appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 1199 DATA: 24/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Mitrotta

MATERIA: Meccanica delle Macchine + Eserc.

Prof. Jacazio

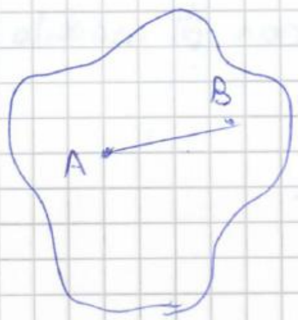
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

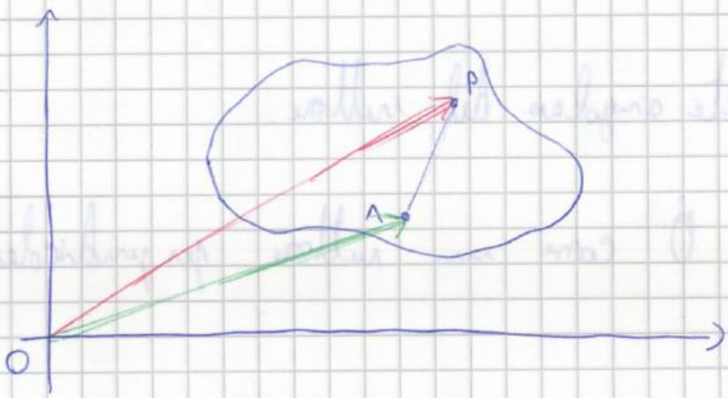
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 414

RICHIAMI SU CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

Cos'è un corpo rigido? Si dice corpo rigido un corpo del quale si possono prendere due punti tali che la distanza fra essi rimanga costante nel tempo.



Consideriamo ora un corpo rigido in un sistema di riferimento come in figura:



$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$

Quale è la velocità del punto P?

$$\frac{d\overline{OP}}{dt} = \overline{v}_P$$

$$\frac{d\overline{OA}}{dt} = \overline{v}_A$$

$$\Rightarrow \overline{v}_P = \overline{v}_A + \frac{d\overline{AP}}{dt}$$

Quale è la derivata espressa nel secondo termine?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 414

$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \wedge \overline{AP}}$

Abbiamo ricavato quest'espressione rispetto ad un sistema piano, ma essa è valida anche per sistemi tridimensionali.

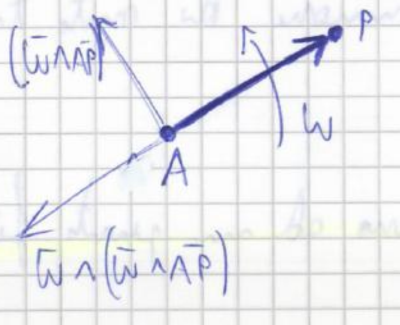
Analogamente si può ricavare un'espressione simile per le accelerazioni

$$\bar{a}_P = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \overline{AP} + \bar{\omega} \wedge \frac{d\overline{AP}}{dt} =$$

$$= \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \overline{AP} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{AP})$$

↳ non è vettore che ruota, $\bar{\omega}$ non cambia direzione! $\Rightarrow$ acc. angolare

Quali sono le direzioni di questi vettori?



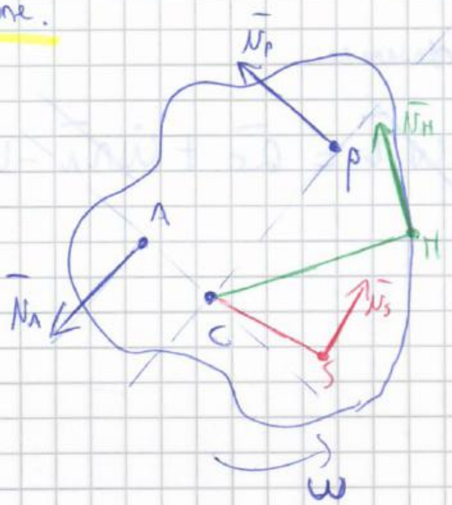
$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{a}_P = \bar{a}_A + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \wedge \overline{AP} - \omega^2 \overline{AP}}$

La velocità di A può quindi essere diversa da quella di P, così come per l'accelerazione. Si dice quindi che essi sono dei vettori applicati, perché sono caratteristici del punto. La velocità e l'accelerazione angolare invece sono proprietà collettive del corpo rigido e non sono quindi vettori applicati.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 414

Se siamo in una situazione di moto piano si può sempre trovare un punto appartenente al corpo rigido che ha istantaneamente velocità nulla. Esso si chiama centro di istantanea rotazione.

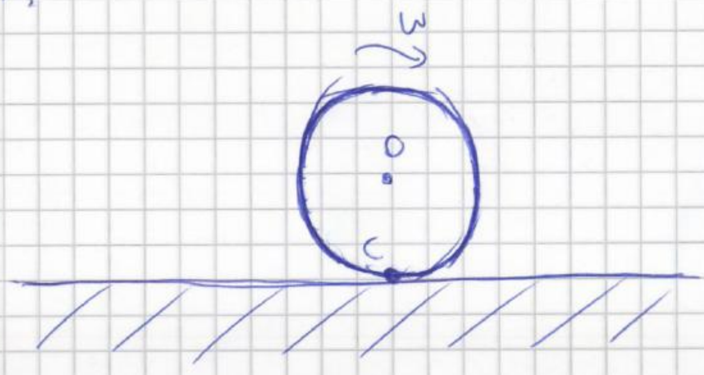


$$\bar{v}_P = \bar{\omega} \wedge \overline{CP}$$

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \wedge \overline{CA}$$

$$\bar{v}_H = \bar{\omega} \wedge \overline{CH}$$

Il caso più comune è una ruota che rotola senza strisciare su di un piano: (nel punto di contatto col piano si ha velocità nulla);



Il centro di istantanea rotazione varia istante per istante.

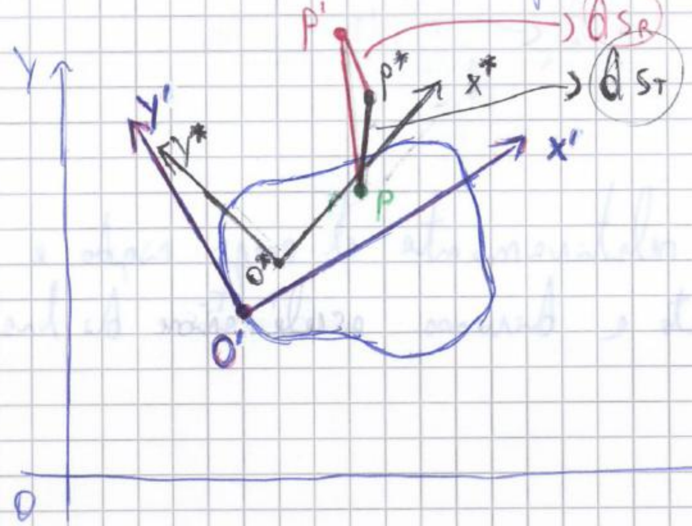
Il punto di istantanea rotazione ha velocità nulla ma non accelerazione nulla!
Ma quale è l'accelerazione del centro di istantanea rotazione?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 414

CENNI SUI MOTI RELATIVI

Immaginiamo un corpo rigido ed un punto in moto relativo nel sistema di riferimento in figura:



$\Rightarrow d\bar{s} = d\bar{s}_T + d\bar{s}_R$

↓

Sequenza di movimenti: prima si sposta il corpo rigido assieme a P, poi solo P relativamente a quello.

Se conosco come si muove il corpo rigido rispetto a Oxy e come si muove il punto P rispetto al corpo rigido posso ricavare come si muove P rispetto a Oxy.

Supponiamo che P non sia fermo rispetto al corpo rigido. Il suo spostamento può essere visto come uno spostamento di trascinamento e uno spostamento relativo ulteriore rispetto al corpo rigido stesso:

$$d\bar{s} = d\bar{s}_T + d\bar{s}_R$$

La velocità è:

velocità che avrebbe il punto se fosse solidale al corpo
possiamo anche scrivere come $\bar{v}_{PT} = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \wedge \overline{O'P}$

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_{PT} + \bar{v}_{PR}}$$

velocità percepita da un osservatore solidale al corpo

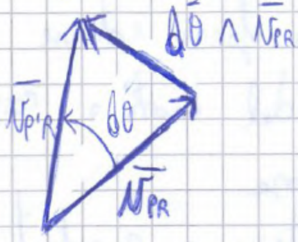
Per quanto riguarda l'accelerazione si ha:

$$\bar{a}_P = \frac{d\bar{v}_P}{dt} = \frac{d\bar{v}_{PT}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{PR}}{dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 414

$$\frac{d\overline{V_{PR}}}{dt} = \overline{a_{PR}}$$ se non vi fosse rotazione.



Ma il vettore $\overline{V_{PR}}$, oltre a cambiare in modulo effettua anche una rotazione e dovremo tener conto quindi della sua variazione di direzione: $\frac{d\overline{\theta}}{dt} \wedge \overline{V_{PR}} = \overline{\omega} \wedge \overline{V_{PR}}$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{V_{PR}}}{dt} = \overline{a_{PR}} + \overline{\omega} \wedge \overline{V_{PR}}$$

$$\boxed{\overline{a_P} = \overline{a_{PT}} + \overline{a_{PR}} + 2\,\overline{\omega} \wedge \overline{V_{PR}}}$$

Detta l'accelerazione di Coriolis a_c come:

$$\overline{a_{PC}} = 2\,\overline{\omega} \wedge \overline{V_{PR}}$$

Definiremo l'accelerazione del punto P come:

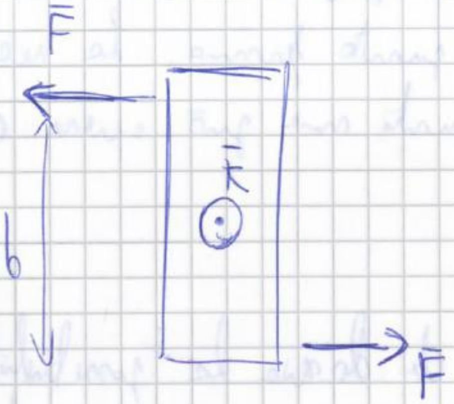
$$\overline{a_P} = \overline{a_{PT}} + \overline{a_{PR}} + \overline{a_{PC}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 414

in cui viene calcolato. Per verificare l'equilibrio di un corpo basta imporre $\bar{R} = 0$ e calcolare il momento in un punto qualunque.

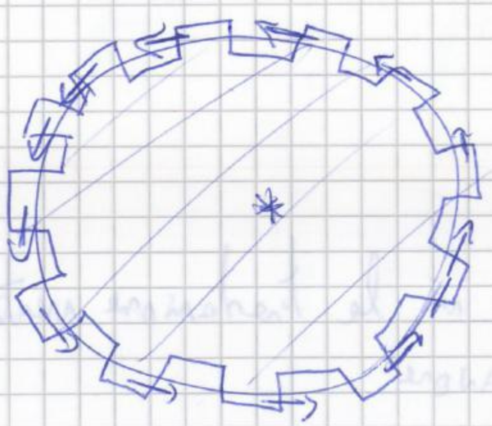
In tanti sistemi di macchine ci ritroviamo nella condizione di $\bar{R} = 0$ e $\bar{M} \neq 0$:



Si parlerà in questo caso di coppia $\bar{C}$ che sarà tale che:

$$\bar{C} = F \cdot b \cdot \bar{k}$$

Ad esempio, nel caso di un motore elettrico:



$$\sum \bar{F}_i = 0$$

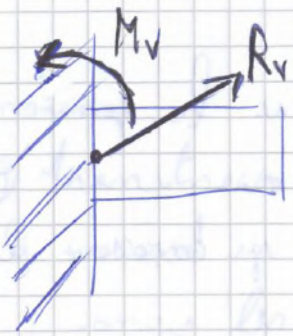
$$\sum \left(\overline{OP}_i \wedge \bar{F}_i \right) + \sum \bar{C}_i = 0$$

Considero momenti delle forze esterne e coppie esterne.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 414

vincolare la direzione arbitraria:



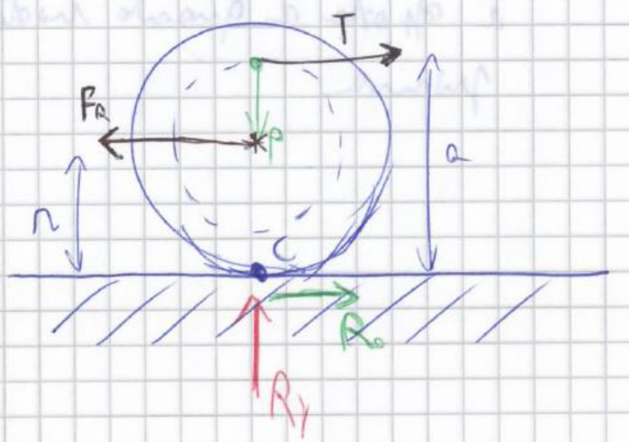
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 414

Nello spazio il corpo rigido avrà 6 gradi di libertà.

In robotica si parla di numero di assi controllati, che coincide con il concetto di gradi di libertà (indica le posizioni che possono essere controllati).

Vincolo di rotolamento



Avere il punto di istantanea rotazione fermo, vuol dire che in quel punto si avranno delle forze di reazione vincolari tali da mantenere tale punto a velocità nulla.

Ipotizziamo un carico P sulla ruota, una trazione T e una forza resistente F_R. Quali sono le reazioni vincolari nel punto di contatto? Equazione d'equilibrio del momento attorno a C:

$$F_R r - T a = 0 \Rightarrow T = F_R \frac{r}{a}$$ → trazione tale per mantenere il corpo in moto uniforme

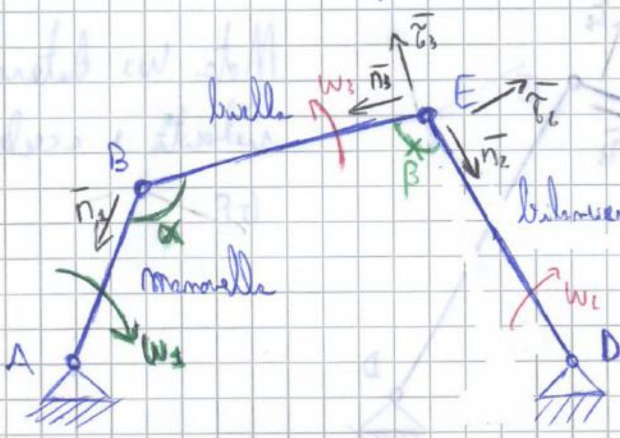
Osserviamo che $T < F_R$. Come fa ad essere garantito l'equilibrio? Attraverso la reazione vincolare:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 414

CALCOLO CINEMATICO DEI MECCANISMI ARTICOLATI

Metodo vettoriale: quadrilatero articolato



Noto ω_1 della manovella, calcolare ω_2 del bilanciere

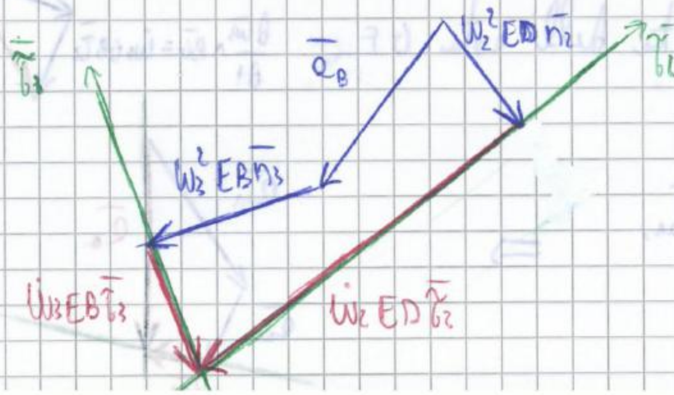
$$\bar{V}_B = \bar{\omega}_1 \wedge \overline{AB}$$
$$\bar{V}_E = \bar{V}_B + \bar{\omega}_3 \wedge \overline{BE} \implies$$
$$\bar{V}_E = \bar{\omega}_2 \wedge \overline{DE}$$

→ triangolo delle velocità

Teorema dei seni: $\dfrac{V_B}{\sin(\pi-\beta)} = \dfrac{V_E}{\sin(\pi-\alpha)} = \dfrac{\|\bar{\omega}_3 \wedge \overline{BE}\|}{\sin(\alpha+\beta-\pi)}$

Noto $\omega_1 = \text{cost.}$, calcolare le accelerazioni del sistema

$$\bar{a}_B = -\omega_1^2\, \overline{AB} = \omega_1^2\, AB\, \bar{n}_1$$
$$\bar{a}_E = \bar{a}_B + \frac{d\bar{\omega}_3}{dt} \wedge \overline{BE} - \omega_3^2\, \overline{BE} = \bar{a}_B + \dot{\omega}_3\, EB\, \bar{\tau}_3 + \omega_3^2\, EB\, \bar{n}_3 \quad (E \in BE)$$
$$\bar{a}_E = \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} \wedge \overline{DE} - \omega_2^2\, \overline{DE} = \dot{\omega}_2\, ED\, \bar{\tau}_2 + \omega_2^2\, ED\, \bar{n}_2 \quad (E \in DE)$$
$$\implies \bar{a}_B + \dot{\omega}_3\, EB\, \bar{\tau}_3 + \omega_3^2\, EB\, \bar{n}_3 = \dot{\omega}_2\, ED\, \bar{\tau}_2 + \omega_2^2\, ED\, \bar{n}_2$$



poligono delle accelerazioni → disegno prima i vettori di cui conosco tutto e poi degli altri due traccio le direzioni e quando dove si intersecano

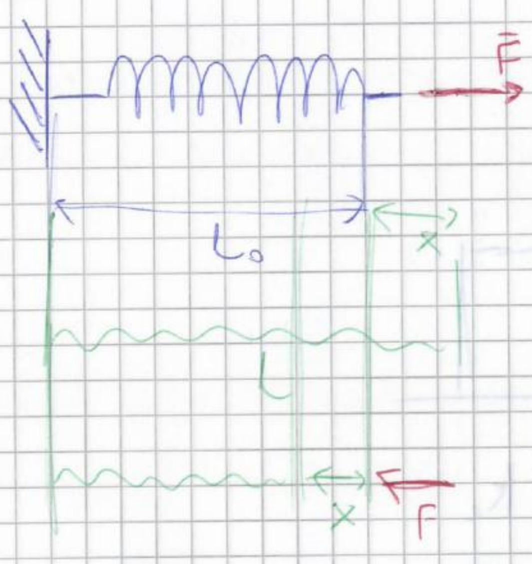
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 414

FORZE NELLE TRASMISSIONI MECCANICHE

- Forza peso
- Forze elastiche

La molla è un dispositivo che esercita una forza proporzionale alla deformazione e che si oppone alla stessa:

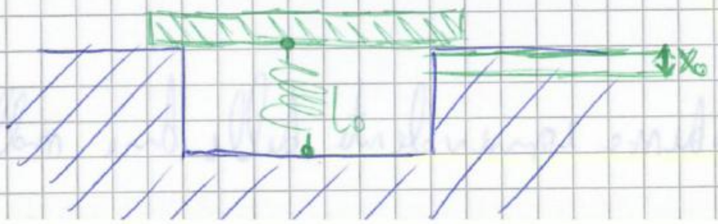


$$\boxed{F = Kx}$$

dove K è la rigidezza della molla

Ci possono essere molle che aumentano ancor di più la forza all'aumentare della deformazione, oppure la diminuiscono.

Molle sottoposte inizialmente ad un certo precarico:

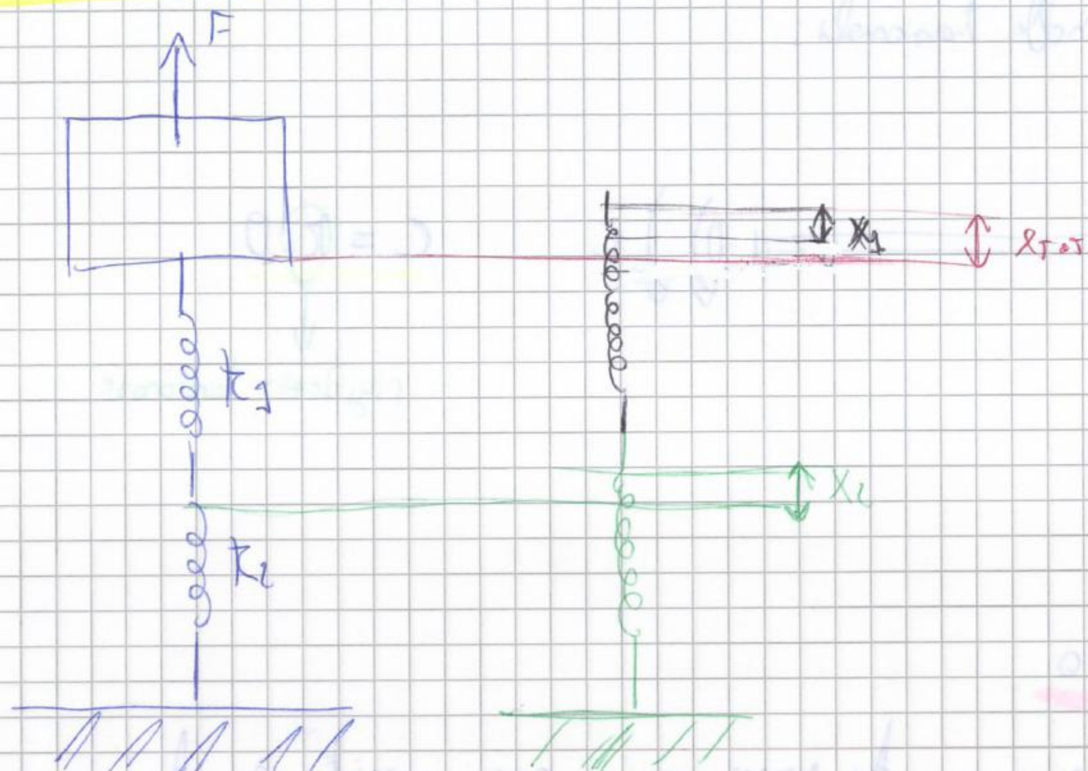


Tiro un poco la molla per collegarla alla piastra

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 414

Molle in serie:



Le cose qui sono un po' più complicate: F passa attraverso prima K_1 e poi K_2. Partendo dal basso analizziamo di quanto si sposta la molla K_2 essendo sottoposta ad una forza F. Analogamente per la molla K_1, con l'eccezione che l'estremo della molla non parte dalla sua posizione iniziale, ma da quanto è stato alzato dalla molla K_2:

$$X_2 = \frac{F}{K_2} \quad ; \quad X_1 = \frac{F}{K_1}$$

$$X_{TOT} = X_1 + X_2 = \frac{F}{K_e}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{F}}{K_1} + \frac{\cancel{F}}{K_2} = \frac{\cancel{F}}{K_e} \Rightarrow \frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

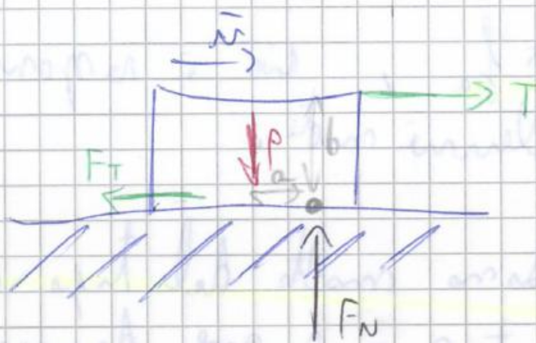
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 414

ad una distanza a tale che:

$T b = P a$

Applicando una forza T sufficientemente grande al corpo si metterà in moto:



tutto si muove a velocità v

Fino a quando rimane fermo → condizioni di aderenza / attrito statico

Quando iniziamo a muoverci → condizioni di attrito / attrito dinamico

Forze d'attrito → si oppongono al movimento relativo fra i corpi.

Al limite dell'aderenza si stabilisce un rapporto detto coefficiente di aderenza:

$$\boxed{\left(\frac{F_{Ta}}{F_N}\right)_{lim} = f_a}$$

Per vincere la forza di aderenza devo applicare una forza maggiore di quella necessaria a mantenere in moto uniforme il corpo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 414

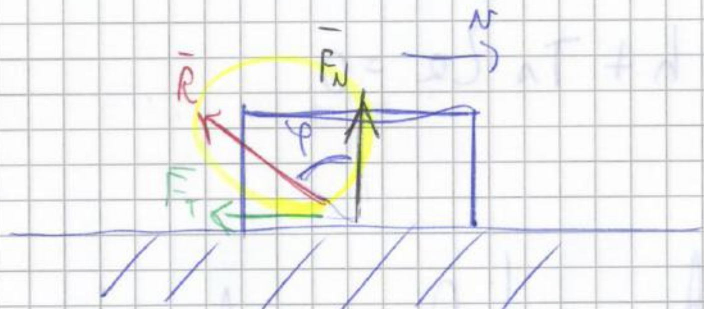
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 414

N.B: in condizioni di aderenza il prodotto $f_a F_N$ mi dà la massima forza tangenziale che si può generare sul corpo, non quella esatta! Semplicemente la F_T esatta sarà quella necessaria ad equilibrare la forza di trazione.

In condizioni di attrito invece la F_T continuerà ad agire fino a quando sarà presente la velocità v.

Bisogna tenere in conto le forze d'attrito per definire lo stato di equilibrio di un corpo.

Immaginiamo ora un corpo che si muove con velocità v:



$$\boxed{f = \frac{F_T}{F_N} = tg(\varphi)}$$

φ → angolo di attrito

Analogamente si definisce l'angolo di aderenza:

$f_a = tg\,\varphi_a$

Esempio pattino guida (impuntamento).

Supponiamo guida e pattino con un certo gioco. Applichiamo una forza F non allineata con la forza peso

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 414

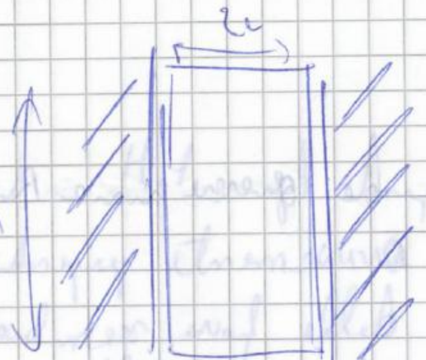
Ma $F = P$ anche se ho $f_a = 0$!

In caso di f_a, e ed h tali che:

$$\frac{2 f_a e}{h} = 1 \Rightarrow e = \frac{h}{2 f_a}$$

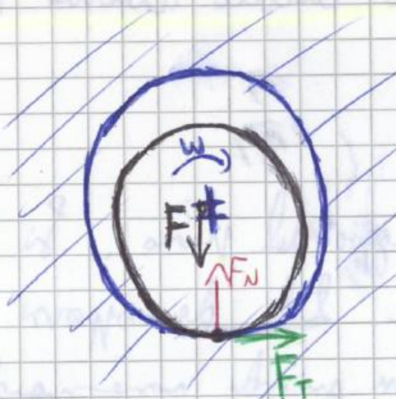
$\Rightarrow F \infty \rightarrow$ impuntamento $\rightarrow$ non posso muovere il corpo

Se $h >> 2a$ è rara la condizione di impuntamento. Se invece $h << 2a$ ciò è molto più probabile.



$\rightarrow$ si sviluppano delle forze tangenziali molto più...

Perno che ruota dentro un cilindro



Un perno che ruota dentro un cilindro (c'è gioco) al quale viene sottoposto un carico F va a contatto col cilindro

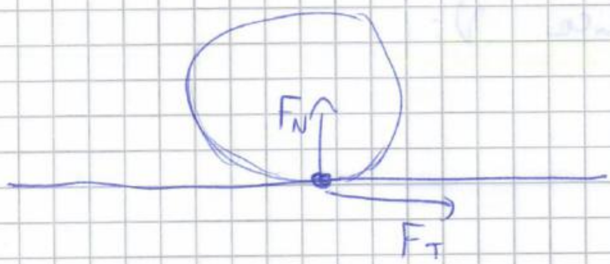
Ipotizziamo perno a contatto, lo facciamo ruotare con velo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 414

Organi rotolanti e aderenza

Le forze scambiate nel punto di contatto si dividono in forza tangenziale e normale

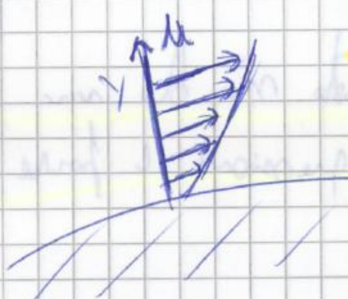


Il moto di rotolamento si mantiene fino a tanto che:

$$\boxed{\frac{F_T}{F_N} \le f_a}$$ → condizione di aderenza nel punto di contatto

Pressione normale troppo bassa ⇒ perdo aderenza.

Viscosità



$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$

Le forze viscose nascono in presenza di diversi strati di fluido in moto relativo

↓ tensione tangenziale tra due strati di fluido

$$[\mu] = \frac{F \cdot L \cdot T}{A \cdot L} = \frac{F}{A} \cdot T$$ come pressione per un tempo

$$= \frac{MLT}{T^2 L^2} = \frac{M}{LT} = \frac{kg}{ms}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 414

In settore automobilistico C_z diventa C_x.

Questi coefficienti sono in funzione sia della forma del corpo sia delle collisioni del fluido con il corpo caratterizzato ad ogni numero di Reynolds:

$$\boxed{Re = \frac{\rho V L}{\mu}}$$

L → lunghezza caratteristica

C_L e C_R sono anche in funzione dell'angolo d'incidenza

N.B: i coefficienti devono essere riferiti ad una specifica area di riferimento

- ala → area in pianta
- Fusoliera → area della sezione maestra del cilindro.

Corpo che ruota in un fluido → momento resistente M_R:

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2} \rho C_M W^2 R^5}$$

R → raggio nel quale il corpo ruota

dove C_M è in funzione del numero di Reynolds, questa volta definito come:

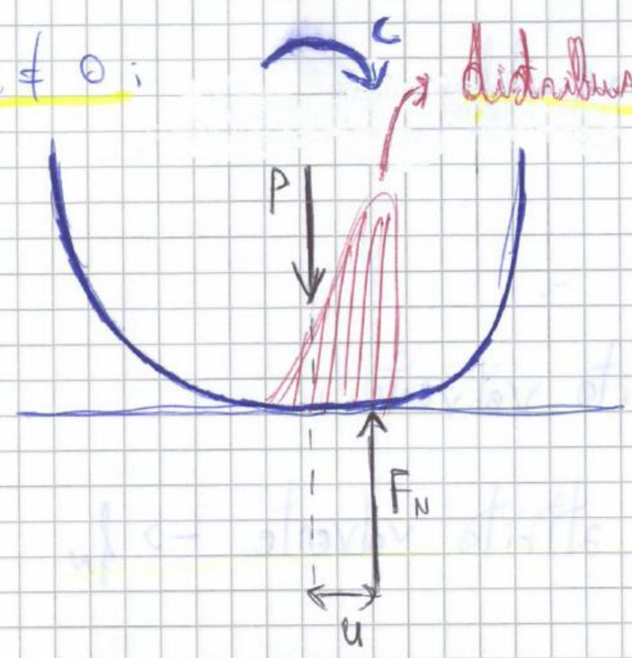
$$Re = \frac{\rho W R^2}{\mu}$$

e del rapporto V_∞ / WR:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 414

se $C \neq 0$;



distribuzione di pressione spostata verso destra

⇓

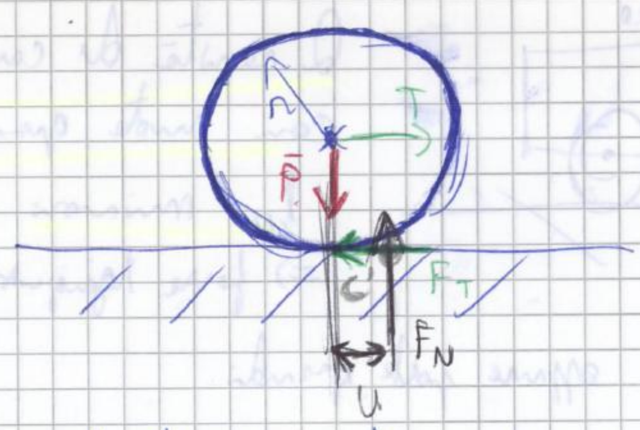
momento opposto a C

⇓

parametro di attrito volvente u

Nella resistenza a moto di rotolamento non si tiene conto di differenza tra u prima dell'inizio del moto e durante il moto. $F_N \cdot u$ rappresenta il momento resistente dovuto all'attrito al rotolamento ed è uguale al momento M che deve essere applicato per un moto uniforme.

Immaginiamo ruota con forza T applicata come in figura:



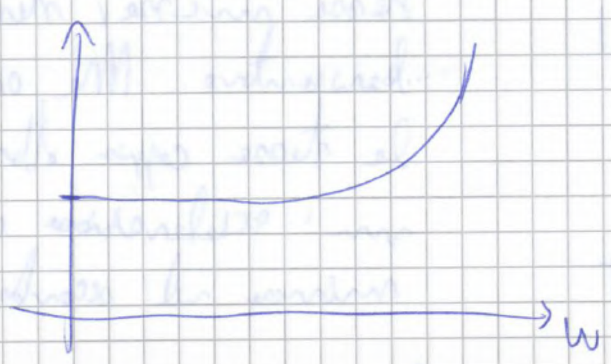
La forza di trazione da applicare sarà:

$$Pr - Tu = 0 \Rightarrow T = \frac{Pu}{r}$$ (equilibrio alla rotazione in C')

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 414

Corpo che ruota → i punti che vengono a contatto con il suolo subiscono un piccolo moto (velocità angolare ne = 0 istantaneamente);



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 414

Si può dimostrare che posso trovare una terna di assi ortogonali opportunamente orientati rispetto ai quali i momenti centrifughi sono nulli.

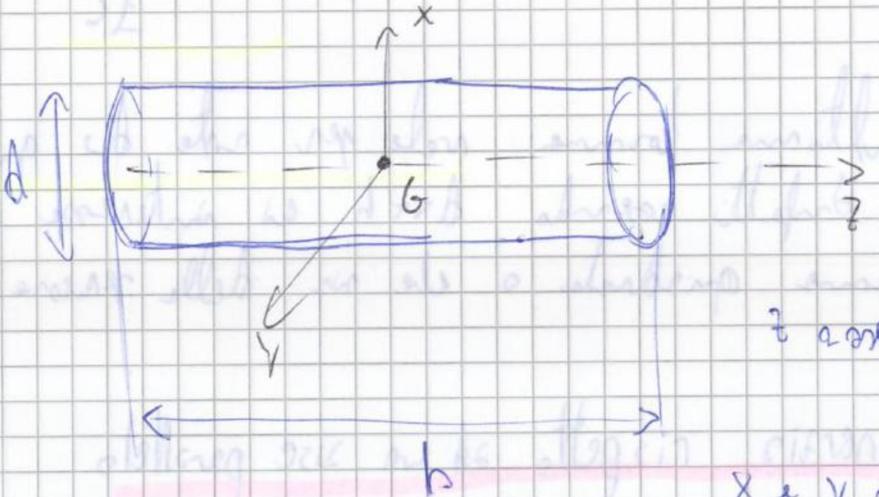
Questi assi sono detti assi principali di inerzia del corpo.

$\Rightarrow$ questo è valido per qualunque punto.

Tra tutti i punti possibili, se scegliamo il baricentro gli assi si chiameranno assi centrali di inerzia.

Corpi con simmetrie $\rightarrow$ assi di simmetria $\equiv$ assi principali

Momento d'inerzia corpo cilindrico



z asse principale

$\Downarrow$

x e y sono principali anch'essi per la simmetria della circonferenza e i momenti di inerzia rispetto a loro coincidono

$$\boxed{I_z = \frac{m d^2}{8}}$$

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(\frac{d^2}{4} + \frac{b^2}{3}\right)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 414

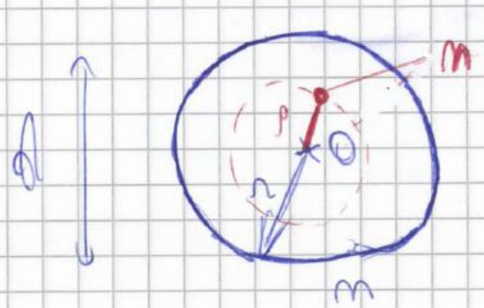
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 414

Nell'esempio dato si trova I_x nell'asse baricentrico:

$$I_{x'} = \frac{mh^2}{12} + \frac{mh^2}{4} = \frac{mh^2}{3}$$ → momento di inerzia rispetto all'asse passante per l'estremo.

Raggio di inerzia

Immaginiamo il corpo cilindrico con diametro d:



$$I_0 = \frac{m d^2}{8} = \frac{m r^2}{2}$$

Definiamo il raggio d'inerzia ρ la quantità tale che:

$$\boxed{I_0 = m \rho^2}$$

è la distanza alla quale si può pensare concentrate tutte le masse in modo da avere lo stesso momento d'inerzia

↓

distanza alla quale concentro tutte le masse in un punto

↓

utile per una prima stima approssimativa del momento d'inerzia

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 414

$$p = \bar{\omega} \cdot \bar{\lambda}$$

$$q = \bar{\omega} \cdot \bar{\mu}$$

$$r = \bar{\omega} \cdot \bar{\nu}$$

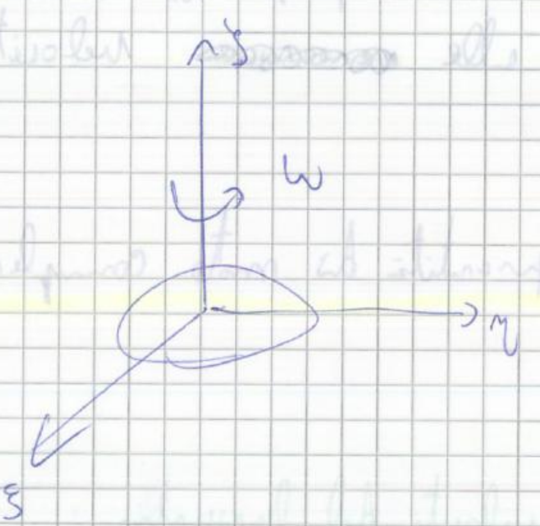
prodotto scalare della velocità angolare per il versore dell'asse principale d'inerzia

Fatte queste premesse, se calcolo il momento della quantità di moto rispetto ad un punto O che sia fisso oppure coincidente con il baricentro, ottengo che:

$$\bar{H}_O = I_\xi \, p \, \bar{\lambda} + I_\eta \, q \, \bar{\mu} + I_\zeta \, r \, \bar{\nu}$$

HP:
- assi principali d'inerzia
- punto O fisso / ≡ baricentro

Nella maggioranza delle applicazioni, ci riferiamo però a sistemi rigidi piani → asse perpendicolare è principale d'inerzia

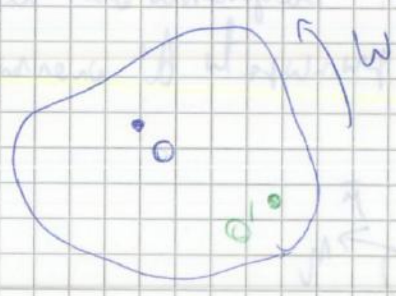


rotazione solo attorno all'asse ζ

$\Rightarrow p = 0, \; q = 0$

$$\bar{H}_O = I_\zeta \, r \, \bar{\nu}$$

Ad esempio nella seguente configurazione:



$\bar{k} \rightarrow$ versore perpendicolare al piano della rotazione e uscente dal foglio

$$\boxed{\bar{H}_O = I_O \, \omega \, \bar{k}}$$

momento Q di corpo rigido animato da moto piano

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 414

Moltiplicando ambo i lati dell' eq. per dt e integrando nel tempo:

$$\boxed{\int_0^{\delta t} \sum_i \bar{F}_i \, dt = \Delta \bar{Q}}$$

↳ differenza fra il valore della quant. di moto del corpo rigido fra istante finale e iniziale

questa quantità è chiamata impulso globale

Un altro modo di vedere la questione è:

$$\sum_i \bar{F}_i = m\bar{a}_G \Rightarrow \sum_i \bar{F}_i \boxed{- m\bar{a}_G} = 0$$

questa quantità viene chiamata risultante delle forze d'inerzia $\bar{F}'$

Posso quindi riscrivere il tutto come:

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_i + \bar{F}' = 0}$$ → condizione di equilibrio dinamico per le forze

⇒ abbiamo trasformato l' eq. di equilibrio della dinamica in equazione di equilibrio tra forze.

Le forze d' inerzia si comportano come vere e proprie forze esterne che messono a causa di non campo di moto non uniforme.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 414

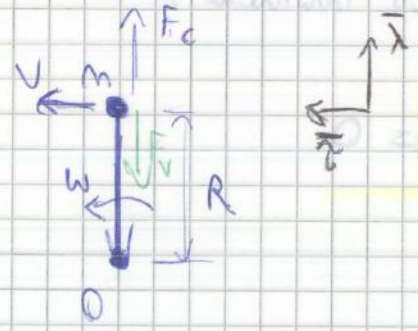
e dunque in questa situazione $\overline{M_O'}$ sarà:

$$\overline{M_O'} = -I_O \dot{\omega} \overline{k}$$

Quando conviene avere $\sum \overline{F_i} = m\overline{a_G}$ e quando $\sum \overline{F_i} + \overline{F'} = 0$?

- corpo non vincolato, libero → facile calcolare l'$\overline{a_G}$ guardando a $\sum \overline{F_i} = m\overline{a_G}$
- corpo vincolato → ci interessa non soltanto le grandezze cinematiche, ma anche le forze di reazione che si sviluppano nei vincoli. ⇒ uso $\sum \overline{F_i} + \overline{F'} = 0$

Forze centrifughe



Massa che ruota attorno ad O tramite un'asta lunga R. La velocità periferica V è:

$$\overline{V} = \omega R \overline{\tau}$$

L'accelerazione centripeta è:

$$\overline{F'} = \overline{F_c} = m\omega^2 R \overline{\lambda}$$

$$\overline{F_v} = \text{tensione asta} = -\overline{F_c}$$

$$\overline{a} = -\frac{V^2}{R}\overline{\lambda} = -\omega^2 R \overline{\lambda}$$

Possiamo vedere la forza centrifuga come quella forza che tenta di strappare la massa dall'asta → c'è reazione vincolare in O

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 414

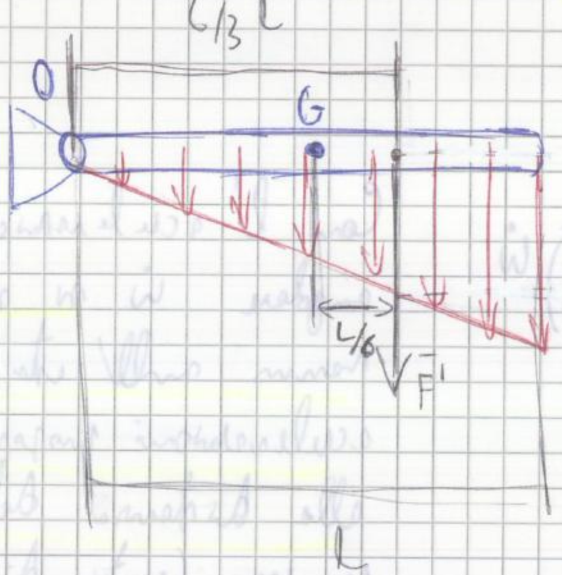
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 414

$$F' = \int_0^L \dot{\omega}\, x \frac{M}{L}\, dx = \dot{\omega} \frac{M}{L} \frac{L^2}{2} = \frac{\dot{\omega} L}{2} M$$

Ma per quanto visto prima per l'acc. del baricentro, si ha:

$$F' = a_G M$$

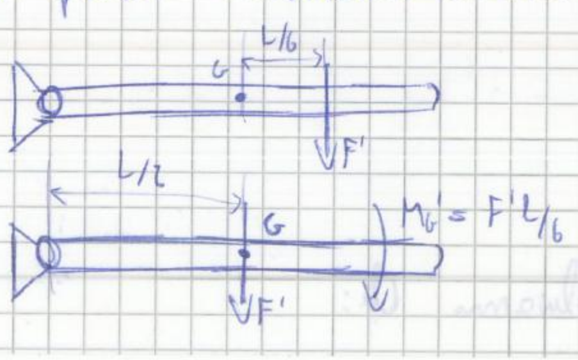
Ma da dove passa la risultante di queste forze d'inerzia?



Dato che le accelerazioni crescono al crescere della distanza dalla cerniera, stessa cosa accadrà per le forze d'inerzia.

Si vede subito che F' non può essere applicata nel baricentro ma sarà applicata nel baricentro del triangolo della distribuzione di forze.

Come facciamo a capire dove è applicata F' nei casi più complessi? Rivediamo in un altro modo lo stesso esempio:



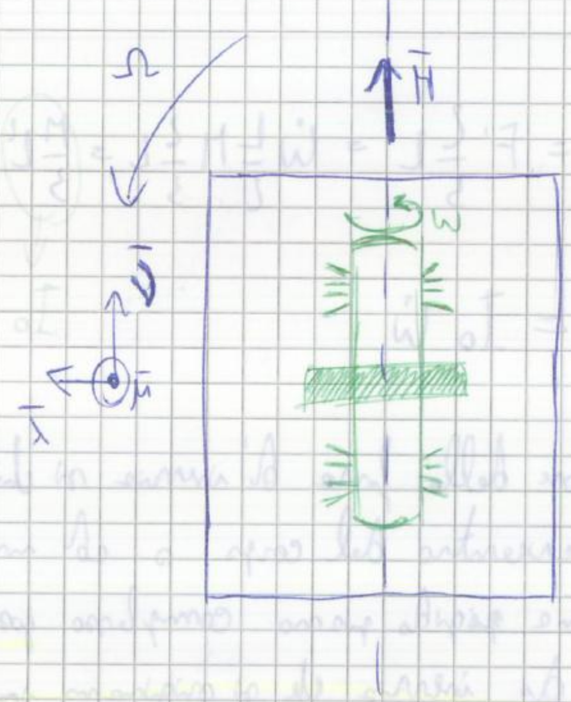
Sposto il punto di applicazione nel baricentro e aggiungo un momento.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 414

FENOMENI GIROSCOPICI

Supponiamo di avere un corpo rigido che ruota attorno ad un asse e questo asse che ruota a velocità minore attorno ad un secondo asse perpendicolare al primo.



Combinazione di due velocità angolari: cilindro ruota attorno al proprio asse fissato sul supporto e supporto che ruota a velocità più bassa attorno ad asse perpendicolare a quello del cilindro.

Quale sarà il momento angolare del cilindro?

$$\bar{H} = I \omega \bar{\jmath} + J \Omega \bar{\mu}$$

J → Momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse $\bar{\mu}$

In HP che $\omega >> \Omega$ si ha che I e J sono diversi ma comunque dello stesso ordine di grandezza e quindi possiamo trascurare il secondo termine.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 414

$\Rightarrow$ la coppia giroscopica viene equilibrata dai cuscinetti dei supporti

$\Rightarrow$ se la coppia è troppo alta essi si possono danneggiare.

$\bar{\mu}$ (asse attorno al quale ruota l'asse di rotazione propria) $\rightarrow$ asse di precessione

Ω (velocità con cui ruota l'asse di rotazione propria) $\rightarrow$ velocità angolare di precessione

Se $\bar{\Omega}$ e $\bar{\omega}$ non sono perpendicolari fra di loro si deve prendere al posto di $\bar{\Omega}$ la sua componente perpendicolare rispetto a $\bar{\omega}$, cioè $\Omega \cos\alpha$. La coppia giroscopica diventa così:

$$\boxed{\bar{M}' = -I\,\omega\,\Omega\cos\alpha\,\bar{\lambda}}$$

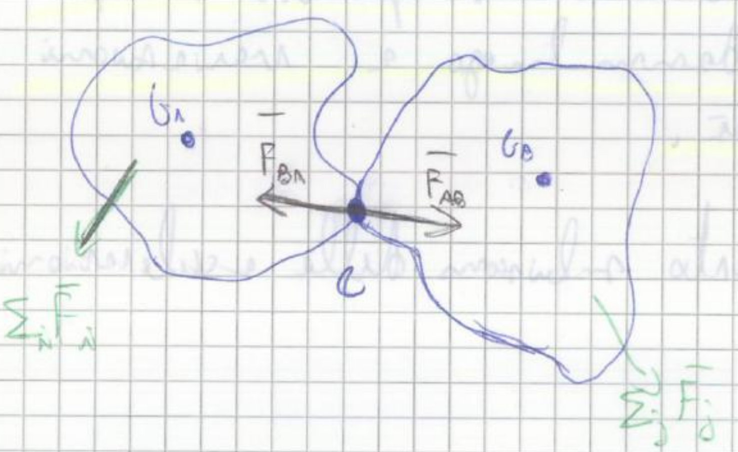
N.B: la coppia giroscopica non necessita che i moduli di ω e di Ω varino nel tempo, essi possono anche rimanere costanti! Essa è infatti generata in primo luogo dalla variazione della direzione di ω che fa rotazione nei vari punti del corpo delle forze d'inerzia locali.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 414

Si parla invece di urto eccentrico quando le forze non passano per entrambi i baricentri

=> variazione anche della velocità angolare



Due corpi A e B che si urtano toccandosi in C. Dati quindi la somma delle forze esterne $\Sigma_i F_i$ che agiscono su A e delle forze esterne $\Sigma_j F_j$ che agiscono su B.

Equazioni d'equilibrio per i due corpi:

$$\begin{cases} \Sigma \overline{F}_i + \overline{F}_{BA} = \dfrac{d\overline{Q}_A}{dt} \\ \Sigma \overline{F}_j + \overline{F}_{AB} = \dfrac{d\overline{Q}_B}{dt} \end{cases}$$

Variazione finita di velocità in tempo infinitesimo

→ variazione finita della quantità di moto in un dt

→ $\dfrac{d\overline{Q}}{dt}$ è molto grande, quale è la causa?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 414

$$V_A^+ m_A + V_B^+ m_B = V_A^- m_A + V_B^- m_B$$

Manca un'informazione; quale è la natura dell'urto?

- Urto completamente elastico: velocità relativa fra i corpi è cost.;
- urto completamente anelastico: velocità relativa nulla dopo l'urto.

Normalmente siamo in una situazione intermedia, e definiamo un coefficiente di restituzione dell'urto:

$$\boxed{e = -\frac{V_A^+ - V_B^+}{V_A^- - V_B^-}}$$

Urto compl. elastico $\rightarrow e = 1$
Urto compl. anelastico $\rightarrow e = 0$

Qual è il valor medio della forza che agisce durante l'urto? Devo conoscere la durata dell'urto.

Oltre che per la traslazione possiamo scrivere le equazioni di equilibrio della dinamica per i momenti, se consideriamo urti eccentrici

$$\Sigma \bar{M}_{AO} + \overline{OC} \wedge \bar{F}_{BA} = \frac{d\bar{H}_{AO}}{dt} + \bar{V}_O \wedge \bar{Q}_A$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 414

Mi aspetto delle velocità finali dirette come in figura.

Istante prima dell'urto:

$\omega = 0$

$v_G = 0$

Equazioni di equilibrio della dinamica:

$$M v_0 = m v^+ + M v_G^+$$

$$M v_0 a = m v^+ a + I_G \omega^+$$

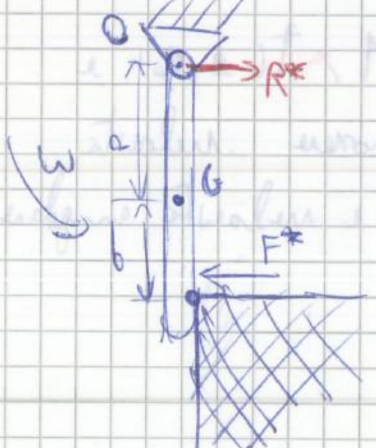
velocità relative nel punto dove è avvenuto l'urto

$$e = -\frac{v^+ - v_P^+}{v_0}$$

$$v_P^+ = v_G^+ + \omega^+ a$$

Urti fra corpi vincolati

Immaginiamo di avere una porta che ruota attorno ad una cerniera che va ad urtare contro una parete fissa e si ferma:



Quando la porta urta contro la parete si genera risposta con una forza uguale e contraria a quella esercitata dall'urto per mantenere l'equilibrio → non è trascurabile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 414

Ricordando le relazioni fra i momenti d'inerzia:

$$I_O = I_G + ma^2$$

$$b = \frac{I_G + ma^2}{ma} - a = \frac{I_G}{ma} = \frac{m\rho_G^2}{ma} = \frac{\rho_G^2}{a}$$

In alcune applicazioni meccaniche per evitare rotture di valvole che si chiudono violentemente si cerca di far avvenire l'urto nel centro di percossa.

Inoltre, essendo il punto di contatto ad una distanza $a+b$ dalla cerniera, se esso è centro di percossa possiamo scrivere:

$$b + a = a + \frac{\rho_G^2}{a} > a$$

e quindi possiamo affermare che il centro di percossa è posto sempre ad una distanza maggiore dall'asse di rotazione rispetto al baricentro.

In generale le equazioni dell'urto per corpi vincolati sono:

$$\int_0^{t_m} (F^* - R^*)\,dt = m\,(v_G^+ - v_G^-)$$

$$\int_0^{t_m} (M^* - M_R^*)\,dt = H^+ - H^-$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 414

Possiamo dire che in modo dt vale:

$$d\bar{s}_P = d\bar{s}_A + \bar{\omega}\, dt \wedge \bar{AP}$$

$\bar{\omega}\, dt \to d\bar{\theta} \to$ rotazione angolare di avviene nell'intervallo di tempo infinitesimo

Tutti i ds li possiamo scrivere come l'espressione di sopra:

$$dL = \bar{F}_1 \cdot (d\bar{s}_A + d\bar{\theta} \wedge \bar{AP}_1) + \bar{F}_2 \cdot (d\bar{s}_A + d\bar{\theta} \wedge \bar{AP}_2) + \bar{F}_3 \cdot (d\bar{s}_A + d\bar{\theta} \wedge \bar{AP}_3)$$

Tutti i primi pezzi portano a $(\Sigma_i \bar{F}_i) \cdot d\bar{s}_A$, poiché il punto A è comune a tutti.

Guardando ai secondi termini otteniamo $\Sigma_i \bar{F}_i \cdot d\bar{\theta} \wedge \bar{AP}_i$

$$dL = \underbrace{(\Sigma_i \bar{F}_i)}_{\bar{R}} \cdot d\bar{s}_A + \underbrace{\Sigma_i (\bar{F}_i \cdot d\bar{\theta} \wedge \bar{AP}_i)}_{d\bar{\theta} \cdot \bar{AP}_i \wedge \bar{F}_i}$$

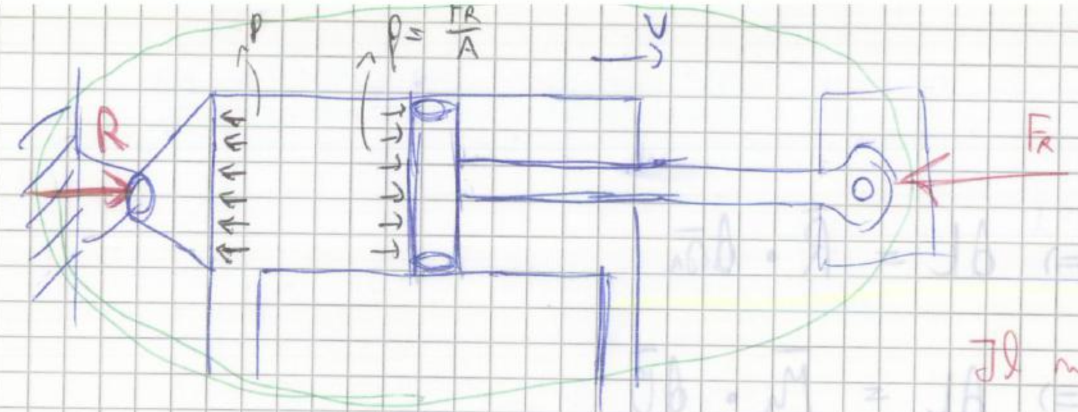
$d\bar{\theta} \cdot \bar{AP}_i \wedge \bar{F}_i \to$ proprietà vettoriale

$\bar{AP}_i \wedge \bar{F}_i \to \bar{M}_{Ai} \to$ momento rispetto ad A della forza F_i

$$\Rightarrow \boxed{dL = \bar{R} \cdot d\bar{s}_A + \bar{M}_A \cdot d\bar{\theta}} \to \text{lavoro complessivo del corpo rigido}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 414



Il mio carico F_R è contrario al moto del cilindro
=> lavoro resistente

Mando aria nel cilindro che spinge verso destra e verso sinistra
=> forze di pressione

Le forze di pressione verso sinistra fa generare una reazione vincolare R.

Il sistema in verde è in equilibrio sotto l'azione di F_R e R. Ma R non compie lavoro perché rimane fermo!

Le forze che compiono lavoro sono le forze di pressione, che sono delle forze interne.

Infatti le forze interne saranno anche uguali e contrarie ma si possono allontanare e avvicinare tra di loro e quindi compiere lavoro. -> si spostano i punti di applicazione delle forze interne

Energia potenziale

Se $L = \int_l \bar{F} \cdot d\bar{s}$ dipende solo da punto iniziale e punto finale della traiettoria (e quindi è indipendente dal percorso) si è in condizioni di campo di forze conservative

Ciò accade quando $\bar{F} = \text{cost}$ oppure se $\bar{F}$ è funzione solo delle coordinate del punto in cui agisce, $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 414

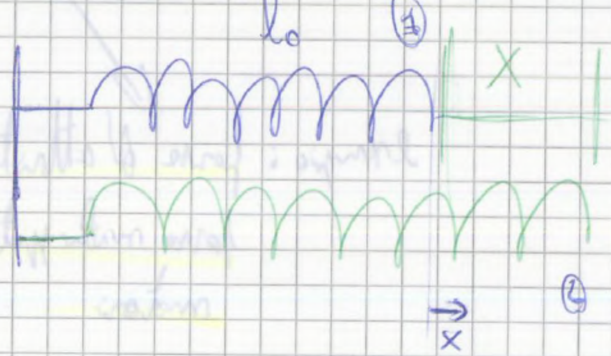
Se in 1 avevo $U_1 = 0$ allora:

$$U_2 = \Delta U = mgh$$

Salendo da 1' a 2 avrò lo stesso risultato:

$$L_{1',2} = \underbrace{-mg\sin\alpha}_{\text{proiezione di } mg \text{ su piano inclinato verso opposto allo spostamento}} \cdot \frac{h}{\cancel{\sin\alpha}} = -mgh$$

Esempio: molla con lungh. libera l_0, se questa viene allungata di x, quale è il lavoro della forza elastica da 1 a 2?



$$F = -kx$$

$$L_{1,2} = \int_{1 \to 0}^{2 \to x} -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}$$

Questo lavoro posso sempre esprimerlo come differenza di energia potenziale:

$$L_{1,2} = -\frac{kx^2}{2} = \underbrace{U_1}_{=0} - U_2 = -\Delta U$$

$$\Delta U = \frac{kx^2}{2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 414

cinetica del corpo.

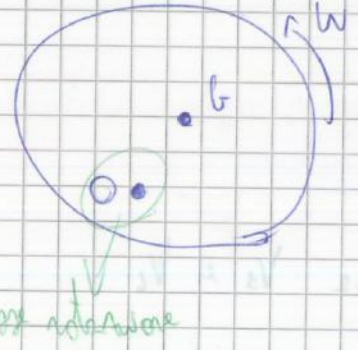
Per un corpo che trasla e ruota si ha:

$$E = \frac{1}{2} m V_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(I_\xi p^2 + I_\eta q^2 + I_\zeta r^2\right)}_{}$$ → energia cinetica di rotazione

I_ξ, I_η e I_ζ sono i momenti centrali di inerzia; p, q e r sono le componenti della velocità angolare rispetto a questi assi:

$$p = \bar{\omega} \cdot \bar{\lambda} \quad , \quad q = \bar{\omega} \cdot \bar{\mu} \quad , \quad r = \bar{\omega} \cdot \bar{\nu}$$

Per un sistema rigido piano si ha:



$$E = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

Se tengo conto che $V_G = \omega \cdot OG$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m OG^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\left(m OG^2 + I_G\right)}_{I_O}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 414

$\Delta(E+U) = 0$

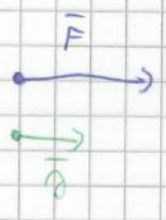
$\Rightarrow E + U = cost.$

Tutte queste sono le equazioni dell'energia e possono essere applicate per risolvere i problemi della dinamica

- problema tra stato 1 e stato 2 → equazioni dell'energia
- problema con richiesta di specifica forza → equazioni dinamica

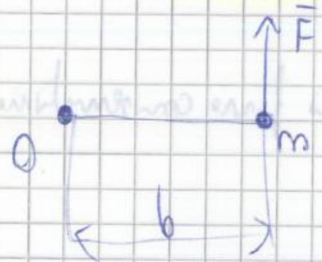
---

Unità di misura



$L = F \cdot s$

$[L] = N \cdot m_{//} = J$



$M_0 = F \cdot b$

$[M_0] = N \cdot m_{\perp}$

N.B: lavoro e momento sono due grandezze fisiche diverse! Il lavoro è una forza per lo spostamento nella direzione parallela alla forza, mentre il momento è una forza per la distanza perpendicolare alla direzione della forza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 414

SISTEMI DI TRASMISSIONE DELLA POTENZA MECCANICA

Da elemento che genera potenza (motore) → a elemento che la utilizza (utilizzatore).

Se il lavoro compiuto dalle forze non d'inerzia è positivo il sistema accelera. → Transitorio

Se il lavoro compiuto dalle forze non d'inerzia è negativo il sistema rallenta. → Transitorio

Se il lavoro delle forze non d'inerzia è nullo si mantiene la stessa energia cinetica → condizioni stazionarie

⇓

potenza erogata dal motore

=

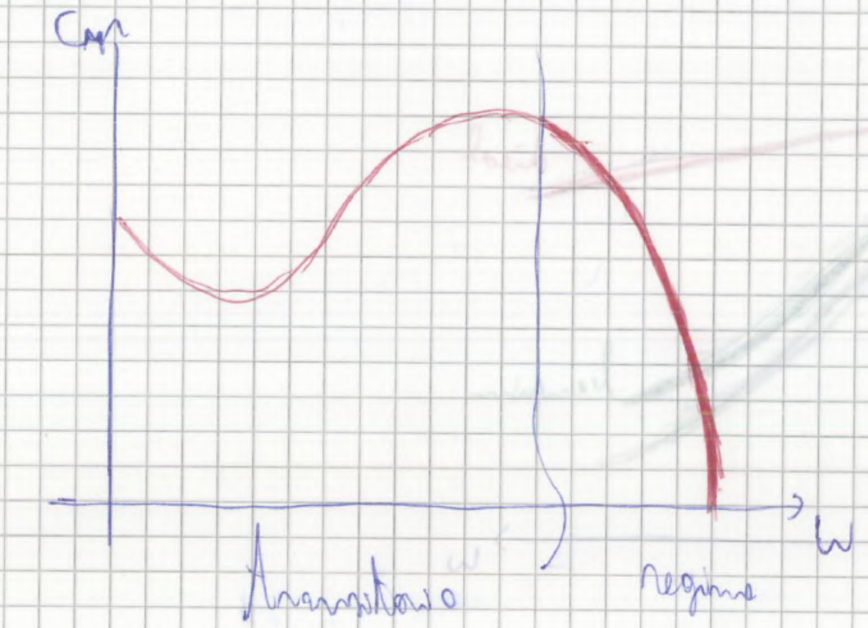
potenza assorbita dall'utilizzatore e dalla trasmissione

Il motore sviluppa delle coppie che variano con la velocità angolare. Il diagramma $\omega - C_m$ è detto caratteristica del motore e può avere diversi andamenti.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 414

Motore corrente alternata



Motore idraulico pressione costante

Per qualunque tipo di motore le dimensioni finali sono legate alla coppia che viene sviluppata. Il discorso è diverso per la potenza. Essa è $W = C \cdot \omega$, quindi anche motorini piccoli girando ad alte velocità possono dare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 414

ma a me conviene fare un motore piccolo che giri C_1 piccola con alta ω in modo da avere la potenza necessaria per trascinare l'utilizzatore.

In genere tra motore e utilizzatore un riduttore che mi trasformi una ω_1 alta in ingresso in una ω_2 bassa in uscita.

Definiamo rapporto di riduzione:

$$\boxed{\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

A volte può essere necessaria l'operazione inversa
→ moltiplicatore

In ipotesi di moto stazionario e di riduttore che non dissipa potenza potrò dire che:

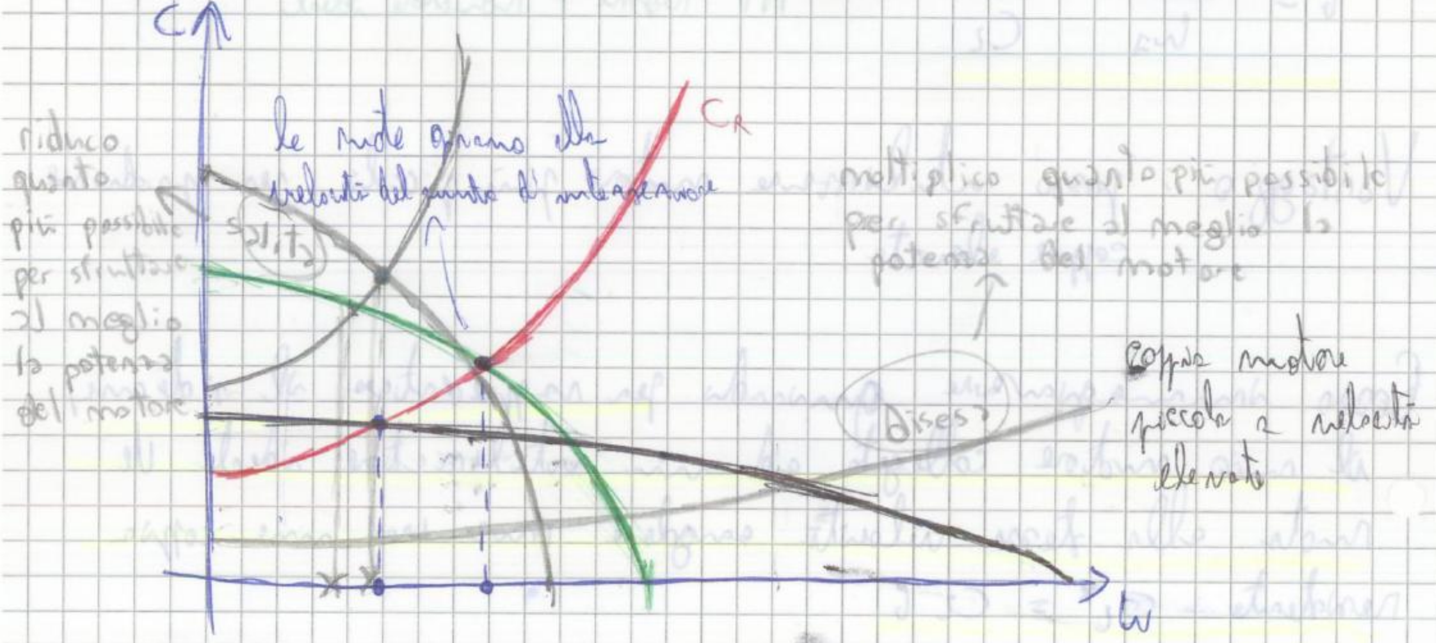
$$\underbrace{C_1 \omega_1}_{\text{motore}} = \underbrace{C_2 \omega_2}_{\text{utilizz.}}$$

L'utilizzatore assorbe la potenza del motore combinando

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 414

Ad esempio i motore automobilistico, voglio vedere la coppia delle ruote in funzione della velocità angolare.



Quando cambio marcia, interpongo una riduzione di velocità che mi dà coppia nulla a metà della ω di prima e ha una coppia doppia a ω nulla.

$\Rightarrow$ per sfruttare al meglio la potenza del motore $W = C \cdot \omega$ voglio la riduzione, perché trovo il punto di regime a C e ω maggiori.
Se fosse in discesa, la curva C_R sarebbe molto meno ripida $\Rightarrow$ non voglio la riduzione per avere più potenza, bensì avrò bisogno di moltiplicare. Al contrario in salita.

Quando, anziché del riduttore, c'è un moltiplicatore della velocità! La bicicletta!

$\Rightarrow$ alla massima velocità e bassi facciamo girare i pedali non esercitiamo grande coppia.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 414

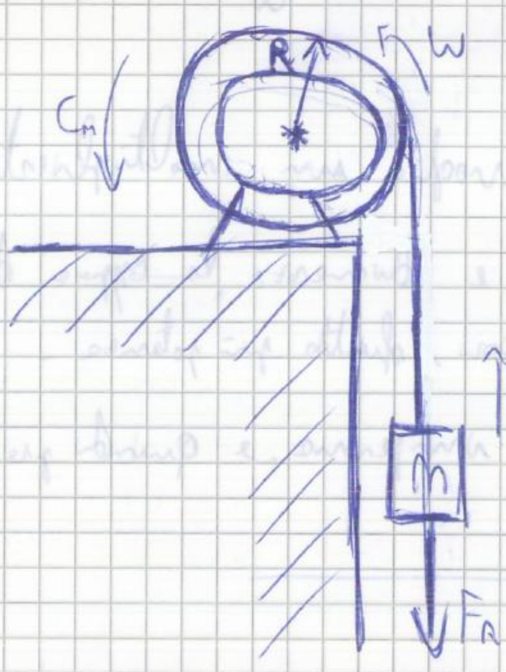
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 414

Trasformazione moto rotatorio in moto rettilineo

Nella grande maggioranza dei casi si ha:

- motore → mezzo rotante;
- utilizzatore → mezzo traslante

Immaginiamo una massa collegata ad un tamburo:



$V = \omega R$

↓

è la lunghezza caratteristica che trasforma il moto rotatorio in moto traslatorio.

Che legame c'è tra C_m e R?

$$C_m \omega = F_R V$$

$$\frac{V}{\omega} = R \Rightarrow \frac{C_m}{F_R} = R$$

Anche in questo caso posso passare ad un utilizzatore ridotto all'asse del motore e ad un motore ridotto all'asse dell'utilizzatore.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 414

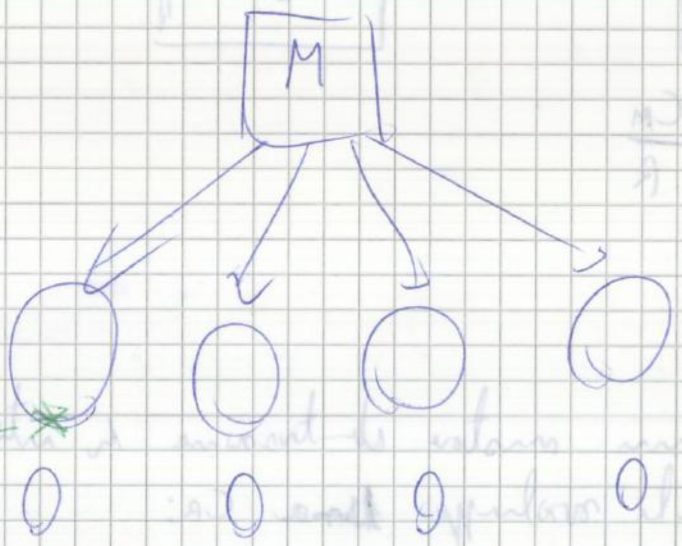
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 414

Poi dovrò avere un po' di margine sul minimo necessario:

$$C_m = h\, C_R\, \tau \cdot k$$

→ fattore moltiplicativo > 1

Immaginiamo di essere in una condizione di funzionamento con tutte $C_R = 0$:



Si inceppa l'utilizzatore

↓

il motore vede coppia nulla negli utilizzatori funzionanti e un utilizzatore bloccato ⇒ tutte le coppie relative va su quest'ultimo

Se si inceppa un utilizzatore tutta la coppia disponibile al motore va ad agire per cercare di far muovere l'utilizzatore rotto.

$$C = h\, C_R\, \cancel{\tau}\, k \cdot \frac{1}{\cancel{\tau}}$$ ⇒ coppia molto grande su motore bloccato, c'è rischio di rompere qualcosa

↓

coppia vista dall'utilizzatore rotto

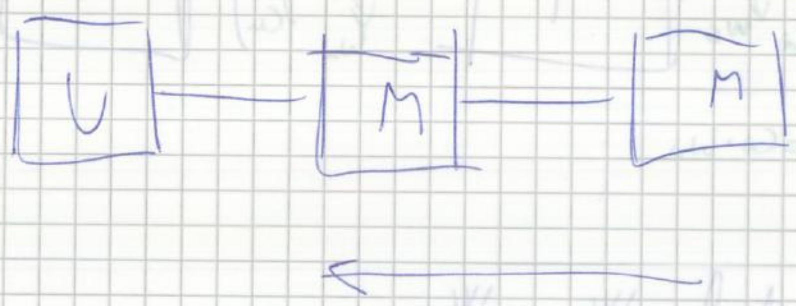
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 414

come moltiplicatore, il rendimento non è lo stesso.

riduttore ha rendimento η_d

Nella situazione inversa si ha:

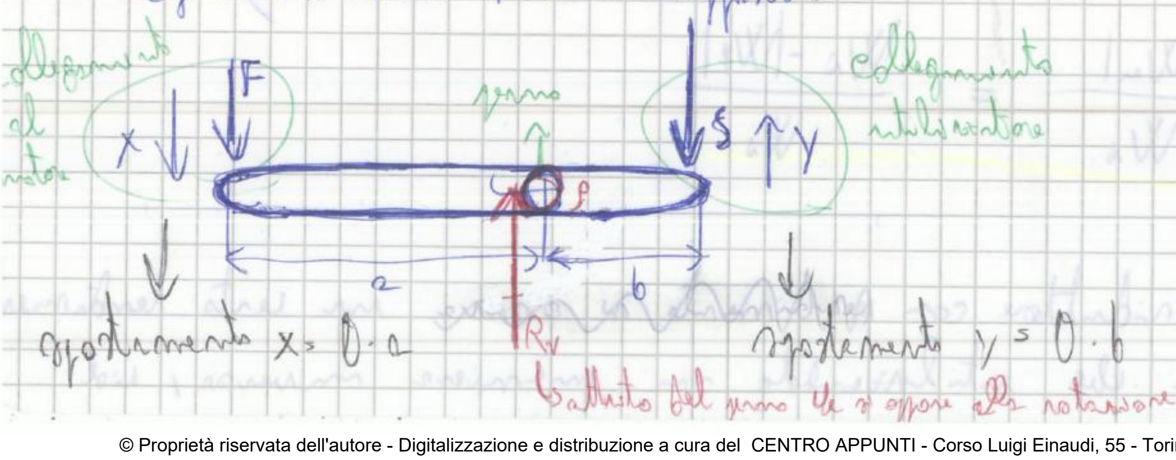


Il moltiplicatore ha un rendimento $\eta_i < \eta_d$

Flusso di potenza:

- Da albero adagio a veloce → minor rendimento
- Da albero veloce a adagio → maggior rendimento

Immaginiamo un sistema siffatto:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 414

In nuovo si ha:

$$F(a+\rho) = S(b-\rho) \Rightarrow F = \frac{S(b-\rho)}{a+\rho}$$

$$\eta_i = \frac{Fx}{Sy} = \frac{(b-\rho)}{(a+\rho)} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1-\rho/b}{1+\rho/a}$$

Poiché nel nostro sistema $b < a$, si dimostra che $\eta_i < \eta_d$, cioè che il rendimento inverso è minore del rendimento diretto per qualunque valore di ρ.

Supponiamo che la nostra leva funzioni come riduttore da 1 a 10:

$b = 1$, $a = 10$, $\rho = 0,1$

$$\eta_d = \frac{1-0,01}{1+0,1} = \frac{0,99}{1,1}$$

$$\eta_i = \frac{1-0,1}{1+0,01} = \frac{0,9}{1,01}$$

$\Rightarrow \eta_i < \eta_d$

È poco evidente in questo caso, ma in situazioni in cui il rendimento è più basso il discorso cambia:

$b = 1$, $a = 10$, $\rho = 0,5$

$$\eta_d = \frac{1-0,5/10}{1+0,5/10} = \frac{0,95}{1,5} = 0,6333$$

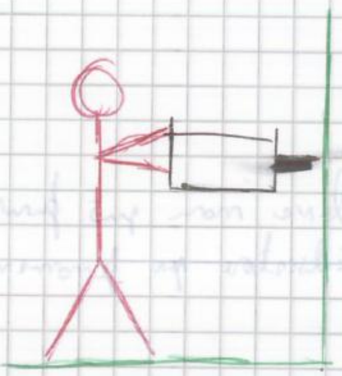
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 414

PERCORSO DI CARICO

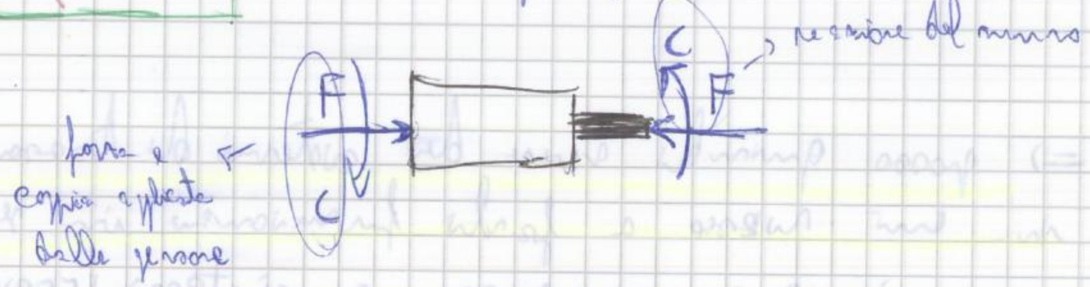
Bisogna tenere conto dei supporti del motore che sono soggetti anch'essi a forze e coppie. Si deve costruire un percorso di carico che si deve chiudere.
↳ insieme dei diagrammi di corpo libero del sistema in esame

Ad esempio, uomo con trapano:

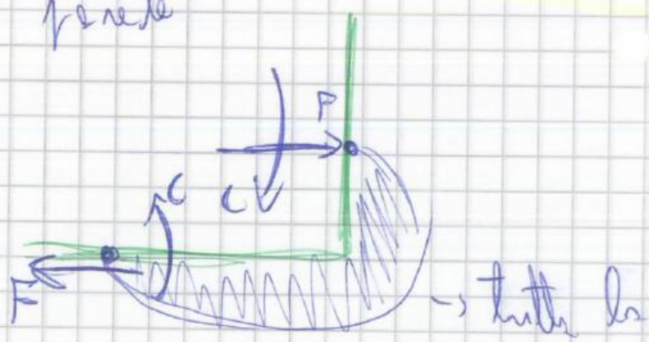


tre corpi: uomo, muro, trapano.
Quali sono le forze?

• trapano

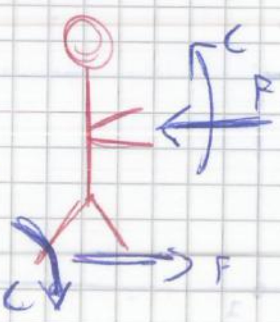


• parete



Il lavoro non è compiuto dalla persona ma dal motore del trapano che sviluppa una coppia che mette in moto relativo punta e corpo!

• persona



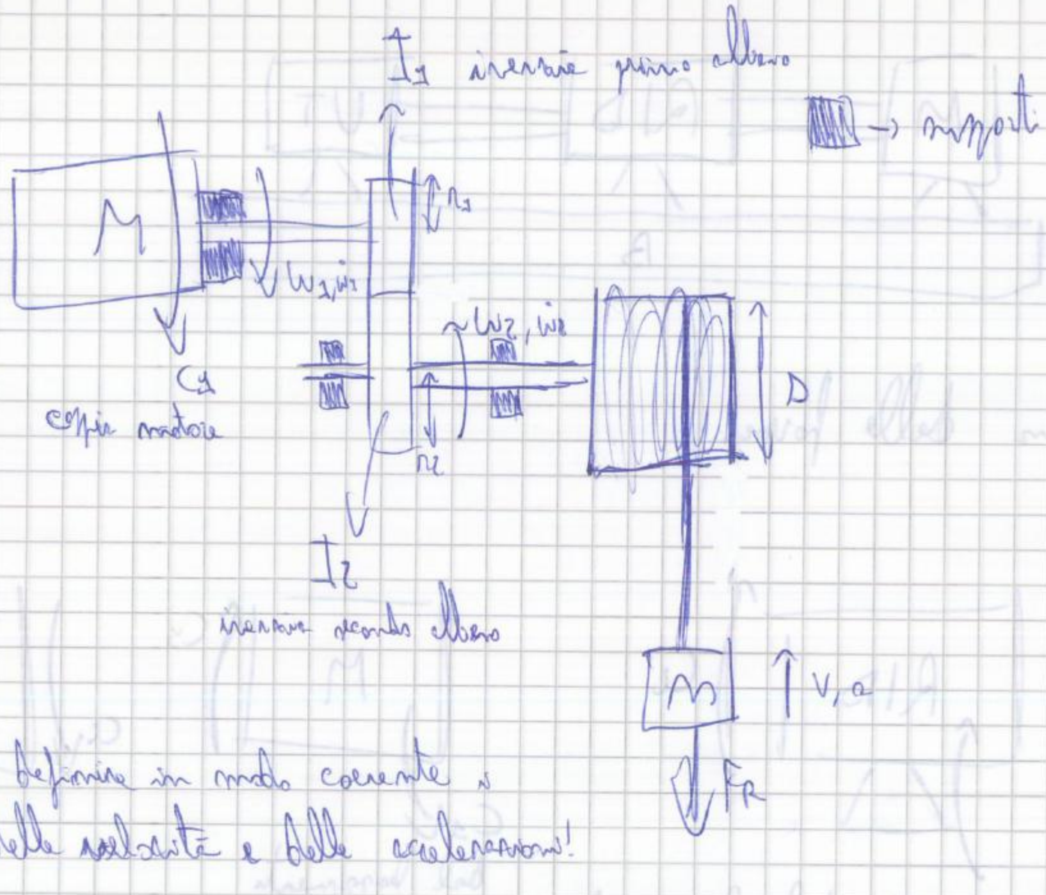
Per stare in equilibrio, si sviluppa una forza sui piedi dovuta all'attrito e una coppia di reazione dalla parete per lo spostamento del peso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 414

CALCOLO DEL TRANSITORIO DI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE DELLA POT. MECC.

Immaginiamo un motore avente sul suo asse un cilindro di raggio r_1 poggiato su di un secondo cilindro di raggio r_2. Su quest'ultimo c'è un tamburo di diametro D con cavo avvolto e sul cavo c'è una massa m alla quale è applicata una forza resistente F_R.



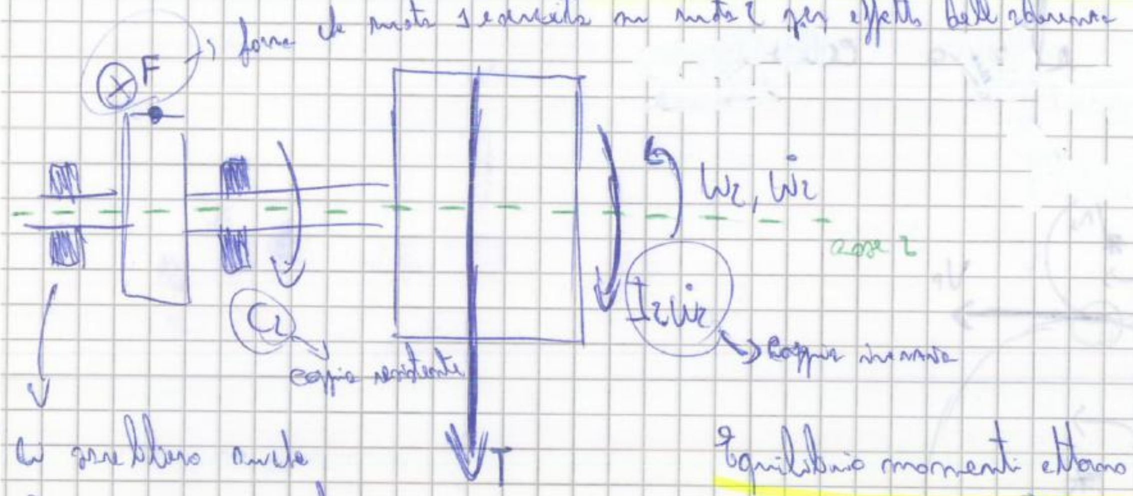
N.B.: bisogna definire in modo coerente i versi positivi delle velocità e delle accelerazioni!

Prima di tutto scriviamo le rel. cinematiche delle varie grandezze.
La massa sale con velocità $V = \omega_2 \, D/2$ e accelerazione $a = \dot\omega_2 \, D/2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 414

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 414

Cosa fa il tamburo?



in realtà ci sarebbero anche le reazioni vincolari dei supporti, ma nell'equilibrio non importano

Equilibrio momenti attorno all'asse 2:

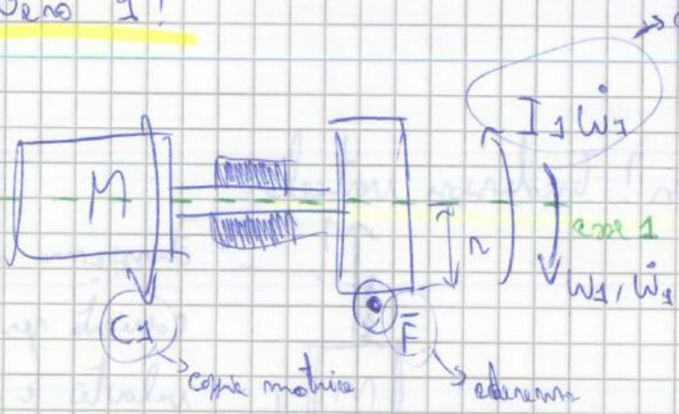
$$F r_2 - C_2 - \frac{TD}{2} - I_2\dot\omega_2 = 0$$

$$\Rightarrow F r_2 - C_2 - (F_R + m a)\frac{D}{2} - I_2\dot\omega_2 = 0$$

$$F r_2 - C_2 - F_R\frac{D}{2} - m\frac{D^2}{4}\dot\omega_2 - I_2\dot\omega_2 = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{r_2}\left[C_2 + F_R\frac{D}{2} + \dot\omega_2\left(I_2 + \frac{mD^2}{4}\right)\right]$$

- Albero 1?



$C_1 - F r_1 - I_1\dot\omega_1 = 0$ → equilibrio momenti attorno all'asse 1:

$$C_1 - \frac{r_1}{r_2}C_2 - \frac{r_1}{r_2}F_R\frac{D}{2} - \frac{r_1}{r_2}\dot\omega_2\left(I_2 + \frac{mD^2}{4}\right) - I_1\dot\omega_1 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 414

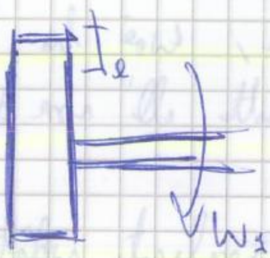
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 414

Allo stesso modo non potremmo neanche trovare una cosa del genere.

$\cancel{I_e = I_1 - \tau^2 I_2}$ $\rightarrow$ l'inerzia deve aumentare!

Il fattore τ^2 nasce da considerazioni di tipo energetico:

è come considerare un unico albero con un momento d'inerzia equivalente e velocità ω_1;



Nel primo caso abbiamo un'energia cinetica pari a:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2 \left(I_1 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_1^2 \left(I_1 + I_2 \tau^2 \right) = \frac{1}{2}\omega_1^2 I_e$$

esattamente pari all'energia cinetica nel secondo caso.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 414

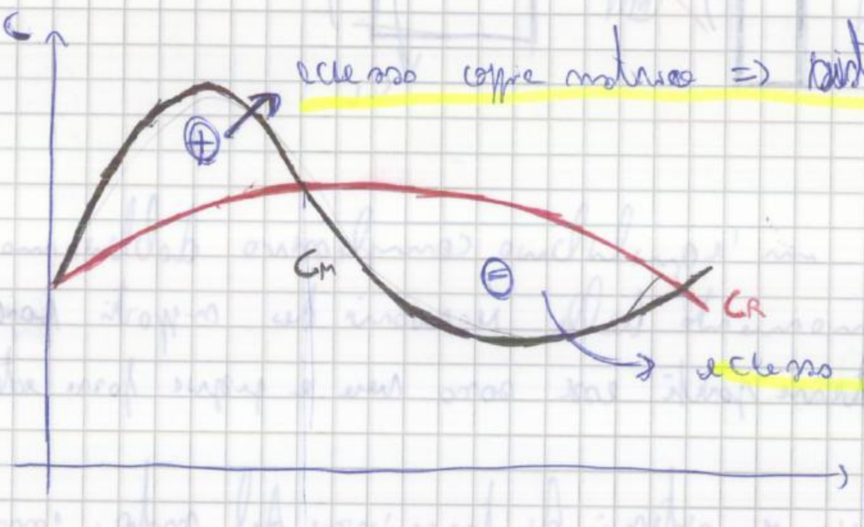
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 414

IRREGOLARITÀ PERIODICA NEI SISTEMI ROTANTI

Coppia a valor medio definito, ma che varia periodicamente nel tempo. → motore alternativo.

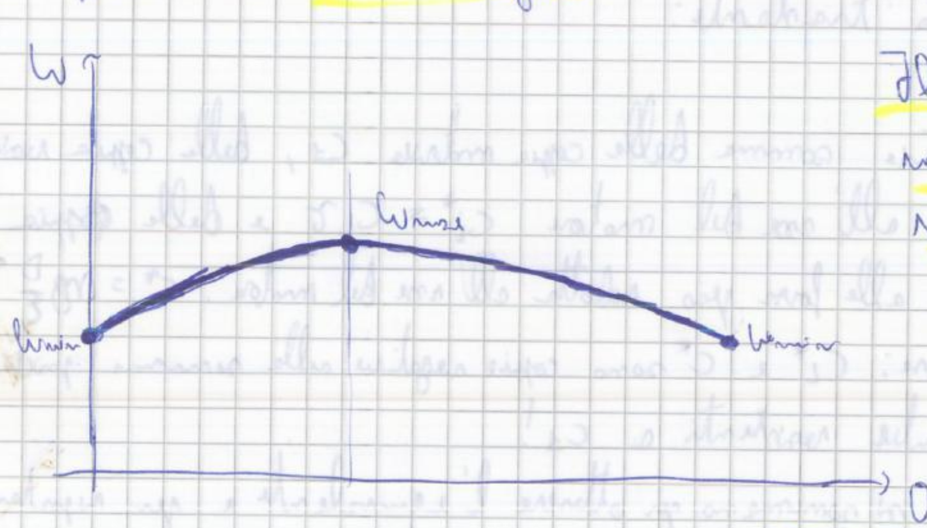
⇒ la coppia varia con l'angolo di rotazione.

Diagramma $\vartheta - C$:



In condizioni di regime $\Delta L_{ciclo} = 0$ ⇒ area + e area − sono uguali

Che fanno le velocità angolari?



Fluttuano tra un valore max ed un valore min.

La fluttuazione di ω vale:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega}}$$

↳ vel. ang. media

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 414