T + 2\pi f_0 t + \theta) \right]$

2 SCRI DIVER X LO STESSO SEGNA

* $y(t) = \dfrac{AT}{2} \dfrac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T} \cos(2\pi f_0 t + \theta - \pi f_0 T)$

DIRE X QUALI VALORI DI f_0 $y(t)$ È NULLA?

* $\sin \pi f_0 T = 0 \iff \pi f_0 T = 0 \qquad f_0 = 0$

$\pi f_0 T = \pi \qquad f_0 = \frac{1}{T}$

$\pi f_0 T = 2\pi \qquad f_0 = \frac{2}{T}$

.....

$\cos(2\pi f_0 t + \theta - \pi f_0 T) = 0 \iff 2\pi f_0 t + \theta - \pi f_0 T = \frac{\pi}{2}$

$f_0(2\pi f - \pi T) = \frac{\pi}{2} - \theta$

$f_0 = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2\pi f - \pi T}$

✓ $-2\pi f_0 T = k 2\pi$

$\cancel{\pi f_0 T = \pi} \quad \cancel{f_0 = \frac{1}{T}}$

$2\pi f_0 T = 2\pi \qquad f_0 = \frac{1}{T}$

$2\pi f_0 T = 4\pi \qquad f_0 = \frac{2}{T}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 550

$$\omega(t) = z(t) * h(t) = h(t) * z(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau =$$

$$z(t) = x(t)\,\delta(t) + x(t)\,\delta(t+T) =$$

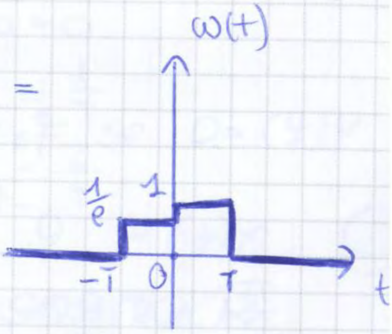
$$= x(0)\,\delta(t) + x(-T)\,\delta(t+T) =$$

$$= \delta(t) + e^{-1}\,\delta(t+T) = \delta(t) + \frac{1}{e}\,\delta(t+T)$$

$$\omega(t) = \left[\delta(t) + \frac{1}{e}\,\delta(t+T)\right] * h(t) =$$

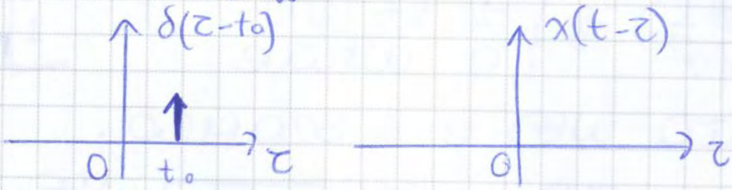
$$= \delta(t) * h(t) + \frac{1}{e}\,\delta(t+T) * h(t) =$$

$$= h(t) + \frac{1}{e}\,h(t+T) \;!!$$



infatti:

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)\, x(t-t_0)\, d\tau = x(t-t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)\, d\tau =$$

$$= x(t-t_0) \cdot 1 = x(t-t_0)$$

$$\boxed{\text{PROPRIETÀ} = \begin{cases} x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) \\ x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \end{cases}}$$

$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$

$y(t) = x(kt) \qquad k \in \mathbb{R},\ k > 1$

$Y(f) = ?$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(kt)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$\begin{cases} kt = u \\ dt = \dfrac{du}{k} \end{cases} \qquad Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-j2\pi f \frac{u}{k}}\, \frac{du}{k} =$$

$$= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-j2\pi f \frac{u}{k}}\, du = \boxed{\frac{1}{k} X\left(\frac{f}{k}\right)}$$

$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$

$y(t) = x(-t)$

$Y(f) = ?$

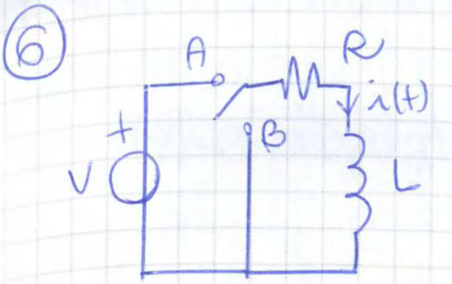
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$\begin{cases} -t = u \\ t = -u \\ -dt = du \end{cases} \qquad Y(f) = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)\, e^{j2\pi f u}\, du =$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} + x(u)\, e^{-j2\pi f(-u)}\, du = \boxed{+X(-f)}$$

x k $\quad \int_{+\infty}^{-\infty} g(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx$

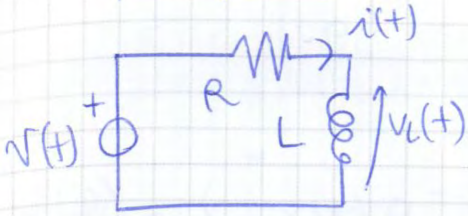
6



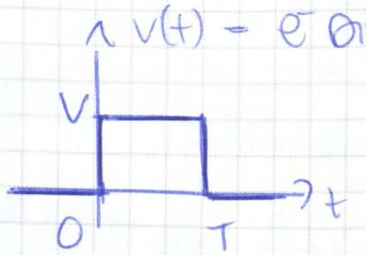
in B per $t<0$

in A per $0 \leq t \leq T$

in B per $t>T$



$v(t)$ - è diventato un segnale



Calcolo la funzione di trasferimento $H(f)$

$$\xrightarrow{v(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{i(t)}$$

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t)\, dt$$

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) = R\,i(t) + L \frac{d}{dt}(i(t))$$ EQ differenziale

EQ valida sia nel dominio del tempo, sia in quello della frequenza

$$V(f) = \mathcal{F}\left\{ R\,i(t) + L \frac{d}{dt}(i(t)) \right\} = R\,I(f) + L \underbrace{\boxed{j2\pi f}}_{\text{DERIVATORE}} I(f)$$

$$V(f) = I(f)\left(R + Lj2\pi f\right)$$

$$I(f) = \frac{V(f)}{R + j2\pi f L} = V(f)\,H(f)$$

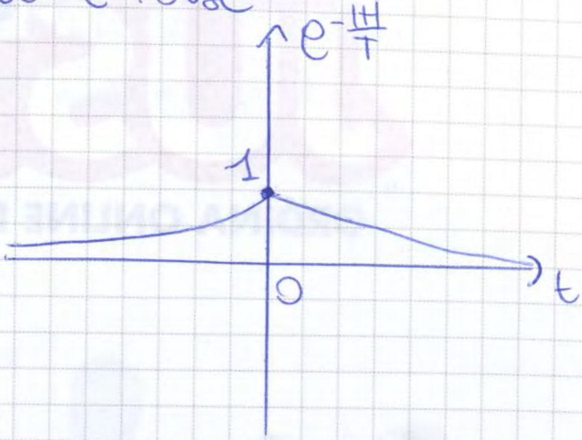
$$H(f) = \frac{I(f)}{V(f)} = \frac{\cancel{V(f)}}{R + j2\pi f L} \frac{1}{\cancel{V(f)}} = \frac{1}{R + j2\pi f L}$$

ESERCITAZIONE ④

26 MARZO 2013

① Calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$ e ne disegno modulo e fase

$$e^{-\frac{|t|}{T}} = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T}} & t > 0 \\ e^{+\frac{t}{T}} & t < 0 \end{cases}$$



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{T}} e^{-2\pi j f t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi j f t + \frac{t}{T}}\, dt +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi j f t - \frac{t}{T}}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t\left(-2\pi j f + \frac{1}{T}\right)}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{t\left(-2\pi j f - \frac{1}{T}\right)}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{-2\pi j f + \frac{1}{T}} e^{t\left(-2\pi j f + \frac{1}{T}\right)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-2\pi j f - \frac{1}{T}} e^{t\left(-2\pi j f - \frac{1}{T}\right)}\right]_{0}^{\infty} =$$

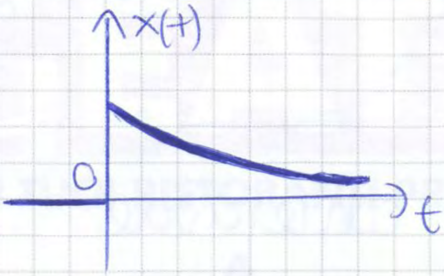
$$= \frac{1}{-2\pi j f + \frac{1}{T}} (1 - 0) + \frac{1}{-2\pi j f - \frac{1}{T}} (-1) =$$

$$= \frac{T}{1 - j2\pi f T} + \frac{T}{1 + j2\pi f T} = \frac{T\left(1 + \cancel{j2\pi f T} + 1 - \cancel{j2\pi f T}\right)}{1 - (j2\pi f T)^2} =$$

$$= \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2} = X(f)$$

potevo trovarlo sulle tavole..

$$\boxed{\mathcal{F}\{y^2(t)\} = \mathcal{F}\{y(t)\cdot y(t)\} = Y(f) * Y(f)}$$



calcolare la T. di F

$$x(t) = t e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

usando le tavole

$$y(t) = a t e^{-at} u(t)$$

$$Y(f) = \frac{a}{(a + j2\pi f)^2}$$

$$x(t) = t e^{-\frac{t}{T}} u(t) \quad , \quad a = \frac{1}{T}$$

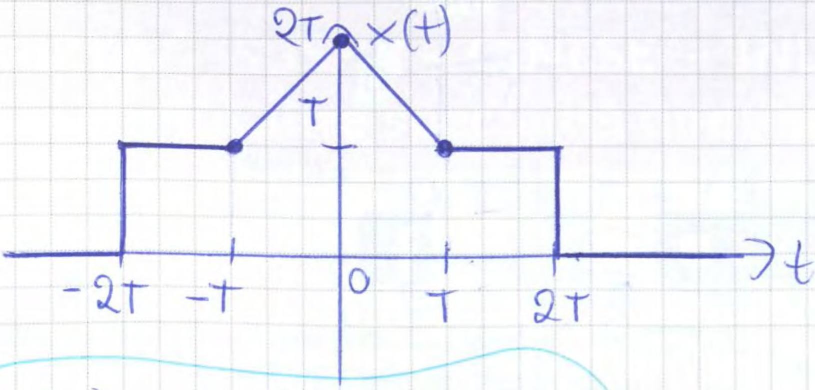
moltiplico e divido x $\frac{1}{T}$

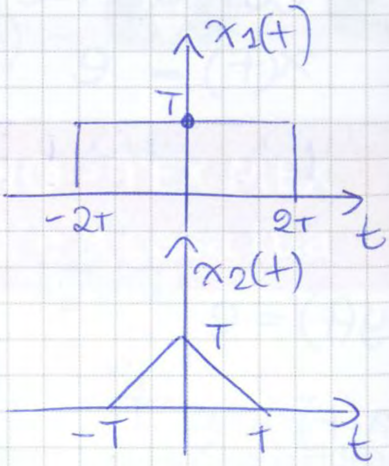
$$x(t) = T \cdot \frac{1}{T} t e^{-\frac{t}{T}} u(t) \quad , \quad X(f) = T \frac{\frac{1}{T}}{\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)^2}$$

$$X(f) = \frac{1}{\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)^2}$$

④

$$x(t) = \begin{cases} 2T - |t| & |t| \leq T \\ T & t \in [T, 2T] \\ T & t \in [-2T, -T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$





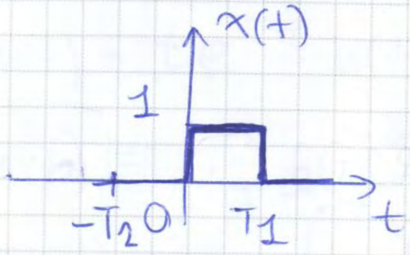
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

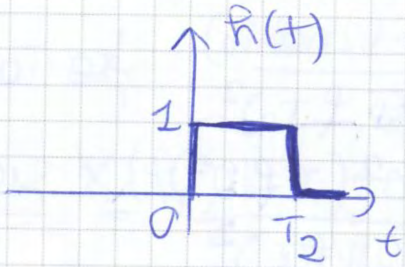
$$\mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \mathcal{F}\{x_2(t)\} =$$
$$= T\frac{\sin(\pi f 4T)}{\pi f} + T2\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \checkmark$$

(8)

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$x(t) = p_{T_1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right)$$
$$h(t) = p_{T_2}\left(t - \frac{T_2}{2}\right) \qquad T_2 > T_1 \qquad y(t) = ?$$





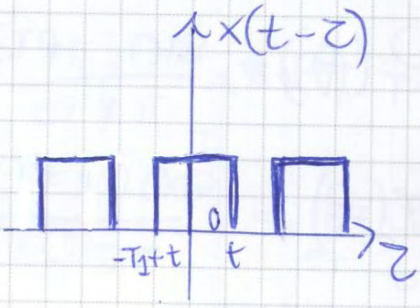
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{t} dt = t \quad 0 < t < T_1}$$

$\cancel{t < 0}$

$\cancel{T_1 < t < T_2}$

$\cancel{\int^{T_2} dt} =$

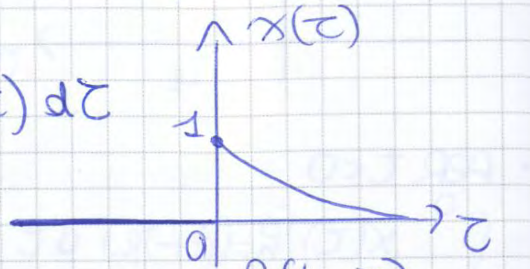


7

$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$

$h(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$ $\quad y(t) = ?$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau$$

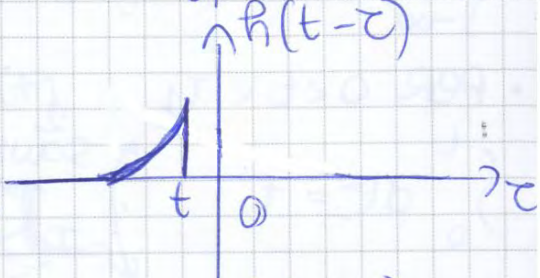


$t<0 : y(t) = 0$

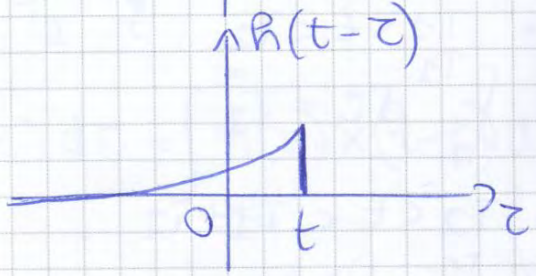
$t>0 : y(t) = \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} \underbrace{\cancel{u(\tau)}}_{=1} e^{-\frac{t-\tau}{T}} \underbrace{\cancel{u(t-\tau)}}_{=1} d\tau$

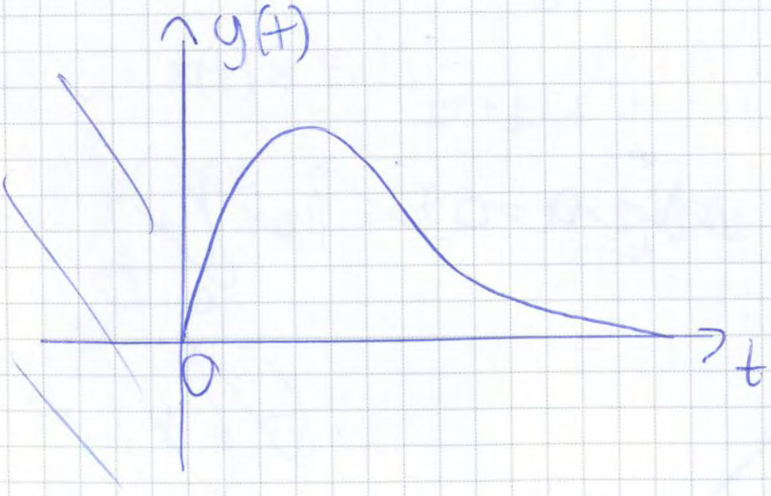
$$y(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\tau}{T} + \frac{t-\tau}{T}\right)} d\tau =$$

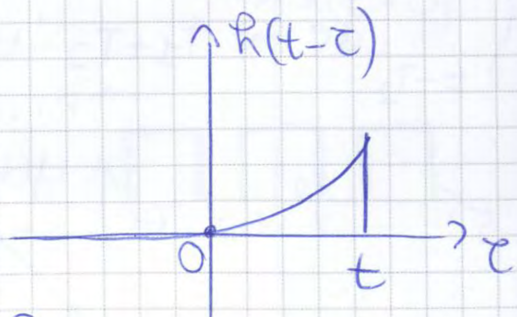
$$= \int_0^t e^{-\frac{t}{T}} d\tau = e^{-\frac{t}{T}} \cdot t \quad ✓$$



$y(t) = t e^{-\frac{t}{T}} u(t)$ espressione compatta e completa







ORA RIFO LAVORANDO IN FREQUENZA

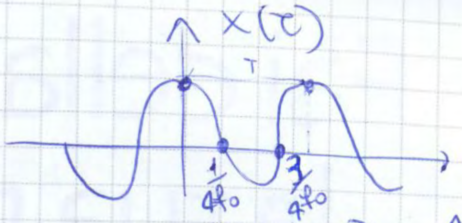
$$X(f) = H(f) = \frac{T}{1 + j 2\pi f T}$$

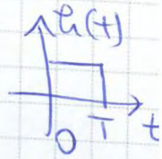
così $Y(f) = X(f) H(f) = [X(f)]^2$ poi $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$

① $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

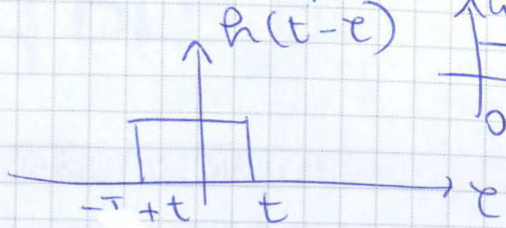
$h(t) = p_T(t - \frac{T}{2})$

$y(t) = x(t) * h(t)$





$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



x quale valore di T l'uscita $y(t)=0$ e idem per f_0

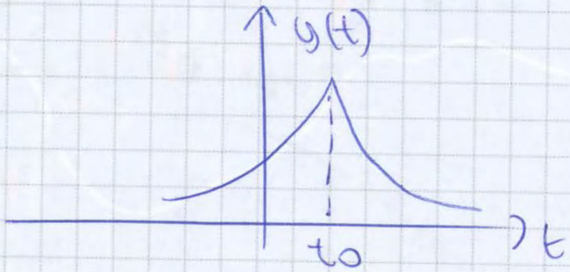
$$y(t) = \int_{-T+t}^{t} A\cos(2\pi f_0 \tau)\, 1\, d\tau = \frac{A}{2\pi f_0}\Big[\sin(2\pi f_0 \tau)\Big]_{-T+t}^{t}$$

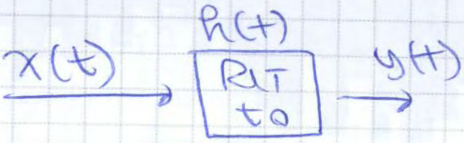
$$= \frac{A}{2\pi f_0}\Big[\sin(2\pi f_0 t) - \sin(2\pi f_0[t - \ \ ])\Big]$$

$y(t) = 0$ se $T = \frac{k}{f_0}$

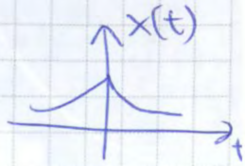
Quando T è uguale a un periodo o un multiplo intero di $x(\tau)$ è zero!

② $y(t) = e^{-\frac{|t-t_0|}{T}}$ $\quad Y(f) = ?$





con $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$



$Y(f) = X(f)\, H(f)$

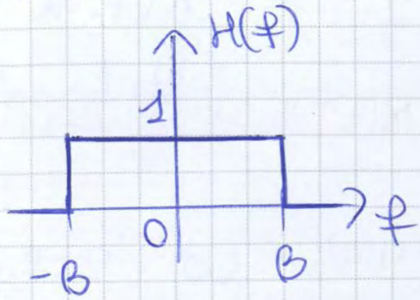
$h(t) = \delta(t - t_0)$; $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$

$H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$; $X(f) = \dfrac{\frac{2}{T}}{(\frac{1}{T})^2 + 4\pi^2 f^2} = \dfrac{2T}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}$

⑤ Calcolare la risp all'impulso del sistema che ha come funzione di trasferimento

$$H(f)=\begin{cases}1 & |f|\le B\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}\qquad h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$$

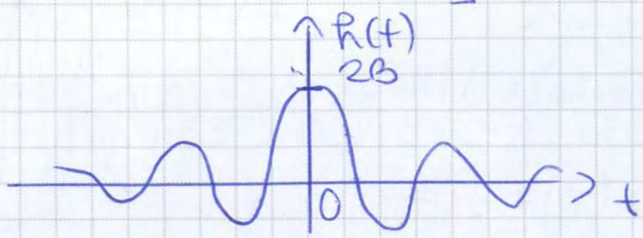
Cioè calcolo l'antitrasformata di Fourier usando la definizione



$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)\,e^{2\pi j f t}\,df=$$

$$=\int_{-B}^{B}e^{2\pi j f t}\,df=\frac{1}{2\pi j t}\Big[e^{2\pi j f t}\Big]_{-B}^{B}=$$

$$=\frac{1}{2\pi j t}\Big[e^{2\pi j B t}-e^{-2\pi j B t}\Big]=2B\,\frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t}$$

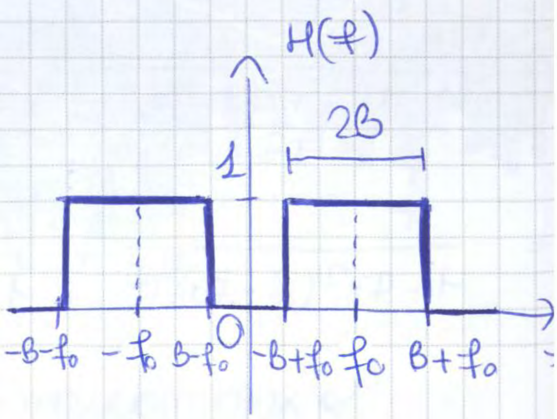


le tabelle si leggono sia in un verso che nell'altro

Questo è il filtro passa-basso di banda B ideale → non è fisicamente realizzabile, x esserlo h(t) deve iniziare dopo zero

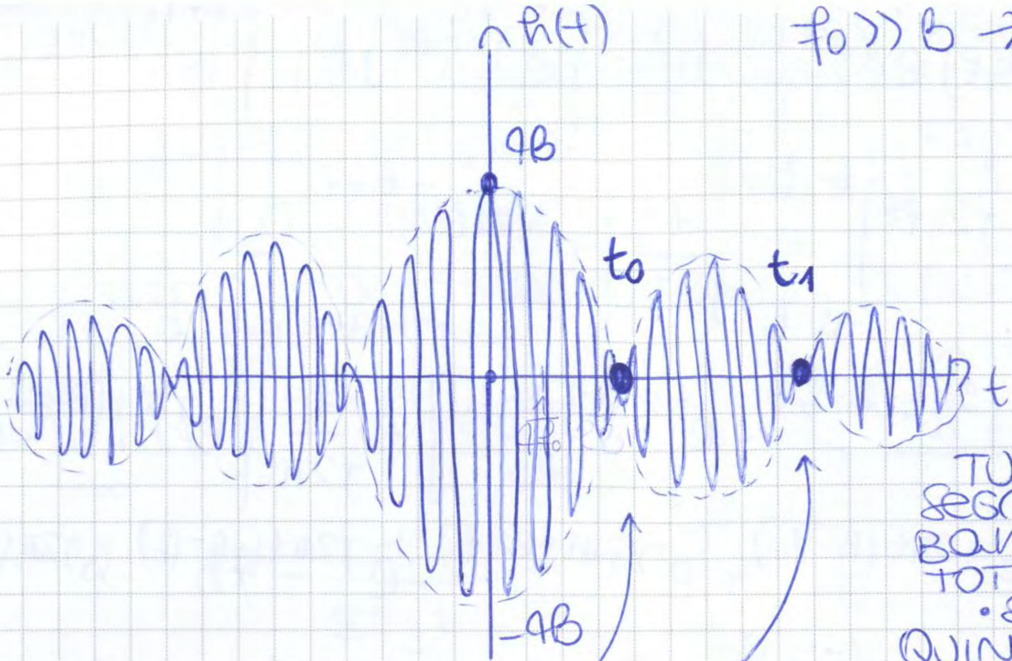
⑥ stessa richiesta

$$H(f)=\begin{cases}1 & |f-f_0|\le B\\ 1 & |f+f_0|\le B\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}\qquad \boxed{f_0>B}$$



è un filtro passa banda di banda 2B ideale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 550



$f_0 \gg B \rightarrow$ vuol dire che abbiamo tantissime oscillazioni

TUTTI I SEGNALI PASSA BANDA HANNO TOT • COS O • SEN ! QUINDI NEI GRAFICI HO TOT CON DENTRO IL COS O IL SEN

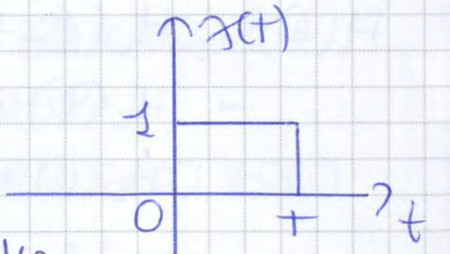
PRIMO ZERO : $t_0 = \frac{1}{2B}$, $t_1 = \frac{1}{B}$

① $\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$

$x(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$

$h(t) = \sin(2\pi f_0 t)\, e^{-\frac{t}{T}}\, u(t)$

$\boxed{f_0 \gg \frac{1}{T}}$



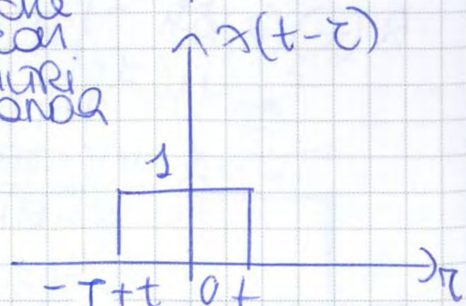
NON lavorare in frequenza

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$t < 0$:

$y(t) = 0$.

TRUCCO CHE SI USA CON TUTTI I FILTRI PASSA-BANDA



$0 < t < T$: cioè $t > 0,\ t - T < 0$

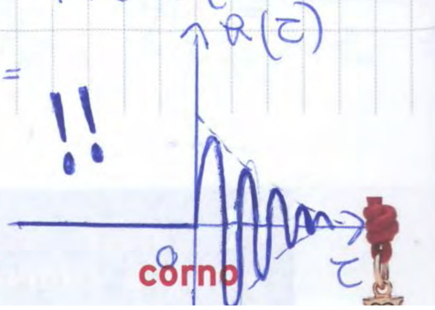
$$y(t) = \int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau)\, e^{-\frac{\tau}{T}}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \mathrm{Im}\{e^{j2\pi f_0 \tau}\}\, e^{-\frac{\tau}{T}}\, d\tau = \int_0^t \mathrm{Im}\{e^{j2\pi f_0 \tau}\, e^{-\frac{\tau}{T}}\}\, d\tau =$$

!!

$$= \mathrm{Im} \int_0^t e^{\tau\left(j2\pi f_0 - \frac{1}{T}\right)}\, d\tau$$

il seno è la parte immaginaria di $e^{\cdots}$



$$X(f) = \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$Y(f) = X(f) * \mathcal{F}\{\cos(\cdot)\} = \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 f^2} * \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right]$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 (f-f_0)^2} + \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 (f+f_0)^2}\right]$$

$$W(f) = Y(f) \cdot H'(f) = Y(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 (f-f_0)^2} + \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 (f+f_0)^2}\right] e^{-j2\pi f t_0}$$

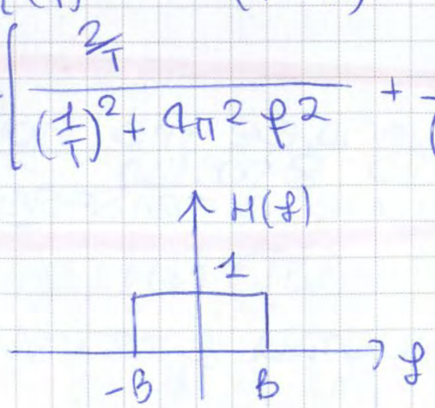
$$V(f) = W(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[W(f+f_0) + W(f-f_0)\right]$$

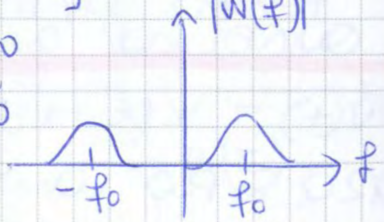
$$V(f) = \frac{1}{4}\left[\frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 (f-2f_0)^2} + \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 f^2}\right] e^{-j2\pi(f-f_0)t_0}$$

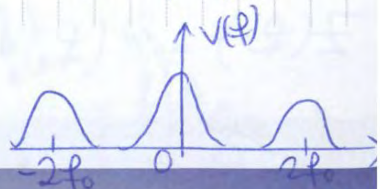
$$+ \frac{1}{4}\left[\frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + 4\pi^2 f^2} + \frac{2/T}{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + (f+2f_0)^2 4\pi^2}\right] e^{-j2\pi(f+f_0)t_0}$$

$H(f) =$



LO SPOSTO A SX E LO SPOSTO A DX E LI SOMMO





ESERCITAZIONE 5

9 Aprile 2013

2) **DIMO** che la funzione di autocorrelazione di un segnale reale e a energia finita è una funzione pari $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt \quad // \quad R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\}$$

$$\star \; R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, x(t-\tau)\, dt \longrightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$u = t - \tau$

$t = u + \tau$

$dt = du$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(u+\tau)\, x(u)\, du$$

posso togliere il complesso coniugato xk è un segnale reale

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+\tau)\, x(u)\, du$$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, x(t)\, dt \; !$$

$$\star \; R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} =$$

$$R_x(+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}\, df$$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{-j2\pi f\tau}\, df =$$

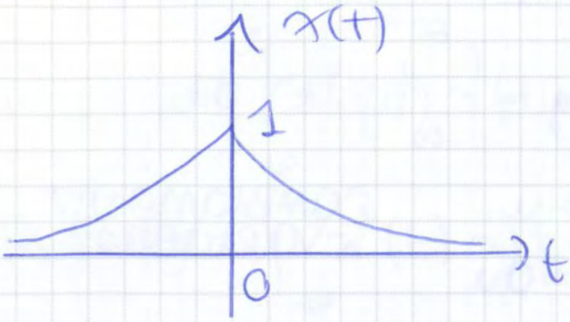
$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}\, df\right]^* = [R_x(\tau)]^* = R_x(\tau)$$

oppure cambiamento $-f = u$

xk il segnale è reale

6 CALCOLARE ENERGIA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE $x(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$

DEVO CAPIRE SE È UN SEGNALE A ENERGIA FINITA O NO!
(NEL FUTURO DEVO CAPIRE SE È PERIODICO O NO)

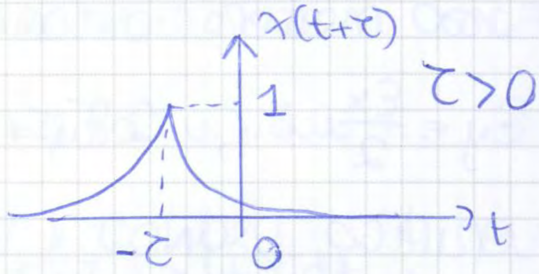


$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2|t|}{T}}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{2t}{T}}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}}\,dt =$$

$$= \frac{T}{2}\left[e^{\frac{2t}{T}}\right]_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{T}{2}\right)\left[e^{-\frac{2t}{T}}\right]_{0}^{\infty} = \frac{T}{2} + 0 - 0 + \frac{T}{2} =$$

$\mathcal{E}_x = T > 0$! sempre



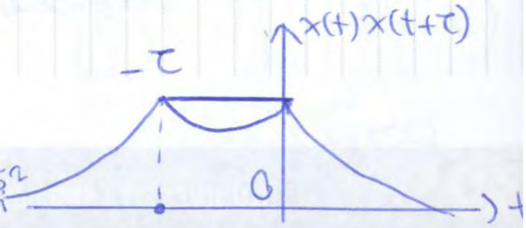
$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{T}} e^{-\frac{|t+\tau|}{T}}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{\frac{t}{T}} e^{\frac{t+\tau}{T}}\,dt + \int_{-\tau}^{0} e^{\frac{t}{T}} e^{-\frac{t+\tau}{T}}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{t+\tau}{T}}\,dt$$

$$= e^{\frac{\tau}{T}} \int_{-\infty}^{-\tau} e^{\frac{2t}{T}}\,dt + e^{-\frac{\tau}{T}} \int_{-\tau}^{0} dt + e^{-\frac{\tau}{T}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}}\,dt =$$

$$= e^{\frac{\tau}{T}} \cdot \frac{T}{2} e^{-\frac{2\tau}{T}} + e^{-\frac{\tau}{T}}\left[\frac{T}{2} + \tau\right] =$$



$$= \frac{T}{2} e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{T}{2} e^{-\frac{\tau}{T}} + \tau e^{-\frac{\tau}{T}} = \underbrace{e^{-\frac{\tau}{T}}\left[T + \tau\right]}_{} \checkmark$$

ok xk sommo 2 tempi

$$R_x(-3) = R_x(3) = (T+3)\,e^{-\frac{3}{T}} = (T-(-3))\,e^{\frac{(-3)}{T}}$$

$$R_x(\tau) = (T+\tau)\,e^{-\frac{\tau}{T}} \qquad \text{per } \tau>0$$

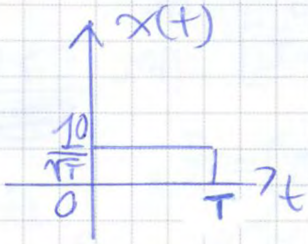
$$R_x(-\tau) = (T-\tau)\,e^{+\frac{\tau}{T}} \qquad \text{per } \tau<0$$

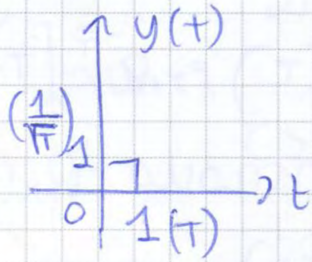
$$R_x(\tau) = (T+|\tau|)\,e^{\frac{|\tau|}{T}} \qquad -\infty<\tau<\infty$$

$R_x(0)$ = massimo!

O Un segnale $x(t)$ ha energia $\mathcal{E}_x = 10$. Scrivere l'espressione del segnale $y(t)$ proporzionale a $x(t)$ ma che abbia energia unitaria.

$$y(t) = \alpha\, x(t)$$





$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 x^2(t)\,dt = \alpha\ \mathcal{E}_x$$

$$\mathcal{E}_y = 1 \qquad \mathcal{E}_x = 10 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = \frac{1}{10}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \quad \begin{matrix} \nearrow \ominus \\ \searrow \oplus \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{E}_{x+y} = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)+y(t))^2\,dt \neq \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,dt \end{array}}$$

(3) Si **dimostri** che le funzioni di autocorrelazione dei segnali $x(t)$ e $y(t) = x(t-t_0)$ sono identiche

In tempo

★ $$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,y(t+\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\,x(t-t_0+\tau)\,dt$$

$$\begin{cases} t - t_0 = u \\ du = dt \end{cases} \qquad R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,x(u+\tau)\,du =$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt = R_x(\tau)$$

In frequenza

★ $$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\}$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|Y(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\}$$

Risposta all'impulso di un ritardatore

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \mathcal{F}\{x(t) * \delta(t-t_0)\} =$$
$$= \mathcal{F}\{x(t)\}\cdot\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \underbrace{X(f)}_{\text{modulo}}\,\underbrace{e^{-j2\pi f t_0}}_{\text{fase}}$$

$$|Y(f)|^2 = Y(f)\,Y^*(f) = |X(f)|^2$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|Y(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = R_x(\tau)$$

ERRATA CORRIGE (SPETTRO = FUNZ. DI AUTOCORR.) ex 6/7

⑦ CALCOLARE ENERGIA E F. DI AUTOCORR. DEL SEGNALE

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}}$$

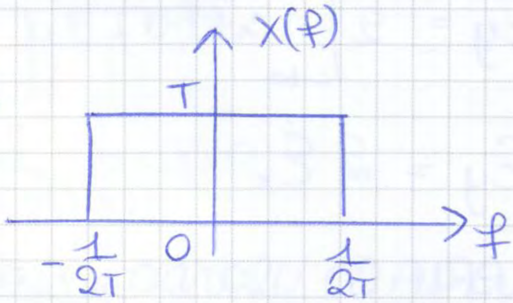
$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\left(\pi \frac{t}{T}\right)^2}$$

NON SI RIESCE NEL DOMINIO DEL TEMPO!

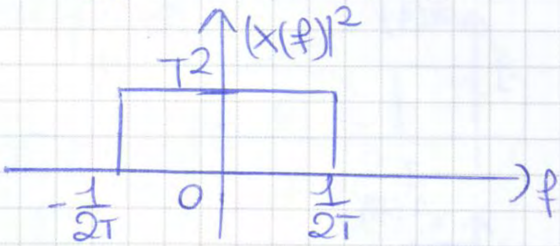
$$X(f) = \mathcal{F}\left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}} \right\} = T\, p_{\frac{1}{T}}(f) = \begin{cases} T & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

RISOLVO CON LE FREQUENZE

→ UGUAGLIANZA DI PARSEVAL!



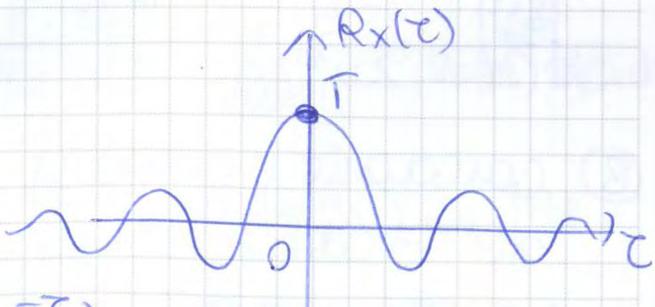
$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = T^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{T}} = T$$



$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ |X(f)|^2 \right\} =$$

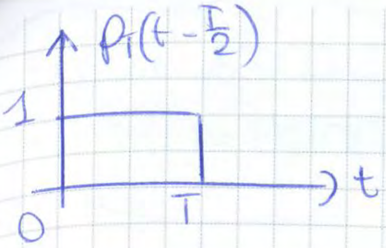
$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{ T^2 p_{\frac{1}{T}}(f) \right\} =$$

$$= T^2 \frac{\sin\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)}{\pi \tau} = T \frac{\sin\left(\frac{\pi \tau}{T}\right)}{\frac{\pi \tau}{T}}$$



$$R_x(0) = T = \mathcal{E}_x$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi \tau}{T}\right)}{\frac{\pi \tau}{T}} = \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ se } x = 0$$

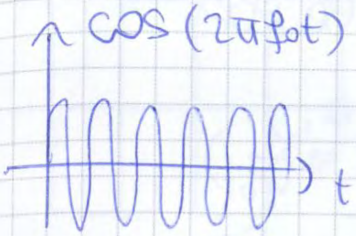


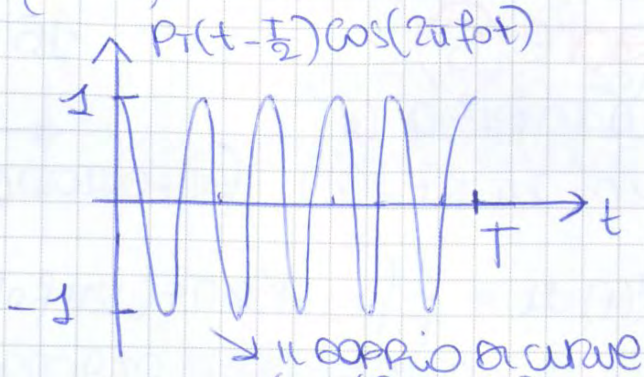
$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$$

$$x^2(t) = \cos^2(2\pi f_0 t)\, p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

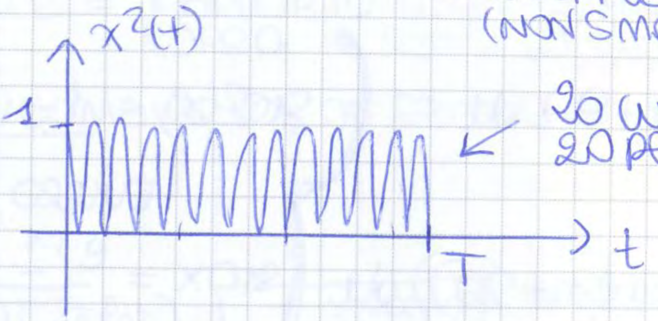
$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right] \rightarrow$$ non si può risolvere in frequenza

$$\mathcal{F}\left\{p_T\left(t-\frac{T}{2}\right)\right\} = \frac{\sin(\quad)}{(\quad)}$$





→ il doppio di curve (non sono 10)



20 curve
20 periodi

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Nel tempo:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t)\,dt = \cancel{\frac{1}{2\pi f_0}} \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t)\, \cancel{2\pi f_0}\,dt$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi f_0}\left[\frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)\right]_0^T} = \frac{1}{2}\int_0^T (\cos(4\pi f_0 t) + 1)\,dt =$$

$$\frac{1}{2}T$$

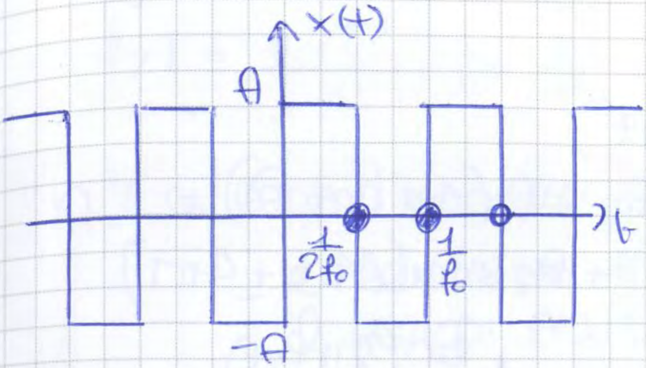
$$\boxed{\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}}$$

DATO IL SEGNALE

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta) \rightarrow P_x = \frac{A^2}{2} \quad \times \text{ QUALUNQUE } \theta$$

ex 3 CALCOLO PERIODO E POTENZA DI

$$x(t) = A\,\text{sign}(\sin(2\pi f_0 t))$$



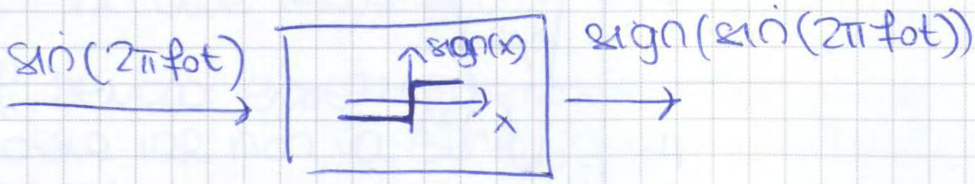
PERIODO $\frac{1}{f_0} = T$

È UN MODO GENERALE × FORMARE UN ONDA QUADRA!

DUTY CICLE = RAPPORTO TRA IL SEGNALE CHE STA SOPRA E SOTTO LO ZERO

↓ × CAMBIARLO, OFFSET + Q 1

SISTEMA



E' UN SISTEMA NON LINEARE
NON HA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $H(f)$
SOLO RELAZIONE INPUT/OUTPUT

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \frac{A^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{sign}^2(\sin(2\pi f_0 t))\,dt = A^2$$

PERCHÉ $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} (-A^2)\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A^2\,dt = A^2 = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 550

$$\cos(2\pi f_1 (t+T)) = \cos(2\pi f_1 t)$$
$$\sin\left(2\pi f_2 (t+T) + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

2 EQUAZIONI CON INCOGNITA T

$$\cancel{2\pi f_1 t} + 2\pi f_1 T = \cancel{2\pi f_1 t} + 2k\pi$$
$$\cancel{2\pi f_2 t} + 2\pi f_2 T + \cancel{\frac{\pi}{4}} = \cancel{2\pi f_2 t} + \cancel{\frac{\pi}{4}} + 2\pi l$$

$f_1 T = k \qquad T = \frac{k}{f_1}$

$f_2 T = l \rightarrow \qquad T = \frac{l}{f_2}$

$k \neq l$, $k > 0$, $k > l$ e interi

In T ci devono stare
- k periodi del 1° segnale
- l periodi del 2° segnale

$$\frac{k}{f_1} = \frac{l}{f_2} \rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{l}{k} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \in \mathbb{R}$$

$l = 3$, $k = 5$

se $k = \sqrt{2}$ cioè irrazionale $\rightarrow$ non è + periodico!

le 2 f devono essere razionali tra di loro
se fosse irr non va bene xk non sarebbe periodico!

Sostituisco $k=5$, $l=3$ e trovo $T = 0{,}1\ s$ $\quad f_0 = 10\ Hz$

17 Aprile 2013

ex ④

CALCOLARE IL PRODOTTO SCALARE TRA I SEGNALI DELLA BASE ORTONORMALE $\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j 2\pi k \frac{t}{T}} p_T(t) \right\}$

con k da $-\infty$ a $+\infty$ (INTERO) → PERIODO T

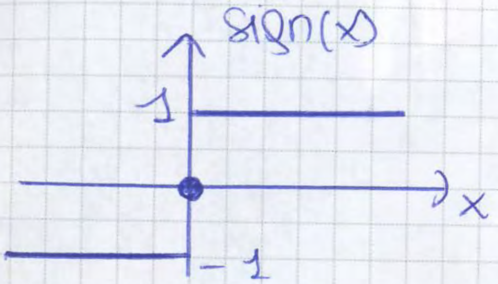
(b) ED IL SEGNALE $x_2(t) = A\,\mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) p_T(t)$ → FUNZIONE DI FUNZIONE

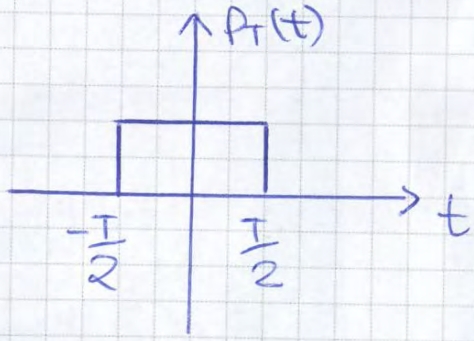
$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

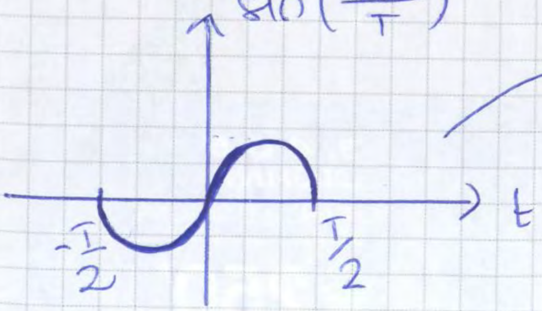
A = PARAMETRO
A > 0

cioè

$$\langle x_2(t), \psi_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\, \psi_k^*(t)\, dt$$

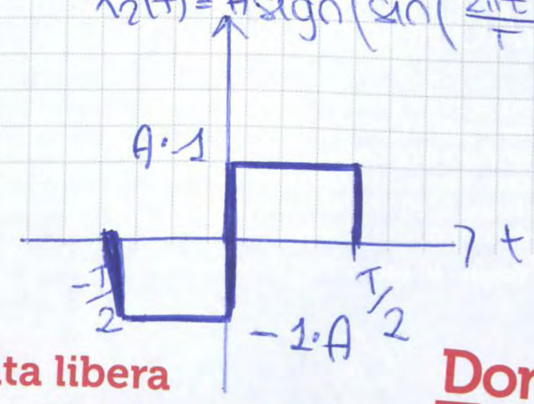






L'ASCISSA NON PUÒ ESSERE π! DOBBIAMO AVERE UN TEMPO IN SECONDI

$x_2(t) = A\,\mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) p_T(t)$



$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x_2(t)\, e^{-j2\pi k \frac{t}{T}}\, dt}_{\text{trasformata di Fourier valutata in } f = \frac{k}{T}}$$

$$= X_2(f) \text{ con } f = \frac{k}{T}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)\right] \qquad f_0 = \frac{1}{T}$$

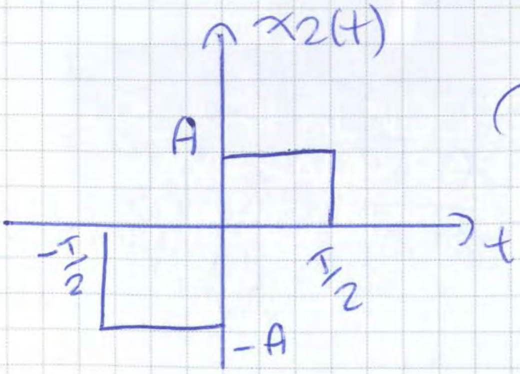
$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

$$\mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\cancel{\mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\left\{A\,\text{sign}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) p_T(t)\right\} =}$$

$$\cancel{\mathcal{F}\left\{A\,\text{sign}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\right\} * \mathcal{F}\{p_T(t)\}}$$

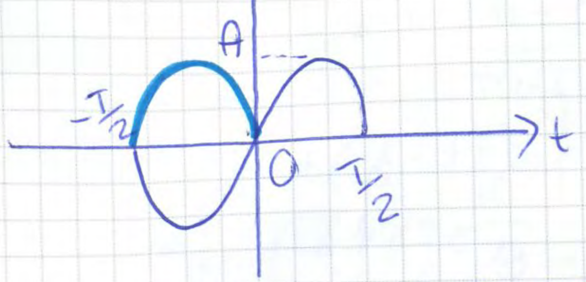
trasformo $x_2(t)$!



$$\curvearrowright \; x_2(t) = A\, p_{T/2}\left(t - \frac{T}{4}\right) - A\, p_{T/2}\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

$A\left|\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right| p_1(t) = x_3(t)$

$$x_{3,k} = \frac{1}{T_1}\left[X_3(f)\right]_{f=\frac{k}{T}}$$

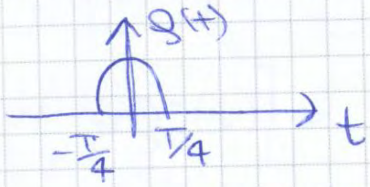


RISOLVO CON SECONDO METODO

$$X_3(f) = \mathcal{F}\{x_3(t)\} =$$

1a soluzione! $g(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T/2}\right) p_{T/2}(t)$

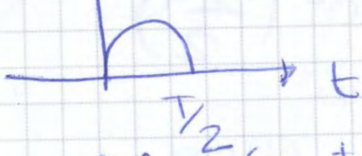
anticipato e ritardato di $T/4$



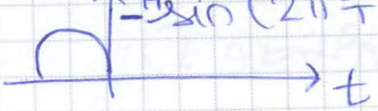
$$x_3(t) = g(t) * \left[\delta\left(t-\frac{T}{4}\right) + \delta\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]$$

2a soluzione!

$A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) p_{T/2}\left(t-\frac{T}{4}\right)$



$-A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) p_{T/2}\left(t+\frac{T}{4}\right)$



$\oplus = x_3(t)$

$$x_3(t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\cdot\left[p_{T/2}\left(t-\frac{T}{4}\right) - p_{T/2}\left(t+\frac{T}{4}\right)\right]$$

③ $x_3(t) = x_2(t)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$$X_3(f) = X_2(f) * \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{T}\right) - \delta\left(f+\frac{1}{T}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[X_2\left(f-\frac{1}{T}\right) - X_2\left(f+\frac{1}{T}\right)\right] =$$

$$\rightarrow \quad X_2(f) = \frac{-2jA}{\pi f}\sin^2\left(\pi f T/2\right)$$

$$X_3(f) = \frac{-A}{\pi\left(f-\frac{1}{T}\right)}\sin^2\left(\pi\frac{T}{2}\left(f-\frac{1}{T}\right)\right) + \frac{A}{\pi\left(f+\frac{1}{T}\right)}\sin^2\left(\pi\frac{T}{2}\left(f+\frac{1}{T}\right)\right)$$

$$X_3(f) = -A\left[\frac{\sin^2\left(\pi f T/2 - \frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(f-\frac{1}{T}\right)} - \frac{\sin^2\left(\pi f T/2 + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(f+\frac{1}{T}\right)}\right]$$

$$X_3(f) = -AT\left[\frac{\sin^2\left(\pi f \frac{T}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\pi(fT-1)} - \frac{\sin^2\left(\pi f \frac{T}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi(fT+1)}\right]$$

$$= -AT\left[\frac{\cos^2\left(\pi f T/2\right)}{\pi(fT-1)} - \frac{\cos^2\left(\pi f T/2\right)}{\pi(fT+1)}\right] =$$

$$= +\frac{AT\cos^2\left(\pi f T/2\right)}{\pi}\left[\frac{1}{fT+1} - \frac{1}{fT-1}\right] =$$

$$= \frac{AT}{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right)\cdot\frac{-2}{(fT)^2-1}$$

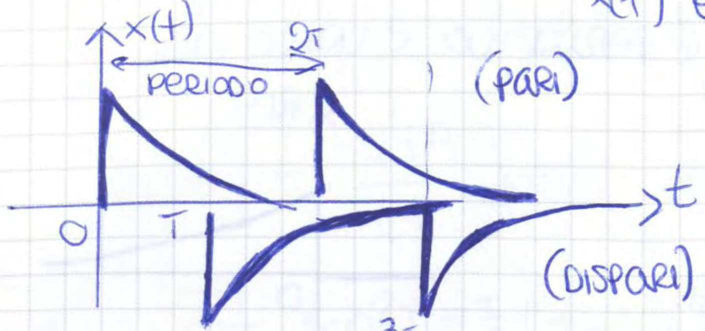
$$x_{3,k} = \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{AT}{\pi}\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}_{\downarrow\ 1 \text{ o } 0}\left(\frac{-2}{k^2-1}\right)$$

(2) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t-kT)$ come prima

$h(t) = e^{-t/t_0} u(t)$

$x(t)$ è periodico di periodo $2T$

$x(t) = x(t+2T)$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{2k} h(t-2Tk) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{2k+1} h(t-(2k+1)T)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-2Tk) + (-) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-2kT-T)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2Tk) * h(t) - h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-T(2k+1))$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2kT) * h(t) - h(t-T) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2kT) =$$

$$= [h(t) - h(t-T)] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2kT) =$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{\underbrace{h(t) - h(t-T)}_{G(f)}\} \cdot \left[\frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{k}{2T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right)$$

con $G(f) = H(f) - H(f) e^{-j2\pi f T} = \frac{t_0}{1+j2\pi f t_0} (1 - e^{-j2\pi f T})$

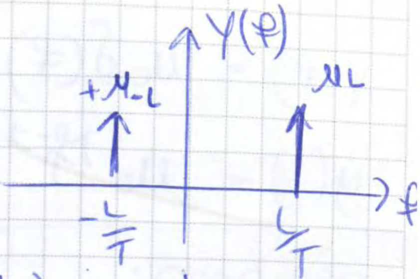
$$= \frac{t_0}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+j2\pi \frac{k}{2T} t_0} \left(1 - e^{-j2\pi \frac{k}{2T} T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 550

ⓐ $X_T(f) = \dfrac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f}$

$$\mu_k = \frac{1}{T} X_T(f)\Big|_{f=\frac{k}{T}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi k t/T}\, dt$$

$$\mu_k = \frac{1}{\cancel{T}} \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{\cancel{T}} \frac{\cancel{T}}{2}\right)}{\pi \frac{k}{\cancel{T}}} = \frac{\sin(\pi \frac{k}{2})}{\pi k}$$



$$Y(f) = \mu_L\, \delta\left(f - \frac{L}{T}\right) + \mu_{-L}\, \delta\left(f + \frac{L}{T}\right)$$ ← GENERICO DAI GRAFICI

(I) L pari → $\mu_L = 0$, $Y(f) = 0$, $y(t) = 0$

(II) L dispari → $L = 2n+1$, $n = 0,1,2\ldots \to \mu_L = \mu_{2n+1} =$

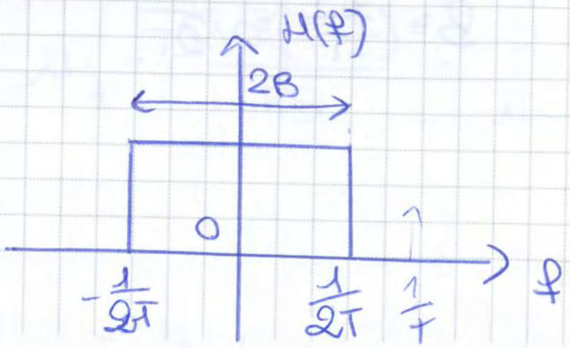
$$\mu_L = \frac{\sin(\pi(2n+1)\frac{1}{2})}{\pi(2n+1)} = \frac{\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})}{\pi(2n+1)}$$

n PARI / n DISPARI → $\mu_L = \dfrac{(-1)^n}{\pi(2n+1)}$ VIENE ALTERNATO $\boxed{\mu_L = \mu_{-L}}$

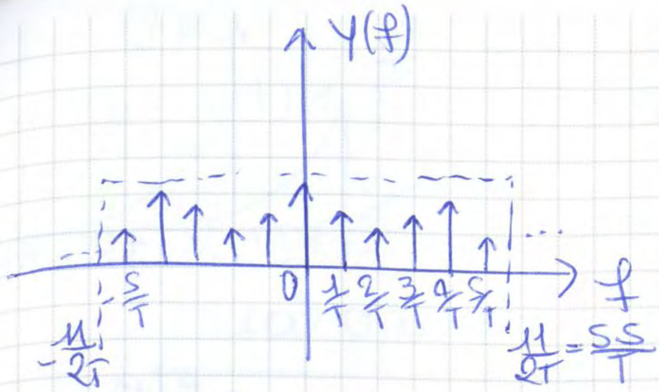
$$y(t) = 2\mu_L\, \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\delta(f - \frac{L}{T}) + \delta(f + \frac{L}{T})}{2}\right\} =$$

$$= 2\mu_L \cos\left(2\pi \frac{L}{T} t\right)$$

ⓑ



PERCHÉ LA BANDA È RIFERITA SOLO ALLE FREQUENZE POSITIVE



DATO X(f) GENERICA RESTANO LE DELTA COMPRESE TRA $\leq \frac{5}{T}$ e $\geq -\frac{5}{T}$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

con $X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

$$Y(f) = \mu_0 \delta(f) + \mu_1 \delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \mu_{-1} \delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \dots + \mu_5 \delta\left(f - \frac{5}{T}\right) + \mu_{-5} \delta\left(f + \frac{5}{T}\right)$$

nel caso in esame $\boxed{\mu_{-k} = \mu_k}$

$$Y(f) = \mu_0 \delta(f) + 2\mu_1 \left[\frac{\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)}{2}\right] + 2\mu_3 \left[\frac{\delta\left(f - \frac{3}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{3}{T}\right)}{2}\right] + 2\mu_5 \left[\frac{\delta\left(f - \frac{5}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{5}{T}\right)}{2}\right]$$

$$y(t) = \mu_0 + 2\mu_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 2\mu_3 \cos\left(2\pi \frac{3t}{T}\right) + 2\mu_5 \cos\left(2\pi \frac{5t}{T}\right)$$

(perché $\mu_1 = \mu_{-1}$ e perché $\mu_{2n} = 0$)

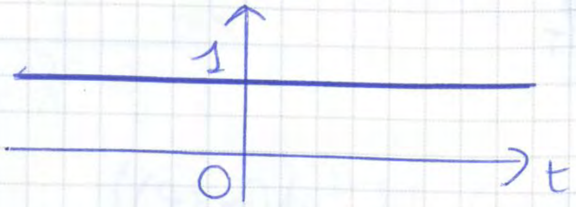
con $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$, $\mu_3 = \frac{\sin\left(\pi \frac{3}{2}\right)}{\pi 3} = -\frac{1}{\pi 3}$

$\mu_5 = \frac{\sin\left(\pi \frac{5}{2}\right)}{\pi 5} = \frac{1}{\pi 5}$

$$y(t) = v(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t-kT)$$

DEVO CALCOLARE $v(t)$

OPPURE $h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$



$$y(t) = q(t) * 1$$

$$Y(f) = Q(f)\,\delta(f) = Q(0) = t_0$$

$$y(t) = Q(0) = t_0$$

FREQ

$\longrightarrow Y(f) = \mu_0 \delta(f)$ DAI GRAFICI VEDO CHE PASSA SOLO LA DELTA CENTRALE

$$y(t) = \mu_0$$

$$\mu_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \Big|_{k=0} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} q(t)\,dt$$

$$\mu_0 = \frac{1}{T} Q(0) = \frac{1}{T} X_T(f)\Big|_{f=0}$$

$$y(t) = \frac{1}{T} Q(0) = \frac{1}{T} t_0$$

con $Q(0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\,dt = \int_0^{\infty} -\frac{1}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} \cancel{u(t)}\,dt = -t_0\left[e^{-\frac{t}{t_0}}\right]_0^{\infty}$

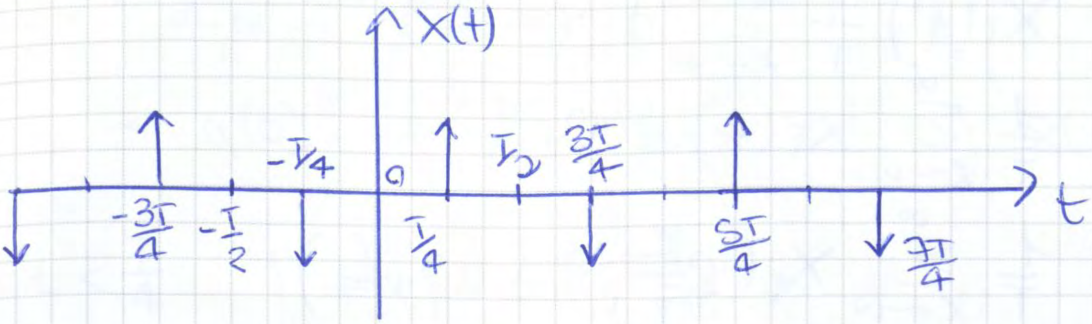
ESPONENZIALE SPARISCE

$= -t_0[-1] = t_0$

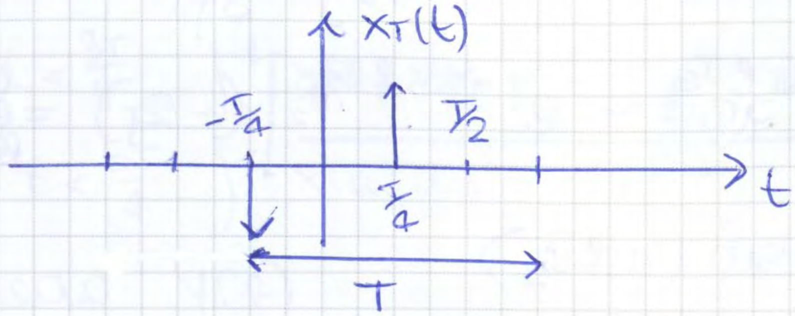
ESERCITAZIONE GENERALE

30 Aprile 2013

① CALCOLARE TRASF. FOURIER DEL SEGNALE $x(t)$



PERIODO SEGNALE T



$$x_T(t) = \delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - \delta\left(t + \frac{T}{4}\right) = v(t) \quad \text{SEGNALE AUSILIARIO}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta\left(t \underline{-kT} - \frac{T}{4}\right) - \delta\left(t \underline{-kT} + \frac{T}{4}\right)\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t - kT) = x_T(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$T_\delta(t) = \text{TRENO DELTA} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$x(t) = T_\delta(t) * \delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - T_\delta(t) * \delta\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

PER $t>0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} x(u)\,du + \int_{0}^{t} x(u)\,du =$$

$$= y(0) + \int_0^t x(u)\,du = -\frac{1}{2} + \int_0^t x(u)\,du$$

$0 < t < \frac{T}{4}$ $\quad \int_0^t x(u)\,du = 0$ $\quad y(t) = -\frac{1}{2}$

$\frac{T}{4} = t$ $\quad \int_0^t x(u)\,du = \int_0^t \delta\left(t - \frac{T}{4}\right) dt = 1$ $\quad y(t) = \frac{1}{2}$

$0 < t < \frac{3T}{4}$ $\quad \int_0^t x(u)\,du = 1$ $\quad y(t) = \frac{1}{2}$

$0 < t < \frac{5T}{4}$ $\quad \int_0^t x(u)\,du = 1 - 1 = 0$ $\quad y(t) = -\frac{1}{2}$

CALCOLO $Y(f)$

$$Y(f) = \underbrace{\frac{1}{j2\pi f}}_{\text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL ... ATORE}} X(f) = H(f)X(f)$$

$$Y(f) = \frac{1}{\cancel{j}2\pi f} \cdot \frac{-2\cancel{j}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi f T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{\pi \frac{k}{\cancel{T}} \cancel{T}} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-\pi k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

ESERCIZIO ESERCITAZIONE PRIMA:
IL SEGNALE $x(t)$ ASSOMIGLIA A $\sum (-1)^k \delta(t - kT)$

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{\frac{d}{dt}} \xrightarrow{\delta(t)} \boxed{LTI} \xrightarrow{h(t)}$$ ⟵ POSSO SCAMBIARE I 2 SISTEMI (LO VEDO IN FREQUENZA)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u)\, du \quad \longleftrightarrow \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{LTI} \xrightarrow{g(t)} \boxed{\frac{d}{dt}} \xrightarrow{h(t)}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left(g(t)\right)$$

IL DERIVATORE FUNZIONA FINO A UNA CERTA FREQUENZA, HA UNA SUA BANDA DI FUNZIONAMENTO

MEGLIO SE IL SEGNALE DI CUI BISOGNA CALCOLARE LA DERIVATA È A BANDA LIMITATA

○ SI CALCOLI LA FUNZIONE DI AUTOCORR. X I 2 SEGNALI

$x_1(t) = A\left[\sin(2\pi f_0 t)\right] p_T(t)$ ⟶ SEGNALE A ENERGIA FINITA

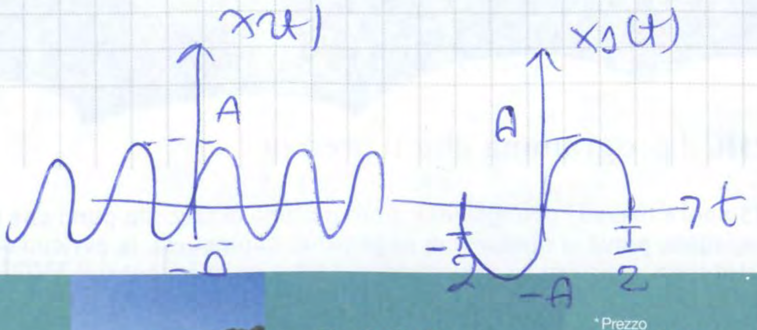
$x_2(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ ⟶ PERIODO $\frac{1}{f_0}$

$$R_{x_2}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ G_{x_2}(f) \right\}$$

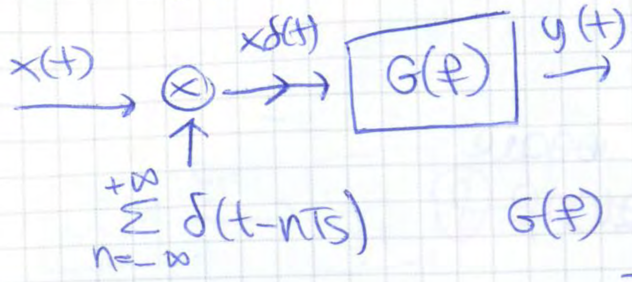
$$= \sum_k |\mu_k|^2 e^{j 2\pi \frac{k}{T}}$$

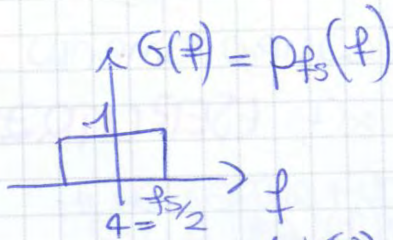
$$R_{x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt \qquad \text{con } T = \frac{1}{f_0}$$

↓ PERIODO

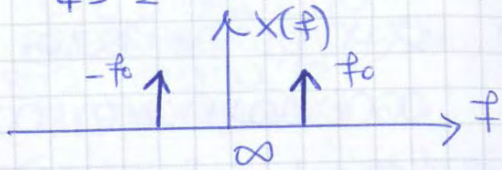


$$x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$





analisi in frequenza



$$X(f) = \frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$$

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\left\{x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)\right\} = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}\delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

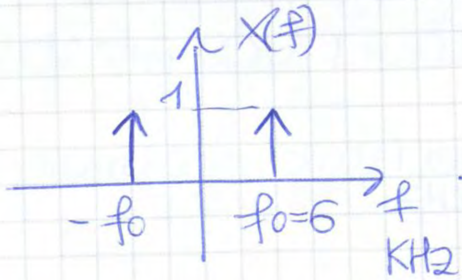
$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

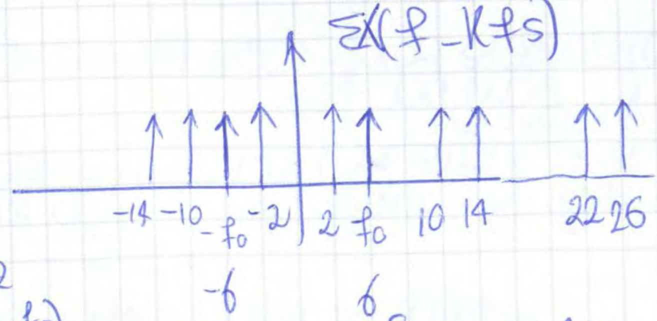
$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{A}{2}\delta\left(f - \frac{n}{T_s} - f_0\right) + \frac{A}{2}\delta\left(f - \frac{n}{T_s} + f_0\right)\right]$$

$$Y(f) = G(f)X_\delta(f) = G(f)\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$G(f) = p_{f_s}(f) \cdot T_s$$

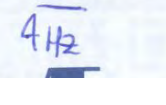
$$Y(f) = p_{f_s}(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

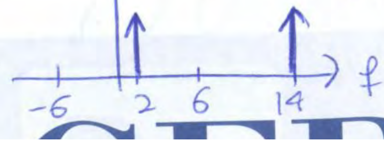




delle spostate di 8 passi

viene una δ ogni 4Hz





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 550

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right]$$

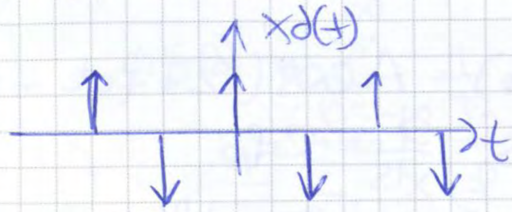
$$X_\delta(f) = \frac{A}{2T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{j\theta}\left(\delta\left(f-\frac{n}{T_S}-f_0\right)\right) + e^{-j\theta}\delta\left(f-\frac{n}{T_S}+f_0\right)\right]$$

$$G(f) = p$$

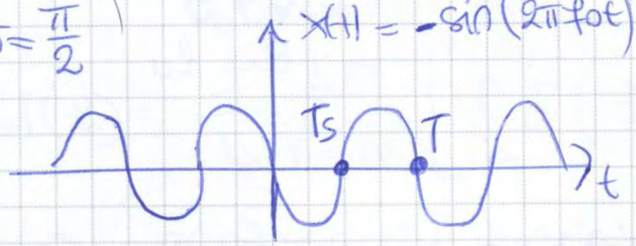
$$T_S = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{2f_0} = \frac{T}{2}$$

INT. DI CAMPIONAMENTO É METÀ DEL PERIODO DEL SEGNALE SINUSOIDALE

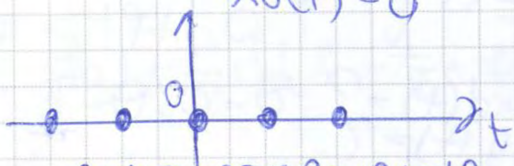
$\theta = 0$



$\theta = \frac{\pi}{2}$



$x_\delta(t) = 0$



CAMPIONATURA INUTILE

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S)\,\delta(t-nT_S)$$

$$x(nT_S) = A\cos(2\pi f_0 kT_S + \theta) = A\cos\left(\cancel{2\pi f_0} k \frac{1}{\cancel{2f_0}} + \theta\right)$$
$$= A\cos(\pi k + \theta)$$

$\theta = 0 \quad x(nT_S) = A\cos(\pi k) = (-1)^n$

$\theta = \frac{\pi}{2} \quad x(nT_S) = -A\sin(\pi k) = 0 \quad \forall n$

$\theta = 0 \quad x_\delta(t) = \sum_n (-1)^n \delta(t - nT_S)$

$\theta = \frac{\pi}{2} \quad x_\delta(t) = 0$

$k = n$

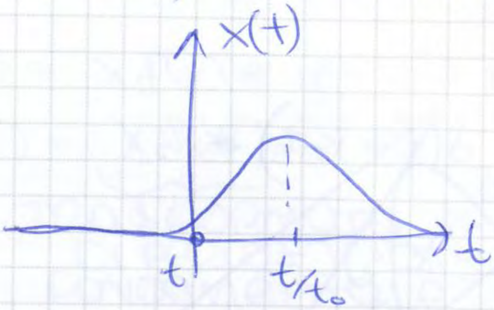
4Hz

(2) Campionamento S&H

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S)\, v(t-nT_S), \quad v(t) = p_{T_S}\left(t - \frac{T_S}{2}\right)$$

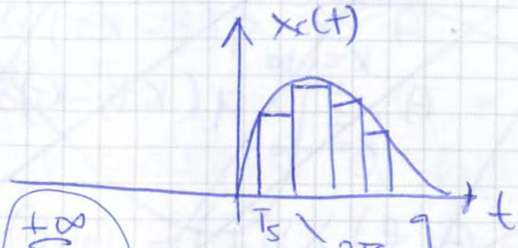
se $x(t) = t e^{-\frac{t}{t_0}} u(t)$, $T_S = \frac{t_0}{4}$, grafico $x_p(t)$

cerco $G(f)$ con $x(t)$ ha banda B_x e $f_S = \frac{1}{T_S} > 2B_x$



$$x'(t) = e^{-t/t_0} + t e^{-t/t_0}\left(-\frac{1}{t_0}\right)$$

$$x'(t) = e^{-\frac{t}{t_0}}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$$



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S)\, v(t-nT_S) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-nT_S)\right] * v(t)$$

$$X_p(f) = \left(X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_S}\right)\frac{1}{T_S}\right) V(f) =$$

$$= \frac{1}{T_S}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_S}\right)\right] V(f) \quad \text{deve essere} \quad Y(f) = G(f)\,X_p(f) = X(f)$$

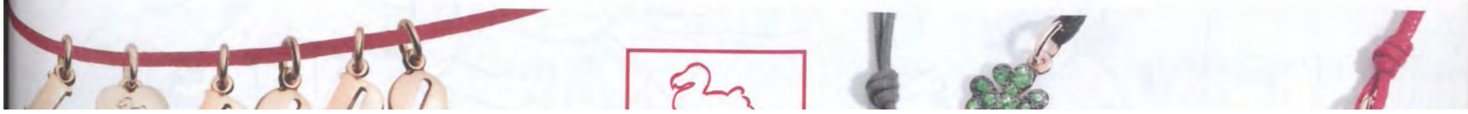
$$\frac{1}{T_S}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_S}\right)\right] V(f)\, G(f) = X(f)$$

vale $\downarrow$ se

$$\frac{1}{T_S} V(f)\, G(f) = p_{f_S}(f) \begin{cases} 1 & |f| < f_S/2 \\ 0 & |f| > f_S/2 \end{cases}$$

cioè $G(f) = T_S \dfrac{p_{f_S}(f)}{V(f)}$, $V(f) = \dfrac{\sin(\pi f T_S)}{\pi f} e^{-j2\pi f \frac{T_S}{2}}$

$$G(f) = \begin{cases} 1 \cdot \dfrac{\pi f (T_S)}{\sin(\pi f T_S)} e^{-j2\pi f T_S} & |f| < f_S/2 \\ 0 & |f| > f_S/2 \end{cases}$$



$$\cancel{X_\delta(f) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{(-1)^k \delta(t-kT_s)\}} =$$

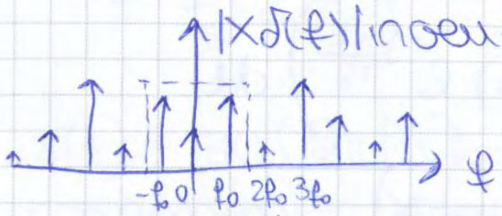
$$= \cancel{\frac{A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)}$$

$y(t) = x_\delta(t) * g(t) \rightarrow$ non si riesce

$Y(f) = \underbrace{X_\delta(f)}\, G(f)$

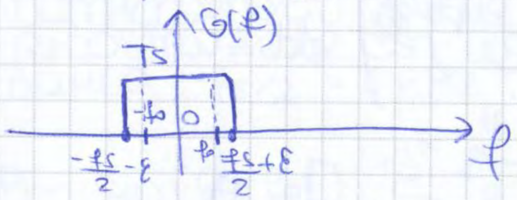
TRASFORMATA DI UN SEGNALE PERIODICO DI PERIODO $2T_S = T$ E FREQUENZA FONDAMENTALE $f_0 = \frac{1}{2T_S}$

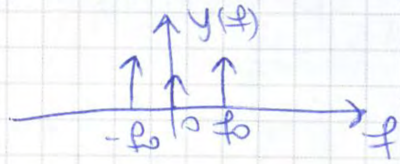
$X_\delta(f)$ HA LE DELTA ALLE FREQUENZE $0, \pm f_0, \pm 2f_0 \ldots$



$f_0 = \frac{1}{2T_S} = \frac{f_s}{2}$

$Y(f)$ HA SOLO 3 DELTA in $-f_0, 0, f_0$





mi servono solo questi 3 termini

μ_0 e μ_1 (μ_{-1})

$$\mu_0 = \frac{1}{2T_s}\int_{-2T_s/2}^{2T_s/2} x_\delta(t)\,dt = \frac{1}{2T_s} X_{T\delta}(f)\Big|_{f=\frac{k}{2T_s}}$$

$$X_\delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k\, \delta(f - kf_0)$$

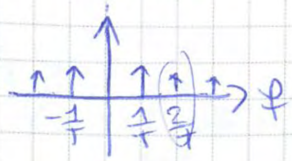
$$Y(f) = \mu_{-1}\delta(f+f_0) + \mu_0\delta(f) + \mu_1\delta(f-f_0)$$

$y(t) = 2A\cos(2\pi f_0 t)$

DA ONDA QUADRA.. A SINUSOIDE! ERRORE PER LA BANDA DEL SEGNALE!!

$x(t) \rightarrow T$ PERIODO $\qquad T_S = \frac{T}{2}$

$|X(f)| \rightarrow$



$f_S = \frac{1}{T_S} = \frac{2}{T}$!!

LA BANDA DELL'ONDA QUADRA È ∞

NON ABBIAMO RISPETTATO $f_S \geq 2B_X$!!

SI POTEVA ANCHE RISOLVERE COSÌ:

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\sum \delta(t-kT_S)\right\} = X(f) * \frac{1}{T_S}\sum \delta\left(f-\frac{k}{T_S}\right)$$

$$= \frac{1}{T_S}\sum X\left(f-\frac{k}{T_S}\right) \rightarrow \text{PASTICCIO}$$

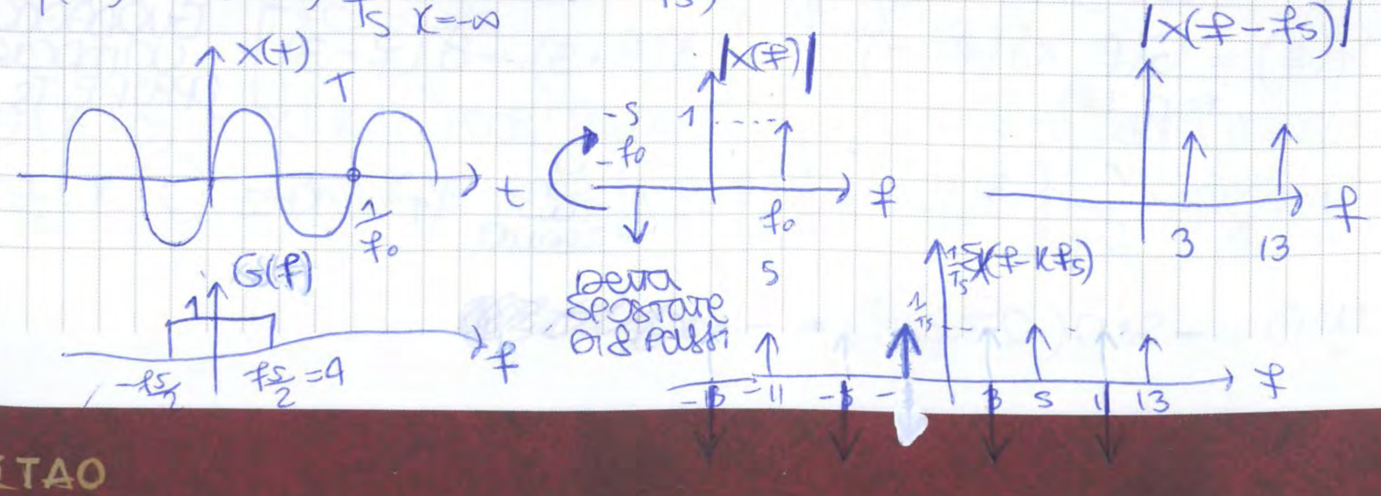
$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = 5\,KHz \qquad T = \frac{1}{f_0}$

CAMPIONAMENTO IDEALE A $f_S = 8\,KHz$
RICOSTRUZIONE CON UN FILTRO P. BASSO IDEALE DI BANDA $f_S/2 = 4\,KHz$. CALCOLO $y(t)$

$$x_\delta(t) = \sin(2\pi f_0 t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_S)$$

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_S)\right\} = \frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{k}{T_S}\right)$$

$$Y(f) = G(f)\,\frac{1}{T_S}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{k}{T_S}\right)$$



③ SEGNALE PASSA BANDA $\quad x(t)$

BANDA $B_x < B$

$z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

CAMPIONATO IDEALMENTE A $f_C = \frac{f_0}{2}$ (SOTTO CAMPIONAMENTO) $\quad t - kT_C$

OTTENENDO

$$w(t) = z(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{k}{f_C}\right)$$

CHE ENTRA IN UN FILTRO PASSABASSO IDEALE DI BANDA $B = f_C/2$

SCRIVO L'USCITA $y(t)$

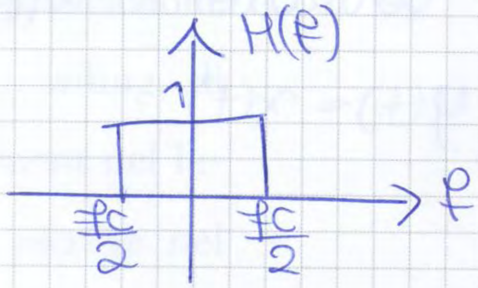
$$W(f) = Z(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_C} \delta\left(f - \frac{k}{T_C}\right) = \frac{1}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z\left(f - \frac{k}{T_C}\right)$$

$$W(f) = \frac{1}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z(f - k f_C)$$

$$Y(f) = H(f)\, W(f)$$

$$H(f) = p_{f_C}(f)$$

$$W(f) = \frac{Z(f)}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k f_C)$$



IL k-ESIMO CAMPIONE DI $z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

IN $kT_C = \frac{k}{f_C} = \frac{2k}{f_0}$ E $\quad \cancel{f_0} \cdot \frac{2}{\cancel{f_0}} = f_0 T_C = 2$

$$z(kT_C) = x(kT_C)\cos(2\pi f_0 k T_C) = x(kT_C)\underbrace{\cos(4\pi k)}_{1}$$

$$z(kT_C) = x(kT_C)$$

ESERCITAZIONE 9

15 Maggio 2013 (A casa)

1. LTI a tempo discreto con

$$H(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{8z^2 - 6z + 1}$$

a) stabilire se è stabile o no
b) schema a blocchi di un circuito che realizza $H(z)$
c) equazione alle differenze finite che lega $y[n]$ a $x[n]$

cerco poli e zeri:

$$H(z) = \frac{2\left(z^2 - \frac{5}{2}z + 1\right)}{8\left(z^2 - \frac{6}{8}z + \frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{4}\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$

$$z^2 - \frac{6}{8}z + \frac{1}{8} = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16} \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$8z^2 - 6z + 1 = 0$$

$p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$

un polo coincide con uno zero

$$H(z) = \frac{1}{4}\frac{(z-2)\cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{z-2}{4z-1}$$

restano
$z_1 = 2$ zero
$p_1 = \frac{1}{4}$ polo

a) un sistema è stabile se i poli sono minori di 1

$$\boxed{|p_i| < 1}$$

essendo $|p_1| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, il sistema è stabile.

b) $$H(z) = \frac{1}{4}\frac{(z-2)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\frac{z}{z}\frac{(z-2)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left(\frac{z-2}{z}\right)\left(\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right) = \frac{1}{4}\frac{\left(1 - 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

② LTI a tempo discreto con:

$$H(z) = \frac{z^2-3z+2}{4z^2-4z+1}$$

ⓐ $h[n]$

ⓑ $y[n]$ se $x[n]=u[n]$

Cerco poli e zeri

$$H(z) = \frac{1(z-z_1)(z-z_2)}{4(z-p_1)(z-p_2)}$$ ← attenzione ai coefficienti che moltiplicano le z^2 bisogna normalizzare sempre!

$z^2-3z+2=0$ $\qquad z_1=2$

$z_{12} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$ no utile $\qquad z_2=1$

$(z-2)(z-1)=0$

$4z^2-4z+1=0$ $\qquad p_1=\frac{1}{2}$

$z_{12} = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad p_2=\frac{1}{2}$

2 poli coincidenti.

$(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})=0 \qquad (z-\frac{1}{2})^2=0$

$$H(z) = \frac{1(z-2)(z-1)}{4(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}\frac{(z-2)(z-1)}{(z-\frac{1}{2})^2} \checkmark$$

Il sistema è stabile perché

$|p_1| = \frac{1}{2} < 1, \quad |p_2| = \frac{1}{2} < 1$

ⓐ Tecnica dei fratti semplici

$$\frac{H(z)}{z} = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(z-2)(z-1)}{z(z-\frac{1}{2})^2} = \left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C}{(z-\frac{1}{2})^2}\right]\frac{1}{4}$$ cerco A, B, C

coefficiente moltiplicativo x l'intera funz

$$A = \lim_{z\to 0} \frac{H(z)}{z}(z-0) = \lim_{z\to 0}\frac{(z-2)(z-1)}{(z-\frac{1}{2})^2}\frac{1}{4} = \frac{(+\cancel{2})(+1)}{(+\frac{1}{2})^2}\frac{1}{\cancel{4}_2} = \frac{4}{2}$$

$A = 2$

$$H(z) = 2 - \frac{7}{4}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{3}{4}\frac{\frac{1}{2}(z)}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

ora antitrasformo:

$$h[n] = 2\delta[n] - \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{4} n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

perché:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Z}\{p^n u[n]\} &= \frac{z}{z-p} \\ \mathcal{Z}\{n p^n u[n]\} &= \frac{zp}{(z-p)^2} \end{aligned}}$$

n	h[n]
0	1/4
1	-1/2
2	...

→ x disegnarne il grafico

(b) se $x[n] = u[n]$, $X(z) = \mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}$ meno!

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{\cancel{(z-1)}}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{(z-2)\cancel{(z-1)}}{(z-\frac{1}{2})^2} =$$

$$Y(z) = \left(\frac{z}{4}\right)\frac{(z-2)}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

sviluppo di nuovo in fratti semplici:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{4}\frac{(z-2)}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

(→ avanti schema a blocchi)

$$A = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-2)}{4}\right\} = \frac{1}{4}$$

$$B = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(z-2) = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{1}{4}}{z-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4}(z-\frac{1}{2}) - \frac{3}{8}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{z-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{4(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{4}\frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^2}$$ cioè A e B sono corretti

z^{-1} e $y[n]$

$$Y(z) = \frac{z}{4(z-\frac{1}{2})} - \frac{3}{4}\frac{\frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{4} n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 111 di 550

USO LA SECONDA FORMULA

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]\,x[n-k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 1\,x[n-k] = \underset{k=0}{x[n]} + \underset{k=1}{x[n-1]} + \underset{k=2}{x[n-2]} \;\dots\; k=\infty$$

QUINDI:

$y[n]$ È LA SOMMA DEL CAMPIONE PRESENTE ALL'INGRESSO DEL SISTEMA E DI TUTTI I PRECEDENTI CAMPIONI D'INGRESSO = INTEGRATORE NUMERICO

ⓓ $x_1[n] = u[n] = h(n)$

$X_1(z) = \dfrac{z}{z-1}$ LAVORO NEL DOMINIO DI Z

$H(z) = \dfrac{z}{z-1}$

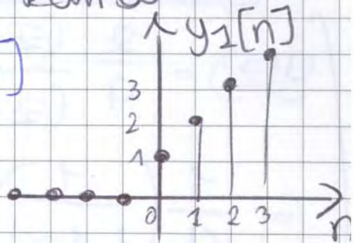
$$\boxed{\mathcal{Z}\{\delta[n+1]\} = z \qquad \mathcal{Z}\{n\,u[n]\} = \frac{z}{(z-1)^2}}$$

$$Y_1(z) = H(z)\,X_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

$y_1[n] = u[n] * u[n]$

SCOMPONGO IN FRATTI SEMPLICI

SEGNALE RAMPA



$$\frac{Y_1(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2} \rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Y_1(z)}{z}\right\} = n\,u[n]$$

$$Y_1(z) = \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) z^1$$

$$y_1[n] = n u[n] * \delta[n+1] = (n+1)\,u[n+1] = ((n+1)u[n])$$

DIVERGENTE

→ RIFO CON LA CONVOLUZIONE

IL SISTEMA <u>NON</u> È STABILE IN SENSO BIBO!

ⓔ $x_2[n] = q_4[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$

$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$

$H(z) = \dfrac{z}{z-1}$ (RIVEDO + AVANTI →)

$$Y_2(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(z^{3} + z^{2} + z^{1} + 1\right)$$

OPPURE $y_2[n] = x_2(n) * h(n)$

$$\boxed{\mathcal{Z}\{n\,\alpha^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-\alpha)^2}}$$

④ $x(t) = t e^{-t/t_0} u(t)$

POSTO ALL'INGRESSO DI UN CAMPIONATORE SAMPLE & HOLD CON $f_c = \frac{10}{t_0}$

$x[n] = x(nT_c)$ VIENE POSTO ALL'INGRESSO DI UN SISTEMA FIR CON

$$H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} \longrightarrow \text{esce } y[n]$$

ⓐ CALCOLO $X(z)$, $Y(z)$

CERCO α AFFINCHE $y[n]$ ABBIA LA MINIMA DURATA POSSIBILE

ⓑ NOTO α, CALCOLO L'USCITA $w(t)$ DEL FILTRO PASSABASSO RICOSTRUTTORE (IDEALE X S&H) AL CUI INGRESSO SIA POSTO

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, s(t - nT_c)$$

$$s(t) = p_{T_C}\left(t - \frac{T_C}{2}\right) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_C] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$x(t) = t e^{-t/t_0} u(t)$$

I SUOI CAMPIONI SONO

$$x(nT_C) = nT_C e^{-\frac{nT_C}{t_0}} u(nT_C)$$

$$T_C = \frac{1}{f_C} = \frac{t_0}{10}$$

$$\frac{T_C}{t_0} = \frac{1}{10}$$

$$x(nT_C) = nT_C e^{-\frac{n}{10}} u(nT_C)$$

$$x[n] = nT_C e^{-n/10} u[n]$$

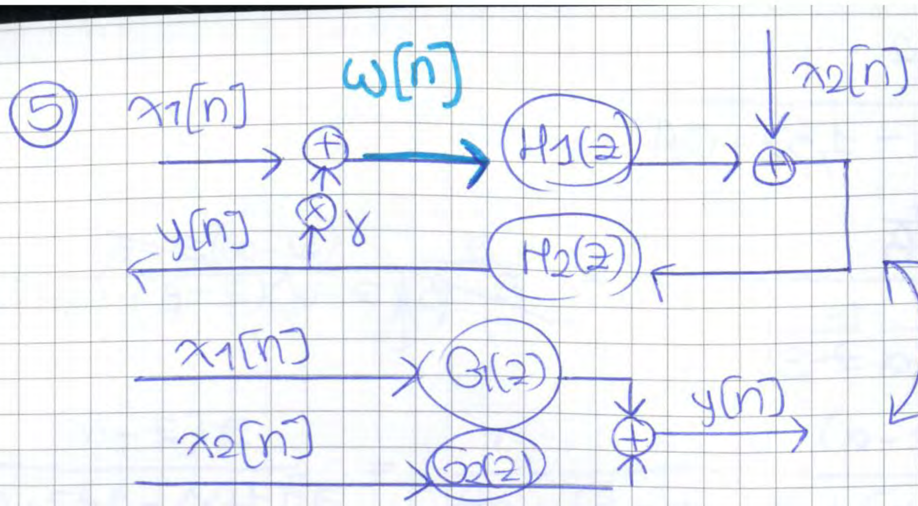
$u(nT_C) = u[n]$ X SEMPLICITÀ

$$x[n] = nT_C a^n u[n]$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{nT_C a^n u[n]\} = T_C \frac{z a}{(z-a)^2}$$

$$H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} = z^{-2}(z-\alpha)^2$$

5



CERCO $G_1(z)$ $G_2(z)$ AFFINCHÉ SIANO EQUIVALENTI

$$H_1(z) = \frac{z}{z-\alpha}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z-\beta}, \quad \gamma = 1$$

CERCO I POLI DI $G_1(z)$ E $G_2(z)$

METTO $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,8$ E TROVO L'INSIEME DEI POSSIBILI VALORI DI γ CHE GARANTISCONO LA STABILITÀ DEL SISTEMA.

$$y[n] = \left(w[n] * h_1[n] + x_2[n]\right) * h_2[n]$$

$$w[n] = x_1[n] + \gamma y[n]$$

$$Y(z) = \left[W(z) H_1(z) + X_2(z)\right] H_2(z) =$$

$$= \left[X_1(z) H_1(z) + \gamma Y(z) H_1(z) + X_2(z)\right] H_2(z) =$$

$$= X_1(z) H_1(z) H_2(z) + X_2(z) H_2(z) + \gamma Y(z) H_1(z) H_2(z)$$

$$Y(z)\left[1 - \gamma H_1(z) H_2(z)\right] = X_1(z)\left[H_1(z) H_2(z)\right] + X_2(z)\left[H_2(z)\right]$$

$$Y(z) = X_1(z) \underbrace{\left[\frac{H_1(z) H_2(z)}{1 - \gamma H_1(z) H_2(z)}\right]}_{G_1(z)} + X_2(z) \underbrace{\left[\frac{H_2(z)}{1 - \gamma H_1(z) H_2(z)}\right]}_{G_2(z)}$$

$$G_1(z) = \frac{\frac{z}{z-\alpha} \frac{z}{z-\beta}}{1 - \gamma \frac{z}{z-\alpha} \frac{z}{z-\beta}} = \frac{z^2}{\cancel{(z-\alpha)(z-\beta)}} \frac{\cancel{(z-\alpha)(z-\beta)}}{(z-\alpha)(z-\beta) - \gamma z^2} = \frac{z^2}{z^2 - \alpha z - \beta z + \alpha\beta - \gamma z^2}$$

$$G_1(z) = \frac{z^2}{z^2(1-\gamma) - (\alpha+\beta) z + \alpha\beta}$$

① 15 Maggio 2013 (in classe)

$$H(z) = \frac{z^2+1}{z^2 - 1{,}2\,z + 0{,}72}$$

@ stabilità

...do poli:

$z^2 - 1{,}2z + 0{,}72 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{1{,}2 \pm \sqrt{(1{,}2)^2 - 0{,}72 \cdot 4}}{2} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}j \\ z_2 = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}j \end{cases}$$

2 poli complessi coniugati

$$0{,}6 \pm \frac{\sqrt{1{,}44 - 2{,}88}}{2}$$

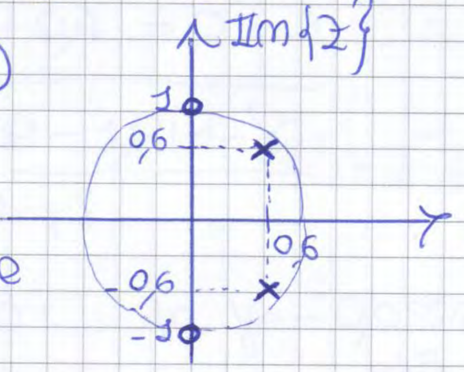
$$0{,}6 \pm \frac{\sqrt{-1{,}44}}{2} = 0{,}6 \pm j0{,}6$$

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5} < 1,$$ il sistema è stabile!

$|z|^2 = 0{,}72$

$z_{1,2} = 0{,}6(1 \pm j)$

$= \sqrt{0{,}72}\, e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$



Poli ×
zeri ○

verifico
che il numeratore
↓

...do zeri:

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1$

$z = \pm j$

x sapere se qualcosa si può semplificare

$$H(z) = \frac{(z+j)(z-j)}{(z-p_1)(z-p_2)} \qquad p_2 = p_1^*$$

non è possibile semplificare niente

Schema a blocchi (letterale)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z+j)}{(z)} \frac{(z)}{(z-p_2)} \frac{(z-j)}{(z)} \frac{(z)}{(z-p_1)}$$

$$H(z) = \left(1 + jz^{-1}\right)\left(\frac{1}{1-p_2 z^{-1}}\right)\left(1 - jz^{-1}\right)\left(\frac{1}{1-p_1 z^{-1}}\right)$$

$$Y(z)\left[1 - p_2 z^{-1}\right]\left[1 - p_1 z^{-1}\right] = \left(1 + jz^{-1}\right)\left(1 - jz^{-1}\right) X(z)$$

...

fratti semplici:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2}$$

$$c_0 = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{0{,}72}$$

$$c_1 = \lim_{z\to p_1} \frac{z^2+1}{z(z-p_2)} = \frac{p_1^2+1}{p_1(p_1-p_1^*)}$$

$$c_2 = \lim_{z\to p_2} \frac{z^2+1}{z(z-p_1)} = \frac{(p_1^*)^2+1}{p_1^*(p_1^*-p_1)}$$

sono uno il complesso coniugato dell'altro

$$c_2 = c_1^*$$

$$p_1 = 0{,}6(1+j)$$

$$p_1^2 = (0{,}6)^2(1+j)^2 = 0{,}36(\cancel{1}-\cancel{1}+2j) = 0{,}72j$$

$$p_1^2+1 = 0{,}72j+1$$

$$p_1-p_1^* = \cancel{0{,}6}+0{,}6j-\cancel{0{,}6}+0{,}6j = 1{,}2j$$

$$p_1(p_1-p_1^*) = (0{,}6+0{,}6j)(1{,}2j) = 0{,}72j-0{,}72$$

$$c_1 = \frac{0{,}72j+1}{0{,}72j-0{,}72} = \frac{(0{,}72j+1)(j+1)}{0{,}72(j-1)(j+1)} =$$

$$= \frac{-0{,}72+j+0{,}72j+1}{-0{,}72-0{,}72} = \frac{0{,}28+1{,}72j}{-1{,}44}$$ controllo se combacia con ↓

$$= 0{,}589(0{,}72-j) \simeq +0{,}689\, e^{j(-0{,}62\text{ rad})}$$

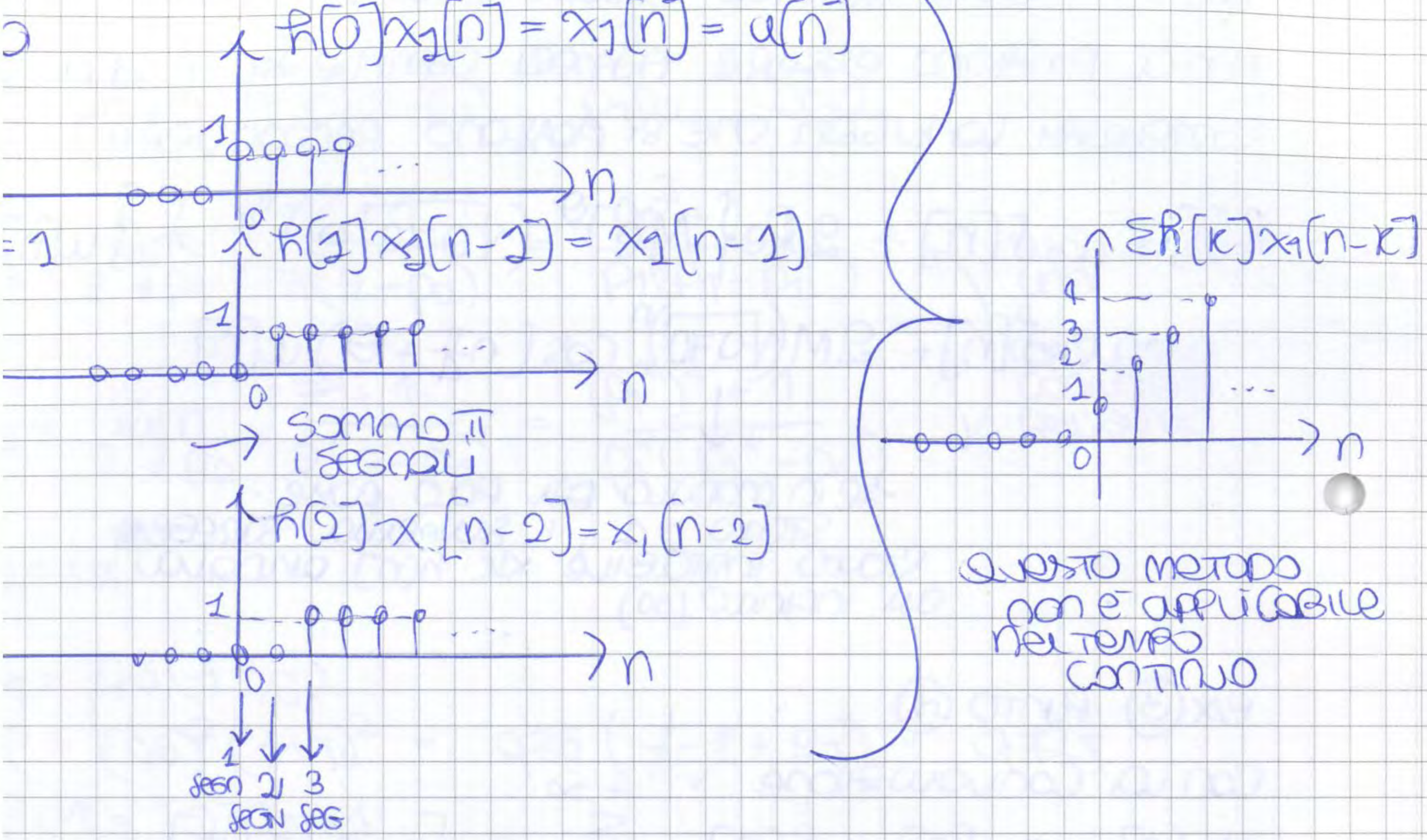
quindi:

$$X(z) = c_0 + c_1\frac{z}{z-p_1} + c_2\frac{z}{z-p_2}$$

$$x[n] = c_0\delta[n] + c_1(p_1)^n u[n] + c_2(p_2)^n u[n]$$

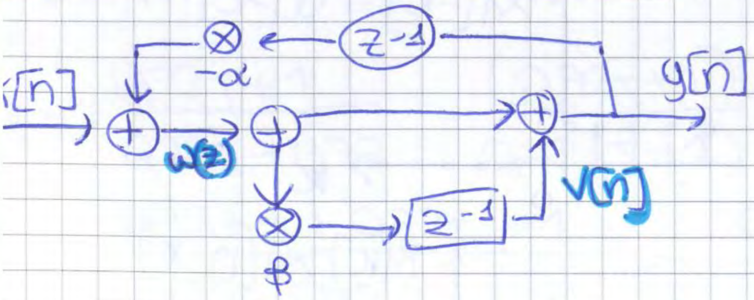
$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[k]}_{\text{coefficiente}} \underbrace{x_1[n-k]}_{\text{segnale } x_1[n] \text{ ritardato di } k}$$

k = parametro



Questo metodo non è applicabile nel tempo continuo

Compito 30 giugno 2011:



$H(z) = ?$

$\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow$ x quali β è stabile?

$W(z) = X(z) - \alpha Y(z) z^{-1}$

$Y(z) = W(z) + \beta z^{-1} W(z)$

$Y(z) = X(z) - \alpha Y(z) z^{-1} + \beta z^{-1}(X(z) - \alpha Y(z) z^{-1})$

$$H(z) = \frac{z(z+\beta)}{z^2 + \alpha z + \alpha\beta} \; \begin{cases} 2 \text{ zeri} \\ 2 \text{ poli} \end{cases} = \frac{z(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

Dato $\alpha = \frac{1}{4}$

) CASO:

$1-16\beta<0$ RADICE<0

$-16\beta<-1$

$\beta>\frac{1}{16}$ 2 POLI COMPLESSI CONIUGATI

$= -\frac{1}{8} \pm J\sqrt{\frac{16\beta-1}{64}}$

$|^2 = |p_2|^2 = \frac{1}{64} + \frac{16\beta-1}{64} =$

$\frac{16}{64}\beta = \frac{\beta}{4} < 1$

CIOE' $\beta<4$

SISTEMA È STABILE SE

$|p_1|^2 = |p_2|^2 < 1$

XK SONO COMPLESSI CONIUGATI

UINDI ABBIAMO 2 CONDIZIONI

$> \frac{1}{16}$, $\beta<4$ PER CUI

$\frac{1}{16}<\beta<4$

↓

X I POLI COMPLESSI CONIUGATI GUARDO IL QUADRATO DEL MODULO

② CASO:

$1-16\beta>0$

$\beta<\frac{1}{16}$ 2 POLI REALI E DISTINTI

$p_{1,2} = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1-16\beta}{64}}$

$p_1 = -\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{1-16\beta}{64}}$ È <0

$p_2 = -\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1-16\beta}{64}}$

QUINDI X ESSERE STABILE BISOGNA AVERE

$\boxed{p_1 > -1 \quad -1<p_2<1}$

ESSENDO $p_1<0$

$|p_1|<1$
$-p_1<1$
$p_1>-1$

↓

PER I POLI REALI GUARDO IL MODULO

③ CASO

$\beta=\frac{1}{16}$

$p_{1,2} = \frac{1}{8} \pm 0 < 1$ SIST STABILE

) SEGNALE TEMPO CONTINUO

$x(t) = t e^{-\frac{t}{t_0}} u(t)$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{S\&H} \xrightarrow{x[n]} \quad x[n] = x(nT_c) \longrightarrow \boxed{H(z)} \xrightarrow{y[n]}$$

$f_c = \frac{10}{t_0} = \frac{1}{T_c}$ $\qquad H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} = (1 - \alpha z^{-1})^2$

$$\xrightarrow{y[n] = y(nT_c)} \boxed{G'(f)} \xrightarrow{y(t)}$$

FILTRO RICOSTRUTTORE, $G'(f)$ È QUELLO IDEALE PER UN CAMPIONATORE S&H

) CERCO α / $y[n]$ ABBIA LA MINIMA DURATA POSSIBILE (CERCO $X(z)$ e $Y(z)$)

) PER QUESTO α, CALCOLO $y(t)$.

) $x[n] = x(nT_c) = x(t = nT_c) = nT_c e^{-\frac{nT_c}{t_0}} u(nT_c) = \left(T_c = \frac{t_0}{10}\right)$

$= nT_c e^{-\frac{nt_0}{t_0 10}} u[n] = nT_c a^n u[n]$ con $a = e^{-\frac{1}{10}}$

$X(z) = T_c \mathcal{Z}\{n a^n u[n]\} = T_c \frac{az}{(z-a)^2}$ TAVOLE DELLE TRASFORMATE

$H(z) = (1 - \alpha z^{-1})^2$

$Y(z) = X(z) H(z) = T_c a z \frac{(1 - \alpha z^{-1})^2}{(z-a)^2} =$

$= T_c a z \frac{1}{(z-a)^2} \left(\frac{z - \alpha}{z}\right)^2 = T_c a \frac{(z-\alpha)^2}{(z-a)^2} \frac{1}{z}$

(z) HA 2 POLI e 2 ZERI.

SE CI SONO DEI POLI, IL SISTEMA È IIR → DURATA ∞

QUINDI X AVERE $y[n]$ CON DURATA MINORE POSSIBILE (SISTEMA FIR) NON CI DEVONO ESSERE POLI:

$\alpha = a = e^{-\frac{1}{10}}$

COSÌ:

$(z) = T_c a \frac{1}{z} \frac{\cancel{(z-a)^2}}{\cancel{(z-a)^2}} = T a z^{-1}$

mputo: 18 giu 2012 - 9 set. 2011
PROBLEMA ③

22 Maggio '13

) SISTEMA LTI $y[n] = x[n] + y[n-1]$

ⓔ CALCOLO USCITA SE L'INGRESSO È

$$x_1[n] = p_4[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$Y(z) - z^{-1} Y(z) = X(z) \quad \text{EQ. ALLE DIFFERENZE}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{z-1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

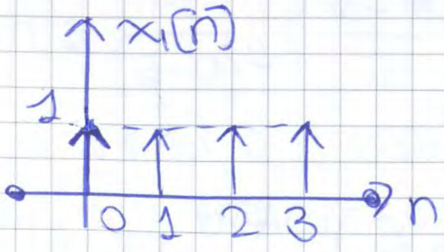
$$X_1(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

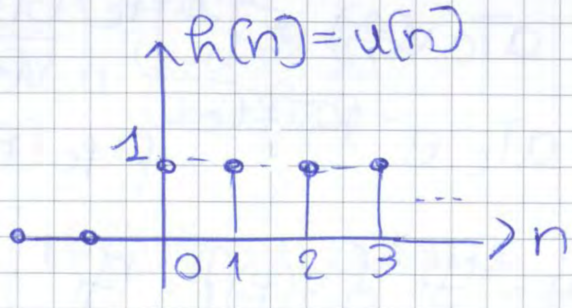
$$Y_1(z) = X_1(z) H(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)$$

$$Y_1(z) = \left(\frac{z}{z-1} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{z^2(z-1)}\right) =$$

$$\left(\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^2(z-1)}\right) \rightarrow \text{DIVISIONE IN FRATTI SEMPLICI!}$$

$h[n] = u[n]$!! NEL TEMPO



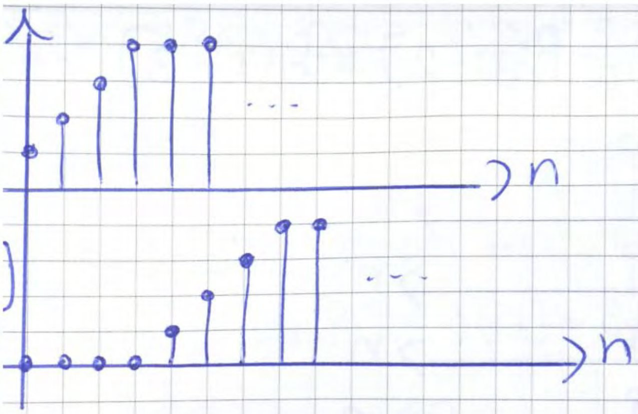


Invece nella convoluzione è più facile!

$$y[n] = x_1[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x_1[n-k] =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] =$$

$$\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]\right) * h[n] =$$



$$]) = y_1[n] - y_1[n-4] =$$
$$= h[n] + h[n-1] + h[n-2] + h[n-3]$$
$$- h[n-4] - h[n-5] - h[n-6] - h[n-7]$$

) $P(m|P) = \frac{P(m,P)}{P(P)} = \frac{P(P,m)}{P(P)} = \frac{P(P|m)\,P(m)}{P(P)} =$

$= \frac{0,9 \cdot 0,1}{0,135} = 0,67 \cong 0,66$ V

c) $P(S|P) = \frac{P(S,P)}{P(P)} = \frac{P(P,S)}{P(P)} = \frac{P(P/S)\,P(S)}{P(P)} = \frac{0,05 \cdot 0,9}{0,135} = 0,33$

d) $P(S|N) = \frac{P(S,N)}{P(N)} = \frac{P(N,S)}{P(N)} = \frac{P(N/S)\,P(S)}{P(N)} = 0,9884$ V $P(S|P) = 1 - P(m|P)$

$P(N) = 1 - P(P) = 0,865$ $\quad P(N/S) = 1 - P(P|S) = 0,95$ V

e) $P(m/N) = \frac{P(m,N)}{P(N)} = \frac{P(N,m)}{P(N)} = \frac{P(N|m)\,P(m)}{P(N)} = 1 - P\{S|N\} = 0,0116$ V

f) $P(F) = P(S)P(P/S) + P(N/m)P(m) = 0,055$

Cambiamo $P\{m\} = 10^{-4}$, $P\{P|m\} = 0,9$, $P\{P/S\} = 0,05$

$P(m/P) = \frac{P(P|m)\,P(m)}{P(P)} = \frac{0,9 \cdot 10^{-4}}{0,05009} = 1,8 \cdot 10^{-3}$

$P(P) = P(P|m)\,P(m) + P(P|S)P(S) = 0,00009 + 0,05 = 0,05009$

Ex. genetica: albini

- l'allele albino (A) è presente in 1/4 della popolazione
- l'allele normale (N) è presente in 3/4 della popolazione
- l'allele A è di tipo recessivo → un individuo che ha genotipo AA ha anche fenotipo A / un individuo che ha genotipo AN o NN ha fenotipo N

$P\{Nf\} = \cancel{P(Nf|AA)}P(AA) + P(Nf|AN)P(AN) + P(Nf|NN)P(NN)$

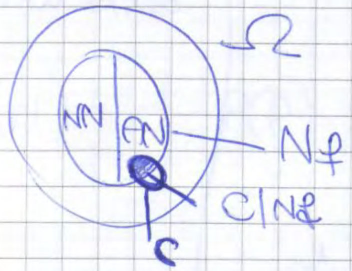
$= 0 + 1\,P\{AN\} + 1 \cdot P\{NN\} = \frac{15}{16} = \frac{6}{16} + \frac{9}{16}$

$P\{NN|Nf\} = \frac{9/16}{15/16} = \frac{3}{5}$

$P\{NA|Nf\} = 1 - P\{NN|Nf\} = \frac{2}{5}$ ci sarebbe anche $-P\{AA|Nf\}$ ma $=0$

$P\{C|Nf\} = \cancel{P\{C|Nf, NN\}P\{NN|Nf\}} + P\{C|Nf, NA\}P\{NA|Nf\}$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE SU UN EVENTO GIÀ CONDIZIONATO



$P\{C|Nf\} = 0 + P\{C|Nf, N_A\}P\{NA|Nf\}$

$= 0{,}5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{1}{5}$

$P\{C'|Nf\} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (b)

c)

2) 3 LINEE DI PRODUZIONE: A,B,C

A → 55% bliste e il 2% di 55% è DIFETTOSO

B → 30% 3%

C → 15% 6%

PROBABILITÀ che un BLISTER SCELTO A CASO SIA DIFETTOSO?

// // // DIFETTOSO

PROVENGA DALLA LINEA C?

) $P(m|NG) = \dfrac{P(m,NG)}{P(NG)} = \dfrac{P(NG,m)}{P(NG)} = \dfrac{P(NG|m)P(m)}{P(NG)} = \dfrac{0{,}25}{1-P(G)} = \dfrac{0{,}25}{1-0{,}35}$

$P(m|NG) = 0{,}3846 \cong 0{,}39$

d) $P(P/NG) = 1 - 0{,}3846 = 0{,}6154 \cong 0{,}61$

f) 10% della popolazione è malata $\rightarrow P(M) = 0{,}1$

pop. sana $\rightarrow P(S) = 0{,}9$

20% della popolazione ha marker A $\rightarrow P(A) = 0{,}2$

10% " " B $\rightarrow P(B) = 0{,}1$

pop. senza marker $\rightarrow P(V) = 0{,}7$

2% della popolazione è malata e ha A $\rightarrow P(m,A) = 0{,}02$

5% " " e ha B $\rightarrow P(m,B) = 0{,}05$

calcolo:

) $P(A|m) = \dfrac{P(A,m)}{P(m)} = \dfrac{P(m,A)}{P(m)} = 0{,}2$

$P(B|m) = \dfrac{P(B,m)}{P(m)} = \dfrac{P(m,B)}{P(m)} = 0{,}5$

) $P(m|A) = \dfrac{P(m,A)}{P(A)} = 0{,}1$

$P(m|B) = \dfrac{P(m,B)}{P(B)} = 0{,}5$

) $P(A) = 0{,}2$
$P(A|m) = 0{,}2$

$P(B) = 0{,}1$
$P(B|m) = 0{,}5$

M e A sono eventi statisticamente indipendenti

A non da' info su presenza o assenza della malattia

) $P(m) = 0{,}1$
$P(m|A) = 0{,}1$

$P(m) = 0{,}1$
$P(m|B) = 0{,}5$

M e B sono statisticamente dipendenti

B può essere utilizzato x rivelare la presenza della malattia

$P(m,A) = 0{,}02 = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = P(A)P(m)$

finizione di indipendenza statistica

$$\sigma_\xi^2 = E(\xi^2) - \mu_\xi^2$$

appena calcolato

$$E(\xi^2) = \int z^2 f_\xi(z)\, dz$$

$$E(\xi^2) = E((\xi_1 - \xi_2)^2) = E(\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2) =$$ la media è lineare

valor quad. medio

$$= E(\xi_1^2) + E(\xi_2)^2 - 2E(\xi_1\xi_2) =$$ le 2 variabili aleatorie sono statist. indipendenti

$$= \sigma_1^2 + \mu_1^2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2 - 2E(\xi_1)E(\xi_2)$$

perché

$$E(\xi_1\xi_2) = \iint x_1 x_2 f_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \iint x_1 x_1 f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int x_1 f_\xi(x_1)\, dx_1 \int x_2 f_{\xi_2}(x_2)\, dx_2 = \mu_1\mu_2$$

$$E(g_1(\xi_1)g_2(\xi_2)) = E(g_1(\xi_1))E(g_2(\xi_2))$$ se sono stat. indipendenti

$$\sigma_{2\xi}^2 = E(\xi^2) - \mu_\xi^2 = \sigma_1^2 + \mu_1^2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2 - (\mu_1 - \mu_2)^2$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cancel{(\mu_1 - \mu_2)^2} - \cancel{(\mu_1 - \mu_2)^2} = \boxed{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

La varianza della differenza di 2 variabili aleatorie è la somma delle varianze se sono statisticamente indipendenti

$$\xi = a\,\xi$$ calcolo media e varianza conoscendo μ_ξ e σ_ξ^2

of

$$\rho_{\xi\xi} = \frac{E((\xi - \mu_\xi)(a\xi - a\mu_\xi))}{\sigma_\xi \, a \, \sigma_\xi} = \frac{\cancel{a} E\{(\xi - \mu_\xi)^2\}}{\cancel{a} \, \sigma_\xi^2}$$

σ_ξ → deviazione standard > 0 sempre

$E\{(\xi-\mu_\xi)^2\}$ → def. di variazione

$$\rho_{\xi\xi} = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2} = 1 \checkmark$$

se $a = -3$

$\rho_{\xi\xi} = -1$ ← sopra-sotto ||

5) Si consideri il segnale $x(t) = A\cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \theta\right)$

A, T parametri

$\theta \in \mathcal{U}(0, \pi)$

Si consideri l'istante $t=0$ in cui si ha

$x(t)\big|_{t=0} = A\cos(\theta)$ = variabile aleatoria

Si consideri il fatto che $x(0) = \xi$ è una variabile aleatoria

calcolo media e varianza di $x(0)$

1

$E(\xi) = E(x(0)) = E(A\cos\theta) = A \cdot E(\cos(\theta)) = 0 = \mu_\xi$

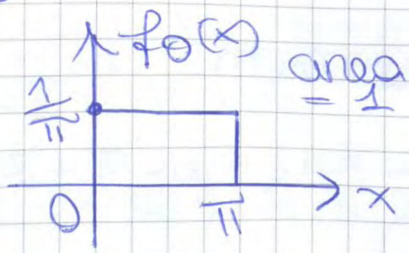
$\sigma_\xi^2 = E(\xi^2) - \cancel{(\mu_\xi)^2}$

$E(\xi^2) = E(x^2(0)) = E(A^2\cos^2\theta) = A^2 E(\cos^2\theta)$

of

teorema media

$$\mu_\xi = E(\xi) - E(A\cos\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(x) f_\theta(x)\,dx =$$



$$= \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = \frac{A}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\pi} = 0$$

$\mu_\xi = 0$

$$\sigma_\xi^2 = E(\xi^2) - E(A^2\cos^2\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\cos^2(x) f_\theta(x)\,dx$$

1) $\zeta = \xi_1 - \xi_2$ calcolo μ e σ^2

con ξ_1 e ξ_2 correlate con coeff di corr $\rho_{1,2}$
e con $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

$$\rho_{1,2} = \frac{E\{(\xi_1-\mu_1)(\xi_2-\mu_2)\}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{E\{\xi_1\xi_2 - \mu_1\xi_2 - \mu_2\xi_1 + \mu_1\mu_2\}}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{E\{\xi_1\xi_2\} - \mu_1\mu_2 - \cancel{\mu_2\mu_1} + \cancel{\mu_1\mu_2}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{E\{\xi_1\xi_2\}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\mu_1\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$E\{\xi_1\xi_2\} = \rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2$$

$$E(\zeta) = E\{\xi_1 - \xi_2\} = E\{g(\xi_1,\xi_2)\} = \iint g(x_1,x_2) f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,d\ldots$$

$$= \iint (x_1-x_2) f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$ non serve! non è nota la ddp congiunta

media operatore lineare:

$$E(\zeta) = E\{\xi_1-\xi_2\} = E\{\xi_1\} - E\{\xi_2\} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma_\zeta^2 = E\{(\zeta - \mu_\zeta)^2\} = E\{\zeta^2\} - (\mu_\zeta)^2$$

$$(\mu_\zeta)^2 \downarrow (\mu_1-\mu_2)^2$$

$$E\{(\xi_1-\xi_2)^2\} =$$

$$E\{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2\} = E\{\xi_1^2\} + E\{\xi_2^2\} - 2E\{\xi_1\xi_2\} =$$

$$= \sigma_1^2 + \cancel{\mu_1^2} + \sigma_2^2 + \cancel{\mu_2^2} - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 - 2\mu_1\mu_2$$

$$\sigma_\zeta^2 = \ldots - \cancel{\mu_1^2} - \cancel{\mu_2^2} + 2\mu_1\mu_2$$

$$\sigma_\zeta^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 + \cancel{2\mu_1\mu_2}$$

...em

$C_\eta(p) = e^{\left\{-\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 p^2 + j\mu_\eta p\right\}}$

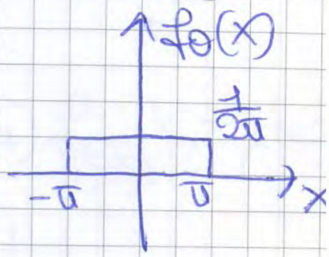
...uindi

$C_\zeta(p) = E\{e^{jp\zeta}\} = E\{e^{jp(\xi+\eta)}\} = E\{e^{jp\xi}e^{jp\eta}\}$ ↓ sono stat. indipendenti!!

$= E\{e^{jp\xi}\}E\{e^{jp\eta}\} = C_\xi(p)C_\eta(p)$

$= e^{\left\{-\frac{1}{2}(\sigma_\xi^2+\sigma_\eta^2)p^2 + j(\mu_\xi+\mu_\eta)p\right\}}$

$f_\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\xi^2+\sigma_\eta^2)}} e^{\left\{-\frac{(x-\mu_\xi-\mu_\eta)^2}{2\sigma_\zeta^2}\right\}}$



...) considero

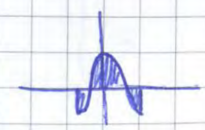
$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right)$, θ v.a. $\in \mathcal{U}(-\pi,\pi)$

...) $t=0$, $x(0) = A\cos(\theta)$ calcolo μ_0 e σ_0^2

$\mu_0 = E\{x(0)\} = AE\{\cos(\theta)\} = A\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\frac{1}{2\pi}\,dx = 0$

$\sigma_0^2 = E\{x^2(0)\} - \cancel{\mu_0^2} = A^2E\{\cos^2(\theta)\} = \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\,dx$

$= \frac{A^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{A^2}{4\pi}[\pi+\pi] = \frac{A^2}{2}$

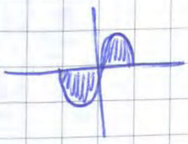


$t = \frac{T}{2}$, $x\left(\frac{T}{2}\right) = A\cos(\pi+\theta) = -A\cos(\theta)$, μ_1 e $\sigma_1 = ?$

$\mu_1 = -AE\{\cos(\theta)\} = 0$

potevo usare $x\left(\frac{T}{2}\right) = -x(0)$

$\sigma_1^2 = +\frac{A^2}{2} = \sigma_0^2$



$t = \frac{T}{4}$, $x\left(\frac{T}{4}\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -A\sin(\theta)$

$\mu_2 = -AE(\sin(\theta)) = 0$

$\sigma_2^2 = +\frac{A^2}{2} = \sigma_0^2$

media e varianza sono uguali per $x(0)$, $x\left(\frac{T}{2}\right)$, $x\left(\frac{T}{4}\right)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 145 di 550

$$E\{\xi\eta\} = E\{A^2 \cos(2\pi f_0 t_0)\cos(2\pi f_0 t_1)\} =$$

$$= \cos(2\pi f_0 t_0)\cos(2\pi f_0 t_1)\sigma^2$$

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{E\{(\xi-\mu_\xi)(\eta-\mu_\eta)\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} =$$

$$= \frac{E\{(A\cos(2\pi f_0 t_0)-0)(A\cos(2\pi f_0 t_1)-0)\}}{\sqrt{\sigma^2\cos^2(2\pi f_0 t_0)\cos^2(2\pi f_0 t_1)}} =$$

$$= \frac{E(A^2)\,\cancel{\cos(2\pi f_0 t_0)}\,\cancel{\cos(2\pi f_0 t_1)}}{\sqrt{\sigma^2\,\cancel{\cos^2(2\pi f_0 t_0)}\,\cancel{\cos^2(2\pi f_0 t_1)}}} = \pm 1$$

DDP η e $\xi \rightarrow f_{\xi,\eta}$ nel caso in cui $\cos(2\pi f_0 t_0)>0$, $\cos(2\pi f_0 t_1)>0$

vedo soluzione

11 Giugno 2013

ESERCITAZIONE 12

$x(t), y(t)$ casuali, stat. ind., stazionari in senso lato (WSS)
$R_x(\tau), R_y(\tau)$, media nulla

$z(t) = x(t)+y(t)$ $\quad R_z(\tau)=?$ $\quad G_z(f)=?$
$w(t) = x(t)y(t)$ $\quad R_w(\tau)=?$ $\quad G_w(f)=?$

assumo $z(t)$ WSS, idem $w(t)$

$$R_z(\tau) = E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]\} =$$

$$= E\{x(t)x(t+\tau)+y(t)y(t+\tau)+x(t)y(t+\tau)+y(t)x(t+\tau)\} =$$

$$= R_x(\tau)+R_y(\tau)+\underbrace{E\{x(t)y(t+\tau)\}+E\{y(t)x(t+\tau)\}}_{\text{sono stat. indip.}}$$

$$= R_x(\tau)+R_y(\tau)+\underbrace{E\{x(t)\}}_{0}\underbrace{E\{y(t+\tau)\}}_{0}+\underbrace{E\{y(t)\}}_{0}\underbrace{E\{x(t+\tau)\}}_{0} =$$

$$= R_x(\tau)+R_y(\tau)$$

la media ritardata è uguale alla media xk sono WSS

$$G_z(f) = \mathcal{F}\{R_z(f)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)+R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}+\mathcal{F}\{R_y(\tau)\}$$

$$= G_x(f)+G_y(f)$$

) $x(t) = \xi e^{-\frac{t}{T}} u(t)$ casuale
calcolo $\mu, \sigma^2, R_x(\tau)$, è WSS?

$E\{x(t)\} = E\{\xi e^{-\frac{t}{T}} u(t)\} = e^{-\frac{t}{T}} u(t) E\{\xi\} = \mu_\xi e^{-\frac{t}{T}} u(t)$ → la media dipende dal tempo

$\sigma^2 = E\{x^2(t)\} - (\mu)^2 = E\{x^2(t)\} - \mu_\xi^2 e^{-\frac{2t}{T}} u(t)$

$= E\{(x(t) - m_x)^2\}$

$E\{\xi^2 e^{-\frac{2t}{T}} u^2(t)\} = e^{-\frac{2t}{T}} u^2(t) [\sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2]$

$\sigma^2 = \sigma_\xi^2 e^{-\frac{2t}{T}} u(t)$

Suppongo sia WSS!

$R_x(\tau) = E\{x(t) x(t+\tau)\} = E\{\xi^2 e^{-\frac{t}{T}} u(t) e^{-\frac{t+\tau}{T}} u(t+\tau)\}$

$= e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{\tau}{T}} u(t) E\{\xi^2\} u(t+\tau)$

$= e^{-\frac{2t+\tau}{T}} u(t) [\sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2] u(t+\tau) = R_x(t, \tau)$

non è WSS perché
- la media dipende dal tempo → se $\mu_\xi \neq 0$
- $R_x(\tau)$ dipende dalla somma $t+\tau$

) Rumore gaussiano bianco $n(t)$, $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$ viene filtrato da un filtro passabasso con $h(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$ ottenendo in uscita $z(t)$ < m_z, σ^2, $G_z(f)$

$G_n(f) = \frac{N_0}{2}$, $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

$z(t) = n(t) * h(t) = \int n(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int h(\tau) n(t-\tau) d\tau$

$m_z = m_x H(0) = 0$ xké $m_x = 0$

$\sigma^2 = E(z^2(t)) - \cancel{m_z^2} = E\{[\int h(\tau) n(t-\tau) d\tau]^2\} =$

5) $n(t)$ $\quad G_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

FILTRO PASSA-BASSO IDEALE BANDA $B \rightarrow w(t)$

$w(t)$ CAMPIONATO $\rightarrow w(kT)$

- T, PER CUI I CAMPIONI $w(kT)$ SONO TUTTI STAT. INDIP. TRA LORO?

$w(kT)$ HA ddp. GAUSSIANA, $\forall T$

- ddp <u>CONGIUNTA</u> DI $w(0), w(T), w(2T), w(3T)$?

- $w(kT)$ SONO STAT. INDIP SE SONO SCORRELATI

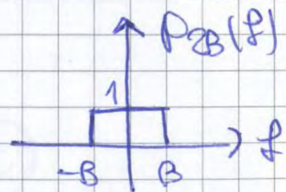
CIOÈ SE $E\{w(kT)w(nT)\} = 0 \quad , \forall k \neq n$

$E\{w(kT)\} = 0$ PERCHÉ OTTENUTO DA $n(t)$, $\mu_n = 0$!

OVVERO SE $R_w((k-n)T) = 0$

$R_w(\tau) = E\{w(t)w(t+\tau)\}$

$R_w((k-n)T) = E\{w(t)\, w(t + \frac{(k-n)}{T})\}$



$R_w(\tau) = R_n(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau)$

$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{P_{2B}(f)\} = \frac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau}$

$R_w((k-n)/T) = \frac{N_0}{2} \frac{\sin(2\pi B \frac{(k-n)}{T})}{\pi \frac{(k-n)}{T}}$

$$f_y(u;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0T}{4}}}\, e^{-\frac{1}{2\frac{N_0T}{4}}u^2}$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)\,|H(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt = \frac{N_0}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}}\,dt = \frac{N_0}{2}\mathcal{E}_h$$

$$= \left[\frac{e^{-\frac{2t}{T}}}{-\frac{2}{T}}\right]_0^{\infty}\frac{N_0}{2} = \frac{T}{2}\,\frac{N_0}{2} = \frac{N_0T}{4}$$

$$f_y(u;t) = \sqrt{\frac{2}{\pi N_0 T}}\; e^{-\frac{2u^2}{N_0T}}$$

DEVO SUBITO TROVARE SE SONO O NO STAZ. IND. X AVERE LA FORMULA + FACILE

$$f_y(u_1,u_2;t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\left\{\frac{u_1^2+u_2^2-2\rho u_1u_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\frac{N_0T}{4}\sqrt{1-e^{-2\frac{|t_1-t_2|}{T}}}}\, e^{-\left\{\frac{u_1^2+u_2^2-2e^{-\frac{|t_1-t_2|}{T}}u_1u_2}{\frac{N_0T}{4}\left(1-e^{-\frac{2|t_1-t_2|}{T}}\right)}\right\}}$$

$$\rho_{t_1,t_2} = \frac{E\{[y(t_1)-\mu_y(t_1)][y(t_2)-\mu_y(t_2)]\}}{\sigma_y(t_1)\,\sigma_y(t_2)} = \frac{E\{y(t_1)\,y(t_2)\}}{\sigma_y^2}$$

BEF

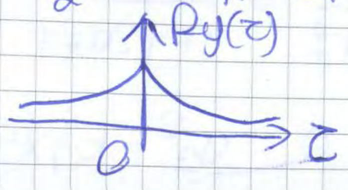
$$\rho_{t_1,t_2} = \frac{R_y(t_1,t_2)}{\sigma_y^2} = \frac{R_y(t_1-t_2)}{\sigma_y^2} = \frac{R_y(\tau)}{\sigma_y^2}$$

$$R_y(\tau) = R_n(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}R_h(\tau) \overset{\text{oppure}}{=} \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}|H(f)|^2\right\} = \frac{N_0}{2}\mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0T}{4}\, e^{-\frac{|\tau|}{T}}$$

$$R_y(0) = \frac{N_0T}{4}$$



$$\rightarrow \rho_{t_1 t_2} = e^{-\frac{|\tau|}{T}} = e^{-\frac{|t_1-t_2|}{T}}\ //$$

$\sigma_{n_1}^2$ vale ∞!

ESAME

n(t) RUMORE GAUSS BIANCO FILTRATO

$G_n(f) = 1$, $R_n(\tau) = \delta(\tau)$

$$n(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t)} \longrightarrow z(t)$$

$f_0 T \gg 1$ $\quad f_0 \gg \frac{1}{T}$

1) $z(t)$ è wss?

2) μ_z, σ_z, σ_z^2, $E\{z^2(t)\} = ?$

3) $G_z(f)$?

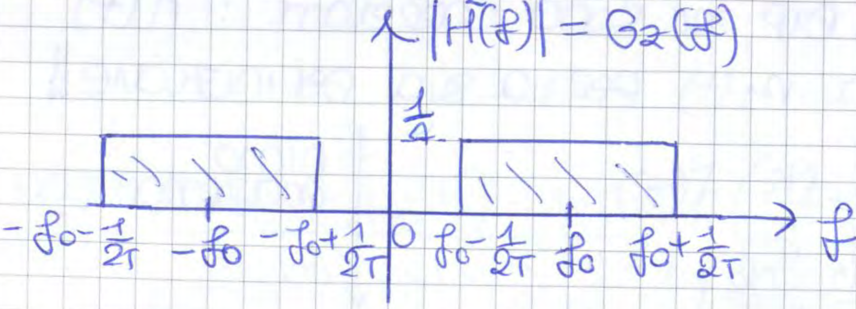
4) espressione analitica della ddp del I ordine di $z(t)$

$$H(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\}$$

$$= p_{\frac{1}{T}}(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[p_{\frac{1}{T}}(f - f_0) + p_{\frac{1}{T}}(f + f_0)\right]$$

$$p_{\frac{1}{T}}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



FILTRO PASSA BANDA DI BANDA $\frac{1}{T}$

$E_h = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{T}\right)2 = \frac{1}{2T}$

$z(t)$ è un processo casuale a banda passante

$$G_z(f) = G_n(f)\,|H(f)|^2 = |H(f)|^2 = \frac{1}{4}\left[p_{\frac{1}{T}}(f - f_0) + p_{\frac{1}{T}}(f + f_0)\right]$$

$$R_z(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_z(f)\} =$$

$\mu_z = \mu_n H(0) = 0 \longrightarrow \sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = R_z(0) = E_h$

Esame 14 Giugno 2012

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|t-kT|}{T}}$$

$P_x = ?$ Devo trovare la potenza → segnale periodico di periodo T

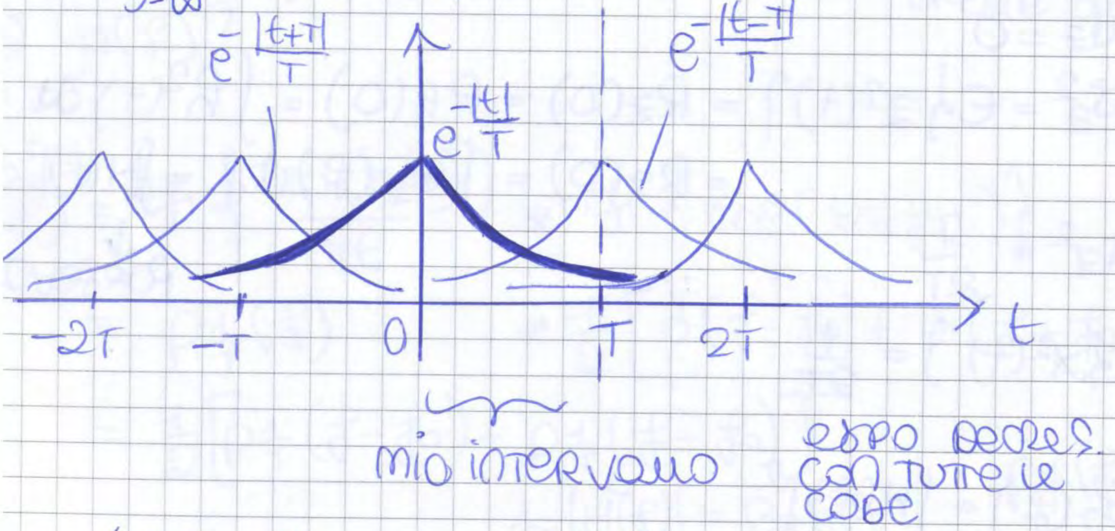
Tre formule

$$P_x = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2(t)\,dt$$

$$P_x = \frac{\mathcal{E}_{x_T}}{T}$$ → scrivo x(t) in forma esatta chiusa nell'intervallo $[0,T]$

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mu_k|^2$$ → si trova μ_k ma non si sa quanto vale la sommatoria

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df$$



per $t\in[0,T]$

decrescono

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} + e^{-\frac{(t+T)}{T}} + e^{-\frac{(t+2T)}{T}} + \dots$$

$$+ e^{\frac{t-T}{T}} + e^{\frac{t-2T}{T}} + \dots$$

non serve il valore ass

crescono

ora raccogliamo il raccoglibile

sommatoria

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}}\left(1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots\right)$$

sommatoria

$$+ e^{\frac{t}{T}}\left(e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots\right) =$$

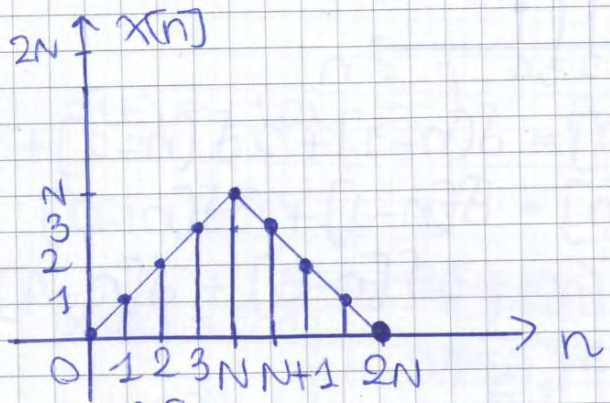
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 157 di 550

RIPASSO SISTEMI DISCRETI

10 Giugno 201

$$x[n] = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq N \\ 2N - n & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

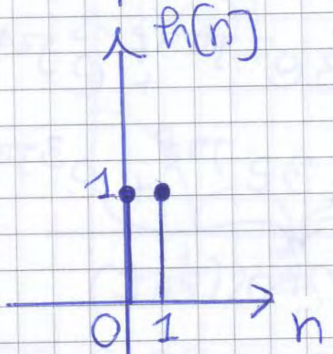
$h(n) = \delta[n] + \delta[n-1]$ FILTRO



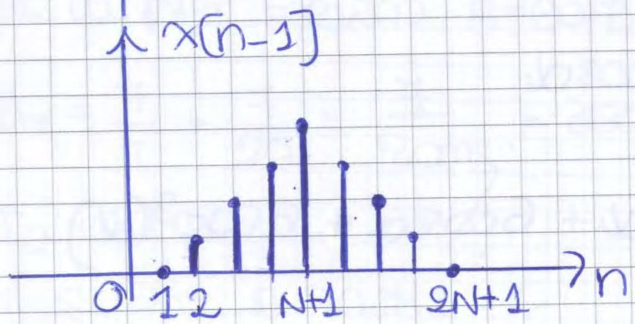
$z[n] = x[n] * h[n]$

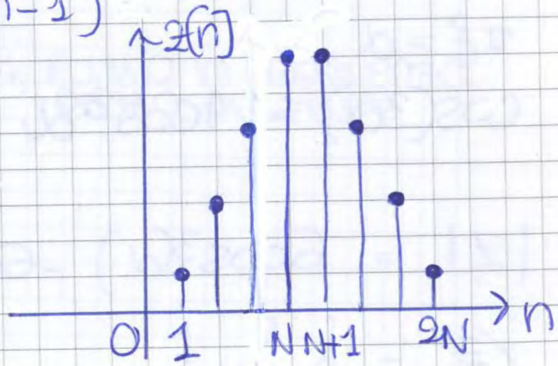
RAPPRESENTO $z[n]$

CALCOLO $\mathcal{E}_z$



$$z(n) = x(n) * h(n) = $$
$$= \sum_{k=0}^{1} h(k)\, x(n-k) = \sum x[k]\, h[n-k]$$
$$= h[0]\, x(n) + h[1]\, x(n-1) =$$
$$= x(n) + x[n-1]$$





$x(n) \to A$

$h(n) \to B$

$z(n) \Rightarrow A+B-1$ NUMERO DI CAMPIONI

$$\mathcal{E}_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^2(n) = 1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + N^2 + (N+1)^2 + \ldots (2N$$

$$z(n) = \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \ldots [N+3]\delta[n-N]$$
$$+ \ldots \delta[n-2N]$$

$$H[z] = 1 + z^{-1}$$

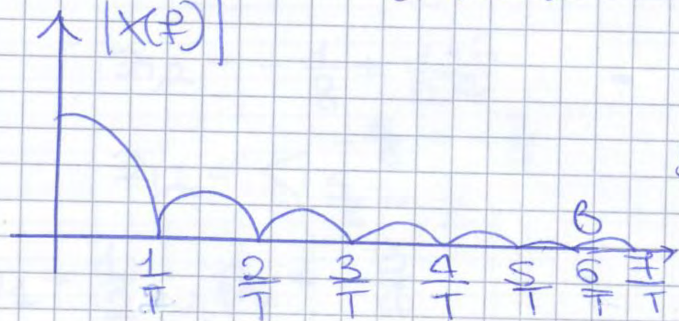
$$\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} \qquad A = \frac{6}{11} \qquad B = \frac{5}{3}$$

$$h[n] = \frac{6}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{5}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(3) $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{2A}\right) \qquad A = 10ms$

DFT $x(t)$ con N? 6 LOBI SECONDARI

$$X(f) = 2A \frac{\sin^2(\pi f 2A)}{(\pi f 2A)^2}$$



B = BANDA FINO AL SESTO LOBO

PER LA DFT SERVONO B = BANDA, N, PASSO IN FREQUENZA, PASSO NEL TEMPO

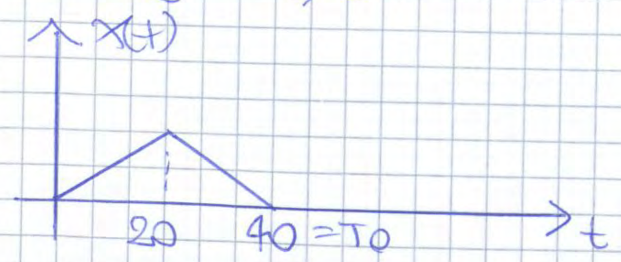
$$B_x = \frac{7}{T} = \frac{7}{2A} = \frac{7}{20ms} = 350\,Hz$$

$T_0 = 40ms$

$f \leq 2B_x \leq 700Hz$

$$T_c = \frac{1}{700} = 1{,}43$$

$$N = \frac{T_0}{T_c} = \frac{40}{1{,}43} = 28 \qquad N = 28$$



Analisi dei segnali
esercitazione 1

1. Scrivere una tabella con i valori di $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, $e^{j\varphi}$ per $\varphi = 0, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

2. Disegnare il grafico (quotato) per le seguenti funzioni di t (segnali) :

$$x(t) = 4, \quad y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad z(t) = x(t)y(t).$$

3. Disegnare il grafico (quotato) per i seguenti segnali:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_c t), \quad y(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad z(t) = x(t)y(t), \quad T = 4/f_c.$$

4. Disegnare il grafico (quotato) per i seguenti segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 1 - |t/T| & |t| \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad z(t) = x(t) + y(t).$$

5. Disegnare il grafico per i seguenti segnali:

$$x(t) = e^{-t} \text{ per } t > 0, \quad x(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$y(t) = e^{-|t|}, \quad z(t) = e^{-t^2}.$$

6. Calcolare parte reale, parte immaginaria, modulo e fase per i numeri complessi

$$c_1 = 2\, e^{j\pi/4}, \quad c_2 = 3 + j, \quad c_3 = j, \quad c_4 = 1 - j.$$

Disegnare nel piano complesso $\mathbb{C}$ i punti corrispondenti a $c_1, \ldots, c_4$.

7. Calcolare il complesso coniugato dei numeri complessi c_1, c_2, c_3, c_4 dell'esercizio precedente. Disegnare nel piano complesso $\mathbb{C}$ i punti corrispondenti a $c_1^*, \ldots, c_4^*$.

8. Si consideri il segnale complesso

$$x(t) = e^{-j2\pi f_c t} = x_R(t) + jx_I(t) = M(t)e^{j\psi(t)}.$$

Fornire l'espressione matematica e disegnare il grafico di $x_R(t)$, $x_I(t)$, $M(t)$, $\psi(t)$. Disegnare nel piano complesso $\mathbb{C}$ i punti corrispondenti a $x(t)$ per
$t = 0, 1/(8f_c), 1/(4f_c), 3/(8f_c), 1/(2f_c), 1/f_c, 2/f_c$. Disegnare nel piano complesso $\mathbb{C}$ la traiettoria percorsa da $x(t)$ nell'intervallo $t \in [0, 1/f_c]$.

9. Sia MATLAB

$$x(t) = M(t)e^{j\psi(t)}, \quad M(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/T & 0 \le t \le T \\ 1 & t > T \end{cases}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\pi f_c t & t \ge 0 \end{cases}$$

Disegnare nel piano complesso $\mathbb{C}$ la traiettoria percorsa da $x(t)$, assumendo che sia che sia nell'ordine $f_c = 1/(4T)$, $f_c = 1/(2T)$ $f_c = 1/T$.

Soluzione

1. Si veda la tabella 1

φ	$cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$e^{j\varphi}$
0	1	0	1
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(1+j)/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$(1+j\sqrt{3})/2$
$\pi/2$	0	1	j
$3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(-1+j)/\sqrt{2}$
π	-1	0	-1

Tabella 1: Tabella con i valori di $cos(\varphi)$ e $\sin(\varphi)$ per alcuni valori di φ (es. 1)

2. I grafici richiesti sono riportati in figura 1. Si noti che $y(t)$ è nullo per $t < -T$ e per $t > T$; parimenti $z(t)$ è nullo per $t < -T$ e per $t > T$.

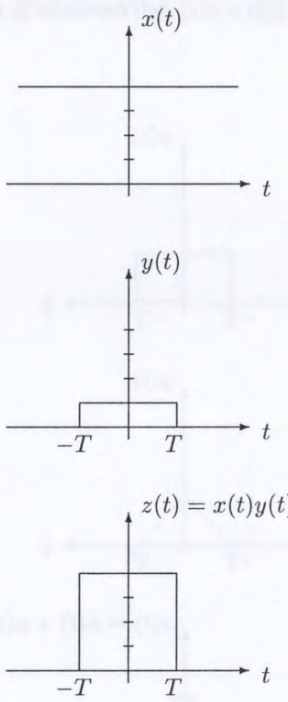


Figura 1: Soluzione dell'esercizio 2

5. Si veda la figura 4

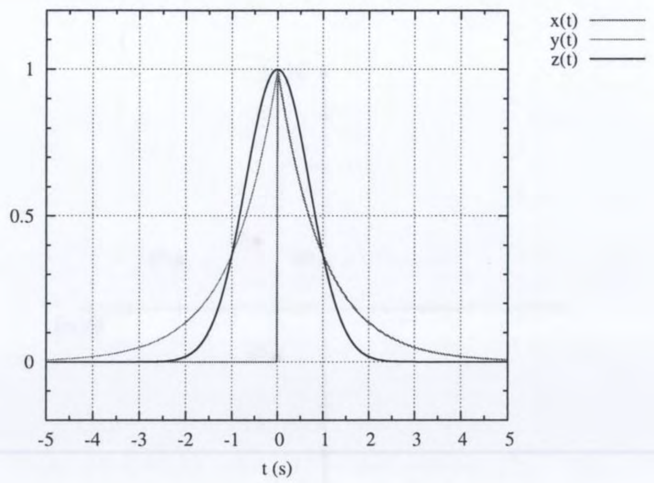


Figura 4: Segnali $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ dell'esercizio 5.

6. Si ricordi che (formula di Eulero)

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$c_1 = 2\,e^{j\pi/4}, \quad \Re\{c_1\} = \sqrt{2}, \quad \Im\{c_1\} = \sqrt{2}, \quad |c_1| = 2, \quad \angle c_1 = \pi/4$$

$$c_2 = 3 + j, \quad \Re\{c_2\} = 3, \quad \Im\{c_2\} = 1, \quad |c_2| = \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}, \quad \angle c_2 = \tan^{-1}\frac{1}{3} \simeq 0.1\pi$$

$$c_3 = j, \quad \Re\{c_3\} = 0, \quad \Im\{c_3\} = 1, \quad |c_3| = 1, \quad \angle c_3 = \pi/2$$

$$c_4 = 1 - j, \quad \Re\{c_4\} = 1, \quad \Im\{c_4\} = -1, \quad |c_4| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \angle c_4 = -\pi/4$$

I numeri complessi $c_1, \ldots, c_4$ sono rappresentati nella figura 5.

7. I complessi coniugati dei numeri

$$c_1 = 2\,e^{j\pi/4}, \quad c_2 = 3 + j, \quad c_3 = j, \quad c_4 = 1 - j.$$

sono

$$c_1^* = 2\,e^{-j\pi/4}, \quad c_2^* = 3 - j, \quad c_3^* = -j, \quad c_4^* = 1 + j$$

rappresentati nella figura 6.

8. La sinusoide complessa

$$x(t) = e^{j2\pi f_c t}$$

può essere scritta, usando la formula di Eulero, come

$$x(t) = e^{j2\pi f_c t} = \cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t).$$

Pertanto, la parte reale di $x(t)$ è

$$x_R(t) = \Re\left\{e^{j2\pi f_c t}\right\} = \cos(2\pi f_c t)$$

mentre la parte immaginaria di $x(t)$ è

$$x_I(t) = \Im\left\{e^{j2\pi f_c t}\right\} = \sin(2\pi f_c t).$$

Il modulo di $x(t)$ è

$$M(t) = |x(t)| = 1$$

mentre la fase di $x(t)$ è

$$\psi(t) = 2\pi f_c t$$

I grafici dei segnali sono riportati nella figura 7 nel caso $f_c = 1$ Hz e nella figura 8 nel caso $f_c = 10$ Hz. Per gli istanti di tempo indicati nell'esercizio, il segnale $x(t)$ assume i seguenti valori (riportati

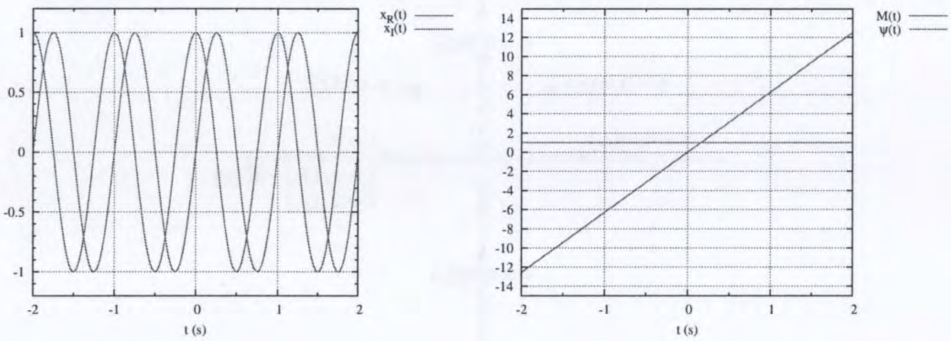


Figura 7: Segnali $x_R(t)$ e $x_I(t)$, $M(t)$ e $\psi(t)$ per l'esercizio 8; caso di $f_c = 1$ Hz.

nella figura 9):

$$x(t)|_{t=0} = x(0) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

$$x(t)|_{t=1/(8f_c)} = x(1/(8f_c)) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=1/(8f_c)} = e^{j2\pi f_c/(8f_c)} = e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$x(t)|_{t=1/(4f_c)} = x(1/(4f_c)) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=1/(4f_c)} = e^{j2\pi f_c/(4f_c)} = e^{j\pi/2} = j$$

$$x(t)|_{t=3/(8f_c)} = x(3/(8f_c)) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=3/(8f_c)} = e^{j2\pi f_c\, 3/(8f_c)} = e^{j3\pi/4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$$

$$x(t)|_{t=1/(2f_c)} = x(1/(2f_c)) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=1/(2f_c)} = e^{j2\pi f_c/(2f_c)} = e^{j\pi} = -1$$

$$x(t)|_{t=1/f_c} = x(1/f_c) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=1/f_c} = e^{j2\pi f_c/f_c} = e^{j2\pi} = 1 = x(0)$$

$$x(t)|_{t=2/f_c} = x(2/f_c) = e^{j2\pi f_c t}\Big|_{t=2/f_c} = e^{j2\pi f_c\, 2/f_c} = e^{j4\pi} = 1 = x(0)$$

È chiaro che, ad ogni incremento di t di una quantità pari a $1/(8f_c)$, la fase di $x(t)$ aumenta di $\pi/4$, ma, dato che $2k\pi + \theta = \theta$ ai fini del calcolo di $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, il valore di $x(t)$ in 0 è uguale al valore di $x(t)$ in $t = 1/f_c$, in $t = 2/f_c$, e in generale in $t = k/f_c$ con k intero (positivo o negativo).

9. La figura 11 mostra l'andamento dei segnali $M(t)$ e $\psi(t)$, mentre la figura 12 mostra la traiettoria di $x(t)$ nel piano complesso, per i 3 casi richiesti.

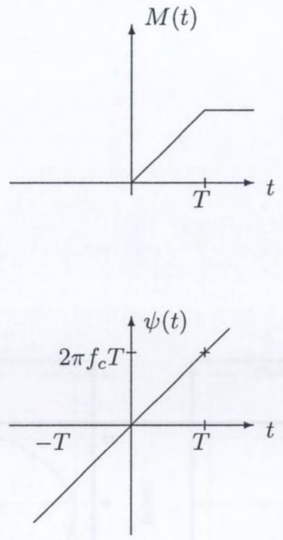


Figura 11: Segnali $M(t)$ e $\psi(t)$ per l'esercizio 9.

10. Il segnale $x(t)$ è definito da un integrale. Si ha

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha u} du = \left. \frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha} \right|_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

Per $t < 0$ il segnale $x(t)$ non è definito (possiamo considerarlo pari a zero nel grafico); in $t = 0^+$, $x(t) = 1/\alpha$; per $t \to \infty$, $x(t) \to 0$; $x(t)$ è sempre positivo. In sostanza $x(t)$ è un esponenziale decrescente. La figura 13 mostra il grafico di $x(t)$ utilizzando in ordinata sia la scala lineare sia la scala logaritmica.

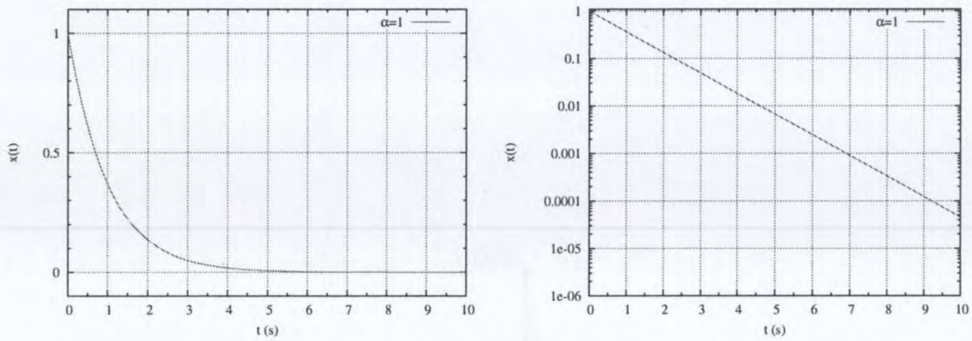


Figura 13: Grafico del segnale $x(t)$ dell'esercizio 10 con $\alpha = 1$, usando in ordinata la scala lineare (a sinistra) e la scala logaritmica (a destra).

11. Il segnale $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è nullo per $t < 0$ e quindi anche $x(u) = 0$ se $u < 0$. Se dunque $t < 0$, l'integrale $y(t)$ diventa

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_{-\infty}^t 0 \, du = 0, \quad t < 0$$

ed anche $y(t)$ è nullo per $t < 0$.
Per $u \in [0, T]$, $x(u)$ vale 1 e quindi, finché $t \in [0, T]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^t 1 \, du = t, \quad t \in [0, T]$$

Per $u > T$ si ha $x(u) = 0$, e quindi, se $t > T$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^T 1 \, du + \int_T^t 0 \, du = T, \quad t > T$$

La figura 14 mostra i grafici di $x(t)$ e $y(t)$.

12. Il segnale $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in [kT, kT + T/2[\\ -1 & t \in [kT + T/2, kT + T[\end{cases} \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

ha il grafico riportato nella figura 15.

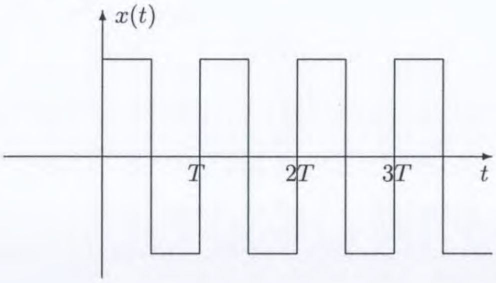


Figura 15: Segnale $x(t)$ per l'esercizio 12.

- Per $t < 0$ l'integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u) du$$

è nullo perché è nulla la funzione integranda.

- Per $u \in [0, T/2]$, $x(u) = 1$ e quindi per $t \in [0, T/2]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u) du = \int_{0}^{t} 1\, du = t, \quad t \in [0, T/2]$$

In particolare, $y(t) = T/2$ per $t = T/2$.

- Per $u \in [T/2, T]$, $x(u) = -1$ e quindi per $t \in [T/2, T]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u) du = \int_{0}^{T/2} 1\, du + \int_{T/2}^{t} -1\, du = T/2 - (t - T/2) = T - t, \quad t \in [T/2, T]$$

In particolare, $y(t) = 0$ per $t = T$.

- Per $u \in [T, 3T/2]$, $x(u) = 1$ e quindi per $t \in [T, 3T/2]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u) du = \int_{0}^{T} x(u)\, du + \int_{T}^{t} 1\, du = t - T, \quad t \in [T, 3T/2]$$

Nell'integrale precedente si è sfruttato il fatto che l'integrale di $x(u)$ tra 0 e T vale 0. In particolare, $y(t) = T/2$ per $t = 3T/2$.

- Per $u \in [3T/2, 2T]$, $x(u) = -1$ e quindi per $t \in [3T/2, 2T]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u) du = \int_{0}^{T} x(u)\, du + \int_{T}^{3T/2} 1\, du + \int_{3T/2}^{t} -1\, du = T/2 - (t - 3T/2) = 2T - t, \quad t \in [3T/2, 2T]$$

In particolare, $y(t) = 0$ per $t = 2T$.

In sostanza, $y(t)$ prima cresce linearmente da 0 a $T/2$, poi decreasce linearmente da $T/2$ a 0, in modo periodico ogni T secondi, a partire da $t = 0$.

Il segnale $y(t)$ ha il grafico riportato nella figura 16.

Analisi dei segnali
esercitazione 2

NO 1. Si disegni lo schema a blocchi del sistema presente tra l'ingresso $v(t)$ e l'uscita $i(t)$ nel circuito di figura 1. Suggerimento: si scriva l'equazione differenziale che consente di ottenere $i_R(t)$ in funzione di $v(t)$ e si disegni lo schema a blocco corrispondente; si ricavi l'equazione che lega $i(t)$ a $i_R(t)$ e si completi lo schema a blocco. Si ricordi che: dato un condensatore con capacità C, la corrente $i(t)$ che scorre nel condensatore è

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t)$$

essendo $v(t)$ la tensione ai capi del condensatore.

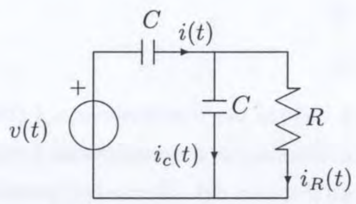


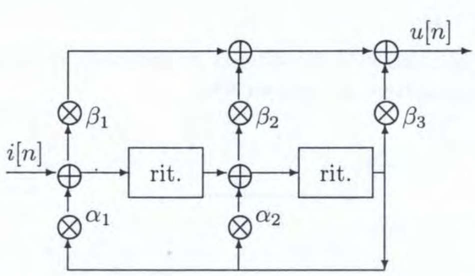
Figura 1: Circuito per l'esercizio 1

NO 2. Si consideri il sistema a tempo discreto in figura 2. Si scrivano le equazioni (alle differenze finite) che legano l'uscita $u[n]$ all'ingresso $i[n]$.

NO 3. Si consideri il sistema a tempo continuo che ritarda il segnale in ingresso di un tempo t_0 (ritardatore o linea di ritardo). Il sistema è lineare? è tempo invariante? qual è la risposta all'impulso $h(t)$? qual è l'uscita del sistema quando l'ingresso è $x(t)$?

NO 4. Si consideri il sistema di figura 3: i due sistemi interni in parallelo sono lineari e tempo invarianti e hanno risposta all'impulso $h_1(t)$ e $h_2(t)$, rispettivamente. Qual è la risposta all'impulso del sistema complessivo? È ancora un sistema lineare tempo invariante?

4 5. Si ripeta l'esercizio precedente per un sistema costituito dalla serie di due sottosistemi, come nella figura 4



SCRIVO EQ che LEGANO L'USCITA y[n] ALL' INGRESSO x[n]

RIT = RIT. DI 1 PASSO

NON RISOLVO IL SISTEMA DI EQ.

Figura 2: Sistema per l'esercizio 2

n	$\delta[n]$	$h[n]$	$h[n-1]$
-1			
0			
1			
2			
3			
4			

3 8. Si calcoli la risposta all'impulso del sistema a tempo-discreto la cui relazione ingresso uscita è

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$$

(suggerimento: si riempia la tabella 8). SI DISEGNI LO SCHEMA A BLOCCHI DEL SISTEMA CORRISPONDENTE ALLA RELAZIONE INGRESSO-USCITA ASSEGNATA

5 9. Si consideri il seguente sistema:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t} x(\tau)d\tau + x(t-2)$$

Si discuta linearità e tempo invarianza del sistema. Se il sistema risulta lineare e tempo-invariante, se ne calcoli la risposta all'impulso.

6 10. Si discuta linearità e tempo invianza del sistema:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = 4 + e^{x(t)}$$

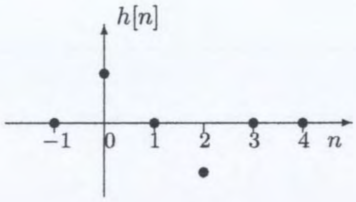


Figura 7: Risposta all'impulso $h[n]$ per il sistema di figura 2.

Per ottenere la risposta all'impulso del sistema di fig. 2 occorre dunque calcolare la convoluzione delle risposte all'impulso dei due sottosistemi. In particolare, si ha

$$h[n] = 0 \quad \text{per } n < 0$$

$$h[0] = h_1[0]h_2[0] + h_1[1]h_2[-1] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$h[1] = h_1[0]h_2[1] + h_1[1]h_2[0] = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

$$h[2] = h_1[0]h_2[2] + h_1[1]h_2[1] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1$$

$$h[3] = h_1[0]h_2[3] + h_1[1]h_2[2] = 0$$

$$h[n] = 0 \quad \text{per } n \geq 3$$

Il grafico di $h[n]$ è in figura 7, mentre lo schema a blocco equivalente per il sistema di fig. 2 è riportato in figura 8.

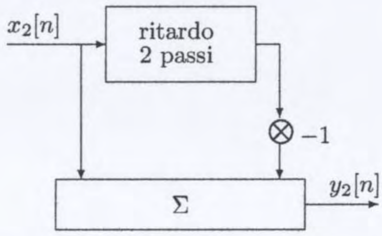


Figura 8: Schema a blocchi equivalente per l'esercizio 2.

3. La tabella 2 mostra l'evoluzione di $h[n]$. Per induzione, si ottiene

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \alpha^n & n \geq 0 \end{cases}$$

Lo schema a blocchi del sistema che realizza la relazione ingresso uscita dell'esercizio 3 è mostrato

n	$\delta[n]$	$h[n-1]$	$h[n]$
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	α
2	0	α	α^2
3	0	α^2	α^3
4	0	α^3	α^4

Tabella 2: Tabella per l'esercizio 3

in figura 9.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 550

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} = \int_{t-1}^{t} x_2(\tau)d\tau + x_2(t-2)$$

Poi occorre trovare l'uscita $y(t)$ per l'ingresso $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{T}\{x(t)\} = \int_{t-1}^{t} x(\tau)d\tau + x(t-2) \\
&= \int_{t-1}^{t} [\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)]d\tau + [\alpha_1 x_1(t-2) + \alpha_2 x_2(t-2)] \\
&= \alpha_1 \int_{t-1}^{t} x_1(\tau)d\tau + \alpha_1 x_1(t-2) + \alpha_2 \int_{t-1}^{t} x_2(\tau)d\tau + \alpha_2 x_2(t-2) \\
&= \alpha_1 \left\{\int_{t-1}^{t} x_1(\tau)d\tau + x_1(t-2)\right\} + \alpha_2 \left\{\int_{t-1}^{t} x_2(\tau)d\tau + x_2(t-2)\right\}
\end{aligned}$$

Si nota immediatamente che

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

e si deduce che il sistema è lineare (cioè vale la sovrapposizione degli effetti).

- Tempo invarianza: Si calcola l'uscita del sistema $y_1(t)$ per l'ingresso $x_1(t)$

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = \int_{t-1}^{t} x_1(\tau)d\tau + x_1(t-2)$$

Poi si ritarda di t_0 (generico) il segnale $y_1(t)$, ottenendo $y_1(t-t_0)$:

$$\boxed{y_1(t-t_0) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x_1(\tau)d\tau + x_1(t-t_0-2)}$$

(al posto di t si scrive $t - t_0$).

Adesso si calcola l'uscita del sistema $y_2(t)$ per l'ingresso ritardato di t_0, cioè per $w(t) = x_1(t-t_0)$:

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{w(t)\} = \int_{t-1}^{t} w(\tau)d\tau + w(t)$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t-t_0)\} = \int_{t-1}^{t} x_1(\tau - t_0)d\tau + x_1(t-t_0-2)$$

Con un cambio di variabile nell'integrale ($u = \tau - t_0$), si ottiene (si veda fig. 12)

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t-t_0)\} = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x_1(u)du + x_1(t-t_0-2)$$

e si nota che $y_2(t) = y_1(t-t_0)$, deducendo che il sistema è tempo invariante.

6. Lo schema a blocchi del sistema è riportato in figura 13.

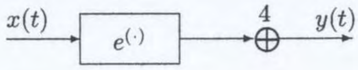


Figura 13: Schema a blocchi del sistema dell'esercizio 6.

- Linearità. Occorre calcolare le due uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$ per i due generici ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} = 4 + e^{x_2(t)}$$

Poi occorre calcolare l'uscita $y(t)$ per l'ingresso $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = 4 + e^{x(t)} = 4 + e^{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)} = 4 + e^{\alpha_1 x_1(t)}\ e^{\alpha_2 x_2(t)}$$

È immediato constatare che non è possibile scrivere

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

e pertanto il sistema è nonlineare.

- Tempo invarianza. Si calcola l'uscita del sistema $y_1(t)$ per l'ingresso $x_1(t)$

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$$

Poi si ritarda di t_0 (generico) il segnale $y_1(t)$, ottenendo $y_1(t-t_0)$:

$$y_1(t-t_0) = 4 + e^{x_1(t-t_0)}$$

(al posto di t si scrive $t-t_0$). Adesso si calcola l'uscita del sistema $y_2(t)$ per l'ingresso ritardato di t_0, cioè per $w(t) = x_1(t-t_0)$:

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{w(t)\} = 4 + e^{w(t)}$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t-t_0)\} = 4 + e^{x_1(t-t_0)}$$

e si nota che $y_2(t) = y_1(t-t_0)$ e quindi il sistema è tempo invariante.

4. Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

quando l'ingresso è

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

Per quali valori di f_0 $y(t)$ è nulla? Si risolva l'esercizio due volte, lavorando prima nel dominio del tempo e poi nel dominio della frequenza (cioè utilizzando la funzione di trasferimento del sistema).

5. Si ripeta l'esercizio 4 utilizzando

$$h(t) = e^{-t/T}u(t)$$

e lavorando esclusivamente nel dominio della frequenza. Nota: T è detta "costante di tempo" ed è un numero reale e positivo.

6. Si consideri il circuito elettrico indicato nella figura 2 Il generatore di tensione produce una dif-

TEORIA

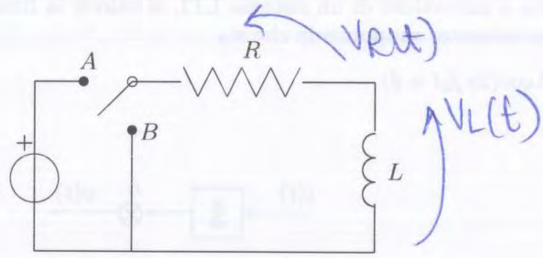


Figura 2: Circuito per l'esercizio 6.

ferenza di potenziale pari a V volt (costante). L'interruttore viene posto a riposo in posizione B. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene posto in posizione A e, successivamente, al tempo $t = T$ viene posto nuovamente in posizione B. Si calcoli la funzione di trasferimento $H(f)$ del sistema equivalente al circuito che ha come uscita la corrente $i(t)$ che scorre nell'induttore.

e quindi

$$\begin{aligned}
V(f) &= H(f)I(f) = H(f)\frac{A}{2}[e^{j\theta}\delta(f-f_0)+e^{-j\theta}\delta(f+f_0)] \\
&= \frac{A}{2}[e^{j\theta}H(f_0)\delta(f-f_0)+e^{-j\theta}H(-f_0)\delta(f+f_0)] \\
&= \frac{A}{2}[e^{j\theta}j2\pi f_0L\delta(f-f_0)-e^{-j\theta}j2\pi f_0L\delta(f+f_0)] \\
&= \frac{A2\pi f_0L}{2}[e^{j\theta}j\delta(f-f_0)-e^{-j\theta}j\delta(f+f_0)] \\
&= \frac{-A2\pi f_0L}{2j}[e^{j\theta}\delta(f-f_0)-e^{-j\theta}\delta(f+f_0)]
\end{aligned}$$

e si ha dunque

$$v(t) = -A2\pi f_0 L\sin(2\pi f_0 t+\theta)$$

Nota: l'unità di misura di $I(f)$ si ricava dalla definizione

$$I(f) = \int i(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

ed è As=A/Hz (il termine $e^{j2\pi ft}$ è adimensionato). L'unità di misura di $V(f)$ è Vs=V/Hz. L'unità di misura di $H(f)=V(f)/I(f)$ è V/A. L'unità di misura di $H(f)$ può anche essere calcolata dal suo valore:

$$H(f) = j2\pi fL$$

con L misurata in henry (H=Vs/A) e f misurata in Hz: $j2\pi fL$ risulta misurata in Hz$\cdot$ H= Hz$\cdot$Vs/A= V/A. Si noti che $j2\pi$ è adimensionato.

Se l'ingresso del sistema fosse una tensione e l'uscita una corrente, $H(f)$ si misurerebbe in A/V. Se l'ingresso del sistema fosse una tensione e l'uscita una tensione, $H(f)$ sarebbe adimensionato. Se l'ingresso del sistema fosse una corrente e l'uscita una corrente, $H(f)$ sarebbe adimensionato.

2. I due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono riportati nella figura 3 Il segnale $z(t)$ è (si veda fig. 4)

$$\begin{aligned}
z(t) &= x(t)y(t) = e^{-(t/T)^2}[\delta(t)+\delta(t-T)] \\
&= e^{-(t/T)^2}\delta(t)+e^{-(t/T)^2}\delta(t-T) \\
&= e^{-(t/T)^2}\Big|_{t=0}\delta(t)+e^{-(t/T)^2}\Big|_{t=T}\delta(t-T) \\
&= 1\delta(t)+e^{-1}\delta(t-T) \\
&= \delta(t)+\frac{1}{e}\delta(t-T)
\end{aligned}$$

Il sistema ha risposta all'impulso (si veda fig. 5)

$$h(t) = p_T(t-T/2) = \begin{cases} 1 & t\in[0,T] \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

L'uscita $w(t)$ del sistema è (si veda fig. 6)

$$\begin{aligned}
w(t) &= z(t)*h(t) = \left[\delta(t)+\frac{1}{e}\delta(t-T)\right]*h(t) \\
&= \delta(t)*h(t)+\frac{1}{e}\delta(t-T)*h(t) \\
&= h(t)+\frac{1}{e}h(t-T)
\end{aligned}$$

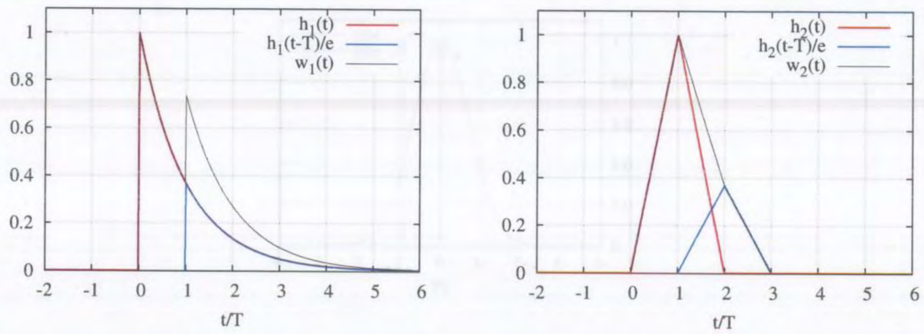


Figura 7: Segnali per l'esercizio 3.

3. Nell'esercizio 3, la soluzione è identica fino al calcolo di $z(t)$, mentre cambia $w(t)$, essendo diversa la risposta all'impulso del sistema:

$$h(t) = e^{-t/T}u(t)$$

Si ha

$$z(t) = \delta(t) + \frac{1}{e}\delta(t-T)$$

Per $h(t) = h_1(t)$, si ha

$$\begin{aligned} w_1(t) &= z(t) * h_1(t) = h_1(t) + \frac{1}{e}h_1(t-T) \\ &= e^{-t/T}u(t) + \frac{1}{e}e^{-(t-T)/T}u(t-T) \\ &= e^{-t/T}u(t) + \frac{e}{e}e^{-t/T}u(t-T) \\ &= e^{-t/T}u(t) + e^{-t/T}u(t-T) \\ &= e^{-t/T}[u(t) + u(t-T)] \end{aligned}$$

Per $h(t) = h_2(t)$, si ha

$$w_2(t) = z(t) * h_2(t) = h_2(t) + \frac{1}{e}h_2(t-T)$$

Il segnale $w_2(t)$ è lineare a tratti; in particolare:

$$w_2(t) = \begin{cases} h_2(t) = \frac{t}{T} & t \in [0,T] \\ h_2(t) + \frac{1}{e}h_2(t-T) = 2 - \frac{t}{T} + \frac{1}{e}\frac{t-T}{T} = (2-\frac{1}{e}) - (1-\frac{1}{e})\frac{t}{T} & t \in [T,2T] \\ \frac{1}{e}h_2(t-T) = \frac{1}{e}[2 - \frac{t-T}{T}] = \frac{1}{e}[3 - \frac{t}{T}] & t \in [2T,3T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e $w_2(0) = 0$, $w_2(T) = 1$, $w_2(2T) = 1/e$, $w_2(3T) = 0$. I grafici di $w_1(t)$ e $w_2(t)$ sono riportati nella figura 7

4. Il segnale all'uscita del sistema è

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

con trasformata di Fourier

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Poiché la risposta all'impulso del sistema è reale, $H(-f) = H^*(f)$ e quindi

$$H(f_0) = M(f_0)e^{j\psi(f_0)}, \quad H(-f_0) = M(f_0)e^{-j\psi(f_0)}.$$

Ciò consente di scrivere

$$Y(f) = \frac{AM(f_0)}{2}\left[e^{j(\theta+\psi(f_0))}\delta(f-f_0) + e^{-j(\theta+\psi(f_0))}\delta(f+f_0)\right]$$

che corrisponde a

$$y(t) = AM(f_0)\cos(2\pi f_0 t + \theta + \psi(f_0)). \tag{1}$$

Il risultato appena trovato è valido in generale: se l'ingresso $x(t)$ di un sistema LTI fisicamente realizzabile è un segnale sinusoidale ad una data frequenza f_0, l'uscita $y(t)$ è ancora sinusoidale alla stessa frequenza, ma con una diversa ampiezza e fase. Il rapporto tra l'ampiezza massima di $y(t)$ (cioè $AM(f_0)$ nella (1)) e l'ampiezza massima di $x(t)$ (cioè A) è pari al modulo della funzione di trasferimento alla frequenza f_0. La differenza tra la fase di $y(t)$ (cioè $\theta + \psi(f_0)$ nella (1)) e la fase di $x(t)$ (cioè θ) è pari alla fase della funzione di trasferimento alla frequenza f_0.

Il segnale $y(t)$ si annulla se la frequenza f_0 del segnale d'ingresso $x(t)$ corrisponde esattamente ad uno degli zeri di $H(f)$ (o, equivalentemente di $|H(f)| = M(f)$). Poiché $H(f)$ si annulla per $f = k/T$ con k intero diverso da zero, l'uscita $y(t)$ è nulla se

$$f_0 T = k, \Longrightarrow f_0 = \frac{k}{T} \qquad k \in \mathbb{N}^+$$

In queste condizioni, si ha $H(f_0) = 0$ e $H(f_0)\delta(f-f_0) = 0$; si ha inoltre $H(-f_0) = 0$ e $H(-f_0)\delta(f+f_0) = 0$, cosicché $Y(f) = 0$.

5. In questo caso viene chiesto espressamente di lavorare nel dominio della frequenza. Occorre dunque calcolare la trasformata di Fourier di

$$h(t) = e^{-t/T}u(t).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/T}u(t)e^{-j2\pi f t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t/T}e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(j2\pi f + 1/T)t}\,dt \\
&= \left.\frac{e^{-(j2\pi f+1/T)t}}{-(j2\pi f + 1/T)}\right|_0^{\infty} \\
&= \frac{0-1}{-(j2\pi f + 1/T)} = \frac{1}{j2\pi f + 1/T} \\
&= \frac{T}{1 + j2\pi f T}
\end{aligned}$$

Si noti che questa trasformata di Fourier è riportata nelle tavole.

Si ha dunque

$$Y(f) = \frac{AM(f_0)}{2}\left[e^{j(\theta+\psi(f_0))}\delta(f-f_0) + e^{-j(\theta+\psi(f_0))}\delta(f+f_0)\right]$$

Il modulo di $H(f)$ è

$$M(f) = \frac{T}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 193 di 550

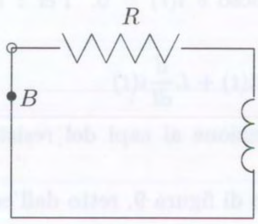


Figura 9: Circuito per l'esercizio 6 per $t > T$.

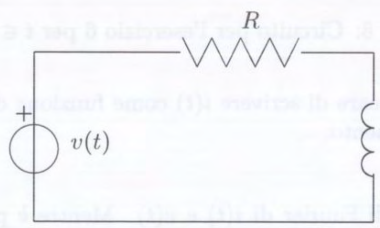


Figura 10: Circuito per l'esercizio 6 per $t \in \mathbb{R}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 195 di 550

Analisi dei segnali
esercitazione 3

2 ~~1~~. Dai due segnali

$$x(t) = e^{-(t/T)^2}, \quad y(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$

si ottiene il segnale

$$z(t) = x(t)y(t)$$

che viene posto come ingresso del sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli l'uscita $w(t)$ del sistema LTI e se ne disegni il grafico. Suggerimento: si disegnino i grafici di $x(t), y(t), z(t), h(t)$.

3 ~~2~~. Si ripeta l'esercizio ~~1~~ 2 usando

$$h(t) = e^{-t/T}u(t) = h_1(t) \text{ e poi } h_2(t) = \begin{cases} t/T & t \in [0,T] \\ 2 - t/T & t \in [T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Si calcoli l'uscita $y_1(t)$ del sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2)$$

quando l'ingresso è

$$x_1(t) = p_T(t - T/2).$$

Si calcoli quindi l'uscita $y_2(t)$ quando l'ingresso è

$$x_2(t) = p_T(t)$$

4. Si calcoli la risposta all'impulso $h(t)$ che si ottiene dalla cascata di due sistemi LTI con risposte all'impulso

$$h_1(t) = e^{-t/T_1}u(t)$$

$$h_2(t) = e^{-t/T_2}u(t)$$

Si consideri prima il caso $T_1 > T_2 > 0$ e poi il caso $T_1 = T_2 = T > 0$. Si disegni qualitativamente il grafico di $h(t)$ nel caso $T_1 = T_2$.

4 ~~5~~. Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

quando l'ingresso è

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

Per quali valori di f_0 $y(t)$ è nulla? Si risolva l'esercizio due volte, lavorando prima nel dominio del tempo e poi nel dominio della frequenza (cioè utilizzando la funzione di trasferimento del sistema).

5 ~~6~~. Si ripeta l'esercizio ~~5~~ 4 utilizzando

$$h(t) = e^{-t/T}u(t)$$

e lavorando esclusivamente nel dominio della frequenza.

T = "costante di tempo", $T \in \mathbb{R}^+$

NOTA $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ GRADINO UNITARIO

Analisi dei segnali
esercitazione 4

1. Calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$ di

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

e disegnare modulo e fase di $X(f)$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier $Y(f)$ di

$$y(t) = e^{-|t-t_0|/T}$$

e disegnare modulo e fase di $Y(f)$.

3. Calcolare la trasformata di Fourier $Z(f)$ di

$$z(t) = e^{-|t|/T}\cos(2\pi f_0 t)$$

e disegnare modulo e fase di $Z(f)$, supponendo $f_0 \gg 1/T$

4. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$x(t) \doteq \begin{cases} 2T - |t| & |t| < T \\ T & t \in [T, 2T] \\ T & t \in [-2T, -T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Calcolare la risposta all'impulso del sistema (filtro passabasso ideale di banda B) che ha come funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6. Calcolare la risposta all'impulso del sistema (filtro passabanda ideale di banda $2B$) che ha come funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_0| < B \\ 1 & |f + f_0| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

7. Si calcoli la risposta all'impulso $h(t)$ che si ottiene dalla cascata di due sistemi LTI con risposte all'impulso

$$h_1(t) = e^{-t/T_1}u(t)$$

$$h_2(t) = e^{-t/T_2}u(t)$$

Si consideri prima il caso $T_1 > T_2 > 0$ e poi il caso $T_1 = T_2 = T > 0$. Si disegni qualitativamente il grafico di $h(t)$ nel caso $T_1 = T_2$.

Soluzione

1. Il segnale $x(t)$ (riportato in fig. 1) è sostanzialmente presente nelle tavole delle trasformate di Fourier (caso 3), dove si legge:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Il segnale assegnato

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

si ottiene ponendo $a = 1/T$. Si può dunque calcolare la trasformata di Fourier richiesta come segue:

$$X(f) = \left.\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}\right|_{a=1/T} = \frac{2/T}{1/T^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2}.$$

Il grafico di $X(f) = |X(f)|$ è riportato nella figura 2. Si può comunque ottenere facilmente $X(f)$ utilizzando la definizione di trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t/T} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t/T} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1/T - j2\pi f)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-1/T - j2\pi f)t} dt \\
&= \left.\frac{e^{(1/T - j2\pi f)t}}{(1/T - j2\pi f)}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(-1/T - j2\pi f)t}}{(-1/T - j2\pi f)}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{(1/T - j2\pi f)} + \frac{-1}{(-1/T - j2\pi f)} \\
&= \frac{T}{(1 - j2\pi f T)} + \frac{T}{(1 + j2\pi f T)} \\
&= T \frac{1 - j2\pi f T + 1 + j2\pi f T}{(1 - j2\pi f T)(1 + j2\pi f T)} \\
&= T \frac{2}{1 + (2\pi f T)^2}
\end{aligned}$$

2. Il segnale assegnato

$$y(t) = e^{-|t-t_0|/T}$$

può essere visto come il segnale all'uscita di un ritardatore (con ritardo t_0, risposta all'impulso $h(t) = \delta(t - t_0)$) avente all'ingresso il segnale

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

Si ha dunque

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

e

$$Y(f) = X(f)H(f).$$

La funzione di trasferimento del ritardatore è

$$H(f) = \mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int \delta(t - t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \int \delta(t - t_0)e^{-j2\pi ft_0}dt = e^{-j2\pi ft_0}$$

mentre $X(f)$ è stata calcolata nella soluzione dell'esercizio 1:

$$X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

La trasformata di Fourier di $y(t)$ è dunque

$$Y(f) = H(f)X(f) = e^{-j2\pi ft_0}\ \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

3. Il segnale $z(t)$

$$z(t) = e^{-|t|/T}\cos(2\pi f_0 t)$$

è il prodotto tra i due segnali

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

$$w(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Si ha dunque (trasformata di Fourier del prodotto di due segnali è pari alla convoluzione delle rispettive trasformate di Fourier)

$$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)w(t)\} = X(f) * W(f)$$

dove

$$X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

$$W(f) = \mathcal{F}\{w(t)\} = \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Si ha

$$Z(f) = X(f) * W(f) = X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{T}{1 + [2\pi(f - f_0)T]^2} + \frac{T}{1 + [2\pi(f + f_0)T]^2}$$

Il grafico di $Z(f)$ è riportato in Fig. 3.

4. Il segnale assegnato, il cui grafico è riportato in figura 4,

$$x(t) = \begin{cases} 2T - |t| & |t| < T \\ T & t \in [T, 2T] \\ T & t \in [-2T, -T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

può essere visto come la somma dei seguenti due segnali:

$$x_1(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ tri

$$x_2(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & t \in [-2T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{array} \right\} = p_{4T}(t) \cdot T$$ ↗ ampiezza!

La trasformata richiesta può essere calcolata come

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \mathcal{F}\{x_2(t)\} = X_1(f) + X_2(f)$$

Il segnale $x_1(t)$ ha andamento triangolare (funzione pari) e vale T in $t = 0$, e 0 per $t = \pm T$; può dunque essere scritto come

$$x_1(t) = T \text{ tri } (t/T)$$

dove il segnale $\text{tri}(t/T)$ è presente nelle tavole delle trasformate di Fourier (caso 25):

$$\mathcal{F}\{ \text{ tri } (t/T)\} = T \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2.$$

Pertanto si ha

$$X_1(f) = T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2.$$

Il segnale $x_2(t)$ è anch'esso presente nelle tavole delle trasformate di Fourier (caso 23) dove si legge:

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}.$$

In realtà la trasformata di Fourier di $x_2(t)$ si ottiene sostituendo al valore T delle tavole il valore $4T$:

$$X_2(f) = 4T \frac{\sin(4\pi f T)}{4\pi f T}.$$

La trsformata richiesta è dunque

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2 + 4T \frac{\sin(4\pi f T)}{4\pi f T}.$$

5. Da

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

occorre calcolare $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$. La funzione di trasferimento assegnata vale 1 nell'intervallo di frequenze $[-B, B]$, e 0 altrove (si veda Fig. 5); in sostanza $H(f) = p_{2B}(f)$. Si può procedere in due modi: utilizzare le tavole o calcolare l'antitrasformata di Fourier in base alla definizione. Dalle tavole (caso 23), si ha

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \right\} = p_{1/T}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 1/(2T) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

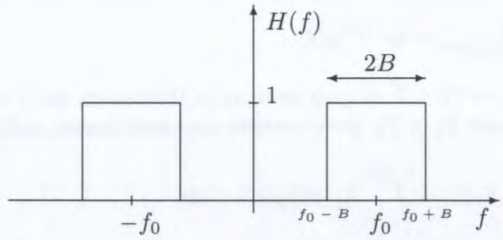
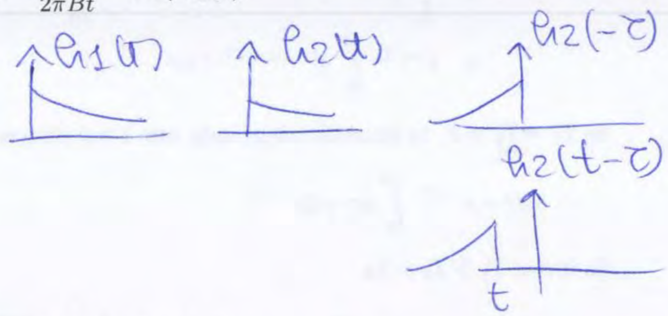


Figura 6: Funzione di trasferimento $H(f)$ per il filtro passbanda ideale di banda $2B$ e frequenza centrale f_0, esercizio 6.

che porta al risultato finale:

$$h(t) = 2h_L(t)\cos(2\pi f_0 t) = 4B\,\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}\cos(2\pi f_0 t)$$

7. Occorre calcolare



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

con

$$h_1(t) = e^{-t/T_1}u(t)$$

$$h_2(t) = e^{-t/T_2}u(t).$$

Si può pensare di lavorare in frequenza calcolando prima

$$H(f) = H_1(f)H_2(f)$$

e poi calcolando l'antitrasformata di $H(f)$. Dalle tavole (caso 1, ponendo $a = 1/T_1$ e $a = 1/T_2$) si può calcolare facilmente $H_1(f)$ e $H_2(f)$:

$$H_1(f) = \frac{1}{1/T_1 + j2\pi f}$$

$$H_2(f) = \frac{1}{1/T_2 + j2\pi f}$$

e, di conseguenza, si ottiene subito

$$H(f) = H_1(f)H_2(f) = \frac{1}{1/T_1 + j2\pi f}\,\frac{1}{1/T_2 + j2\pi f}$$

ma questa trasformata non compare nelle tavole in questa forma. In realtà, se $T_1 = T_2 = T$, si ha

$$H(f) = \frac{1}{(1/T + j2\pi f)^2}$$

e questa trasformata sostanzialmente presente nelle tavole (caso 2) dove si legge:

$$\mathcal{F}\{ate^{-at}u(t)\} = \frac{a}{(a + j2\pi f)^2}.$$

Si ha dunque

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a}{(a + j2\pi f)^2}\right\} = \frac{1}{a}\left[ate^{-at}u(t)\right] = te^{-at}u(t)$$

$t<0 \quad h(t)=0$

$t>0 \quad \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T_1}} e^{\frac{-t+\tau}{T_2}} d\tau = e^{-\frac{t}{T_2}}\left[e^{\frac{(-T_2+T_1)}{T_1T_2}\tau}\right]_0^t = e^{-\frac{t}{T_2}}\left(\frac{T_1T_2}{T_1-T_2}\right)\left[e^{\frac{T_1-T_2}{T_1T_2}t} - 1\right]$

$=$

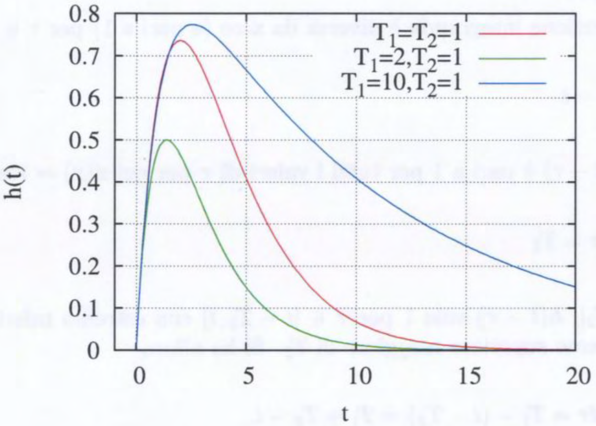


Figura 7: Grafici di $h(t)$ per i casi $T_2 = 1$ e $T_1 = 1, 2, 10$, esercizio 7.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 550

si ha

$$Y(f) = H(f)X(f) = e^{-(f/B)^2}\ e^{-j2\pi f(10/B)} T\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2 T^2} = T\sqrt{\pi} e^{-j2\pi f(10/B)} e^{-f^2(\pi^2 T^2 + 1/B^2)}.$$

Si riconsce ancora una funzione gaussiana ($e^{-\alpha^2 f^2}$), di cui è possibile calcolare l'antitrasformata utilizzando ancora il caso 28 delle tavole delle trasformate, ed un esponenziale complesso, che è riconducibile ad un ritardo. Il segnale d'uscita $y(t)$ può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} y(t) &= T\sqrt{\pi}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-j2\pi f(10/B)}\right\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-f^2(\pi^2T^2+1/B^2)}\right\} \\ &= T\sqrt{\pi}\delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2\pi^2 f^2 (T^2/2 + 1/(2\pi^2 B^2))}\right\} \\ &= T\sqrt{\pi}\delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * \left(\frac{1}{T_o\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2T_o^2)}\right) \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}\, T_o}\ e^{-(t-10/B)^2/(2T_o^2)} \end{aligned} \tag{1}$$

dove adesso

$$T_o = \sqrt{\frac{T^2}{2} + \frac{1}{2\pi^2 B^2}} \tag{2}$$

10. In questo caso la trasformata di Fourier di $x(t)$ è di tipo $sin(x)/x$ e $H(f)$ è piuttosto complessa; conviene pertanto calcolare l'uscita del sistema lavorando nel dominio del tempo:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Il segnale $x(t-\tau)$ è una funzione di τ pari a 1 nell'intervallo $\tau \in [t-T, t]$ e nulla altrove; $h(\tau)$ è nulla per $\tau < 0$.

Per $t < 0$, l'uscita $y(t)$ è nulla.

Per $t \in [0, T]$, l'uscita è

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau)d\tau = \int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau)e^{-\tau/T}d\tau = \Im\left\{\int_0^t e^{j\tau[2\pi f_0 - 1/T]}d\tau\right\} = \Im\left\{\left.\frac{e^{j\tau[2\pi f_0-1/T]}}{j[2\pi f_0 - 1/T]}\right|_0^t\right\} \\ &= \Im\left\{\frac{e^{jt[2\pi f_0 - 1/T]} - 1}{j[2\pi f_0 - 1/T]}\right\} = \Im\left\{e^{jt[\pi f_0 - 1/2T]}\frac{e^{jt[\pi f_0 - 1/2T]} - e^{-jt[\pi f_0 - 1/2T]}}{2j[\pi f_0 - 1/(2T)]}\right\} \\ &= \Im\left\{e^{jt[\pi f_0 - 1/2T]}\frac{\sin(\pi f_0 t - t/2T)}{[\pi f_0 - 1/(2T)]}\right\} = \frac{\sin^2(\pi f_0 t - t/2T)}{[\pi f_0 - 1/(2T)]} \end{aligned}$$

Per $t > T$, l'uscita è

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T}^t h(\tau)d\tau = \int_{t-T}^t \sin(2\pi f_0\tau)e^{-\tau/T}d\tau = \Im\left\{\int_{t-T}^t e^{j\tau[2\pi f_0 - 1/T]}d\tau\right\} \\ &= \Im\left\{\left.\frac{e^{j\tau[2\pi f_0 - 1/T]}}{j[2\pi f_0 - 1/T]}\right|_{t-T}^t\right\} = \Im\left\{\frac{e^{jt[2\pi f_0 - 1/T]} - e^{j(t-T)[2\pi f_0 - 1/T]}}{j[2\pi f_0 - 1/T]}\right\} \\ &= \Im\left\{e^{j(t-T/2)[2\pi f_0 - 1/T]}\frac{e^{j[2\pi f_0 - 1/T]T/2} - e^{-j[2\pi f_0 - 1/T]T/2}}{2j[\pi f_0 - 1/(2T)]}\right\} \\ &= \Im\left\{e^{j(t-T/2)[2\pi f_0 - 1/T]}\frac{\sin[\pi f_0 T - 1]}{\pi f_0 - 1/(2T)}\right\} \\ &= \sin\{(t-T/2)[2\pi f_0 - 1/T]\}\frac{\sin[\pi f_0 T - 1]}{\pi f_0 - 1/(2T)} \end{aligned}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 211 di 550

lavorando sul prodotto dei due coseni. Ricordando che

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

si può scrivere

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi f_0(t-t_0))\cos(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2}[\cos(2\pi f_0(2t-t_0)) + \cos(2\pi f_0 t_0)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)) + \cos(2\pi f_0 t_0)]
\end{aligned}$$

e quindi

$$v(t) = \frac{1}{2}\left[x(t-t_0)\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) + x(t-t_0)\cos(2\pi f_0 t_0)\right].$$

Allora

$$V(f) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} * \mathcal{F}\{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)\} + \cos(2\pi f_0 t_0)\mathcal{F}\{x(t-t_0)\}\right]$$

e si noti che $2\pi f_0 t_0$ è una fase costante (dipende dai parameteri f_0 e t_0 ma, noti questi, è nota la fase) e $\cos(2\pi f_0 t_0)$ è una costante.

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)} + e^{-j(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)}\} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi f_0 t_0}\delta(f-2f_0) + e^{j2\pi f_0 t_0}\delta(f+2f_0)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(f) &= \frac{1}{2}X(f)e^{-j2\pi f t_0} * \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi f_0 t_0}\delta(f-2f_0) + e^{j2\pi f_0 t_0}\delta(f+2f_0)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t_0)X(f)e^{-j2\pi f t_0} \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{-j2\pi f_0 t_0}X(f-2f_0)e^{-j2\pi(f-2f_0)t_0} + e^{j2\pi f_0 t_0}X(f+2f_0)e^{-j2\pi(f+2f_0)t_0}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t_0)X(f)e^{-j2\pi f t_0} \\
&= \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{4}\left[e^{-j2\pi f_0 t_0}X(f-2f_0)e^{+j2\pi 2 f_0 t_0} + e^{j2\pi f_0 t_0}X(f+2f_0)e^{-j2\pi 2 f_0 t_0}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t_0)X(f)e^{-j2\pi f t_0} \\
&= \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{4}\left[e^{j2\pi f_0 t_0}X(f-2f_0) + e^{-j2\pi f_0 t_0}X(f+2f_0)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t_0)X(f)e^{-j2\pi f t_0}
\end{aligned}$$

All'uscita del filtro passabasso si ha

$$\boxed{Z(f) = V(f)H(f)}$$

e, se la banda B del filtro passabasso è minore di f_0 (basta che si minore di $2f_0 - B_x$ dove B_x è la banda di $X(f)$), si ha

$$Z(f) = \frac{1}{2}\underbrace{\cos(2\pi f_0 t_0)}_{\text{costante}}X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

rimane solo
il pezzo centrale

Analisi dei segnali
esercitazione 5

1. Il segnale gaussiano $x(t)$

   $$x(t) = e^{-(t/T)^2}$$

   passa attraverso il filtro passbasso gaussiano con funzione di trasferimento:

   $$H(f) = e^{-(f/B)^2} e^{-j2\pi f(10/B)}.$$

   (a) Calcolare l'espressione dell'uscita del filtro.
   (b) Qual è la banda a -3 dB del filtro?
   (c) Come cambia l'uscita se la banda del filtro viene allargata?

2. Il segnale rettangolare $x(t)$

   $$x(t) = p_T(t - T/2)$$

   viene posto all'ingresso del filtro passbanda con risposta all'impulso

   $$h(t) = \sin(2\pi f_0 t)e^{-t/T}u(t)$$

   Calcolare l'espressione del segnale all'uscita del filtro.

3. Dal segnale

   $$x(t) = e^{-|t|/T}$$

   si ottiene

   $$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

   che passa in una linea di ritardo che introduce un ritardo t_0. Il segnale all'uscita

   $$w(t) = y(t - t_0)$$

   viene nuovamente moltiplicato per $\cos(2\pi f_0 t)$ e fatto passare attraverso un filtro passbasso ideale. Per quale valore del ritardo t_0 l'uscita $z(t)$ del filtro passabasso è nulla? Per quale valore di t_0 l'energia del segnale all'uscita del filtro passbasso è massima?

4. Calcolare l'energia e lo spettro di energia del segnale

   $$x(t) = e^{-|t|/T}$$

5. Calcolare l'energia e lo spettro di energia del segnale

   $$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

6. Calcolare l'energia del segnale

   $$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)p_T(t - T/2), \quad f_0 = 10/T$$

   e fornire l'espressione matematica del segnale $y(t)$ proporzionale a $x(t)$ ma con energia unitaria (normalizzato).

Soluzione

1. La banda B_3 a -3 dB (nota: $10\log_{10} 2 = 3$) del filtro si calcola risolvendo l'equazione

$$|H(B_3)|^2 = \frac{1}{2}|H(0)|^2.$$

In questo caso

$$|H(f)|^2 = e^{-2(f/B)^2}$$

e quindi

$$e^{-2(B_3/B)^2} = \frac{1}{2}, \quad \Longrightarrow \quad B_3 = B\sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \simeq 0.588B$$

La banda B_{20} a -20 dB (nota: $10\log_{10} 100 = 20$) del filtro si calcola risolvendo l'equazione

$$|H(B_{20})|^2 = \frac{1}{100}|H(0)|^2.$$

e quindi

$$e^{-2(B_{20}/B)^2} = \frac{1}{100}, \quad \Longrightarrow \quad B_{20} = B\sqrt{\frac{\ln 100}{2}} \simeq 1.517B$$

2. Occorre dimostrare che la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ gode della proprietà

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau).$$

Per un segnale ad energia finita la funzione di autocorrelazione è calcolabile come

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Si ha

$$\begin{aligned} R_x(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+\tau)x(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)dt = R_x(\tau) \end{aligned}$$

In alternativa, si può effettuare la dimostrazione in frequenza:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \int |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{-j2\pi f\tau} df = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df\right]^* = [R_x(\tau)]^* = R_x(\tau)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, essendo $x(t)$ reale, la sua funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ è reale.

3. In questo caso partiamo dalla dimostrazione in frequenza:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f), \quad \mathcal{F}\{y(t)\} = Y(f) = \mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2, \quad S_y(f) = |Y(f)|^2 = \left|X(f)e^{-j2\pi f t_0}\right|^2 = |X(f)|^2 = S_x(f)$$

Poiché $S_x(f) = S_y(f)$, allora $R_x(f) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = R_y(f) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\}$.

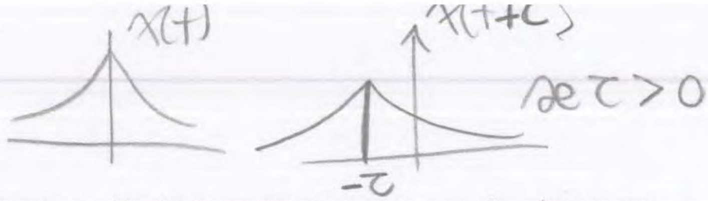
Volendo lavorare nel dominio del tempo, si ha invece:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)x(t-t_0+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(u+\tau)du = R_x(\tau)$$

Si noti che $y(t)$ ha la stessa energia di $x(t)$, essendo semplicemente ritardato.

$x+\tau$ = ANTICIPO
$x-\tau$ = RITARDO



Il segnale $x(t+\tau)$ è anticipato di τ rispetto a $x(t)$ e ha il massimo in $t=-\tau$, essendo τ (per nostra scelta) positivo, il massimo è in $t=-\tau<0$.

L'integrale va dunque calcolato separando ciò che succede per $t<-\tau$, ciò che succede nell'intervallo $[-\tau,0]$ e ciò che succede per $t>0$. Questa distinzione va fatta perché l'espressione matematica di $x(t)$ o $x(t+\tau)$ cambia nei tre sottointervalli. Si ha, per $\tau>0$,

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \int x(t)x(t+\tau)dt = \int e^{-|t|/T}\, e^{-|t+\tau|/T}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{-|t|/T}\, e^{-|t+\tau|/T}\, dt + \int_{-\tau}^{0} e^{-|t|/T}\, e^{-|t+\tau|/T}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-|t|/T}\, e^{-|t+\tau|/T}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{t/T}\, e^{(t+\tau)/T}\, dt + \int_{-\tau}^{0} e^{t/T}\, e^{-(t+\tau)/T}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t/T}\, e^{-(t+\tau)/T}\, dt \\
&= e^{\tau/T}\int_{-\infty}^{-\tau} e^{2t/T}dt + e^{-\tau/T}\int_{-\tau}^{0} dt + e^{-\tau/T}\int_{0}^{\infty} e^{-2t/T}dt \\
&= e^{\tau/T}\left.\frac{e^{2t/T}}{2/T}\right|_{-\infty}^{-\tau} + \tau e^{-\tau/T} + e^{-\tau/T}\left.\frac{e^{-2t/T}}{-2/T}\right|_{0}^{\infty} \\
&= Te^{\tau/T}\frac{e^{-2\tau/T}}{2} + \tau e^{-\tau/T} + Te^{-\tau/T}\frac{1}{2} = Te^{-\tau/T} + \tau e^{-\tau/T} = e^{-\tau/T}(T+\tau)
\end{aligned}
$$

L'espressione di $R_x(\tau)$ valida per qualsiasi valore di τ diventa dunque:

$$R_x(\tau) = e^{-|\tau|/T}(T+|\tau|).$$

Conviene (non è obbligatorio) controllare il risultato precedente verificando che sia $R_x(0)=\mathcal{E}_x=T$:

$$R_x(\tau) = T = \mathcal{E}_x$$

In teoria, il problema poteva essere risolto anche nel dominio della frequenza, essendo lo spettro di energia di $x(t)$ la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

Dalle tavole delle trasformate di Fourier, si può calcolare facilmente lo spettro di energia $S_x(f)$:

$$X(f) = \mathcal{F}\{e^{-|t|/T}\} = \frac{2/T}{(1/T)^2+4\pi^2f^2} = \frac{2T}{1+(2\pi fT)^2} \quad\Longrightarrow\quad S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{4T^2}{[1+(2\pi fT)^2]^2}$$

Per calcolare $R_x(\tau)$ è dunque sufficiente antitrasformare $S_x(f)$, ma, sfortunatamente, le tavole non riportano l'antitrasformata di $S_x(f)$, che andrebbe calcolata a partire dalla definizione di antitrasformata, cosa per nulla facile. In sostanza, come suggerito, in questo caso conviene lavorare nel dominio del tempo.

7. Il segnale

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

ha trasformata di Fourier (si vedano le tavole)

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\right\} = T\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}\right\} = Tp_{1/T}(f) = \begin{cases} T & |f| \le \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

L'energia di $x(t)$ è definita come

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\right]^2 dt$$

Soluzione

1. Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo $T = 1/f_0$ e la sua potenza è calcolabile tramite la formula

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

Si ricordi che

$$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.}\qquad \cos^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2\sin^2(2\pi f_0 t+\theta)dt\\
&= \frac{A^2}{2}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[1-\cos(4\pi f_0 t+\theta)]dt\\
&= \frac{A^2}{2}\frac{1}{T}\left[T-\int_{-T/2}^{T/2}\cos(4\pi f_0 t+\theta)dt\right]\\
&= \frac{A^2}{2}\frac{1}{T}\left[T-\frac{\sin(4\pi f_0 t+\theta)}{4\pi f_0}\Big|_{-T/2}^{T/2}\right]\\
&= \frac{A^2}{2}\frac{1}{T}\left[T-\frac{\sin(2\pi f_0 T+\theta)-\sin(-2\pi f_0 T+\theta)}{4\pi f_0}\right]\\
&= \frac{A^2}{2}\frac{1}{T}\left[T-\frac{\sin(\theta)-\sin(\theta)}{4\pi f_0}\right]\\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

Si è usato il fatto che, per definizione di periodo, $f_0 T = 1$ e $\sin(2\pi+\theta) = \sin(-2\pi+\theta) = \sin(\theta)$. Il risultato, molto importante, è che **un segnale sinusoidale di ampiezza A ha potenza $A^2/2$**, indipendentemente dalla fase θ e dalla frequenza f_0 (purché diversa da zero).

2. Un segnale $x(t)$ è periodico di periodo T se $x(t+T) = x(t)$. Nel caso in esame si ha:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_1\cos(2\pi f_1 t) + A_2\sin(2\pi f_2 t+\pi/4)\\
x(t+T) &= A_1\cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T) + A_2\sin(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T+\pi/4)\\
x(t) &= x(t+T) \quad\Longleftrightarrow\quad 2\pi f_1 T = K2\pi,\quad 2\pi f_2 T = N2\pi
\end{aligned}$$

$2k\pi + 2\pi f_1 t = 2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T \qquad 2\pi k = 2\pi f_1 T$

$2l\pi + 2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4} = 2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T + \frac{\pi}{4} \qquad 2\pi l = 2\pi f_2 T$

Le due condizioni

$k = f_1 T$
$l = f_2 T$

$$\begin{cases} 2\pi f_1 T &= K2\pi\\ 2\pi f_2 T &= N2\pi\end{cases}$$

vanno entrambe soddisfatte con N intero e K intero. Dividendo la prima condizione per la seconda si ottiene

$\frac{f_1 \cancel{T}}{f_2 \cancel{T}} = \frac{k}{l}$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{K}{N} = \in \mathbb{Z}$$

e dunque una soluzione esiste (cioè il segnale $x(t)$ è periodico) se e solo se f_1/f_2 è un numero razionale. Nel caso in cui fosse, ad esempio, $f_1/f_2 = \sqrt{2}$ o $f_1/f_2 = e$, $x(t)$ NON sarebbe periodico, in quanto $\sqrt{2}$ e e sono numeri reali non razionali.

Nel caso in esame

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$$

Si noti che non occorre calcolare la fase ψ.

Nel caso $f_1 \neq f_2$ con f_1/f_2 razionale o irrazionale, invece si ha

$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2(t)dt.$$

$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \left[A_1^2\cos^2(2\pi f_1 t) + A_2^2\sin^2(2\pi f_2 t+\pi/4) + 2A_1A_2\cos(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t+\pi/4)\right] dt.$$

Si ricorda che

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$$

$$\begin{aligned} P(x) = & \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{A_1^2}{2}[1+\cos(2\pi 2 f_1 t)] + \frac{A_2^2}{2}[1-\cos(2\pi 2 f_2 t+\pi/2)]\right. \\ + & \left. \frac{2A_1A_2}{2}[\sin(2\pi(f_1+f_2)t+\pi/4) - \sin(2\pi(f_2-f_1)t+\pi/4)]\right] dt \\ = & \lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\left[\frac{A_1^2}{2}+\frac{A_2^2}{2}\right]dt = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left[\frac{A_1^2 a}{2}+\frac{A_2^2 a}{2}\right] = \left[\frac{A_1^2}{2}+\frac{A_2^2}{2}\right] \end{aligned}$$

Si noti che, per un qualsiasi $f' \neq 0$,

$$\int_{-a/2}^{a/2}\cos(2\pi f' t+\theta)dt = \left.\frac{\sin(2\pi f' t+\theta)}{2\pi f'}\right|_{-a/2}^{a/2} = \frac{\sin(\pi f' a+\theta) - \sin(-\pi f' a+\theta)}{2\pi f'}$$

ed il numeratore assume valori tra -2 e 2 (a seconda dei valori di a e θ); pertanto

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\cos(2\pi f' t+\theta)dt = \lim_{a\to\infty}\frac{\sin(\pi f' a+\theta)-\sin(-\pi f' a+\theta)}{2\pi f' a} = 0$$

per ogni valore di f' e θ. Pertanto nel calcolo di $P(x)$, nella funzione integranda sono stati conservati solo i termini costanti $A_1^2/2$ e $A_2^2/2$.

Commento: la potenza della somma di due sinusoidi è sempre pari alla somma delle potenze delle singole sinusoidi, purché le sinusoidi abbiano frequenza diversa.

3. Il segnale $x(t)$ è un'onda quadra con duty cycle 50% con lo stesso periodo del segnale $\sin(2\pi f_0 t)$. In particolare, $x(t)$ vale 1 per $t \in]0, T/2[$, vale -1 per $t \in]T/2, T[$ (e vale 0 in $t=0$ e $t=T$), con $T = 1/f_0$. Il periodo di $x(t)$ è $T = 1/f_0$. La potenza può essere calcolata come

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 dt = \frac{1}{T}A^2 T = A^2$$

(nota: al fine del calcolo della potenza non interessa che negli istanti di tempo $0, \pm T, \pm 2T, \ldots$ $x(t)$ valga 0).

4. Sia

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} p_T(t)$$

La base è ortonormale e quindi il prodotto scalare tra due segnali della base è

$$<\psi_k(t), \psi_n(t)> = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x_{2,k} &= \frac{A}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sign}\,(\sin(2\pi t/T)) e^{-j2\pi kt/T} dt \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\int_{-T/2}^{0} -e^{-j2\pi kt/T} dt + \int_{0}^{T/2} e^{-j2\pi kt/T} dt \right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{-e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k/T} \bigg|_{-T/2}^{0} + \frac{e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k/T} \bigg|_{0}^{T/2} \right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{1-e^{j\pi k}}{-j2\pi k/T} + \frac{e^{-j\pi k}-1}{-j2\pi k/T} \right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[-\frac{1-(-1)^k}{-j2\pi k/T} + \frac{(-1)^k-1}{-j2\pi k/T} \right] = \frac{jA\sqrt{T}}{2\pi k} \left\{ -\left[1-(-1)^k\right] + \left[(-1)^k - 1\right] \right\} \\
&= \frac{jA\sqrt{T}}{\pi k} \left\{ (-1)^k - 1 \right\}
\end{aligned}$$

Se k è pari (cioè $k = 2n$ per n intero qualsiasi), il prodotto scalare è nullo, quindi si ha

$$x_{2,2n} = 0$$

Se k è dispari (cioè $k = 2n + 1$ per n intero qualsiasi), il prodotto scalare è

$$x_{2,2n+1} = \frac{-2jA\sqrt{T}}{\pi(2n+1)}$$

I prodotti scalari potevano essere calcolati anche usando un altro metodo. Infatti si può sccrivere:

$$x_{2,k} = \int_{-T/2}^{T/2} x_2(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathcal{F}\{x_2(t)\}|_{f=k/T}$$

Si noti che 1) $x_2(t)$ vale 0 al di fuori dell'intervallo temporale $[-T/2, T/2]$ e quindi l'integrale può avere estremi $\pm\infty$ senza alterarne il valore, 2) a parte il coefficiente moltiplicativo, l'integrale corrisponde alla trasformata di Fourier di $x_2(t)$ valutata in $f = k/T$.
Si ha

$$\begin{aligned}
X_2(f) &= \mathcal{F}\{x_2(t)\} = A\mathcal{F}\{-p_{T/2}(t+T/4) + p_{T/2}(t-T/4)\} \\
&= A\mathcal{F}\{-p_{T/2}(t) * \delta(t+T/4) + p_{T/2}(t) * \delta(t-T/4)\} \\
&= A\mathcal{F}\{p_{T/2}(t) * [\delta(t-T/4) - \delta(t+T/4)]\} \\
&= A\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\}\mathcal{F}\{[\delta(t-T/4) - \delta(t+T/4)]\} \\
&= A\frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f} \left[e^{-j2\pi fT/4} - e^{j2\pi fT/4} \right] \\
&= -2jA\frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f} \frac{e^{j2\pi fT/4} - e^{-j2\pi fT/4}}{2j} \\
&= -2jA\frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f} \sin(\pi fT/2) \\
&= -2jA\frac{\sin^2(\pi fT/2)}{\pi f}
\end{aligned}$$

e quindi

$$a_k = X_2\left(\frac{k}{T}\right) = -2jA\frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k/T}$$

Se k è pari, cioè $k = 2n$, si ha $a_{2n} = 0$ e $x_{2,2n} = 0$. Se k è dispari, cioè $k = 2n + 1$, si ha $\sin^2(\pi k/2) = \sin^2(\pi n + \pi/2) = 1$ e quindi

$$a_{2n+1} = X_2\left(\frac{2n+1}{T}\right) = -2jA\frac{1}{\pi(2n+1)/T} = -2jAT\frac{1}{\pi(2n+1)}$$

Con il metodo diretto si ha:

$$\begin{aligned}
x_{3,k} &= \int_{-T/2}^{T/2} x_3(t)\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-j2\pi kt/T}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-T/2}^{0} -A\sin(2\pi t/T)e^{-j2\pi kt/T}dt + \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{0}^{T/2} A\sin(2\pi t/T)e^{-j2\pi kt/T}dt \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}}\left[\int_{-T/2}^{0} -\sin(2\pi t/T)e^{-j2\pi kt/T}dt + \int_{0}^{T/2}\sin(2\pi t/T)e^{-j2\pi kt/T}dt\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}}\left[\int_{0}^{T/2}\sin(2\pi u/T)e^{j2\pi ku/T}du + \int_{0}^{T/2}\sin(2\pi t/T)e^{-j2\pi kt/T}dt\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}}\int_{0}^{T/2}\sin(2\pi t/T)\left[e^{j2\pi kt/T}+e^{-j2\pi kt/T}\right]dt \\
&= \frac{2A}{\sqrt{T}}\int_{0}^{T/2}\sin(2\pi t/T)\cos(2\pi kt/T)dt \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}}\int_{0}^{T/2}[\sin(2\pi(1+k)t/T)+\sin(2\pi(1-k)t/T)]dt \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}}\left[\left.\frac{-\cos(2\pi(1+k)t/T)}{2\pi(1+k)/T}\right|_0^{T/2} + \left.\frac{-\cos(2\pi(1-k)t/T)}{2\pi(1-k)/T}\right|_0^{T/2}\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{T}}\left[\frac{-\cos(\pi(1+k))+1}{2\pi(1+k)/T} + \frac{-\cos(\pi(1-k))+1}{2\pi(1-k)/T}\right] \\
&= \frac{AT}{2\pi\sqrt{T}}\left[\frac{1-(-1)^{1+k}}{1+k} + \frac{1-(-1)^{1-k}}{1-k}\right]
\end{aligned}$$

Si è usata l'uguaglianza:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

Se k è pari, cioè $k=2n$, si ha $(-1)^{1+k}=-1$ e $(-1)^{1-k}=-1$, e quindi

$$x_{3,2n} = \frac{A\sqrt{T}}{2\pi}\left[\frac{1+1}{1+2n}+\frac{1+1}{1-2n}\right] = \frac{A\sqrt{T}}{\pi}\,\frac{2}{1-(2n)^2}$$

Se k è dispari, cioè $k=2n+1$, si ha $(-1)^{1+k}=1$ e $(-1)^{1-k}=1$, e quindi

$$x_{3,2n+1} = 0$$

Volendo usare la trasformata di Fourier, si ha invece:

$$\begin{aligned}
x_{3,k} &= \int_{-T/2}^{T/2} x_3(t)\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-j2\pi kt/T}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)e^{-j2\pi kt/T}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}X_3\left(\frac{k}{T}\right)
\end{aligned}$$

Il segnale può ulteriormente essere riscritto come

$$
\begin{aligned}
x_4(t) &= \frac{A}{2}p_T(t) - \frac{A}{2}\cos(4\pi t/T + 2\theta) \\
&= \frac{A}{2}p_T(t) - \frac{A}{4}\left[e^{j(4\pi t/T+2\theta)} + e^{-j(4\pi t/T+2\theta)}\right]p_T(t) \\
&= \frac{A}{2}p_T(t) - \frac{Ae^{j2\theta}}{4}e^{j4\pi t/T}p_T(t) - \frac{Ae^{-j2\theta}}{4}e^{-j4\pi t/T}p_T(t) \\
&= \frac{A\sqrt{T}}{2}\frac{1}{\sqrt{T}}p_T(t) - \frac{Ae^{j2\theta}\sqrt{T}}{4}\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j4\pi t/T}p_T(t) - \frac{Ae^{-j2\theta}\sqrt{T}}{4}\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-j4\pi t/T}p_T(t) \\
&= \frac{A\sqrt{T}}{2}\psi_0(t) - \frac{Ae^{j2\theta}\sqrt{T}}{4}\psi_2(t) - \frac{Ae^{-j2\theta}\sqrt{T}}{4}\psi_{-2}(t)
\end{aligned}
$$

Pertanto:

$$x_{4,0} = \frac{A\sqrt{T}}{2}$$

$$x_{4,2} = -\frac{A\sqrt{T}}{4}e^{j2\theta}$$

$$x_{4,-2} = -\frac{A\sqrt{T}}{4}e^{-j2\theta}$$

$$x_{4,k} = 0, \quad k \neq 0, \pm 2$$

Analisi dei segnali
esercitazione 6

1. Dire se il segnale
$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$$
con $f_1 = 50$ Hz e $f_2 = 30$ Hz, è periodico ed, in caso positivo, specificare il periodo. Si calcoli la potenza di $x(t)$ per $f_1 \neq f_2$ generici, e per $f_1 = f_2$.

2. Si consideri il segnale
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$
con
$$h(t) = e^{-t/t_0} u(t).$$
Dire se è periodico e calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$.

3. Si consideri il segnale
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$
con
$$h(t) = e^{-t/t_0} u(t).$$
Dire se è periodico e calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$.

4. Il segnale
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{T/2}(t - kT)$$
viene posto all'ingresso di un filtro passabanda ideale con frequenza centrale $f_c = L/T$, L intero positivo, e banda $1/(2T)$. Dare l'espressione del segnale d'uscita $y(t)$. Il segnale $x(t)$ viene posto successivamente all'ingresso di un filtro passabasso ideale di banda $1/(2T)$: qual è l'uscita in questo caso? Qual è il segnale all'uscita se il filtro passabasso ideale ha banda $5.5/T$?

5. Il segnale
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT)$$
con
$$q(t) = e^{-t/t_0} u(t)$$
viene posto all'ingresso di un filtro con risposta all'impulso
$$h(t) = p_T(t - T/2)$$
Qual è l'espressione (nel tempo) del segnale d'uscita $y(t)$?

e la trasformata di Fourier della somma di due segnali è la somma delle trasformate di Fourier, indipendentemente dalla periodicità dei segnali coinvolti.

Per quanto riguarda la potenza del segnale, invece bisogna distinguere il caso di segnale periodico dal coso di segnale non periodico, perché cambia la defnzione di potenza. Per segnali periodici di periodo T (caso di $f_1/f_2 = K/N$ o $f_1 = f_2$), la potenza è

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

e può essere calcolata come

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mu_n|^2$$

mentre per segnali non periodici (caso di f_1/f_2 non razionale) la potenza è

$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} |x(t)|^2 dt.$$

In realtà la definizione di potenza valida per segnale non periodico può essere utilizzata anche nel caso di segnale periodico (la formula valida per segnale periodico è solo una semplificazione della formula generale).

Nel caso $f_1 = f_2$, in segnale è

$$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t) + A_2\sin(2\pi f_1 t + \pi/4)$$

e la sua trasformata di Fourier è

$$X(f) = \frac{A_1}{2}[\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1)] + \frac{A_2}{2}[\delta(f-f_1)e^{-j\pi/4} + \delta(f+f_1)e^{j\pi/4}]$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_1)\left(A_1 + A_2e^{-j\pi/4}\right) + \delta(f+f_1)\left(A_1 - A_2e^{j\pi/4}\right)\right]$$

Lo spettro di potenza è

$$G_x(f) = \frac{1}{4}\left[\delta(f-f_1)\left|A_1 + A_2e^{-j\pi/4}\right|^2 + \delta(f+f_1)\left(\left|A_1 + A_2e^{j\pi/4}\right|^2\right]\right.$$

e la potenza è

$$P(x) = \frac{1}{4}\left[\left|A_1 + A_2e^{-j\pi/4}\right|^2 + \left(\left|A_1 + A_2e^{j\pi/4}\right|^2\right]\right. = \frac{1}{2}\left|A_1 + A_2e^{-j\pi/4}\right|^2$$

$$P(x) = \frac{1}{2}[A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\pi/4)] = \frac{1}{2}[A_1^2 + A_2^2 + \sqrt{2}A_1A_2]$$

Nel caso $f_1 \neq f_2$ con f_1/f_2 razionale, invece si ha

$$X(f) = \frac{A_1}{2}[\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1)] + \frac{A_2}{2}[\delta(f-f_2)e^{-j\pi/4} + \delta(f+f_2)e^{j\pi/4}]$$

$$G_x(f) = \frac{A_1^2}{4}[\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1)] + \frac{A_2^2}{4}\left[\delta(f-f_2)\left|e^{-j\pi/4}\right|^2 + \delta(f+f_2)\left|e^{j\pi/4}\right|^2\right]$$

$$G_x(f) = \frac{A_1^2}{4}[\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1)] + \frac{A_2^2}{4}[\delta(f-f_2) + \delta(f+f_2)]$$

e la potenza è

$$P(x) = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2}$$

3. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$

può essere scritto come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2n} h(t - 2nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2n+1} h(t - 2nT - T)$$

dove si sono distinti i valori pari dell'indice da quelli dispari. Quindi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-2nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-2nT-T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)*\delta(t-2nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-T)*\delta(t-2nT)$$

$$x(t) = [h(t) - h(t-T)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2nT).$$

Il periodo di $x(t)$ è $2T$. Detto

$$g(t) = [h(t) - h(t-T)]$$

si ha

$$X(f) = G(f)\frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/(2T)) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n/(2T))\delta(f - n/(2T))$$

Si ha poi

$$G(f) = H(f) - H(f)e^{-j2\pi fT} = H(f)\left[1 - e^{-j2\pi fT}\right]$$

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = H\left(\frac{n}{2T}\right)\left[1 - e^{-j\pi n}\right] = H\left(\frac{n}{2T}\right)[1 - (-1)^n]$$

In particolare

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = 0 \quad \text{per } n \text{ pari}$$

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = 2H\left(\frac{n}{2T}\right) = \frac{2t_0}{1 + j\pi n t_0/T} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

Pertanto

$$X(f) = \frac{1}{2T} \sum_{n=\text{dispari}} \frac{2t_0}{1 + j\pi n t_0/T}\delta(f - n/(2T)) = \sum_{n=\text{dispari}} \frac{t_0/T}{1 + j\pi n t_0/T}\delta(f - n/(2T))$$

Si noti che le righe dello spettro sono presenti in questo caso alle frequenze

$$\pm\frac{1}{2T}, \pm\frac{3}{2T}, \pm\frac{4}{2T}, \ldots$$

mentre nell'esrcizio 2 erano presenti alle frequenze

$$\pm\frac{1}{T}, \pm\frac{2}{T}, \pm\frac{3}{T}, \ldots$$

4. Il segnale ha trasformata di Fourier

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 235 di 550

e lascia passare, in generale, le delta di Dirac a frequenza 0, $1/T$, $2/T$, $3/T$, $4/T$ e $5/T$:

$$\begin{aligned}
Y(f) &= H(f)X(f) = \sum_{k=-5}^{5} \mu_k \delta(f - k/T) \\
&= \mu_0 \delta(f) + \mu_1[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] + \mu_3[\delta(f - 3/T) + \delta(f + 3/T)] \\
&+ \mu_5[\delta(f - 5/T) + \delta(f + 5/T)] \\
&= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{\sin(\pi/2)}{\pi}[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] + \frac{\sin(\pi 3/2)}{\pi 3}[\delta(f - 3/T) + \delta(f + 3/T)] \\
&+ \frac{\sin(\pi 5/2)}{\pi 5}[\delta(f - 5/T) + \delta(f + 5/T)] \\
&= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{\pi}[\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] - \frac{1}{3\pi}[\delta(f - 3/T) + \delta(f + 3/T)] \\
&+ \frac{1}{5\pi}[\delta(f - 5/T) + \delta(f + 5/T)]
\end{aligned}$$

Il segnale $y(t)$ risulta dunque

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi t/T) - \frac{1}{3\pi}\cos(2\pi 3t/T) + \frac{1}{5\pi}\cos(2\pi 5t/T)$$

5. Il segnale $x(t)$ può essere scritto come:

$$x(t) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Il segnale $y(t)$ è

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

In frequenza,

$$Y(f) = X(f)H(f)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(k/T)H(k/T)\delta(f - k/T)$$

e si può ottenere $y(t)$ antitrasformando $Y(f)$. In questo caso, è più facile lavorare nel dominio del tempo, scambiando l'ordine con cui vengono effettuate le convoluzioni:

$$y(t) = q(t) * h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

Infatti

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_T(t - kT - T/2) = 1$$

(basta disegnare il grafico per rendersene conto). Quindi

$$y(t) = q(t) * 1;$$

questa convoluzione può apparire "strana", ma in frequenza si ha

$$Y(f) = Q(f)\delta(f) = Q(0)\delta(f)$$

e

$$y(t) = Q(0) \quad \text{(costante)}$$

Analisi dei segnali
esercitazione 7

1. Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

con

$$h(t) = e^{-t/t_0} u(t).$$

Dire se è periodico e calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$.

aw, 2. Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$

con

$$h(t) = e^{-t/t_0} u(t).$$

Dire se è periodico e calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$.

3. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{T/2}(t - kT)$$

viene posto all'ingresso di un filtro passabanda ideale con frequenza centrale $f_c = L/T$, L intero positivo, e banda $1/(2T)$. Dare l'espressione del segnale d'uscita $y(t)$. Il segnale $x(t)$ viene posto successivamente all'ingresso di un filtro passabasso ideale di banda $1/(2T)$: qual è l'uscita in questo caso? Qual è il segnale all'uscita se il filtro passabasso ideale ha banda $5.5/T$?

4. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT)$$

con

$$q(t) = e^{-t/t_0} u(t)$$

viene posto all'ingresso di un filtro con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2)$$

Qual è l'espressione (nel tempo) del segnale d'uscita $y(t)$?

USO I GRAFICI DI f

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 239 di 550

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = H\left(\frac{n}{2T}\right)\left[1 - e^{-j\pi n}\right] = H\left(\frac{n}{2T}\right)\left[1 - (-1)^n\right]$$

In particolare

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = 0 \quad \text{per } n \text{ pari}$$

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = 2H\left(\frac{n}{2T}\right) = \frac{2t_0}{1 + j\pi n t_0/T} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

Pertanto

$$X(f) = \frac{1}{2T}\sum_{n=\text{dispari}} \frac{2t_0}{1 + j\pi n t_0/T}\delta(f - n/(2T)) = \sum_{n=\text{dispari}} \frac{t_0/T}{1 + j\pi n t_0/T}\delta(f - n/(2T))$$

Si noti che le righe dello spettro sono presenti in questo caso alle frequenze

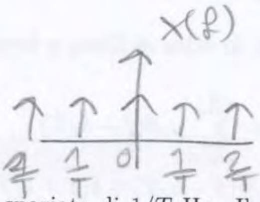
$$\pm\frac{1}{2T}, \pm\frac{3}{2T}, \pm\frac{4}{2T}, \ldots$$

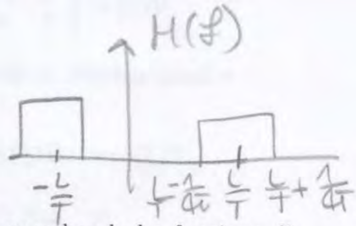
mentre nell'esrcizio 1 erano presenti alle frequenze

$$\pm\frac{1}{T}, \pm\frac{2}{T}, \pm\frac{3}{T}, \ldots$$

3. Il segnale ha trasformata di Fourier

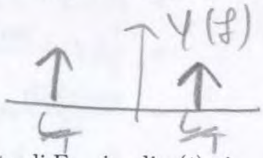
$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T)$$





(μ_k opportuni) e le delta di Dirac sono spaziate di $1/T$ Hz. Il filtro passabanda ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f \in \left[\frac{L}{T} - \frac{1}{4T}, \frac{L}{T} + \frac{1}{4T}\right] \\ 1 & f \in \left[-\frac{L}{T} - \frac{1}{4T}, -\frac{L}{T} + \frac{1}{4T}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



ne passano solo 2!

e quindi una sola coppia di delta di Dirac presenti nella trasformata di Fourier di $x(t)$ viene lasciata passare dal filtro, mentre tutte le altre vengono rimosse. In particolare,

$$\boxed{Y(f) = H(f)X(f) = \mu_L \delta(f - L/T) + \mu_{-L}\delta(f + L/T)}$$

ma $\mu_L = \mu_{-L}$

$Y(f) = \mu_L\left[\delta(f - \frac{L}{T}) + \delta(f + \frac{L}{T})\right]$

$Y(f) = 2\mu_L\left[\frac{\delta(f - \frac{L}{T}) + \delta(f + \frac{L}{T})}{2}\right]$

e, scrivendo

$$\mu_L = M_L e^{j\Theta_L},$$

si ha

$$Y(f) = M_L\left[\delta(f - L/T)e^{j\Theta_L} + \delta(f + L/T)e^{-j\Theta_L}\right]$$

(si è sfruttato il fatto che $\mu_{-L} = \mu_L^*$, essendo $x(t)$ reale). Il segnale $y(t)$ è dunque

$$y(t) = 2M_L \cos\left(2\pi\frac{L}{T}t + \Theta_L\right)$$

$y(t) = 2\mu_L \cos\left(2\pi t \underbrace{\frac{L}{T}}_{f_0}\right)$

Occorre dunque calcolare modulo M_L e fase Θ_L di μ_L.

$$\mu_L = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi Lt/T}dt = \frac{1}{T}\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\}\big|_{f=L/T} = \frac{1}{T}\frac{T}{2}\frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2}\bigg|_{f=L/T} = \frac{\sin(\pi L/2)}{\pi L}$$

Essendo μ_L reale, si ha subito

$$y(t) = \frac{2\sin(\pi L/2)}{\pi L}\cos\left(2\pi\frac{L}{T}t\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 241 di 550

e si può ottenere $y(t)$ antitrasformando $Y(f)$. In questo caso, è più facile lavorare nel dominio del tempo, scambiando l'ordine con cui vengono effettuate le convoluzioni:

$$y(t) = q(t) * h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT)$$

Infatti

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_T(t-kT-T/2) = 1$$

(basta disegnare il grafico per rendersene conto). Quindi

$$y(t) = q(t) * 1;$$

questa convoluzione può apparire "strana", ma in frequenza si ha

$$Y(f) = Q(f)\delta(f) = Q(0)\delta(f)$$

e

$$y(t) = Q(0) \quad \text{(costante)}$$

In particolare

$$Q(f) = \frac{t_0}{1+j2\pi f t_0}$$

e $Q(0) = t_0$. Pertanto

$$y(t) = t_0$$

Volendo proprio calcolare la convoluzione tra $q(t)$ ed il segnale costante $z(t) = 1$, si ha

$$y(t) = q(t) * z(t) = \int q(\tau)z(t-\tau)d\tau = \int q(\tau) \times 1\, d\tau = \int q(t)dt = \int q(t)e^{j2\pi f t}dt\bigg|_{f=0} = Q(0)$$

L'esercizio può anche essere risolto nel dominio della frequenza:

$$H(f) = e^{-j\pi f T}\, T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$H(k/T) = e^{-j\pi k}\, T\frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = \begin{cases} T & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Quindi

$$Y(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(k/T)H(k/T)\delta(f-k/T) = \frac{1}{T}Q(0)T\delta(f) = Q(0)\delta(f)$$

e

$$y(t) = Q(0)$$

Si noti che non è necessario andare a calcolare $Q(k/T)$, ma basta $Q(0)$.

$$v(t) = p_{T_s}(t - T_s/2)$$

con T_s intervallo di campionamento. Si disegni qualitativamente il grafico di $x_p(t)$ assumendo che l'ingresso del sistema sia

$$x(t) = te^{-t/t_0}u(t)$$

e che sia $T_s = t_0/4$.

Seguendo lo stesso metodo utilizzato per dimostrare il teorema del campionamento (ideale), si ricavi la funzione di trasferimento $G(f)$ del filtro ricostruttore che consente di ottenere esattamente $x(t)$ a partire da $x_p(t)$, supponendo che il segnale $x(t)$ all'ingresso del sistema sia strettamente limitato in banda e abbia banda B_x, e che la frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s$ sia strettamente maggiore di $2B_x$.

3. Il segnale di tipo passabanda

$$z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

viene campionato idealmente a frequenza $f_c = f_0/2$ (si tratta chiaramente di sottocampionamento) ottenendo il segnale

$$w(t) = z(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/f_c).$$

Si scriva l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro passabasso ideale di banda $B = f_c/2$ e con ingresso $w(t)$, supponendo che la banda del segnale $x(t)$ sia $B_x < B$. CAMPIONAM IDEALE

4. Il segnale periodico $x(t)$ di periodo $T = 1$ s e di banda $B_x = 10/T$ viene campionato a frequenza $f_c = 2B_x$. Ogni campione (analogico) viene memorizzato utilizzando 2 byte (cioè 16 bit per ogni campione). La memorizzazione dei campioni viene effettuata per un intervallo di tempo pari a 1 minuto. Qual è la dimensione del file (in byte) che contiene i campioni? Qual è la dimensione del file per $f_c = 4B_x$?

$f_s = 2B_x$ invece dovrebbe essere $f_s > 2B_x$

Nel caso $\theta = \pi/2$, il segnale di uscita $y(t)$ è diverso da $x(t)$ perché il segnale di ingresso ha banda $B_x = f_0$ e la frequenza di campionamento è scelta esattamente uguale a $2B_x$, mentre dovrebbe essere strettamente maggiore di $2B_x = 2f_0$. Nel caso $\theta = 0$, invece, per pura coincidenza, si ha $y(t) = 2x(t)$.

Per $\theta = 0$, l'esercizio poteva anche essere risolto come segue.

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - n/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_n X(f - n/T_s)$$

In questo caso, si ha $f_s = 1/T_s = 2f_0$ e

$$X(f) = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e quindi

$$\begin{aligned}
X_\delta(f) &= f_s \sum_n X(f - nf_s) = \frac{Af_s}{2} \sum_n [\delta(f - nf_s - f_0) + \delta(f - nf_s + f_0)] \\
&= \frac{Af_s}{2} \sum_n [\delta(f - 2nf_0 - f_0) + \delta(f - 2nf_0 + f_0)] \\
&= \frac{Af_s}{2} \{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \ldots] \\
&+ [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \ldots]\} \\
&= Af_s[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \ldots]
\end{aligned}$$

Si ha poi

$$Y(f) = X_\delta(f)G(f) = Af_s[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]T_s = A[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e quindi, nuovamente,

$$y(t) = 2A\cos(2\pi f_0 t).$$

Per $\theta = \pi/2$, l'esercizio poteva anche essere risolto come segue.

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - n/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_n X(f - n/T_s)$$

In questo caso, si ha $f_s = 1/T_s = 2f_0$ e

$$X(f) = \frac{A}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

e quindi

$$\begin{aligned}
X_\delta(f) &= f_s \sum_n X(f - nf_s) = \frac{Af_s}{2j} \sum_n [\delta(f - nf_s - f_0) - \delta(f - nf_s + f_0)] \\
&= \frac{Af_s}{2j} \sum_n [\delta(f - 2nf_0 - f_0) - \delta(f - 2nf_0 + f_0)] \\
&= \frac{Af_s}{2j} \{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \ldots] \\
&- [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \ldots]\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Poiché $X_\delta(f) = 0$, anche $x_\delta(t) = 0$ e $y(t) = x_\delta(t) * g(t) = 0$.

il segnale $x_p(t)$ può essere scritto come

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)v(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) * v(t) && (1)\\
&= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right] * v(t) && (2)\\
&= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT_s)\right] * v(t) && (3)\\
&= \left[x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)\right] * v(t) && (4)
\end{aligned}$$

e la sua trasformata di Fourier è

$$X_p(f) = \left[X(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/T_s)\right] V(f)$$

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-n/T_s)\right] V(f)$$

Deve essere

$$Y(f) = G(f)X_p(f) = X(f)$$

e quindi

$$\frac{1}{T_s}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-n/T_s)\right] V(f)G(f) = X(f).$$

La precedente uguaglianza è valida se

$$\boxed{\frac{1}{T_s}V(f)G(f) = p_{f_s}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases}}$$

Deve dunque essere

$$G(f) = T_s\frac{p_{f_s}(f)}{V(f)}$$

$G'(f) = \frac{G(f)}{V(f)} = \frac{T_s p_{f_s}(f)}{V(f)}$

(nel campionamento ideale si ha invece $G(f) = T_s p_{f_s}(f)$). La funzione $V(f)$ è

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} = e^{-j2\pi f T_s/2}\frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f} = e^{-j\pi f T_s}\frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f}$$

e quindi

$$G(f) = \begin{cases} \frac{\pi f T_s}{\sin(\pi f T_s)} e^{j\pi f T_s} & |f| < f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases}$$

La figura 4 riporta il grafico di $|G(f)|$. **Nota**: in genere il sistema **ADC (Analog to Digital Converter)** è costituito da un filtro anti-aliasing (passabasso di banda $f_s/2$) un campionatore di tipo Sample&Hold e un quantizzatore, che trasforma il livello $x(nT_s)$ in una successione di N_q bit; il sistema **DAC (Digital to Analog Converter)** è costituito da un "decodificatore" che trasforma gli N_q bit nel corrispondente livello $x(nT_s)$, che viene mantenuto per T_s secondi, seguito dal filtro ricostruttore. Il filtro anti-aliasing è un semplice filtro passa-basso (non ideale); il filtro ricostruttore in genere non ha funzione di trasferimento $G(f)$ come calcolata nell'esercizio, ma nuovamente un semplice filtro passa-basso (non ideale). Il segnale ricostruito $y(t)$ è sicuramente diverso dal segnale $x(t)$ all'ingresso del campionatore, ma la differenza è tutto sommato trascurabile. La coppia ADC e DAC è caratterizzata da due soli parametri: frequenza di campionamento (che determina anche le bande dei filtri passa-basso) e numero di bit per campione N_q.

Poiché un campione viene tradotto in $m = 2$ byte, il numero di byte N_B nel file è

$$N_B = N_c m = t_o f_c m = N_c \times 2 = 2400.$$

Se la frequenza di campionamento fosse $f'_c = 4B_x = 2f_c$, il numero di byte nel file risulterebbe $N'_B = 2N_B = 4800$:

$$N'_B = t_o f'_c m = 4800$$

Soluzione

1. Il segnale $x_1(t)$ è ad energia finita e la funzione di autocorrelazione va calcolata come

$$R_{x_1}(\tau) = \int x_1(t)x_1(t+\tau)dt$$

oppure come

$$R_{x_1}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X_1(f)|^2\}.$$

Il segnale $x_2(t)$ è periodico e la sua funzione di autocorrelazione va calcolata come

$$\Phi_{x_2}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_2(t)x_2(t+\tau)dt$$

oppure come

$$\Phi_{x_2}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|G_{x_2}(f)|^2\},$$

essendo $G_{x_2}(f)$ lo spettro di potenza di $x_2(t)$.

Per quanto riguarda $x_1(t)$ conviene lavorare nel dominio del tempo:

- se τ è compreso tra 0 e T

$$R_{x_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt$$

in quanto $x(t) = 0$ per $t < 0$ e $x(t+\tau) = 0$ per $t > T-\tau$. Si ha dunque

$$\begin{aligned}
R_{x_1}(\tau) &= \int_0^{T-\tau} A\sin(2\pi t/T)A\sin(2\pi(t+\tau)/T)dt \\
&= \frac{A^2}{2}\int_0^{T-\tau} \cos(2\pi\tau/T) - \cos(2\pi(2t+\tau)/T)dt \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\cos(2\pi\tau/T)(T-\tau) - \frac{\sin(2\pi(2t+\tau)/T)}{4\pi/T}\Big|_0^{T-\tau}\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\cos(2\pi\tau/T)(T-\tau) - \frac{\sin(2\pi(2(T-\tau)+\tau)/T) - \sin(2\pi\tau/T)}{4\pi/T}\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\cos(2\pi\tau/T)(T-\tau) - \frac{\sin(-2\pi\tau/T+4\pi) - \sin(2\pi\tau/T)}{4\pi/T}\right] \\
&= \frac{A^2}{2}\left[\cos(2\pi\tau/T)(T-\tau) + \frac{T}{2\pi}\sin(2\pi\tau/T)\right]
\end{aligned}$$

- se τ è maggiore di T l'integrale è nullo perché $x_1(t)$ è diverso da zero solo per $t \in [0,T]$, mentre $x_1(t+\tau)$ è nullo solo per $t \in [-\tau, T-\tau+$ cioè per $t < 0$.
- per $\tau < 0$ non è necessario calcolare la funzione di autocorrelazione, perché si può sfruttare il fatto che la funzione di autocorrelazione è una funzione pari (essendo $x_1(t)$ reale) e quindi

$$R_{x_1}(\tau) = R_{x_1}(-\tau)$$

In sostanza, per $x_1(t)$ la funzione di autocorrelazione è

$$R_{x_1}(\tau) = \frac{A^2}{2}\left[\cos(2\pi\tau/T)(T-|\tau|) + \frac{T}{2\pi}\sin(2\pi|\tau|/T)\right], \quad \text{per}|\tau| < T$$

$$R_{x_1}(\tau) = 0, \quad \text{per}|\tau| > T$$

Il grafico della funzione di autocorrelazione è riportato nella figura 1.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 253 di 550

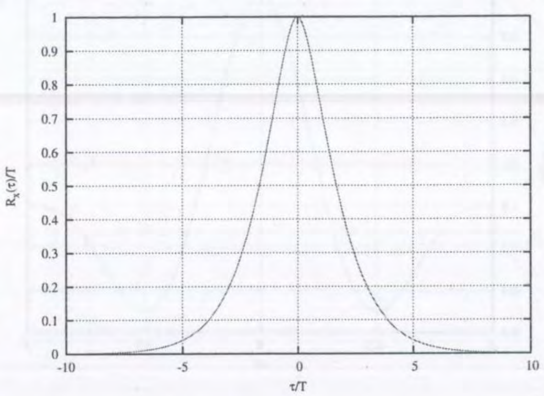


Figura 2: Funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ per $x(t)$, esercizio 2.

Per $\tau > 0$, l'integrale che fornisce $R_x(\tau)$ va spezzato in tre parti per tenere conto delle diverse espressioni della funzione integranda nei tre intervalli $t \in]-\infty, -\tau]$, $t \in]-\tau, 0]$ e $t > 0$:

$$\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \int x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{t/T}e^{(t+\tau)/T}dt + \int_{-\tau}^{0} e^{t/T}e^{-(t+\tau)/T}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t/T}e^{-(t+\tau)/T}dt \\
&= \left[e^{\tau/T}\int_{-\infty}^{-\tau} e^{2t/T}dt\right] + \left[e^{-\tau/T}\int_{-\tau}^{0} dt\right] + \left[e^{-\tau/T}\int_{0}^{\infty} e^{-2t/T}dt\right] \\
&= \left[e^{\tau/T}\left.\frac{e^{2t/T}}{2/T}\right|_{-\infty}^{-\tau}\right] + \left[e^{-\tau/T}\tau\right] + \left[e^{-\tau/T}\left.\frac{e^{-2t/T}}{-2/T}\right|_{0}^{\infty}\right] \\
&= e^{\tau/T}\frac{T}{2}e^{-2\tau/T} + \tau e^{-\tau/T} + e^{-\tau/T}\frac{T}{2} \\
&= Te^{-\tau/T} + \tau e^{-\tau/T} = (T+\tau)e^{-\tau/T}
\end{aligned}$$

Grazie alla parità della funzione di autocorrelazione (essendo $x(t)$ reale), si ha

$$R_x(\tau) = (T + |\tau|)e^{-|\tau|/T}$$

Il grafico di $R_x(\tau)$ è riportato in fig. 2

Si noti che, a questo punto, sappiamo che

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\left[\frac{2T}{1+(2\pi f T)^2}\right]^2\right\} = (T + |\tau|)e^{-|\tau|/T}$$

(possiamo aggiungere questa antitrasformata alle tavole delle trasformate di Fourier notevoli).

3. Il segnale di ingresso al S&H è

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

con $f_0 = 1$ MHz. La frequenza di campionamento è $f_c = 2f_0$ (quindi esattamente due campioni per periodo del segnale sinusoidale). Il k-esimo campione è

$$x(kT_c) = A\sin(2\pi f_0 kT_c + \theta) = A\sin(\pi k + \theta) = (-1)^k A\sin(\theta)$$

e

$$y(t) = \frac{4A\sin(\theta)}{\pi}\sin(2\pi f_0 t)$$

Se $\theta = 0$, $y(t) = 0$ in quanto i campioni $x(kT_c)$ sono tutti nulli; se $\theta = \pi/2$ il segnale di uscita $y(t)$ è uguale al sgenale di ingresso $x(t)$, a parte un fattore di scala (ampiezza $4A/\pi$ invece di A). Il commento finale è che, nel caso di campionamento di un segnale sinusoidale (banda B_x esattamente uguale alla frequenza f_0), è rischioso utilizzare la minima frequenza di campionamento prevista dal teorema del campionamento ($f_c = 2B_x = 2f_0$, cioè esattamente due campioni per periodo del sgenale sinusoidale), perché si rischia di avere il caso con $\theta = 0$; è consigliabile usare una frequenza di campionamento almeno leggermente superiore alla minima.

4. Il k-esimo campione di

$$z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

in $kT_c = k/f_c = 2k/f_0$ è

$$z(kT_c) = x(kT_c)\cos(2\pi f_0 kT_c) = x(kT_c)\cos(4\pi k) = x(kT_c)$$

e dunque il segnale $w(t)$ è

$$\begin{aligned} w(t) &= z(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(kT_c)\delta(t-kT_c) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c)\delta(t-kT_c) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_c) \end{aligned}$$

In sostanza, il campionatore campiona $z(t)$, ma è come se campionasse $x(t)$. La trasformata di Fourier di $w(t)$ contiene dunque tutte le repliche di $X(f)$ centrate in kf_c, senza aliasing. All'uscita del filtro passabasso ricostruttore si ha dunque

$$y(t) = x(t)$$

Commento: nei sistemi di trasmissione, la frequenza f_0 (detta frequenza di portante) è tipicamente molto maggiore di B_x (ordini di grandezza più grande) e dunque campionare a $f_0/2$ significa sottocampionare $z(t)$ e sovracampionare (di ordini di grandezza) $x(t)$. Se fosse $z(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t)$ il sistema prooposto non funzionerebbe, per lo stesso motivo identificato nell'esercizio 3. Nella realtà la frequenza di campionamento è scelta leggermente superiore a $f_0/2$ e questo tipo di sistema viene usato per non dover demodulare il segnale $z(t)$ moltiplicandolo per $\cos(2\pi f_0 t)$ e filtrando il risultato della moltiplicazione con un filtro passabasso (si sostituisce moltiplicatore e filtro con un sovracampionamento).

5. Il segnale $x(t)$ ha banda $B_x = 10$ Hz e viene campionato a frequenza $f_c = 20$ Hz, cioè l'intervallo di campionamento è $T_c = 1/20 = 0.05$ s e si preleva un campione ogni T_c s.

Il numero di campioni N_c acquisiti in un tempo t_o pari a 1 minuto (cioè 60 s) è dunque

$$N_c = \frac{t_o}{T_c} = t_o f_c = 60 \times 20 = 1200$$

Poiché un campione viene tradotto in $m = 2$ byte, il numero di byte N_B nel file è

$$N_B = N_c m = t_o f_c m = N_c \times 2 = 2400.$$

Se la frequenza di campionamento fosse $f_c' = 4B_x = 2f_c$, il numero di byte nel file risulterebbe $N_B' = 2N_B = 4800$:

$$N_B' = t_o f_c' m = 4800$$

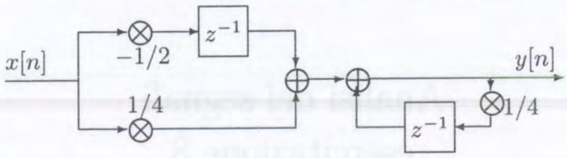


Figura 1: Circuito che consente di realizzare la funzione di trasferimento dell'esercizio 2.

Soluzione

1. Occorre trovare poli e zeri di $H(z)$

$$H(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{8z^2 - 6z + 1} = \frac{2(z - z_1)(z - z_2)}{8(z - p_1)(z - p_2)}$$

Gli zeri z_1 e z_2 sono soluzioni dell'equazione di II grado:

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Si ha pertanto $z_1 = 1/2$ e $z_2 = 2$. I poli sono soluzioni dell'equazione di II grado:

$$z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}$$

Si ha pertanto $p_1 = 1/4$ e $p_2 = 1/2$. La funzione di trasferimento può dunque essere riscritta come segue:

$$H(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{8z^2 - 6z + 1} = \frac{2(z - 1/2)(z - 2)}{8(z - 1/2)(z - 1/4)}$$

Poiché uno zero coincide con un polo ($z_1 = p_2$), la funzione di trasferimento può essere semplificata in

$$H(z) = \frac{2(z - 2)}{8(z - 1/4)}$$

restando dunque solo uno zero in $z_2 = 2$ ed un polo in $p_1 = 1/4$.

(a) Poiché $|p_1| < 1$, il sistema è stabile.

(b) Occorre scrivere in maniera esplicita il legame tra $Y(z)$ e $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z - 2)}{8(z - 1/4)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{4(1 - 1/4z^{-1})}$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right] = \frac{1}{4}(1 - 2z^{-1})X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{4}(1 - 2z^{-1})X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) = \frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z)$$

Un circuito che realizza la funzione di trasferimento $H(z)$ è ad esempio quello indicato nella figura 1 (ne esistono altri).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 259 di 550

$$C = \lim_{z\to 1/2} H^0(z)(z-1/2)^2 = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{4}\frac{(z-2)(z-1)}{z} = \frac{1}{4}\frac{(-3/2)(-1/2)}{1/2} = \frac{3}{8}$$

$$B = \lim_{z\to 1/2} \frac{d}{dz}\left[H^0(z)(z-1/2)^2\right] = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{4}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2)(z-1)}{z}\right] = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{4}\frac{d}{dz}\left[z-3+2/z\right]$$

$$B = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{4}\left[1-\frac{2}{z^2}\right] = -\frac{7}{4}$$

Dopo aver calcolato i coefficienti A, B, C conviene verificare che siano corretti re-inserendoli nello sviluppo in fratti semplici per controllare che il risultato sia uguale ad $H^0(z)$:

$$\begin{aligned} H^0(z) &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1/2} + \frac{C}{(z-1/2)^2} = \frac{2}{z} + \frac{-7/4}{z-1/2} + \frac{3/8}{(z-1/2)^2} \\ &= \frac{2(z-1/2)^2}{z(z-1/2)^2} + \frac{-7/4z(z-1/2)}{z(z-1/2)^2} + \frac{3/8z}{z(z-1/2)^2} \\ &= \frac{1}{z(z-1/2)^2}\left[2z^2 - 2z + 1/2 - 7/4z^2 + 7/8z + 3/8z\right] \\ &= \frac{1}{z(z-1/2)^2}\left[1/4z^2 - 6/8z + 1/2\right] \\ &= \frac{z^2-3z+2}{4z(z-1/2)^2} \end{aligned}$$

Poiché lo sviluppo in fratti semplici corrisponde all'espressione di $H^0(z)$ riportata nella (1), allora i coefficienti A, B, C sono corretti e si può proseguire.
L'espressione di $H(z)$ risulta essere dunque:

$$H(z) = H^0(z)z = 2 + \frac{-7/4z}{z-1/2} + \frac{3/8z}{(z-1/2)^2} = 2 + \frac{-7/4z}{z-1/2} + \frac{3}{8}2\frac{1/2z}{(z-1/2)^2}$$

la cui antitrasformata è ottenibile dalle tavole:

$$h[n] = 2\delta[n] - \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{4}n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Si ricorda che

$$\mathcal{Z}\{p^n u[n]\} = \frac{z}{z-p},$$

$$\mathcal{Z}\{np^n u[n]\} = \frac{zp}{(z-p)^2}.$$

La figura 3 confronta la risposta all'impulso appena calcolata con la risposta all'impulso ottenuta tramite simulazione con Matlab/Octave.

(b) Nel caso in cui l'ingresso sia $x[n] = u[n]$, l'uscita $y[n]$ ha trasformata z

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}H(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{4}\frac{(z-2)(z-1)}{(z-1/2)^2} = \frac{1}{4}\frac{z(z-2)}{(z-1/2)^2}$$

Per ottenere $y[n]$ occorre antitrasformare $Y(z)$. Il metodo è lo stesso usato prima: si sviluppa in fratti semplici $Y^0(z) = Y(z)/z$:

$$Y^0(z) = \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{4}\frac{(z-2)}{(z-1/2)^2} = \frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{(z-1/2)^2}$$

Si ha:

$$B = \lim_{z\to 1/2} Y^0(z)(z-1/2)^2 = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{4}(z-2) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{1}{4}\frac{-3}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$A = \lim_{z\to 1/2} \frac{d}{dz}\left[Y^0(z)(z-1/2)^2\right] = \lim_{z\to 1/2} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{4}(z-2)\right] = \frac{1}{4}$$

3. Il sistema ha relazione ingresso-uscita

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Applicando la trasformata zeta alla precedente uguaglianza si ottiene

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z), \quad Y(z)[1 - z^{-1}] = X(z), \quad Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z-1}X(z)$$

La funzione di trasferimento del sistema è dunque

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-1}$$

ed ha uno zero in $z_1 = 0$ ed un polo in $p_1 = 1$.

(a) Poiché $|p_1| = 1$ (il polo ha modulo esattamente uguale a uno e non strettamente minore di 1), il sistema **non è stabile**.

(b) La risposta all'impulso $h[n]$ è l'antitrasformata di $H(z)$, già presente nelle tavole delle trasformate zeta:

$$h[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

(c) La relazione ingresso-uscita fornita è di tipo ricorsivo (a destra appare nuovamente $y[n]$ anche se ritardato). Si desidera avere un'espressione in cui $y[n]$ compare solo a sinistra dell'uguaglianza, mentre a destra compare sono $x[n]$ e sue versioni ritardate. Il risultato si ottiene scrivendo l'espressione della convoluzione tra ingresso e risposta all'impulso del sistema:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = \sum_k h[k]x[n-k]$$

In particolare, in questo caso si ha $h[n] = u[n]$ e quindi si ha

$$y[n] = \sum_k h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots$$

in sostanza $y[n]$ è la somma del campione attualmente presente all'ingresso del sistema $x[n]$ e di tutti i precedenti campioni d'ingresso, si comporta in sostanza come un integratore numerico.

(d) Se il segnale d'ingresso è $x_1[n] = u[n]$, l'uscita $y_1[n]$ è tale per cui

$$Y_1(z) = X_1(z)H(z) = \frac{z}{z-1}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Applicando lo stesso procedimentoi usato per l'esercizio 2,

$$Y_1^0(z) = \frac{Y_1(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Si nota che $Y_1^0(z)$ è già una trasformata zeta nota, quindi è possibile dire che

$$y_1^0[n] = nu[n]$$

e si ricava $y_1[n]$ sapendo che $Y_1(z) = zY_1^0(z)$:

$$y_1[n] = \delta[n+1] * y_1^0[n] = y_1^0[n+1] = (n+1)u[n+1].$$

Si noti che

$$y_1[n] = 0 \quad \forall n < -1, \quad y_1[-1] = 0 \times 1 = 0, \quad y_1[0] = 1, \quad y_1[1] = 2, \ldots$$

e quindi si può <u>anche</u> scrivere

$$y_1[n] = (n+1)u[n].$$

Si noti che, per l'ingresso $u[n]$ (bounded) l'uscita è $(n+1)u[n]$ divergente (unbounded) e quindi il sistema **non è stabile in senso BIBO** (come già notato dall'analisi dei poli).

Analisi dei segnali
esercitazione 8 bis

1. Il segnale

$$x(t) = t\, e^{-t/t_0} u(t)$$

viene posto all'ingresso di un campionatore di tipo sample & hold con frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c = 10/t_0$. Il segnale numerico $x[n] = x(nT_c)$ viene posto all'ingresso di un sistema FIR con funzione di trasferimento

$$H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}$$

fornendo in uscita i campioni $y[n]$.

(a) Quale deve essere il valore di α affinché $y[n]$ abbia la minima durata possibile? Suggerimento: si calcolino le trasformate zeta di $x[n]$ e $y[n]$.

(b) Per il valore di α trovato al punto precedente, si calcoli l'uscita $w(t)$ del filtro passabasso ricostruttore (ideale per il sistema sample & hold) al cui ingresso sia posto

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]s(t - nT_c)$$

essendo

$$s(t) = p_{T_c}(t - T_c/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_c] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2. Si consideri il sistema con due ingressi ed una uscita descritto in figura 1 a sinistra. Si calcolino le funzioni di trasferimento $G_1(z)$ e $G_2(z)$ affinché il sistema di figura 1 a sinistra sia equivalente al sistema di figura 1 a destra. Si considerino

$$H_1(z) = \frac{z}{z-\alpha}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z-\beta}, \quad \gamma \neq 1$$

Quanti sono i poli per $G_1(z)$? quanti per $G_2(z)$? Posti $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.8$, qual è l'insieme dei possibili valori di γ che garantiscono la stabilità del sistema?

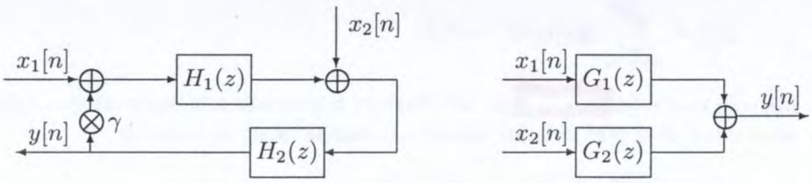


Figura 1: Sistemi per l'esercizio 2.

Poiché la funzione di trasferimento del filtro è relativamente semplice, mentre la risposta all'impulso $h_R(t)$ è di difficile derivazione, conviene trovare $w(t)$ come antitrasformata di $W(f) = Y(f)H_R(f)$. La trasformata di Fourier di $y(t)$ è

$$Y(f) = T_c a S(f) e^{-j2\pi f T_c}$$

e quindi

$$W(f) = T_c a e^{-j2\pi f T_c} p_{f_c}(f)$$

La antitrasformata di $p_{f_c}(f)$ è

$$\mathcal{F}^{-1}\{p_{f_c}(f)\} = f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t}$$

e quindi

$$w(t) = T_c a f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} * \delta(t - T_c) = a \frac{\sin(\pi f_c (t - T_c))}{\pi f_c (t - T_c)}$$

2. Conviene introdurre il sgenale ausiliario $w[n]$ come definito nella figura 2. Si ha

$$Y(z) = H_2(z)[X_2(z) + H_1(z)W(z)]$$

$$W(z) = X_1(z) + \gamma Y(z)$$

che consente di scrivere

$$Y(z) = H_2(z)[X_2(z) + H_1(z)(X_1(z) + \gamma Y(z))]$$

$$Y(z)[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)] = H_1(z)H_2(z)X_1(z) + H_2(z)X_2(z)$$

$$Y(z) = \frac{H_1(z)H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]} X_1(z) + \frac{H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]} X_2(z) = \boxed{G_1(z)X_1(z) + G_2(z)X_2(z)}$$

Si ottiene dunque

$$G_1(z) = \frac{H_1(z)H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]}, \quad G_2(z) = \frac{H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]}$$

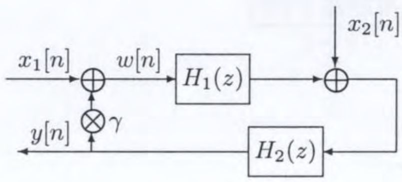


Figura 2: Sistema per l'esercizio 2, con la definizione del segnale ausiliario $w[n]$.

Se

$$H_1(z) = \frac{z}{z - \alpha}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z - \beta}, \quad \gamma \neq 1$$

allora

$$G_1(z) = \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta) - \gamma z^2} = \frac{z^2}{(1 - \gamma)z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta}$$

Per $\gamma > 1$ si ha

$$p_1 = \frac{0.65 + \sqrt{0.0225 + 0.4\gamma}}{1 - \gamma}$$

con il denominatore negativo ed il numeratore positivo; pertanto p_1 è negativo e può essere minore di -1. Perché il sistema sia stabile deve essere

$$p_1 > -1, \quad \Longrightarrow \quad 0.65 + \sqrt{0.0225 + 0.4\gamma} < \gamma - 1$$

$$\gamma^2 - 3.7\gamma + 2.7 > 0, \quad \Longrightarrow \gamma > 2.7$$

(l'altra soluzione $\gamma < 1$ non è accettabile perché si è partiti dall'ipotesi $\gamma > 1$). .

In sostanza il sistema è stabile anche per $\gamma > 2.7$, mentre è instabile per $\gamma \in [0.1, 2.7]$. Si può verificare (per controllare la correttezza dei calcoli) che nella (1) $d(z) = 0$ per $z = 1$ quando $\gamma = 0.1$ e $d(z) = 0$ per $z = -1$ quando $\gamma = 2.7$.

Soluzione

1. I dati a disposizione sono i seguenti:

$$P(P|m) = 0.9, \quad P(P|s) = 0.05, \quad P(m) = 0.1$$

e si ricavano le seguenti ulteriori probabilità, che servono nella soluzione dell'esercizio:

$$P(N|m) = 1 - P(P|m) = 0.1, \text{ (caso di falso negativo)}$$

$$P(S|s) = 1 - P(P|s) = 0.95, \text{ (caso di vero negativo)}$$

$$P(s) = 1 - P(m) = 0.9, \text{ (probabilità che una persona sia effettivamente sana)}$$

Le precedenti probabilità derivano dalle seguenti considerazioni:

- se una persona è malata, il test risulta o positivo o negativo (non esistono altre possibilità), i due eventi $\{N|m\}$ e $\{P|m\}$ sono dunque complementari (mutuamente esclusivi ed esaustivi dello spazio campione) e quindi la probabilità del primo evento è pari a 1 (probabilità dell'evento certo) meno la probabilità del secondo evento: $P(N|m) = 1 - P(P|m)$. Si noti che il condizionamento sul fatto che il paziente è malato limita lo spazio campione alle sole persone malate, e, all'interno di questo spazio campione, si identificano i due sottoinsiemi complementari legati ai due possibili risultati del test.
- per il caso di paziente sano vale lo stesso ragionamento del punto precedente (questa volta lo spazio campione è costiyuito dai sani, che vengono divisi nei due insiemi complementari legati ai due possibili risultati del test)
- data una persona scelta a caso (lo spazio campione è l'insieme di tutte le persone), questa o è malata o è sana (ancora una volta due sottoinsiemi complementari), e quindi $P(s) = 1 - P(m)$.

(a) La probabilità che il test risulti positivo per una persona scelta a caso può essere calcolato usando il teorema della probabilità totale, dividendo lo spazio campione (le persone) nei due sottoinsiemi mutuamente esclusivi ed esaustivi: persone effettivamente malate e persone effettivamente sane. Si ha dunque

$$P(P) = P(P \cap m) + P(P \cap s) = P(P|m)P(m) + P(P|s)P(s) = 0.9 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.135$$

La seconda uguaglianza si ottiene applicando la regola di Bayes. La probabilità che il test effettuato su una persona scelta a caso sia negativo, sarà poi

$$P(N) = 1 - P(P) = 0.865$$

perché il test o è positivo o è negativo.

(b) Viene chiesto di calcolare $P(m|P)$:

$$P(m|P) = \frac{P(m \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|m)P(m)}{P(P)} = \frac{P(P|m)P(m)}{P(P|m)P(m) + P(P|s)P(s)} = \frac{0.9 \times 0.1}{0.135} = \frac{2}{3}$$

Si noti che la probabilità che la persona con test positivo sia effettivamente malata è solo 0.66 (in media solo 66 persone su 100 tra quelle con test positivo sono effettivamente malate). Si provi a ricalcolare questa probabilità considerando una malattia più rara, per la quale $P(m) = 10^{-4}$, tenendo gli stessi valori per $P(P|m)$ e $P(P|s)$: si avrebbe $P(m|P) = (0.9 \times 10^{-4})/(0.9 \times 10^{-4} + 0.05 \times 0.9999) = 1.8 \times 10^{-3}$ (il commento è che il test è totalmente inutile, visto che non riesce ad identificare le persone malate: solo 2 persone circa su 1000 sono effettivamente malate anche se il test è positivo). L'unico modo per avere $P(m|P)$ elevato è avere $P(P|m)$ e $P(N|s)$ tendenti a 1 (alta specificità e alta sensibilità). Nel caso $P(m) = 0.1$, con $P(P|m) = 0.99$ e $P(P|s) = 0.01$, si ottiene $P(m|P) \simeq 0.92$ (questa volta il test è più affidabile). In generale, meno probabile è la malattia e più devono essere elevati i valori di $P(P|m)$ e $P(N|s)$.

(c) Viene chiesto di calcolare $P(s|P)$:

$$P(s|P) = \frac{P(s \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|s)P(s)}{P(P)} = \frac{0.05 \times 0.9}{0.135} = \frac{1}{3}$$

Si poteva anche calcolare direttamente

$$P(s|P) = 1 - P(m|P) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(d) Viene chiesto di calcolare $P(s|N)$:

$$P(s|N) = \frac{P(s \cap N)}{P(N)} = \frac{P(N|s)P(s)}{P(N)} = \frac{0.95 \times 0.9}{0.865} = 0.9884$$

(e) Viene chiesto di calcolare $P(m|N)$:

$$P(m|N) = 1 - P(s|N) = 0.0116$$

(f) Si indichi con F il fallimento del test; occorre calcolare $P(F)$ usando il test su una persona scelta a caso. Il test può fallire in due modi diversi: o perché risulta positivo su una persona sana o perché risulta negativo su una persona malata. Conviene dunque calcolare la probabilità richiesta usando il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap m) + P(F \cap s) = P(F|m)P(m) + P(F|s)P(s) \\ &= P(N|m)P(m) + P(P|s)P(s) = 0.1 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.055 \end{aligned}$$

2. Dai dati si evincono le seguenti probabilità:

$$P(A) = 0.55, \quad P(D|A) = 0.02$$
$$P(B) = 0.30, \quad P(D|B) = 0.03$$
$$P(C) = 0.15, \quad P(D|C) = 0.06$$

dove A, B e C indicano le linee di produzione e D indica il fatto che il blister è difettoso. Occorre calcolare $P(D)$ e $P(C|D)$. Per calcolare $P(D)$ conviene usare ancora il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.02 \times 0.55 + 0.03 \times 0.3 + 0.06 \times 0.15 = 0.029. \end{aligned}$$

Rispetto all'esrcizio precedente, in questo caso gli eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi sono 3 (le tre linee di produzione).

La probabilità condizionata $P(C|D)$ può essere calcolata con la regola di Bayes:

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{0.06 \times 0.15}{0.029} \simeq 0.31$$

3. Viene chiesto di calcolare $P(M|G)$, $P(P|G)$, $P(M|G^c)$, $P(P|G^c)$, dove G^c significa paziente non guarito (il complementare di G); vengono fornite le probabilità $P(G|M)$, $P(G|P)$ e viene detto che metà dei pazienti sono stati trattati con il placebo e metà con la medicina: pertanto nello spazio campione delle persone trattate, abbiamo $P(M) = 0.5$ e $P(P) = 0.5$. Si ha dunque:

$$P(M|G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G|M)P(M)}{P(G|M)P(M) + P(G|P)P(P)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.5 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5} = \frac{0.025}{0.35} \simeq 0.714$$

$$P(P|G) = 1 - P(M|G) \simeq 0.286$$

$$P(M|G^c) = \frac{P(M \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{P(G^c|M)P(M)}{1 - P(G)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.65} \simeq 0.384$$

$$P(P|G^c) = 1 - P(M|G^c) \simeq 0.616$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 273 di 550

Soluzione

1. Non occorre conoscere la densità di probabilità (d.d.p.) di ξ_1 e ξ_2 (né la d.d.p. congiunta).

$$\mu = E\{\zeta\} = E\{\xi_1 - \xi_2\} = E\{\xi_1\} - E\{\xi_2\} = \mu_1 - \mu_2$$

(si noti che la media è un operatore lineare e non importa se ξ_1 e ξ_2 sono correlate).

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta^2 &= E\{(\zeta - \mu_\zeta)^2\} = E\{[(\xi_1 - \mu_1) \overset{2}{-} (\xi_2 - \mu_2)]^2\} \\ &= E\{[\xi_1 - \mu_1]^2\} + E\{[\xi_2 - \mu_2]^2\} - 2E\{(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)\} \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

SCORRELATE / STAT. IND.

Nota 1: se fosse stato $\rho_{1,2} = 0$, la media sarebbe stata la differenza delle medie: $\mu = \mu_1 - \mu_2$, ma la varianza sarebbe stata la **somma** delle varianze, anche se ζ è definito come **differenza** tra ξ_1 e ξ_2.

Nota 2: se fosse stata nota la d.d.p. congiunta $f_{1,2}(x, y)$ di ξ_1 e ξ_2, la media di ζ sarebbe stata calcolabile come

$$E\{\zeta\} = E\{\xi_1 - \xi_2\} = E\{g(\xi_1, \xi_2)\},$$

cioè media di una funzione g di ξ_1 e ξ_2, calcolabile tramite il teorema fondamentale della media per coppie di variabili casuali:

$$E\{\zeta\} = \int\int g(x, y) f_{1,2}(x, y)\, dx\, dy = \int\int (x - y) f_{1,2}(x, y)\, dx\, dy;$$

Cominciamo a considerare l'integrale:

$$\int_x \int_y x f_{1,2}(x, y)\, dx\, dy = \int_x x \left(\int_y f_{1,2}(x, y)\, dy\right) dx. \tag{1}$$

L'integrale rispetto a y è calcolabile grazie alle condizioni marginali:

$$F_{1,2}(x, y) = P(\xi_1 \le x, \xi_2 \le y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f_{1,2}(u, v)\, du\, dv;$$

$$F_{1,2}(x, \infty) = P(\xi_1 \le x, \xi_2 \le \infty) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v)\, du\, dv;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{1,2}(x, \infty) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x) = f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v)\, du\, dv = \int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(x, v)\, dv$$

In sostanza:

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v)\, dv = f_1(u), \qquad \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v)\, du = f_2(v)$$

(le due d.d.p. $f_1(u)$ e $f_2(v)$ calcolate in questa maniera vengono dette d.d.p. marginali).
Tornando all'integrale 1, si ottiene

$$\int_y \int_x x f_{1,2}(x, y)\, dx\, dy = \int_x x \left(\int_y f_{1,2}(x, y)\, dy\right) dx = \int_x x f_1(x) dx = \mu_1$$

e

$$\int_y \int_x y f_{1,2}(x, y)\, dx\, dy = \int_y y \left(\int_x f_{1,2}(x, y)\, dx\right) dy = \int_y y f_2(y) dy = \mu_2$$

e la media di ζ è $\mu = \mu_1 - \mu_2$, come già ottenuto.

3. (a) Il campione $x(0) = A\cos(\theta)$ è una variabile aleatoria (v.a.), ottenuta da una trasformazione nonlineare di θ; il valore di A non è noto, ma è costante (si può pensare che valga 2 V, per esempio; A è un parametro, non una v.a.). Per calcolare la media e la varianza di $x(0)$ non è necessario conoscere la densità di probabilità (d.d.p.) della nuova v.a. $x(0)$, grazie al teorema fondamentale della media:

$$E\{g(\xi)\} = \int g(u) f_\xi(u) du.$$

Nel caso dell'esercizio:

$$\mu_0 = E\{x(0)\} = E\{A\cos(\theta)\} = \int A\cos(u) f_\theta(u) du = \int A\cos(u) \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(u) du$$

Nella formula precedente si è inserita la d.d.p. di θ:

$$f_\theta(u) = \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi < u < \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La media è dunque calcolabile come

$$\mu_0 = E\{A\cos(\theta)\} = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du = \frac{A}{2\pi} \sin(u)|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

La varianza è

$$\sigma_0^2 = E\{x^2(0) - \mu_0^2\} = E\{x^2(0)\} - \mu_0^2.$$

Poiché $\mu_0 = 0$, la varianza coincide con il valor quadratico medio $E\{x^2(0)\}$, calcolabile ancora con il teorema fondamentale della media:

$$\sigma_0^2 = E\{x^2(0)\} = E\{A^2\cos^2(\theta)\} = \int A^2 \cos^2(u) f_\theta(u) du = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(u) du$$

$$\sigma_0^2 = \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos(2u)] du = \frac{A^2}{4\pi} \left[2\pi + \left. \frac{\sin(2u)}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{A^2}{4\pi} 2\pi = \frac{A^2}{2}$$

(b) Poichè $x(T/2) = -x(0)$, la media è

$$\mu_1 = E\{x(T/2)\} = E\{-x(0)\} = -E\{x(0)\} = -\mu_0 = 0$$

(si è usata la linearità dell'operatore di media). Per quanto riguarda la varianza, si ha:

$$\sigma_1^2 = E\{x^2(T/2)\} = E\{[-x(0)]^2\} = E\{x^2(0)\} = \sigma_0^2$$

(c) Per calcolare media e varianza di $x(T/4)$ occorre rifare i calcoli perché adesso la trasformazione coinvolge una funzione seno al posto di una funzione coseno:

$$\mu_2 = E\{-A\sin(\theta)\} = \frac{-A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(u) du = \frac{A}{2\pi} \cos(u)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{A}{2\pi}[-1+1] = 0$$

$$\sigma_2^2 = E\{[-A\sin(\theta)]^2\} = A^2 E\{\sin^2(\theta)\} = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(u) du$$

$$\sigma_2^2 = \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos(2u)] du = \frac{A^2}{4\pi} 2\pi = \frac{A^2}{2}$$

Commento: media e varianza sono uguali per $x(0), x(T/2), x(T/4)$.

$$E\{\xi\eta\} = E\{\alpha A \beta A\} = \alpha\beta\sigma^2$$

Il coefficiente di correlazione tra ξ e η è (con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, altrimenti non è definibile):

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{E\{(\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta)\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E\{\xi\eta\}}{\sqrt{\sigma_\xi^2 \sigma_\eta^2}} = \frac{\alpha\beta\sigma^2}{\sqrt{\alpha^2\sigma^2\beta^2\sigma^2}} = \text{segno}(\alpha\beta)$$

In sostanza il coefficiente di correlazione vale 1 se $\alpha\beta > 0$, altrimenti vale -1, come era da aspettarsi visto che le due variabili aleatorie sono proporzionali tra loro ($\eta = \xi(\beta/\alpha)$). Poiché ξ ed η sono correlate NON sono statisticamente indipendenti (come è ovvio, visto che sono proporzionali tra loro).

La distribuzione di probabilità congiunta è

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y) = P(\xi \leq x \cap \eta \leq y) = P(\alpha A \leq x \cap \beta A \leq y)$$

Nel testo è specificato che la d.d.p. congiunta va calcolata nel caso $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, quindi si ha

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P\left(A \leq \frac{x}{\alpha} \cap A \leq \frac{y}{\beta}\right) = \begin{cases} P\left(A \leq \frac{x}{\alpha}\right) = F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) & \text{se} \quad \frac{x}{\alpha} < \frac{y}{\beta} \\ P\left(A \leq \frac{y}{\beta}\right) = F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) & \text{se} \quad \frac{x}{\alpha} > \frac{y}{\beta} \end{cases}$$

Si può scrivere, con una formula unica,

$$F_{\xi\eta}(x,y) = F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] + F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$

dove $u(z)$ è la solita funzione gradino che vale 1 se $z > 0$. La d.d.p. congiunta si ottiene come derivata doppia rispetto a x e y:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{\alpha} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] + \left[F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) - F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\frac{1}{\alpha}\delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$

Si noti che, con le solite proprietà della delta di Dirac, si ha

$$g(x,y)\delta(x-y) = g(y,y)\delta(x-y) = g(x,x)\delta(x-y)$$

e quindi

$$\left[F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) - F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\frac{1}{\alpha}\delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = \left[F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) - F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\frac{1}{\alpha}\delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = 0$$

In sostanza la derivata parziale rispetto a x della distribuzione di probabilità cumulativa si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{\alpha} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right]$$

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x,y)\right] = \frac{1}{\alpha} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] = \frac{1}{\alpha\beta} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{\alpha\beta\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{x^2}{\alpha^2}\right]\delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$

La d.d.p. congiunta è sostanzialmente una d.d.p. gaussiana con varianza $\alpha^2\sigma^2$ moltiplicata per una delta di Dirac posizionata sulla retta $y = \beta x/\alpha$.

Nota sulla d.d.p. congiunta di due v.a. gaussiane statisticamente dipendenti

Essendo ξ ed η due v.a. gaussiane a valor medio nullo, la d.d.p. congiunta di η e ξ è

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbb{M})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x,y]\mathbb{M}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\}$$

dove

$$\mathbb{M} = E\left\{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}[\xi,\eta]\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} \xi^2 & \xi\eta \\ \xi\eta & \eta^2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & E\{\xi\eta\} \\ E\{\xi\eta\} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & \sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} \\ \sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}$$

Se $\rho_{\xi\eta}^2 \neq 1$ (nell'esercizio 5 era $\rho_{\xi\eta}^2 = 1$ e quindi non si poteva applicare quanto segue), si ha

$$\det(\mathbb{M}) = \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 - \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2\rho_{\xi\eta}^2 = (1-\rho_{\xi\eta}^2)\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2$$

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{M})}\begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} \\ -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} f_{\xi,\eta}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbb{M})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x,y]\mathbb{M}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2[(1-\rho_{\xi\eta}^2)\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2]}[x,y]\begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} \\ -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}} \exp\left\{-\frac{\sigma_\eta^2x^2 + \sigma_\xi^2y^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta}xy}{2[(1-\rho_{\xi\eta}^2)\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2]}\right\} \end{aligned}$$

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{y^2}{\sigma_\eta^2} - \frac{2\rho_{\xi\eta}xy}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\right]\right\}$$

Soluzione

1. (a) Per quanto riguarda $z(t) = x(t) + y(t)$, si ha

$$E\{z(t)\} = E\{x(t) + y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{+y(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{(x(t) + y(t))(x(t+\tau) + y(t+\tau))\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} + E\{y(t)y(t+\tau)\} + E\{x(t)y(t+\tau)\} + E\{y(t)x(t+\tau)\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\} + E\{y(t)\}E\{x(t+\tau)\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \end{aligned}$$

Si è scritto $E\{x(t)y(t+\tau)\} = E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\}$ perché, per ipotesi, i due processi sono statisticamente indipendenti, inoltre si è usato il fatto che entrambi hanno media nulla. Si noti che

$$R_z(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = E\{x^2(t)\} + E\{y^2(t)\} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

e la varianza di $z(t)$ risulta pari alla somma delle varianze.
Lo spettro di potenza di $z(t)$ è

$$S_z(f) = \mathcal{F}\{R_z(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau) + R_y(\tau)\} = S_x(f) + S_y(f).$$

In sostanza lo spettro del v.q.m. della somma (o differenza) di due processi statisticamente indipendenti è pari alla somma degli spettri di potenza.

(b) Per quanto riguarda $w(t) = x(t)y(t)$, si ha

$$E\{z(t)\} = E\{x(t)y(t)\} = E\{x(t)\}E\{y(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{x(t)y(t)x(t+\tau)y(t+\tau)\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\}E\{y(t)y(t+\tau)\} = R_x(\tau)R_y(\tau) \end{aligned}$$

e la funzione di autocorrelazione di $z(t)$ è pari al prodotto delle funzioni di autocorrelazione. Si noti che $z(t)$ è ancora WSS (la media è costante e la funz. autocorr. dipende solo da τ).
Lo spettro del v.q.m. di $z(t)$ è

$$S_z(f) = \mathcal{F}\{R_z(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)R_y(\tau)\} = S_x(f) * S_y(f),$$

ed è pari alla convoluzione dei due spettri. Si noti che, se $x(t)$ ha banda B_x e $y(t)$ ha banda B_y, allora $z(t)$ ha banda $B_x + B_y$.

2. La funzione di autocorrelaizone di y(t) è

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{(x(t) + A)(x(t+\tau) + A)\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} + AE\{x(t)\} + AE\{x(t+\tau)\} + A^2 \\ &= R_x(\tau) + A^2 \end{aligned}$$

Il valor medio di $y(t)$ è

$$E\{y(t)\} = E\{x(t) + A\} = A.$$

4. Il processo casuale d'uscita $z(t)$ ha media

$$\mu_z = \mu_n H(0)$$

dove μ_n è la media del processo all'ingresso del sistema. Poiché viene detto che l'ingresso è un rumore bianco, la sua media μ_n è nulla e quiandi $\mu_z = 0$, indipendentemente dal valore di $H(0)$ (funzione di trasferimento valutata in $f = 0$). La varianza di $z(t)$ coincide dunque con il suo valor quadratico medio e

$$E\{z^2(t)\} = R_z(0) = \int S_z(f)df$$

dove $S_z(f)$ è lo spettro del valor quadratico medio o spettro di potenza di $z(t)$. Lo spettro del v.q.m. del processo d'uscita $z(t)$ è ottenibile dallo spettro del v.q.m. del processo di ingresso tramite la formula

$$S_z(f) = S_n(f)|H(f)|^2$$

che, in questo caso, si riduce a

$$S_z(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

Occorre dunque calcolare $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$; dalle tavole, si ha direttamente

$$H(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

e quindi

$$S_z(f) = \frac{N_0}{2}\left|\frac{T}{1 + j2\pi fT}\right|^2 = \frac{N_0}{2}\frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2}$$

A questo punto, si può calcolare la varianza di $z(t)$ come

$$\sigma_z^2 = \int S_z(f)df = \int \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int |H(f)|^2 df$$

Occorre dunque calcolare l'integrale di $|H(f)|^2$, cosa che è forse più semplice da fare nel dominio del tempo, utilizzando l'uguaglianza di Parseval:

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2}\int h^2(t)dt = \frac{N_0}{2}\int_0^\infty e^{-2t/T}dt = \frac{N_0}{2}\frac{T}{2} = \frac{N_0 T}{4}$$

5. I campioni $w(kT)$ sono statisticamente indipendenti tra loro se sono scorrelati, cioè se

$$E\{w(kT)w(nT)\} = 0, \quad \forall k \neq n$$

NUMERATORE DELLA DEFINIZIONE DI ρ

(si noti che $w(kT)$ ha sicuramente valor medio nullo, essendo campione di un processo ottenuto dal filtraggio di un rumore bianco, che ha valor medio nullo). La condizione

$$E\{w(\underbrace{kT}_{t_1})w(\underbrace{nT}_{t_2})\} = 0, \quad \forall k \neq n$$

$\tau = t_2 - t_1 = nT - kT = T(n-k)$ o viceversa

coincide con la condizione

$$R_w((k-n)T) = 0$$

6. Lo spettro di potenza (o valor quadratico medio) di $y(t)$ è

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

dove $S_x(f)$ è lo spettro di potenza del processo di ingresso $x(t)$ e $H(f) = j2\pi f$ è la funzione di trasferimento del derivatore. Possiamo immaginare che il segnale $R_x(t)$ entri in un sistema che ha funzione di trasferimento $|H(f)|^2 = (j2\pi f)(-j2\pi f)$, da cui esce il segnale $R_y(t)$. Il sistema è costituito da un primo derivatore, con funzione di trasferimento $j2\pi f$, e, in cascata, da un secondo blocco che deriva l'ingresso e ne cambia il segno (funzione di trasferimento $-j2\pi f$). Allora, all'uscita del primo blocco troviamo la derivata di $R_x(t)$ e all'uscita del secondo blocco troviamo la derivata seconda di $R_x(t)$ cambiata di segno:

$$R_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_x(\tau)$$

Si noti che $R_x(\tau)$ ha un massimo in $\tau = 0$ e quindi la derivata seconda di $R_x(\tau)$ in zero è negativa, ma, con il cambio di segno, risulta $R_y(0) > 0$, come deve essere, visto che $R_y(0) = E\{y^2(t)\}$.

7. Per stabilire la d.d.p. del I ordine, è necessario conoscere media e varianza di $y(t)$ (i due parametri della d.d.p. gaussiana):

$$\mu_y = \mu_n H(0) = 0$$

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0 T}{4}$$

(soluzione esercizio 4). Poiché media e varianza non dipendono dal tempo, neanche la d.d.p. del I ordine dipende dal tempo; pertanto

$$f_y(u;t) = f_y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u^2/(2\sigma^2)}.$$

Per la d.d.p. del II ordine, occorre conoscere anche il coefficiente di correlazione tra $y(t_1)$ e $y(t_2)$. Cominciamo dal calcolare

$$E\{y(t_1)y(t_2)\} = R_y(t_1 - t_2)$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= R_n(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau) \\ &= \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{|H(f)|^2\right\} = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{T^2}{1 + (2\pi f T)^2}\right\} \\ &= \frac{N_0 T}{4} e^{-|\tau|/T} \end{aligned}$$

Pertanto

$$E\{y(t_1)y(t_2)\} = R_y(t_1 - t_2) = \frac{N_0 T}{4} e^{-|(t_1 - t_2)|/T}$$

Il coefficiente di correlazione ρ è

$$\rho = \frac{E\{y(t_1)y(t_2)\}}{\sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)} = \frac{E\{y(t_1)y(t_2)\}}{\sigma_y^2} = e^{-|(t_1 - t_2)|/T}$$

(i campioni $y(t_1$ e $y(t_2)$ sono tanto più correlati quanto è più piccolo l'intervallo $t_1 - t_2$). La d.d.p. congiunta è

$$f_y(u_1, u_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}$$

esclusivi e esaustivi) e quindi

$$\begin{aligned}
P(N_f) &= P(N_f \cap NN_g) + P(N_f \cap AA_g) + P(N_f \cap NA_g) \\
&= P(N_f|NN_g)P(NN_g) + P(N_f|AA_g)P(AA_g) + P(N_f|NA_g)P(NA_g) \\
&= 1 \times P(NN_g) + 0 \times P(AA_g) + 1 \times P(NA_g) \\
&= P(NN_g) + P(NA_g) = 9/16 + 6/16 = 15/16
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che il fenotipo è sicuramente N_f (cioè ha probabilità 1 di verificarsi) se il genotipo è NN_g, è sicuramente N_f se il genotipo è NA_g, mentre non può assolutamente essere N_f (cioè ha probabilità 0 di verificarsi) se il genotipo è AA_g.

Questa probabilità poteva anche essere calcolata più velocemente dicendo che un individuo ha fenotipo N_f se ha genotipo NN_g oppure NA_g, cioè:

$$P(N_f) = P(NN_g \cup NA_g) = P(NN_g) + P(NA_g) = 15/16.$$

Si è usato il terzo assioma delle probabilità: la probabilità dell'unione di due eventi è pari alla somma delle due probabilità se i due eventi sono mutuamente esclusivi, come in questo caso (l'individuo è NN_g oppure NA_g, non può essere contemporaneamente NN_g e NA_g).

Si poteva ancora calcolare la probabilità $P(N_f)$ andando prima a calcolare la probabilità $P(A_f)$, più facile da calcolare perché il fenotipo è A_f se e solo se il genotipo è AA_g (i due eventi A_f e AA_g sono equivalenti, si verificano negli stessi individui all'interno della popolazione):

$$P(A_f) = P(AA_g) = 1/16.$$

Poiché il fenotipo è A_f oppure N_f (eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi), si ha

$$P(N_f) = 1 - P(A_f) = 15/16$$

- La probabilità condizionata che l'uomo abbia genotipo NN_g, sapendo che è di fenotipo N_f:

$$P(NN_g|N_f) = \frac{P(NN_g \cap N_f)}{P(N_f)} = \frac{P(N_f|NN_g)P(NN_g)}{P(N_f)} = \frac{P(NN_g)}{P(N_f)} = \frac{9/16}{15/16} = 9/15 = 3/5$$

(infatti $P(N_f|NN_g) = 1$: se il genotipo è NN_g, sicuramente il fenotipo è N_f).

La probabilità condizionata che l'uomo abbia genotipo NA_g, sapendo che è di fenotipo N_f, è:

$$P(NA_g|N_f) = \frac{P(NA_g \cap N_f)}{P(N_f)} = \frac{P(N_f|NA_g)P(NA_g)}{P(N_f)} = \frac{P(NA_g)}{P(N_f)} = \frac{6/16}{15/16} = 6/15 = 2/5$$

Quest'ultima probabilità poteva anche essere calcolata osservando che, posto che il fenotipo è N_f, allora l'uomo ha genotipo NN_g oppure NA_g (eventi mutuamente esclusivi e esaustivi per lo spazio campione costituito dagli individui con fenotipo N_f):

$$P(NA_g|N_f) = 1 - P(NN_g|N_f) = 1 - 3/5 = 2/5$$

A questo punto si può calcolare la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele N, utilizzando ancora una volta il teorema della probabilità totale:

$$P(N|N_f) = P(N \cap NA_g|N_f) + P(N \cap NN_g|N_f)$$

(il condizionamento va mantenuto in quanto sappiamo che l'uomo ha fenotipo N_f e ciò influenza il suo genotipo). Usando la regola di Bayes, abbiamo poi

$$P(N|N_f) = P(N|N_f, NA_g)P(NA_g|N_f) + P(N|N_f, NN_g)P(NN_g|N_f)$$

La notazione può apparire difficile, ma è corretta: $P(N|N_f, NA_g)$ è la probabilità che il figlio riceva dal padre l'allele N sapendo che il padre ha fenotipo N_f e genotipo NA_g (le due condizioni sono

genotipo	fenotipo
AA	A
BB	B
00	0
$B0$	B
$A0$	A
AB	AB

Tabella 1: Legame tra genotipo e fenotipo per il sangue.

2. Per i tipi di sangue $A, B, 0$, la frequenza dell'allele A è 0.3, dell'allele B è 0.1, e dell'allele 0 è 0.6. Qual è la probabilità che una persona si di genotipo AA, AB, BB, $A0$, $B0$, 00?

Soluzione

In questo caso è facile calcolare le probabilità $P(AA_g), P(BB_g), P(00_g)$ perché non c'è differenza tra sequenza ordinata e non ordinata, cioè, usando la notazione dell'esercizio precedente $P(AA_{go}) = P(AA_g)$:

$$P(AA_g) = P(A)P(A) = 0.09$$

$$P(BB_g) = P(B)P(B) = 0.01$$

$$P(00_g) = P(0)P(0) = 0.36$$

Per gli altri casi, invece, c'è differenza tra sequenza ordinata e non ordinata, e ci viene chiesta la probabilità della sequenza non ordinata:

$$P(AB_g) = P(AB_{go} \cup BA_{go}) = P(AB_{go}) + P(BA_{go}) = 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.3 = 0.06$$

$$P(A0_g) = P(A0_{go} \cup 0A_{go}) = P(A0_{go}) + P(0A_{go}) = 0.3 \times 0.6 + 0.6 \times 0.3 = 0.36$$

$$P(B0_g) = P(B0_{go} \cup 0B_{go}) = P(B0_{go}) + P(0B_{go}) = 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.1 = 0.12$$

Si noti che la somma di tutte le probabilità appena calcolate è 1, come deve essere, visto che il genotipo è necessariamente uno (e solo uno) tra $AA_g, BB_g, 00_g, AB_g, A0_g, B0_g$. Rispetto all'esercizio precedente, il problema è un po' più complicato perché il numero dei casi possibili è 6 invece di 3.

3. Si usino le frequenze degli alleli $A, B, 0$ indicate nel problema 2. Una persona con sangue di tipo AB (genotipo) ed una persona con fenotipo A e genotipo sconosciuto hanno un figlio.
   (a) Qual è la probabilità che il figlio abbia genotipo $AA, AB, BB, A0, B0, 00$?
   (b) Si scopre che il figlio ha fenotipo A. Qual è la probabilità che sia di genotipo $AA, A0$?
   (c) Se il figlio è $A0$, qual è la probabilità che il genitore con sangue di tipo A abbia il genotipo AA, $A0$?

   Il fenotipo dipende dal genotipo come indicato nella tabella 1: gli alleli A e B sono codominanti (si esprimono sempre: dominano sull'allele 0 e co-dominano tra loro), mentre l'allele 0 è recessivo.

   Soluzione

   Occorre calcolare preliminarmente le seguenti probabilità:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 291 di 550

L'evento ${}_fB0_g$ può verificarsi sotto la condizione $\{{}_mAB_g,\, {}_pA0_g\}$ solo se la madre passa l'allele B ed il padre l'allelle 0, cosa che si verifica con probabilità $1/4$.

$$\begin{aligned}
P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) &= P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pAA_g)P({}_pAA_g|{}_pA_f) + P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA0_g)P({}_pA0_g|{}_pA_f) \\
&= 1/2 \times P({}_pAA_g|{}_pA_f) + 1/2 \times 1/2 \times P({}_pA0_g|{}_pA_f) \\
&= 1/2 \times 1/5 + 1/2 \times 1/2 \times 4/5 = 3/10
\end{aligned}$$

L'evento ${}_fAA_g$ può verificarsi sotto la condizione $\{{}_mAB_g,\, {}_pAA_g\}$ solo se la madre passa l'allele A (probabilità $1/2$), visto che il padre sicuramente passa l'allele A; L'evento ${}_fAA_g$ può verificarsi sotto la condizione $\{{}_mAB_g,\, {}_pA0_g\}$ solo se la madre passa l'allele A ed il padre passa l'allele A (probabilità $1/4$).
Quest'ultima probabilità poteva essere calcolata anche come

$$P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) = 1 - [P({}_fB0_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) + P({}_fA0_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) + P({}_fAB_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)]$$

(b) Una volta che si scopre che il figlio ha fenotipo A_f, si eliminano le possibilità (considerate appena sopra) che sia di genotipo ${}_fAB_g$ o ${}_fB0_g$ e restano possibili solo i due casi, che sia di genotipo ${}_fAA_g$ oppure ${}_fA0_g$, che possono verificarsi per i due possibili genotipi del padre ${}_pAA_g$ e ${}_pA0_g$. Si ha:

$$P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f,\, {}_fA_f) = \frac{P({}_fAA_g \cap {}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)}{P({}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)} = \frac{P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)}{P({}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)}$$

$$P({}_fA0_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f,\, {}_fA_f) = \frac{P({}_fA0_g \cap {}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)}{P({}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)} = \frac{P({}_fA0_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)}{P({}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)}$$

in quanto il genotipo ${}_fA0_g$ implica il fenotipo ${}_fA_f$ ed il genotipo ${}_fAA_g$ implica il fenotipo ${}_fA_f$. Per terminare il calcolo occorre trovare il denominatore, cioè $P({}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f)$, che può essere calcolato a partire dai risultati del punto (a):

$$P({}_fA_f|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) = P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) + P({}_fA0_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f) = 1/5 + 3/10 = 1/2$$

Si ha dunque

$$P({}_fAA_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f,\, {}_fA_f) = \frac{1/5}{1/2} = 2/5$$

$$P({}_fA0_g|{}_mAB_g,\, {}_pA_f,\, {}_fA_f) = \frac{3/10}{1/2} = 3/5$$

(c) Adesso supponiamo di aver scoperto che il figlio ha genotipo ${}_fA0_g$ e si vuole scoprire, a questo punto, quali sono le probabilità che il genitore di fenotipo ${}_pA_f$ sia di genotipo ${}_pAA_g$ e ${}_pA0_g$. La risposta è semplice perché, visto che la madre ha genotipo ${}_mAB_g$, il figlio può avere genotipo ${}_fA0_g$ solo se la madre gli ha passato l'allele A ed il padre l'allele 0; ma il padre è di fenotipo ${}_pA_f$ e quindi l'unica soluzione possibile è che abbia genotipo ${}_pA0_g$. Si ha dunque

$$P({}_pA0_g|{}_fA0_g,\, {}_mAB_g,\, {}_pA_f) = 1$$

$$P({}_pAA_g|{}_fA0_g,\, {}_mAB_g,\, {}_pA_f) = 0$$

CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

SEGNALI:
- CASUALI (PROCESSI CASUALI) non ne pox scrivere il segnale
  ex: voce, ecg
- DETERMINATI π parametri noti, segnale = espressione mate

ENTRAMBI I TIPI POSSONO ESSERE:
- TEMPO CONTINUI: grafico del segnale $x(t)$ continuo e funzione del tempo $t \in \mathbb{R}$
- TEMPO DISCRETI: successione di numeri $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$

campionatore $x[n] = x(n\Delta t)$

non sempre si può associare a n un tempo

S. DET. TEMPO DISCRETO ✓
S. DET. TEMPO CONTINUO ✓
- a energia finita ✓
- periodico ✓
- non periodica a potenza finita ×

S. CAS. TEMPO DISCRETO ×
S. CAS. TEMPO CONTINUO ✓
- STAZIONARI ✓
- CICLOSTAZIONARI ×

SEGNALE = GRANDEZZA FISICA che varia nel tempo $t \in \mathbb{R}$ $(-\infty, \infty)$
(FUNZIONE DEL TEMPO).
Possiede un'unità di misura

SISTEMI:

LINEARE / NON LINEARE: se vale la sovrapposizione degli effetti, cioè dati 2 segnali $x_1(t)$, $x_2(t)$ allora l'uscita della loro combinazione lineare $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ è

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad , \forall a_1, a_2$$

$x_1(t) \to y_1(t)$
$x_2(t) \to y_2(t)$

oppure dato

$$y_1[n] = \tau\{x_1[n]\}, \quad y_2[n] = \tau\{x_2[n]\}$$

$$\to \tau\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1\tau\{x_1[n]\} + a_2\tau\{x_2[n]\}$$

TEMPO CONTINUI: integrali e derivate con trasformata di Fourier
ex: $v(t) \to \boxed{SIST} \to i(t)$ in un circuito
EQ. DIFF 1° ordine lineare a coeff. cost

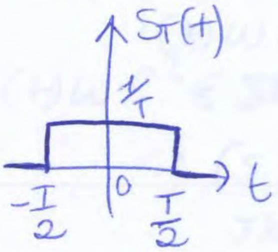
TEMPO DISCRETI ex: $T_c[n] \to \boxed{SIST} \to \hat{T}_c[N]$ = stima di $T_c[N]$ = media mobile

$$\hat{T}_c[N] = \frac{T_c[n] + T_c[n-1] + T_c[n-2]}{3}$$

ex: lineare $x[n] \to \otimes 5 \to y(n)$
ex: non lineare $x[n] \to \oplus 1 \to y[n]$
$x[n] \to (\cdot)^2 \to y[n]$

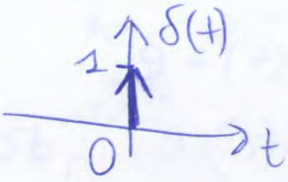
DELTA DI DIRAC

$$s_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} s_T(t)\,dt = 1 = T \cdot \frac{1}{T}$$

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} s_T(t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(0) = \lim_{T\to 0} s_T(0) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} = \ldots$$

$\forall x(t)$, $\quad x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) \quad *$ $\qquad x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0) \quad **$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \quad ***$$

DIMO $*$ $\quad x(t)\,\delta(t-t_0) = \lim_{T\to 0}\left[x(t)\,s_T(t-t_0)\right] = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

DIMO $**$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = x(t$

DIMO $***$ $\quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t_0-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\,\delta(t_0-\tau)\,d\tau =$

$$= x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0-\tau)\,d\tau = x(t_0)\cdot 1 = x(t_0) = x(t)$$

CONVOLUZIONE IN TEMPO CONTINUO

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

DIMO $\quad y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}\{x(\tau)\,\delta(t-\tau)\}\,d$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

- PROPRIETÀ COMMUTATIVA

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

DIMO CON $\quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \quad$ CAMB. VARIABILE $\quad t-\tau = u$, $\; u+\tau = t$, $\; d\tau = -du$

$$y(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u)\,h(u)\,(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)\,h(u)\,du =$$

$$= \int h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

DIMO DISC $\quad y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum x[k]\,h[n-k] =$

$$\sum h[k]\,x[n-k]$$