NUMERO: 1198

DATA: 24/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Mitrotta

MATERIA: Fisica II + Eserc.

Prof. Gozzellino

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA

In un sistema elettricamente isolato la somma algebrica delle cariche elettriche contenute in esso è costante.

Ciò non vuol dire che si conservi la carica, ma solo la somma algebrica. Dunque la distribuzione di carica può cambiare.

$\sum q_i = cost.$

LEGGE DI COULOMB

Questa legge descrive come interagiscono due cariche puntiformi ed in quiete (cioè le velocità delle cariche non devono essere relativistiche, possono anche muoversi lentamente).

$$\bar{F} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \bar{u}_r$$

Dove K è una costante e ed vale $\boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$, dove a sua volta ε_0 è la costante dielettrica del vuoto e vale $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ Nm^2/C$

Si dice che una carica nello spazio genera un campo elettrico, di cui risentono le altre cariche disposte attorno alla prima. Possiamo quindi intendere la forza di Coulomb come conseguenza del campo stesso:

$$\bar{F}_{q_2} = q_2 \bar{E}_{q_1}$$

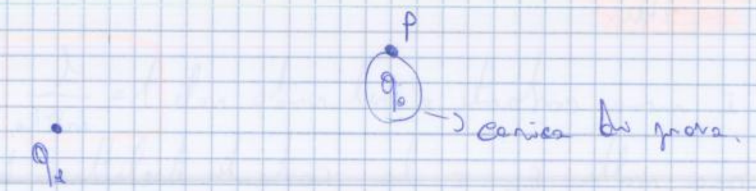
$\downarrow$ forza sulla carica q_2

$\downarrow$ campo generato dalla carica q_1

Il campo elettrico è un campo vettoriale, cioè un vettore applicato in più punti dello spazio.

MISURARE IL CAMPO ELETTRICO

Ho una carica q_1 che genera il campo elettrico, e voglio misurare quest'ultimo nel punto P.



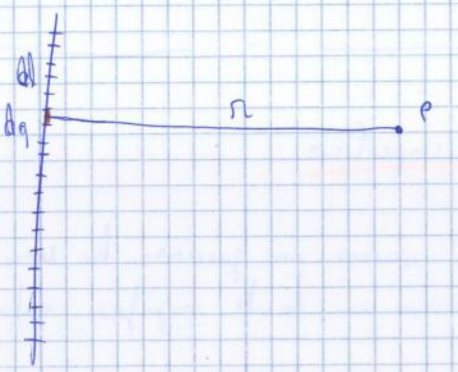
Pongo allora nel punto P una piccola carica di prova q_0.

$$\bar{E}(P) = \frac{\bar{F}}{q_0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 228

In questo caso non abbiamo una carica puntiforme, quindi non valgono tutte le considerazioni sul campo elettrico fatte in precedenza.

Dividiamo il filo in tante parti:



Il contributo di un'infinitesima parte al campo elettrico è:

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \bar{u}_r$$

e su tutto il filo risulta:

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{dq}{r^2} \bar{u}_r}$$

non è detto che la carica sia distribuita sul filo in modo uniforme

con l'integrale operato sulla lunghezza del filo il contributo $\frac{dq}{r^2}\bar{u}_r$ che può essere diverso da tratto a tratto.

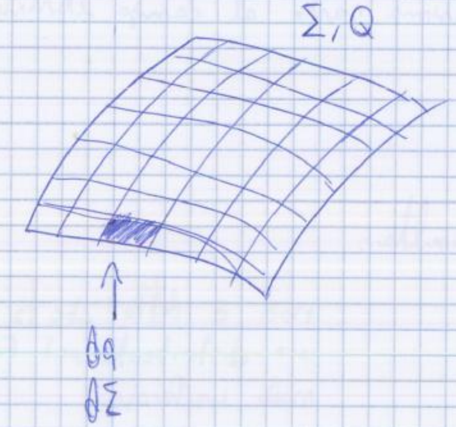
Inoltre si noti come l'integrale nella formula sia un integrale di vettori.

Infine possiamo definire la densità di carica per unità di lunghezza λ come:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow \left[\frac{C}{m}\right]$$

Carica distribuita su una superficie

Come nel caso precedente non siamo in presenza di una carica puntiforme, quindi dividiamo in tante superfici infinitesime.



Definiamo la densità di carica per unità di superficie σ come

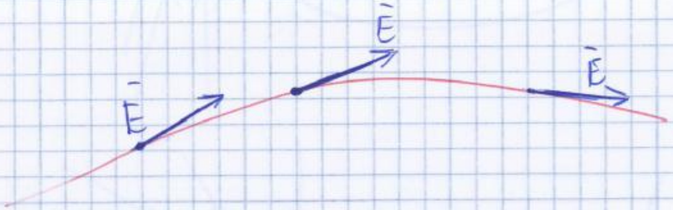
$$\sigma = \frac{dq}{d\Sigma} \rightarrow \left[\frac{C}{m^2}\right]$$ se carica uniforme $\sigma = cost.$

Analogamente al filo il campo elettrico complessivo sarà:

LINEE DI CAMPO

Ad ogni campo vettoriale si associano delle **linee di campo**, ovvero delle **curve che sono in ogni punto tangenti al proprio campo.**

Ad esempio:

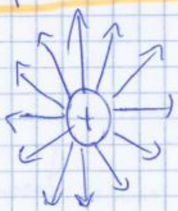


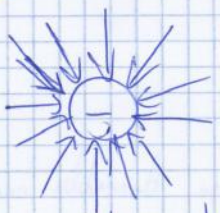
Il verso di percorrenza delle linee di campo coincide con quello delle frecce dei vettori.

Allo stesso modo, conoscendo le linee di forza del campo, possiamo **determinare** in ogni punto il vettore campo elettrico

Linee di forza delle cariche

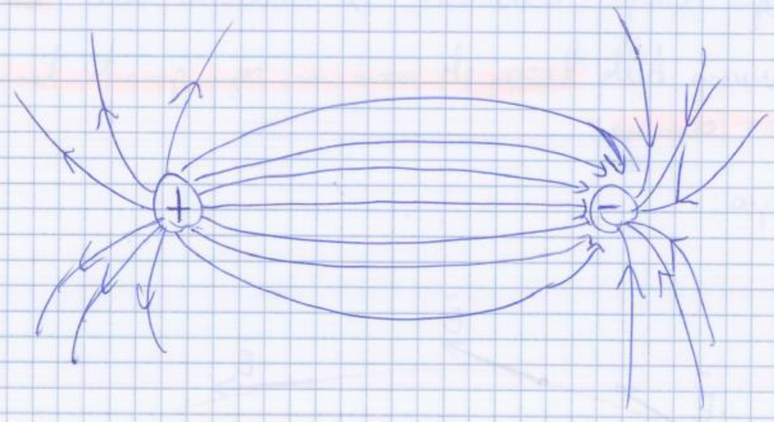
Carica positiva - linee **uscenti**

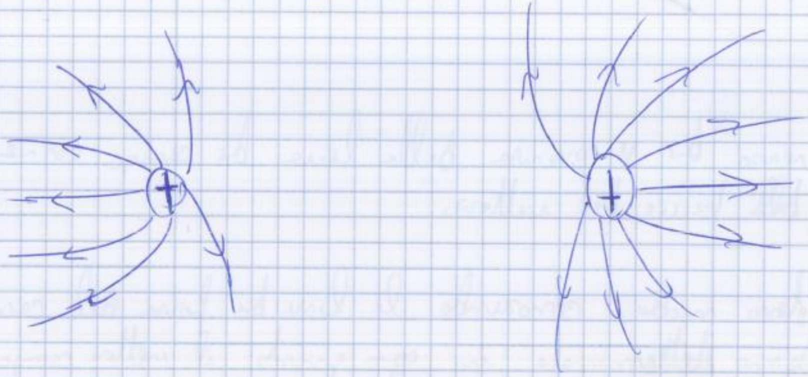




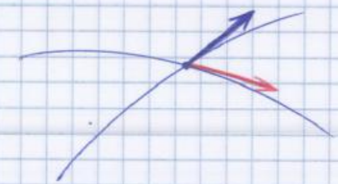
carica negativa → linee **entranti**

Le linee di forza si addensano dove il campo è più intenso





Inoltre due linee di forza non si intersecano mai.



Se ciò accadesse il campo dovrebbe avere in uno stesso punto due diverse direzioni, e ciò è assurdo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 228

dove $2\lambda\pi R = q$ (dato che con $\lambda = cost.$ si ha $\lambda = q/(2\pi R)$)

Inoltre, dato che $r = \sqrt{x^2+R^2}$ e $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x$$

- $x < 0 \rightarrow \bar{E}$ antiparallelo all'asse x
- $x = 0 \rightarrow \bar{E}$ nullo

Cosa succede per $x \rightarrow \infty$?

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^3\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{3/2}} \bar{u}_x$$

con $x >> R \Rightarrow \frac{R^2}{x^2} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} \bar{u}_x}$$

Cioè, per distanze molto grandi, la distribuzione di carica è assimilabile ad una carica puntiforme di valore pari alla carica totale dell'anello posta nel centro di esso.

POTENZIALE ELETTRICO

Se la carica immersa nel campo elettrico si sposta, essa compie un certo lavoro.

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = q\bar{E} \cdot d\bar{s}$$

Il lavoro totale per andare da A a B sarà:

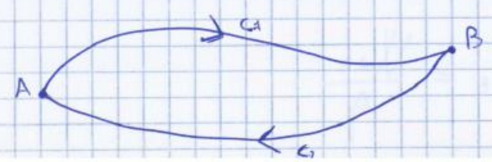
$$W = \int_{A_{C_1}}^{B} \bar{F} \cdot d\bar{s} = q\int_{A_{C_1}}^{B} \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

Dunque il lavoro dipende sia dagli estremi della curva che dalla sua forma.

Definiamo la tensione elettrica tra due punti A e B relativa ad un percorso C_1 come:

$$T_{\substack{A\rightarrow B \\ lungo\, C_1}} = \int_{A_{C_1}}^{B} \bar{E} \cdot d\bar{s}$$ integrale di linea di $\bar{E} \cdot d\bar{s}$

E se facessi un percorso chiuso?



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 228

differenza tra il potenziale in quest'ultimo e il potenziale all'infinito (che è nullo):

$$V(P) = V(P) - V(\infty)$$

Il potenziale è dunque una funzione univoca, continua e derivabile. Prende il nome di campo scalare poiché è definito in tutti i punti dello spazio. L'unità di misura è:

$$[V] = J/C \rightarrow \text{Volt}, V$$

Alla luce di ciò, il campo elettrico può essere misurato come:

$$[E] = V/m$$

Analogamente per l'energia potenziale si ha:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{s} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) =$$

$$= U_A - U_B$$

Da notare che mentre il potenziale si definisce in un punto indipendentemente dalla presenza o meno di una seconda carica, l'energia potenziale ne ha invece bisogno per essere definita:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r} + \text{cost.}$$

Come prima, se la distribuzione di carica che ha dato origine al campo elettrostatico è presente in una zona limitata dello spazio, si può affermare che per $r \rightarrow \infty$, $U(P) \rightarrow 0$ e dunque cost. $= 0$.

Perciò l'energia potenziale elettrostatica rappresenta il lavoro da compiere per spostare la carica da P a ∞.

Inoltre osserviamo che:

- $qq_0 > 0 \rightarrow$ se r aumenta, U diminuisce. Nel campo $W > 0$, cioè il sistema compie spontaneamente lavoro allontanando le cariche.
- $qq_0 < 0 \rightarrow$ se r aumenta, U aumenta. Nel campo $W < 0$, cioè il sistema non può lavorare spontaneamente per allontanare le cariche, ma piuttosto le farà avvicinare. Infatti per portare una carica da un punto all'infinito bisognerà fornire un lavoro dall'esterno, ovvero negativo.

Continua a valere la conservazione dell'energia:

$$U_e + \ldots + E_k = \text{cost.}$$

N.B.: attenzione ad applicare quanto detto fin'ora a campi che non siano conservativi: in quel caso non potremmo farlo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 228

Si giunge così alla

relazione punto per punto tra campo e potenziale

$$\bar{E} \cdot d\bar{s} = -dV \Rightarrow \bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Il campo elettrostatico, oltre ad essere conservativo, è anche irrotazionale. Ciò significa che il rotore del campo elettrostatico è nullo:

$$\text{rot}\,\bar{E} = 0$$

Dove il rotore è:

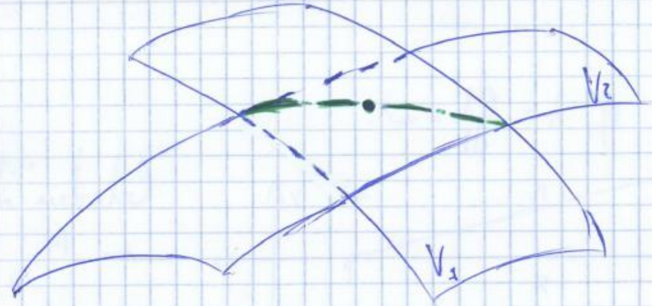
$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} V) = 0 \quad \text{(sono paralleli)}$$

Superfici equipotenziali

Una superficie equipotenziale è una superficie tale che $V(x,y,z) = \text{cost.}$

Le superfici equipotenziali non si possono intersecare mai.

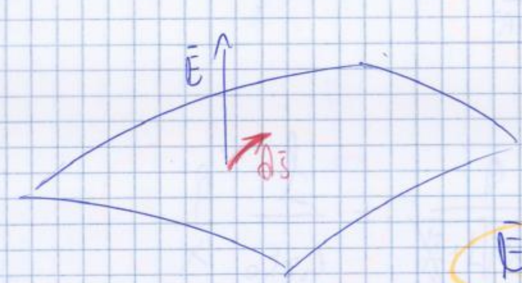


Se superfici in figura si intersecano sulla retta tratteggiata

Nel punto messo in evidenza esse dovrebbero avere 2 potenziali diversi, e ciò è assurdo.

Dove il potenziale varia più rapidamente avremo delle superfici equipotenziali più ravvicinate e dove esso varia più lentamente esse saranno più distanziate.

Cosa accade se ci muoviamo su una superficie equipotenziale



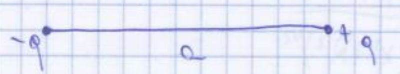
$$\bar{E} \cdot d\bar{s} = -dV = 0$$

Poiché il suddetto prodotto scalare risulta nullo deve risultare che $\bar{E} \perp d\bar{s}$. Dunque il campo elettrostatico sarà in ogni punto perpendicolare alla superficie equipotenziale.

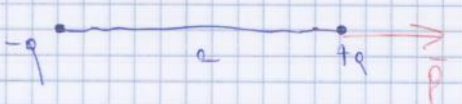
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 228

DIPOLI

Un dipolo è un sistema di due cariche. Queste hanno stesso modulo ma segno opposto.

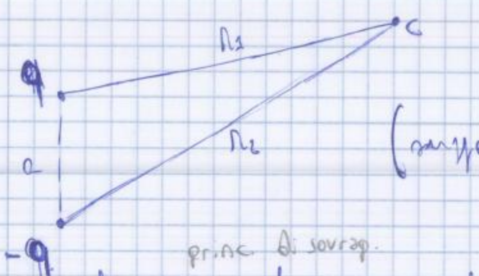


È possibile definire un momento di dipolo: esso è il vettore che ha come modulo il prodotto del valore assoluto della carica per la distanza, come direzione la congiungente fra le cariche e come verso quello verso la carica positiva.



$$\bar{p} = q\,\bar{a}$$

Il dipolo è il più semplice sistema neutro di cariche. Andiamo ora a studiare cosa succede a grande distanza dal dipolo.

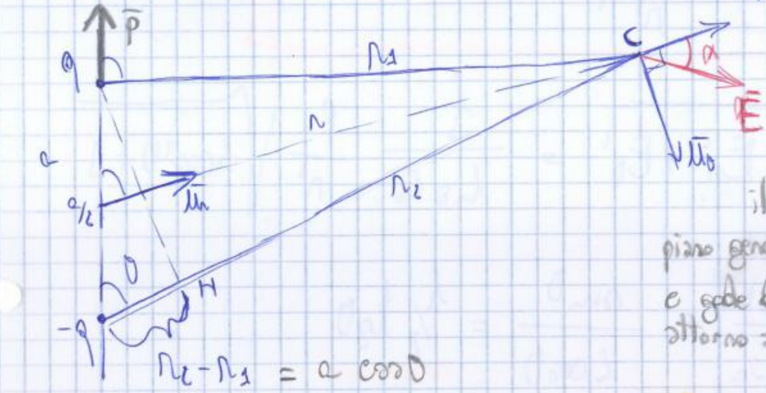


(supponendo $r_1, r_2 >> a$)

princ. di sovrap.

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Se a è molto piccolo rispetto a r_1 e r_2 (cioè a grande distanza), possiamo approssimare questi due a r, ossia la congiungente tra C e a/2. Un ulteriore approssimazione possibile è di considerare r_1 e r_2 come segmenti paralleli.



il campo sta sul piano generato da $\bar{p}$ e $\bar{u}_r$ e gode di simmetria cilindrica attorno all'asse di dipolo

$$r_2 - r_1 = a\cos\theta$$

$$V(C) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Anche se il sistema è di per sé neutro, esso genera comunque del potenziale, poiché le cariche non sono esattamente nello stesso punto. Di contro il potenziale diminuirà più rapidamente all'aumentare della distanza R rispetto ad un sistema carico.

Calcoliamo ora il campo elettrostatico come gradiente del potenziale, ma esprimendo quest'ultimo attraverso le coordinate polari:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

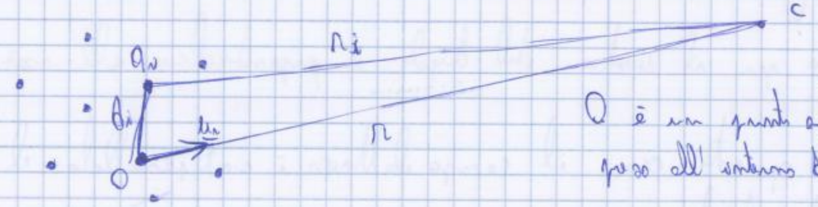
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 228

SISTEMI DI CARICHE

Ho un sistema di cariche e voglio calcolare il potenziale di questo in un punto C posto a grande distanza dal sistema rispetto alle dimensioni dello stesso

IP: $d << r$ con d = dim. media del sistema



Q è un punto arbitrario preso all'interno del sistema.

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

→ lo "sviluppo" come $\frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{\sum_i q_i \bar{d}_i \cdot \bar{u}_r}{r^2}$

Sfruttando l'ipotesi della grande distanza si dimostra:

$$V_C \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum_i q_i \bar{d}_i \cdot \bar{u}_r}{r^2} =$$

distanza QC; $\bar{d}_i$ → distanza infinitesima singola carica - punto O

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\bar{p}_0 \cdot \bar{u}_r}{r^2}}$$

dato $\bar{p}_0 = \sum_1^N q_i \bar{d}_i$ il momento di dipolo del sistema rispetto ad O

Ma a grandi distanze abbiamo che il secondo termine è trascurabile

$$\boxed{V_C \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}}$$

sistema carico → carica puntiforme

Ciò è possibile a grande distanza approssimare il sistema ad una carica puntiforme posta in un punto arbitrario all'interno del sistema.

Ma cosa succede se il sistema è neutro?

Scomparendo il primo termine, il secondo non potrà più essere considerato trascurabile:

$$\boxed{V_C \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \bar{u}_r}{r^2}}$$

sistema neutro → dipolo

Nel caso di sistema neutro si ha inoltre che il momento di dipolo è indipendente dal polo rispetto al quale lo si calcola.

Dunque il sistema neutro a grande distanza è modellizzabile come un dipolo elettrostatico.

N.B.: bisogna fare attenzione che il centro di massa delle cariche positive e quello delle cariche negative non coincidano. Altrimenti non possiamo più fare le approssimazioni fatte in precedenza (troveremmo $\bar{p} = 0$).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 228

La situazione di equilibrio stabile sarà ovviamente quella di $\bar{p} \parallel \bar{E}$. Se invece $\bar{p}$ è antiparallelo ad $\bar{E}$ si avrà una situazione di equilibrio instabile; quindi un dipolo che ruota, in un campo elettrico tende sempre a disporsi parallelamente ad esso.

Il dipolo come una molla → si mette ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio.

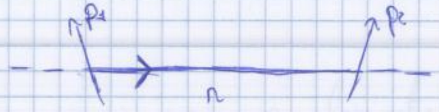
Si dice momento di richiamo:

$M = - pE \sin\theta$ → angolo tra $\bar{E}$ e $\bar{p}$

quel momento che fa oscillare il dipolo attorno alla posizione d'equilibrio.

Interazione fra due dipoli

Rappresento i dipoli con i loro rispettivi momenti di dipolo.



$U_{e_{2-1}} = - \bar{p}_2 \cdot \bar{E}_1$ ← energia potenziale del dipolo 2 dovuta al dipolo 1

$\bar{F} = -\nabla U_e$

$$U_{e_{2-1}} = - \bar{p}_2 \cdot \bar{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3}\left(3(\bar{p}_1 \cdot \bar{u}_r)(\bar{p}_2 \cdot \bar{u}_r) - \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2\right)$$

Ipotizziamo ora che i due dipoli siano paralleli e abbiano in comune lo stesso piano mediano:

$$U_{e_{2-1}} = \frac{+\,p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (\bar{p}_1 \parallel \bar{p}_2, \bar{p}_1 \perp \bar{u}_r)$$

Al crescere di r l'energia potenziale diminuisce, dunque i due dipoli tenderanno spontaneamente ad allontanarsi.

$$\bar{F} = -\nabla U_e = -\frac{\partial U_e}{\partial r} = +\frac{3 p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\, \bar{u}_r$$

... versore $\bar{u}_r$ va dal dipolo 1 al dipolo 2, la forza che agisce sul dipolo 2 è concorde a $\bar{u}_r$, quindi è una forza repulsiva.

Esempio

Le molecole dell'acqua ha un dipolo pari a $p = 6{,}2 \cdot 10^{-30}$ Cm. Due molecole distano l'una dall'altra $r = 5 \cdot 10^{-10}$ m. I due dipoli sono paralleli e hanno lo stesso piano mediano. Calcolare U_e.

$$U_e = +\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 2{,}77 \cdot 10^{-21}\ \text{J} = 1{,}73 \cdot 10^{-2}\ \text{eV}$$

elettrico e carica (prima vista a livello ... macroscopico). Dobbiamo però introdurre l'operatore divergenza:

$$\text{div}\,\bar{E} = \nabla \cdot \bar{E}$$

L'operatore divergenza si applica ad un vettore e dà come risultato uno scalare.

$$\text{div}\,\bar{E} = \nabla \cdot \bar{E} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{\text{div in coordinate cartesiane}}$$

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è:

$$\int_{\Sigma_{chiusa}} \bar{E} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = \int_V \text{div}\,\bar{E}\, dV$$

l'integrale della div del campo elettrico effettuato sul volume della sup. chiusa

$$\int_{\Sigma_{chiusa}} \bar{E} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = \int_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0} = \int_V \text{div}\,\bar{E}\, dV$$

$$\Rightarrow \int_V \left(\text{div}\,\bar{E} - \rho/\varepsilon_0\right) dV = 0$$

Quest'integrale è nullo qualsiasi sia la superficie chiusa e il volume racchiuso. Dunque vale:

$$\text{div}\,\bar{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Che è la relazione puntuale del campo elettrico e la carica.

Il campo elettrico è solenoidale!

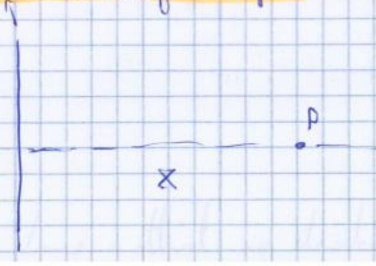
Per essere solenoidale un campo deve avere div nulla. Dato che $\text{div}\,\bar{E} = \rho/\varepsilon_0$, il campo elettrico non è solenoidale.

L'unica eccezione è nel caso di campo elettrico nel vuoto in assenza di cariche. ($\rho = 0$)

È altresì vero che in un campo solenoidale si ha che il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo, ma non possiamo assumere la condizione di divergenza nulla come sufficiente per dire che un campo è solenoidale.

Esempio

Filamento carico di lunghezza infinita

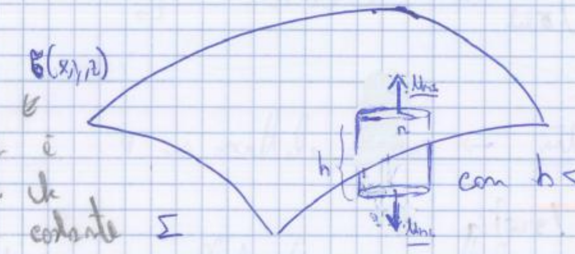


$$\lambda = \frac{dq}{dl} > 0$$

Vogliamo campo elettrico e potenziale in P.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 228

Campo elettrico che attraversa una superficie carica



con $h << r$

non è detto che sia costante Σ

Per applicare il teorema di Gauss scelgo una superficie cilindrica infinitesima con le basi parallele alla superficie, con le facce l'una da una parte e l'altra dall'altra della superficie.

$$d\phi(\bar{E}) = d\phi_{base1} + d\phi_{base2} + d\phi_{lat} =$$

$$= \bar{E}_1 \cdot \bar{u}_{n1}\, d\Sigma_{b1} + \bar{E}_2 \cdot \bar{u}_{n2}\, d\Sigma_{b2} + \bar{E} \cdot \bar{u}_{n3}\, d\Sigma_{lat}$$

Se $h << r$ allora anche la sup. lat. sarà molto piccola rispetto a quella delle due basi. Possiamo quindi trascurare il relativo flusso.

Il prodotto scalare $\bar{E}_1 \cdot \bar{u}_{n1}$ è la proiezione del campo elettrico nel semispazio superiore nella direzione normale. Analogamente $\bar{E}_2 \cdot \bar{u}_{n2}$ sarà la proiezione del campo nel semispazio inferiore.

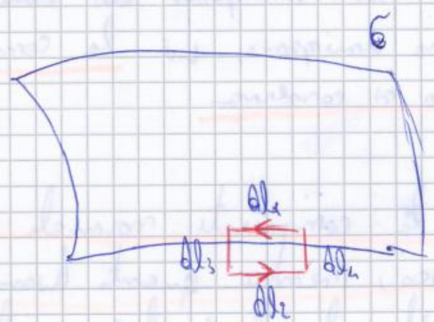
Ma $\bar{u}_{n2} = -\bar{u}_{n1}$, quindi:

$$\bar{E}_1 \cdot \bar{u}_{n1}\, d\Sigma_{b1} + \bar{E}_2 \cdot \bar{u}_{n2}\, d\Sigma_{b2} = (E_{1n} - E_{2n})\, d\Sigma_b = \frac{\sigma\, d\Sigma_b}{\varepsilon_0}$$

Tutte le volte che il campo elettrico attraversa una superficie carica, la sua componente normale subisce una discontinuità pari a $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Questa discontinuità è dovuta alla carica distribuita sullo strato, che genera un campo elettrico con versi opposti da una parte all'altra della superficie.

E cosa accade alla componente tangenziale?



Scegliamo un percorso di circuitazione: un rettangolo infinitesimo con due lati paralleli al piano e due perpendicolari.

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \rightarrow \text{in ipotesi di campo elettrostatico}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_1 \cdot d\bar{l}_1 + \bar{E}_2 \cdot d\bar{l}_2 + \bar{E}_3 \cdot d\bar{l}_3 + \bar{E}_4 \cdot d\bar{l}_4 = 0$$

Scelgo i lati in modo che:

$dl_3, dl_4 << dl_1, dl_2 \rightarrow$ infinitesimi di ordine superiore

$\Rightarrow$ trascuriamo $\bar{E}_3 \cdot d\bar{l}_3 + \bar{E}_4 \cdot d\bar{l}_4$:

$$\bar{E}_1 \cdot d\bar{l}_1 + \bar{E}_2 \cdot d\bar{l}_2 = 0$$

Quest'equazione di Poisson è lineare nel potenziale.

Volendo esprimere il laplaciano del potenziale in coordinate ortogonali avremmo:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

Il laplaciano è un operatore che può essere applicato ad un vettore o ad uno scalare, ed il risultato non ne modifica le caratteristiche.

Se $\rho(x,y,z) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$

Quando succede questo l'equazione di Poisson diventa equazione di Laplace. Le due equazioni danno sempre una soluzione univoca se vi sono delle condizioni al contorno tra cui quella che il potenziale e le sue derivate si annullino all'infinito.

MATERIALI CONDUTTORI

I materiali conduttori sono quelli che hanno delle cariche libere di muoversi. Andremo a considerare questi materiali in situazione di equilibrio. Dunque le cariche non dovranno essere soggette a forze, e pertanto il campo elettrico all'interno del conduttore dovrà essere nullo.

$\bar{F} = q\bar{E}$

Quando parliamo di campo elettrico nullo facciamo riferimento ad una situazione macroscopica.

Le cariche sono in quiete; non c'è nessun moto ordinato in una direzione prestabilita. Ma questo non vuol dire che le cariche sono ferme, c'è sempre agitazione termica. Macroscopicamente però si può dire che la velocità media delle cariche è nulla.

$\bar{E} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow V = \text{cost.}$

Un conduttore in equilibrio è un sistema equipotenziale.

Nulla vieta al conduttore di essere carico. Dove vanno a distribuirsi le cariche?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 228

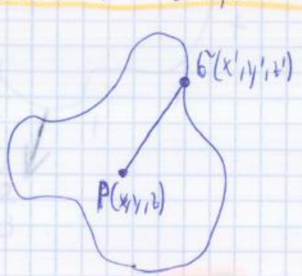
CAPACITÀ

Si parla di capacità di un conduttore di caricarsi fino ad un certo livello, e quindi di sopportare il campo elettrico e il potenziale che ne derivano.

$$\boxed{C = \frac{q}{V}}$$

Ma al contrario di quanto possa sembrare la capacità non dipende né dalla quantità di carica accumulata, né dal potenziale.

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\int_\Sigma \sigma(x',y',z')\, d\Sigma}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \frac{\sigma(x',y',z')\, d\Sigma}{r}}$$



Se andiamo a raddoppiare la carica, raddoppierà anche la densità superficiale di carica, e di conseguenza lo stesso farà il potenziale.

$q \to 2q \to 2\sigma \to 2V$ $\qquad C = \frac{2q}{2V} \to$ il rapporto rimane lo stesso.

Ma da che cosa dipende allora la capacità di un conduttore?

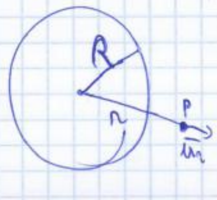
- Forma;
- dimensioni;
  - costante dielettrica del mezzo in cui si trova

$$[C] \to C/V = \text{Farad} = F$$

Questa è un'unità di misura molto grande, perciò useremo prevalentemente i suoi sottomultipli.

Esempio

Determinare la capacità di un conduttore sferico di raggio R



$C = ?$

$C = \frac{q}{V}$

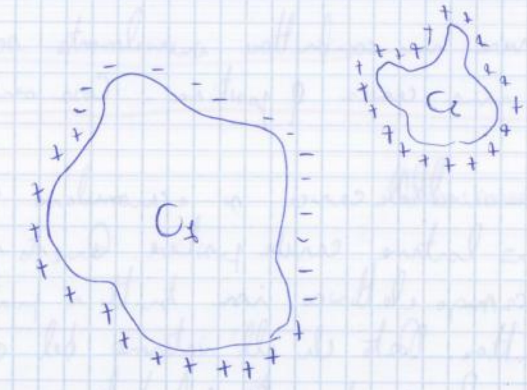
Ipotizziamo di avere nel conduttore una carica q generica

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overline{u}_r \quad \text{dove } q = 4\sigma\pi R^2$$

$$V(P) = -\int \overline{E}\, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \cancel{cost}$$

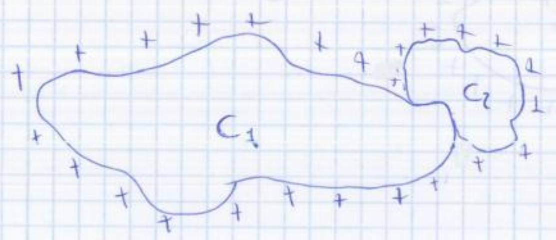
$$V_{cond} = V_{sup} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

Cosa succede invece tra due conduttori?



Le cariche indotte generate da C_2 su C_1 creano a sua volta un campo elettrico che provoca una ridistribuzione di carica nello stesso C_2.

Quando invece due conduttori si toccano, essi diventano un unico conduttore che si porta ad un unico potenziale V.

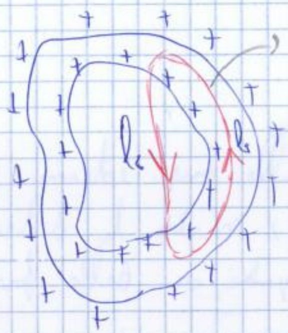


Cosa significa la dicitura "mettere a terra"?

Mettere a terra un oggetto significa mettere in collegamento elettrico un oggetto con la terra.

Conduttore cavo

Dove vanno a distribuirsi le cariche? Ipotizziamo sia sulla superficie esterna sia su quella interna.



prendiamo una linea di circ. opportuna

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$$

$$\int_{l_1} \cancel{\bar{E}}\cdot d\bar{l} + \int_{l_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$$

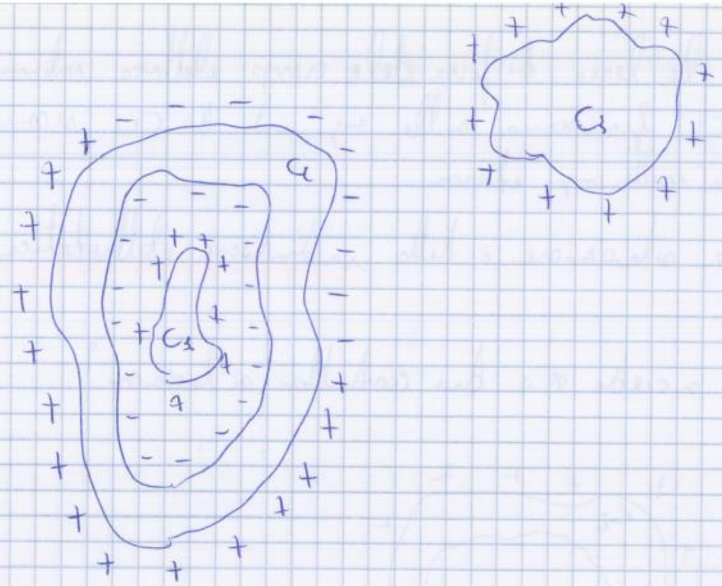
Per essere $\int_{l_2} \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$ le cariche non si devono distribuire sulla superficie interna. Per lo stesso motivo non potrò avere degli accumuli di carica positiva o negativa all'interno della cavità.

Un conduttore cavo carico è carico solo sulla superficie esterna.

Per quanto detto prima, la capacità di un conduttore (a parità di forma e altri parametri) è indipendente dal fatto che sia cavo o no.

Ma cosa succede se metto un conduttore carico nella cavità?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 228



La distribuzione sulla sup. interna di C_2 non risente minimamente della ridistribuzione per induzione sulla sup. esterna. Stessa cosa se si pone a contatto C_2 con C_3.

Dunque il conduttore è uno schermo elettrostatico. Infatti il fatto che il campo elettrostatico interno debba essere nullo, interrompe l'informazione di campo elettrico tra parte interna e parte esterna, e fa sì che ciò che accade fuori non influisce ciò che c'è dentro e viceversa.

Nella realtà il conduttore può funzionare da schermo anche se ha dei buchi, un esempio è la gabbia di Faraday.

CONDENSATORE

Un condensatore è un sistema di due conduttori in condizione di induzione elettrostatica completa.

Vi sono vari tipi di condensatori.

Condensatore sferico

Condensatore cilindrico

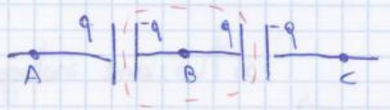
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 228

$$C = \frac{\cancel{\varepsilon}\,\Sigma}{\frac{\cancel{\varepsilon}\, d}{\varepsilon_0}} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}}$$ capacità del condensatore a facce piane e parallele

dove Σ è l'area delle armature e d è la distanza fra di loro.

Condensatori in serie

Collegare in serie vuol dire collegare un'armatura di un condensatore con quella dell'altro condensatore.



questo è un unico conduttore, e la carica indotta complessiva dev'essere pari a zero

$$V_A - V_B = \frac{q}{C_1} \quad ; \quad V_B - V_C = \frac{q}{C_2}$$

Sommiamo membro a membro

$$V_A - \cancel{V_B} + \cancel{V_B} - V_C = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = q \cdot \frac{1}{C_{eq}}$$

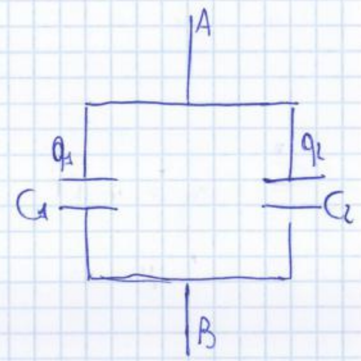
In generale:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

$C_{eq} < C_i \ \forall i$

Cosa avviene invece per dei condensatori in parallelo?

Essere in parallelo significa che ai condensatori è applicata la stessa differenza di potenziale.



$$V_A - V_B = q_1 / C_1$$

$$V_A - V_B = q_2 / C_2$$

$$q_1 = C_1 (V_A - V_B)$$

$$q_2 = C_2 (V_A - V_B)$$

$$\Rightarrow \quad q_1 + q_2 = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_{eq}} (V_A - V_B)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 228

Quando carichiamo un condensatore possiamo dire che al suo interno è immagazzinata un'energia elettrica pari a:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

cioè il lavoro speso per caricare il condensatore rimane sotto forma di energia elettrica

Quando si scarica il condensatore e le cariche si allontanano dalle armature, si dice che è stata dissipata l'energia elettrica immagazzinata al suo interno.

Ma potremmo esprimere l'energia elettrica di un condensatore in funzione del campo elettrico al suo interno?

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2\Sigma^2}{\frac{\varepsilon_0\Sigma}{d}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}d\Sigma =$$

$q = \sigma\Sigma$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 \Sigma d \to Vol$$

Ricordando $\bar{E} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\bar{u}_n$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Vol$$

Posso allora definire la densità di energia elettrostatica u_e come:

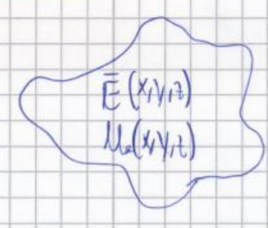
$$u_e = \frac{dU_e}{dVol} = \frac{U_e}{Vol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Questo risultato è valido per qualsiasi sistema e in qualsiasi regione dello spazio nella quale sia presente un campo elettrico.

$$\bar{E}(x,y,z) \Rightarrow u_e(x,y,z) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x,y,z)$$

Data inoltre una regione estesa dello spazio, e nota la densità di energia elettrica in funzione della posizione, si ha che la rispettiva energia elettrica sarà:

$$U_e = \int_{Vol} u_e(x,y,z)\, dVol = \int_{Vol}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x,y,z)\, dVol$$



Nel caso di un sistema di cariche, per calcolare l'energia elettrica associata a tale sistema si può ricavare il campo elettrico in funzione dello spazio, dopo la densità d'energia elettrica e conseguentemente l'energia.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 228

$$\Rightarrow \frac{E_0}{E_k} = k$$

$$E_0 - E_k = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 k} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{(k-1)}{k}$$

Osserviamo $k - 1 = \chi$ = suscettività elettrica del dielettrico

$$\Rightarrow E_k = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{k-1}{k} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{k-1}{k} \rightarrow \sigma_p$$

$$E_k = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$

sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature e del campo di una distribuzione uniforme di carica con densità σ_p che immaginiamo depositata sulle facce dello strato dielettrico con segno opposto a quello della carica libera sull'armatura contigua

Per polarizzazione si va a formare sulle pareti del dielettrico a contatto con le armature del condensatore degli strati di carica di segno opposto a quello delle cariche sulle armature.

In questo modo si spiega il segno "−" del termine $\frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}$.

Le cariche di segno opposto poste a contatto non si vanno ad annullare per il semplice motivo che il dielettrico non permette alle cariche di "saltare" da un materiale all'altro.

Per quanto riguarda la capacità si ha che:

$$C_k = \frac{q}{V_k} = \frac{q}{V_0}k = C_0 k$$

I dielettrici si dividono in due specie:

- anisotropi → hanno caratteristiche elettriche diverse a seconda della direzione che scegliamo lungo le celle cristalline (molecole cristalline con celle non ...)
- isotropi → le caratteristiche elettriche non dipendono dalla direzione scelta lungo le celle cristalline (amorfi).

Come si modificano le formule con i dielettrici isotropi?

Bisogna sostituire ε_0 con $\varepsilon_0 \cdot k$.

Ad esempio:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \longrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d} \longrightarrow \frac{\varepsilon_0 k \Sigma}{d}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 228

Consideriamo una regione infinitesima della sostanza che ha subito la polarizzazione.

$d\bar{p} = \langle \bar{p} \rangle \, dN$ ↳ numero di entità elementari nella regione infinitesima

$\frac{d\bar{p}}{dV} = \langle \bar{p} \rangle \frac{dN}{dV}$ → se la sostanza non è omogenea o isotropa $d\bar{p}$ può essere in funzione della posizione

↓

$\bar{P}$ momento di dipolo per unità di volume → polarizzazione

$\frac{d\bar{p}}{dV} = \langle \bar{p} \rangle \frac{dN}{dV} = \langle \bar{p} \rangle n$

↳ numero di entità elementari per unità di volume

$[P] \to C/m^2$

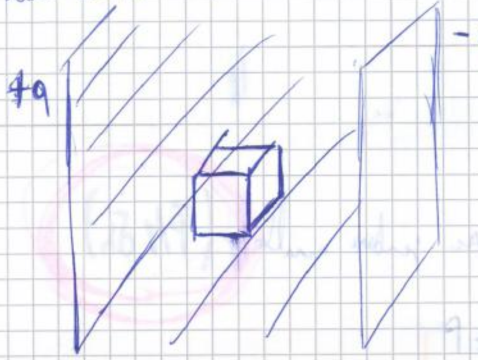
Quale è il legame tra polarizzazione e campo elettrico?

In caso di sostanze isotrope la polarizzazione e il campo elettrico sono vettori paralleli, tali che:

$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi \bar{E}$

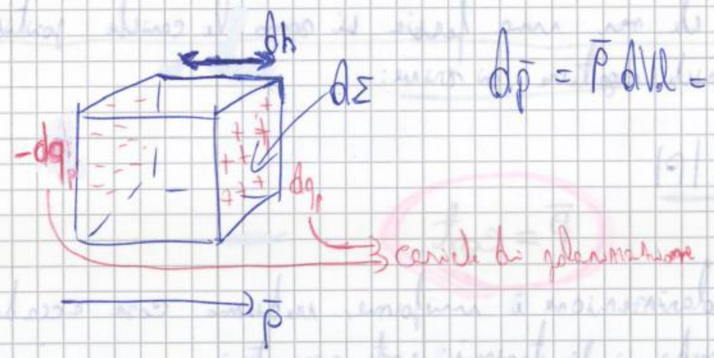
Se la polarizzazione è uniforme $\bar{P} = \text{cost.}$

Consideriamo un condensatore a facce piane e parallele riempito con un dielettrico:



Prendo un parallelepipedo infinitesimo di dielettrico con due facce parallele alle armature del condensatore

$\vec{E}, \bar{P}$ →



$\bar{P}$ →

$d\bar{p} = \bar{P} \, dV = P \, d\Sigma \, dh$

Il mio parallelepipedo è complessivamente neutro, e se mi pongo a grande distanza rispetto alle sue dimensioni lo posso considerare come un dipolo (è polarizzato).

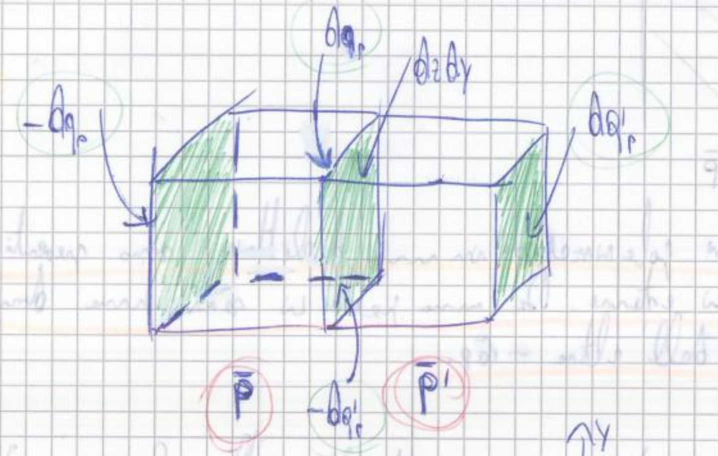
Su una superficie ho una carica dq_p, sull'altra $-dq_p$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 228

Se $\bar{P}$ non è parallelo a u_n le cariche di polarizzazione si andranno ovviamente a formare su tutte le facce del parallelepipedo. ma non all'interno del dielettrico!

E se invece la polarizzazione varia da punto a punto?

$\bar{P} \neq cost.$



dq_p non si annulla con $-dq'_p$ poiché varia la polarizzazione da punto a punto.

→ carica complessiva sulla faccia

$$dq_p - dq'_p = P_x\,dy\,dz - P'_x\,dy\,dz$$

Considero solo la componente di P nella direzione perpendicolare alla superficie.

Dato che mi sposto di distanza infinitesima posso scrivere lo sviluppo in serie di P'_x:

$$P_x\,dy\,dz - P'_x\,dy\,dz = \left(P_x - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x}dx\right)\right)dy\,dz$$

Mi sono spostato in un intorno del primo parallelepipedo.

$$dq_p - dq'_p = -\frac{\partial P_x}{\partial x}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dVol}$$

Facendo un discorso analogo sulle altre facce, avrò che l'ammontare infinitesimo di carica totale è:

$$dq_{p_{TOT}} = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = -\operatorname{div}\bar{P}\,dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{dq_{p_{TOT}}}{dVol} = -\operatorname{div}\bar{P}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_p = -\operatorname{div}\bar{P}}$$

Riassumendo:

$\bar{P} = cost. \Rightarrow \sigma_p = \bar{P}\cdot u_n$

$\bar{P} \neq cost. \Rightarrow \sigma_p = \bar{P}\cdot u_n$ (cariche in superficie)

$\rho_p = -\operatorname{div}\bar{P}$ (cariche all'interno).

Quindi, un dielettrico inizialmente neutro ma polarizzato dovrà avere carica superficiale complessiva nulla:

$$q = \int_\Sigma \sigma_P \, d\Sigma = \int_\Sigma \bar{P} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = 0$$

- $\bar{P} \neq \text{cost.}$

Avremo, oltre ad una carica di polarizzazione di superficie, anche una carica di polarizzazione di volume:

$$\sigma_P = \bar{P} \cdot \bar{u}_n$$

$$dq_{Pvol} = -\operatorname{div} \bar{P} \, dV$$

$$\rho_P = -\operatorname{div} \bar{P}$$

Come prima, un dielettrico polarizzato inizialmente neutro, dovrà avere carica complessiva nulla:

$$q = \int_\Sigma \sigma_P \, d\Sigma + \int_{Vol} \rho_P \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \bar{P} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = \int_{Vol} \operatorname{div} \bar{P} \, dV$$

cioè le distribuzioni di carica superficiale e spaziale si compensano globalmente

COME SI MODIFICANO LE EQ. DI MAXWELL?

Il campo elettrostatico è conservativo, e tale rimane.

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0$$

Per quanto riguarda il teorema di Gauss dovremo considerare anche le cariche di polarizzazione:

$$\int \bar{E} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = \frac{q + q_P}{\varepsilon_0} \quad , \quad \operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0}$$

Le cose si possono complicare: le cariche di polarizzazione non sappiamo come sono distribuite.

Come possiamo eliminare ρ_P dall'equazione?

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \bar{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \varepsilon_0 \bar{E} + \operatorname{div} \bar{P} = \rho \Rightarrow \operatorname{div} (\varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho$$

Definiamo l'induzione dielettrica $\bar{D}$ come

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 228

Bella notizia: se il dielettrico oltre ad essere isotropo è anche omogeneo possiamo sostituire ε_0 con ε in quelle relazioni.

Ad esempio:

$$\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} \longrightarrow \text{div}\,\bar{E}\ \frac{\rho}{\varepsilon}$$ NO PER ISOTROPI

$$\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} \longrightarrow \text{div}\,\bar{E}\ \frac{\rho}{\varepsilon}$$ SÌ PER ISOTROPI OMOGENEI

Dimostrazione!

$$\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\text{div}\,\bar{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\text{div}(\varepsilon_0 \chi \bar{E})}{\varepsilon_0}$$

$$\text{div}\,\bar{E} + \frac{\text{div}(\varepsilon_0 \chi \bar{E})}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

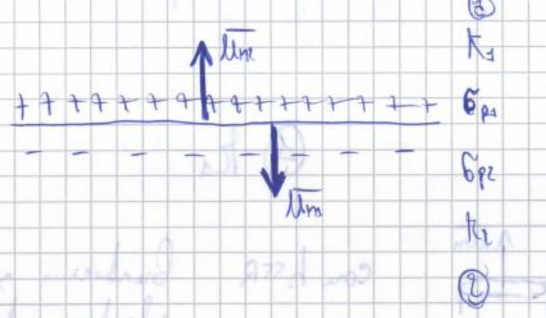
posso portare fuori χ solo se diel. è omogeneo

$$\text{div}\,\bar{E} + \frac{\varepsilon_0 \chi}{\varepsilon_0}\,\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow (\text{div}\,\bar{E})(1+\chi) = \rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 k} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

DIELETTRICI A CONTATTO

Cosa succede alla superficie di separazione dei due dielettrici?



La componente tangenziale del campo elettrico si mantiene costante:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

La componente normale ha una discontinuità:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}}{\varepsilon_0}$$ → somma delle densità di carica polarizzata

$$= \frac{\bar{P}_1 \cdot \bar{u}_{n1} + \bar{P}_2 \cdot \bar{u}_{n2}}{\varepsilon_0} = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\varepsilon_0}$$

occhio: si inverte l'ordine di 2n e 1n

Ad esempio:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 228

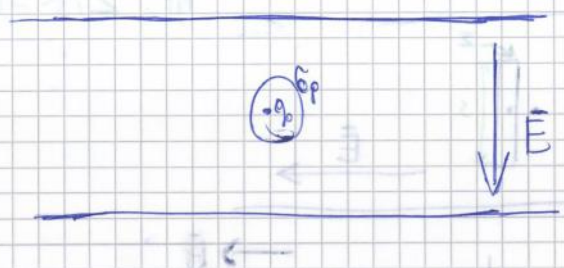
$$\Rightarrow \boxed{\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{k_1}{k_2}} \rightarrow$$ rifrazione linee di forza del campo elettrico

Da questa relazione posso dire come varia l'inclinazione del campo elettrico passando da un dielettrico ad un altro.

Si osserva come se $\theta_1 = 0$ anche $\theta_2 = 0$ (cioè un campo elettrico perpendicolare alla superficie non viene deviato).

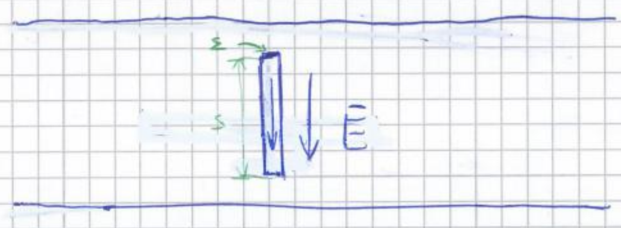
CAMPO ELETTRICO IN UN DIELETTRICO

Scelgo il mio dielettrico, ci faccio una cavità e ci metto una carica q_0. Voglio [misurare] il campo elettrico attraverso la misura della forza su q_0.



Ma il campo elettrico così calcolato non sarà mai uguale al campo elettrico reale in quel punto di dielettrico. Questo perché sulla superficie della cavità si genera una σ_p di cariche polarizzate che va a modificare il campo elettrico stesso.

Creando allora una cavità lunga e stretta nella direzione del campo elettrico:



NP: $\Sigma / s^2 \simeq 0$

$\Rightarrow$ le cariche di polarizzazione sulle basi sono trascurabili

Dato che la componente tangenziale del campo elettrico si

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 228

Energia associata al campo elettrico in un dielettrico

Nel caso di dielettrico isotropo:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 k E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}DE$$

ricordando che $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$

Nel caso di dielettrico anisotropo:

$$u_e = \frac{1}{2}\bar{D}\cdot\bar{E}$$

Polarizzazione ionica

In certi cristalli detti ionici si ha che immergendoli in un campo elettrico, gli ioni del reticolo si spostano a causa dell'effetto di quello dando origine ad un momento di dipolo addizionale per unità di volume, cioè ad una polarizzazione. Questo contributo di polarizzazione è maggiore rispetto a quello di polarizzazione elettronica.

Materiali piezoelettrici

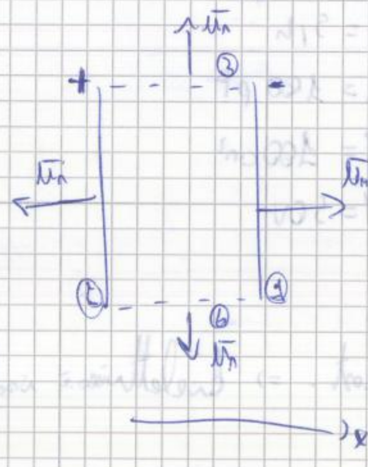
Esistono delle sostanze che se sottoposte a compressione o trazione, e più in generale a deformazioni meccaniche, manifestano una polarizzazione spontanea e sviluppano quindi un campo elettrico. Al tempo stesso si ha che immergendo questi materiali in un campo elettrico, questi oltre a polarizzarsi si deformano meccanicamente.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 228

$$Q = CV = 5 \cdot 10^{-9}\, C$$

Se il dielettrico è isotropo non ci sono q_p al suo interno, ma solo sulla superficie.

$$\sigma_p = \bar{P} \cdot \bar{u}_n = \varepsilon_0 \chi \bar{E} \cdot \bar{u}_n$$



$$\sigma_{p_1} = \varepsilon_0 \chi E = 4{,}09 \cdot 10^{-7}\, C/m^2$$

$$\sigma_{p_2} = -\,4{,}09 \cdot 10^{-7}\, C/m^2$$

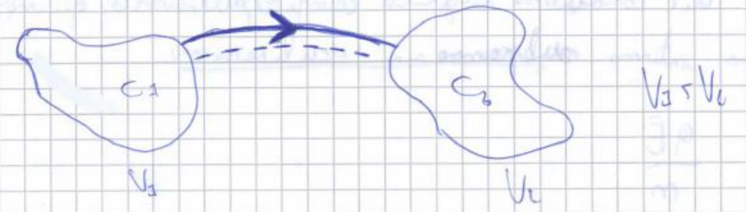
$$\sigma_{p_3} = \sigma_{p_4} = 0$$

$$q_{p_1} = \sigma_{p_1} \Sigma = 4{,}09 \cdot 10^{-9}\, C$$

$$q_{p_2} = \sigma_{p_2} \Sigma = -4{,}09 \cdot 10^{-9}\, C$$

Si noti come la somma di tutte le cariche sia pari a 0, poiché il sistema è neutro.

FENOMENI LEGATI ALLO SCORRIMENTO DI CORRENTE



Mettendo a contatto due conduttori a potenziali diversi si avrà uno spostamento di elettroni verso il potenziale maggiore. Una volta colmata la differenza di potenziale il flusso di carica si ferma.

Se invece riusciamo a mantenere costante nel tempo la differenza di potenziale avremo ~~sempre~~ un flusso ordinato di cariche.

Per non pensare alla carica come qualcosa di astratto, parleremo di portatori di carica, ovvero oggetti fisici aventi una massa che sono caratterizzati da una certa quantità di carica.

Qual è, ad esempio, il numero di portatori per unità di volume del rame?

numero di massa

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{A/\rho} = 8{,}49 \cdot 10^{28}\, m^{-3} \quad (e/m^3)$$

$V \to m/\rho$

$\rho \to 8{,}96 \cdot 10^3\, kg/m^3$

$A \to 63{,}55 \cdot 10^{-3}\, kg$

densità del rame

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 228

- portatori positivi $\longrightarrow \overline{v_d} \parallel \overline{J}$
- portatori negativi $\longrightarrow \overline{v_d}$ antiparallela $\overline{J}$

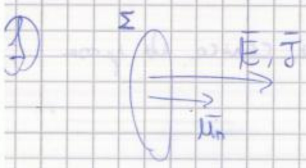
$\Rightarrow$ $\overline{J}$ e $\overline{E}$ ~~sono~~ sempre paralleli e concordi

$$di = \overline{J} \cdot \overline{u_n}\, d\Sigma$$

L'intensità di corrente attraverso una superficie è pari al flusso della densità di corrente attraverso la stessa superficie:

$$i = \int_\Sigma \overline{J} \cdot \overline{u_n}\, d\Sigma$$

Ci sono due casi particolari:

1) 

$\overline{J} \parallel \overline{u_n}$

$$\Rightarrow i = \int_\Sigma J\, d\Sigma$$

2) La corrente scorre in modo uniforme $\Rightarrow \overline{J} = \text{cost.}$

Se inoltre $\overline{J} \parallel \overline{u_n}$:

$$i = J \int_\Sigma d\Sigma \Rightarrow i = J\Sigma \Rightarrow J = i/\Sigma$$

Dunque l'unità di misura di J è A/m^2.

Nel caso si abbia flusso sia di cariche positive che di cariche negative, dovremo tener conto di entrambi i contributi:

$$\overline{J} = n_+ e\, \overline{v_{d+}} - n_- e\, \overline{v_{d-}}$$

↳ dovuto al segno delle cariche negative

La velocità di deriva è solitamente piccola:

$$v_d \sim (10^{-3} \div 10^{-4})\, m/s$$

al contrario della velocità di agitazione termica, che risulta essere molto grande rispetto alla v_d:

$$v_{th} \sim (10^5 \div 10^6)\, m/s$$

Ma poiché il numero di portatori è molto grande, anche se la ~~v_d~~ del singolo portatore è piccola, si genera un effetto cumulativo che annulla la velocità di agitazione termica dato che questa non ha alcuna direzione preferenziale. Dunque quella che misuriamo a misurare a livello macroscopico è proprio la v_d!

REGIME STAZIONARIO

Si osserva che se non c'è mai nessun accumulo di carica, si dovrà necessariamente avere che tanto sarà il flusso di $\bar{J}$ entrante tanto sarà il flusso di $\bar{J}$ uscente:

$$\Rightarrow \frac{\partial q_{int}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma\,chiusa} \bar{J} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \bar{J} = 0$$

In queste condizioni diciamo di essere in regime stazionario, ed il vettore $\bar{J}$ risulta essere solenoidale.

N.B.: ciò non vuol dire né che $\bar{J} = 0$ o che $\bar{J} = \text{cost.}$ in tutti i punti.

Possiamo anche dare una condizione alternativa per stabilire se siamo in regime stazionario. Ovvero se il tempo di variazione della corrente è molto lungo rispetto al tempo di propagazione della perturbazione.

Ad esempio:

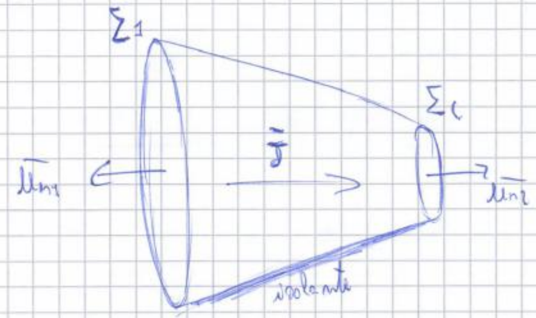
dimensione del sistema

$$l = 1\,m \rightarrow t = l/c = \frac{1}{3 \cdot 10^8\, m/s} = 0{,}33 \cdot 10^{-8}\, s$$

tempo variazione corrente

$$t' = 2 \cdot 10^{-2} \quad \rightarrow \quad t' >> t \Rightarrow \text{vale il regime stazionario.}$$

CONDUTTORI A SEZIONE VARIABILE



La superficie totale considerata sarà necessariamente una superficie chiusa. Ipotizziamo di essere in regime stazionario:

$$\oint_{\Sigma tot} (\bar{J}) = 0 = \int_{\Sigma_1} \bar{J} \cdot \bar{u}_{n1} \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \bar{J} \cdot \bar{u}_{n2} \, d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma lat} \bar{J} \cdot \bar{u}_{n\ell} \, d\Sigma}_{=0}$$

isolante all'esterno ⇒ non ci sono cariche che fuoriescono

$$\Rightarrow \oint_{\Sigma tot} (\bar{J}) = -i_1 + i_2 = 0$$

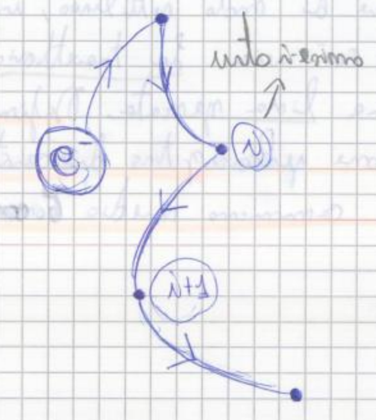
$$\Rightarrow i_1 = i_2$$

Se siamo in regime stazionario l'intensità di corrente è costante in ogni sezione di un conduttore.

N.B.: l'intensità di corrente è sempre la stessa, non la densità di corrente.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 228

Ne risulterà quindi un moto parabolico dell'elettrone. Ad ogni urto però, l'elettrone perde le informazioni del suo stato precedente, e riparte dunque con la sola v_{th} alla quale in seguito si combinerà la velocità generata dall'accelerazione dovuta al campo elettrico. Ne consegue dunque che gli elettroni descriveranno porzioni di parabole:



Per il singolo elettrone:

$$\overline{v}_{i+1} = \overline{v}_i + \overline{a}\,\tau$$

$$\overline{v}_{i+1} = \overline{v}_i - \frac{|e|\overline{E}}{m}\tau$$

In media, per tutti gli N elettroni si ha:

$$\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}\left(\overline{v}_{i+1}\right)_j = \cancel{\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}(\overline{v}_i)_j} - \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{j}^{N}\frac{|e|\overline{E}}{m}\tau}$$

$\to 0$ perché subito dopo l'urto v_{th} è casuale e quindi per il sistema è 0

$\frac{1}{N}$ è ininfluente, perché $\frac{|e|\overline{E}}{m}\tau$ è uguale per ogni elemento della sommatoria e risulta $\frac{N}{N}\frac{|e|\overline{E}}{m}\tau$

$$\Rightarrow \langle \overline{v}_{i+1} \rangle = 0 - \frac{|e|\overline{E}}{m}\tau$$

è la velocità di deriva $\overline{v}_d$ uguale alla velocità dell'elettrone appena prima dell'urto i+1-esimo

Definendo la mobilità μ come:

$$\mu = -\frac{|e|\tau}{m}$$

avremo che la velocità di deriva sarà:

$$\overline{v}_d = \mu\overline{E}$$

Adesso moltiplichiamo ambo i membri per il numero di portatori per unità di volume n e per la carica del portatore $-|e|$:

$$n(-|e|)\,\overline{v}_d = -|e|\,n\,\mu\overline{E} = \frac{n e^2 \tau}{m}\overline{E}$$

Definendo la conducibilità elettrica σ come

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

e ricordando che $\overline{J} = n e \overline{v}_d$, abbiamo che:

$$\overline{J} = \sigma\overline{E}$$

e quindi che

$$\overline{E} = \frac{\overline{J}}{\sigma} = \rho\overline{J}$$

dove ρ è detta resistività elettrica ed è il reciproco della conducibilità: $\rho = \frac{1}{\sigma}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 228

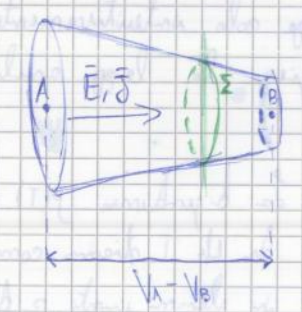
Nei superconduttori si ha:

Ad una certa temperatura, detta critica, la resistività piomba a zero ch questo materiale si ha $\bar{J} \neq 0$ anche senza campo elettrico. Solitamente T_c è molto bassa, al massimo 110K.

T_c → temperatura critica ⇒ al di sotto di questa si riesce a mantenere una intensità di corrente anche molto elevata senza dover applicare una ddp.

LEGGE DI OHM IN FORMA INTEGRALE

Dalla legge in forma locale sappiamo che: $\bar{E} = \rho \bar{J}$



$$V_A - V_B = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_A^B \rho \bar{J} \cdot d\bar{l} =$$

ipotizziamo $\bar{J}$ omogeneo e ∥ alle sup. di base e quindi ∥ $d\bar{l}$

$$= \int_A^B \rho J \, dl = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma} \, dl =$$

ipotizziamo J costante su ogni sezione; sezione variabile

$$= i \int_A^B \frac{\rho \, dl}{\Sigma}$$ ipotizzando un regime stazionario

Definendo la resistenza del conduttore R come:

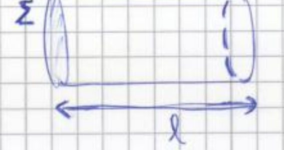
$$\boxed{R = \int_A^B \frac{\rho \, dl}{\Sigma}}$$

si ha:

$$V_A - V_B = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{intensità di corrente attraverso una sezione di conduttore}}}{i} R = i \int_A^B \frac{\rho \, \overset{\text{tratto infinitesimo}}{dl}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sezione del tratto infinitesimo}}}{\Sigma}}$$

⇒ Ohm integrale per un tratto macroscopico di un circuito (es. conduttore)

Se abbiamo $\Sigma = \text{cost.}$ e $\rho = \text{cost.}$ allora:



$$\boxed{R = \frac{\rho l}{\Sigma}}$$

N.B.: R dipende dal tipo di conduttore e dalle sue caratteristiche geometriche, mentre la resistività dipende solo dal tipo di conduttore.

$$[R] \longrightarrow \frac{V}{A} = \Omega \text{ , Ohm}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 228

Quale è l'energia necessaria a mantenere ΔV costante per far muovere le cariche?

$\Delta W = \Delta q V = i \Delta t V \implies$ lavoro infinitesimo necessario per far fluire la corrente i in un conduttore ai cui capi vi è una ddp V per un tempo infinitesimo Δt

diff. di pot. fra due punti: $V = V_A - V_B$

Per un tempo finito avremo:

$$W = \int_t i V \,dt$$

Se V e i non variano nel tempo avremo:

$$W = i V \Delta t$$

N.B. queste relazioni valgono anche per conduttori non ohmici.

La potenza necessaria per far scorrere una corrente i lungo un conduttore ai cui capi c'è una ddp V, per un tempo infinitesimo Δt è:

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = iV}$$

Sostituendo le relazioni valide per i resistori si avrà:

$$P = i^2 R = V^2/R \quad \text{(valida solo per i resistori)}$$

Per far scorrere la corrente in un conduttore viene speso lavoro sotto forma di energia termica, attraverso ciò che è noto come effetto Joule. Per il modello di Drude-Lorentz gli elettroni perdono le informazioni dopo ogni urto e per farlo cedono energia all'ambiente (cioè al conduttore). Pertanto all'interno di un conduttore attraversato da corrente si verifica un aumento di energia interna e quindi di temperatura.

L'effetto Joule ha un lato positivo e uno negativo:

- molti elettrodomestici funzionano sfruttando l'energia dell'effetto Joule (cioè quelli in cui un resistore è riscaldato grazie al passaggio di corrente);
- i fili di un circuito rischiano di surriscaldarsi fino a fondersi se le resistenze non sono opportune.

Un fusibile è un tratto di conduttore con sezione minore del resto del circuito. Esso risulta essere il punto più debole del circuito poiché avendo un'alta resistenza all'aumentare della corrente la temperatura sale molto facilmente e altrettanto facilmente il fusibile fonde interrompendo il circuito e ciò che c'è a valle.

La potenza può anche essere vista come lo scalare tra forza e velocità di deriva:

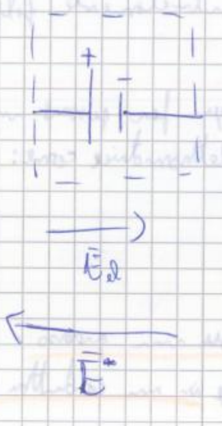
$$P = \bar{F} \cdot \bar{v_d} = -|e| \bar{E} \cdot \bar{v_d} \quad \text{(potenza per far muovere il singolo elettrone)}$$

Per unità di volume si avrà:

$$P_V = -n|e|\bar{E} \cdot \bar{v_d} = \boxed{\bar{E} \cdot \bar{J}} \quad \text{(a livello locale)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 228

Per convenzione la corrente scorre da un punto a potenziale maggiore ad un punto a potenziale minore.



Il campo elettrostatico nel generatore sarà diretto dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore.

$\bar{E}^*$ è il campo elettromotore, cioè il campo necessario perchè ci sia il flusso continuo di cariche anche al di fuori delle zone del generatore. Si avrà sempre che

$|\bar{E}^*| > |\bar{E}_{el}|$ → cioè il campo risultante deve essere opposto a quello elettrostatico affinché scorra corrente.

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = \int_A^B \bar{E}_{el}\cdot d\bar{l} + \int_B^A (\bar{E}_{el}+\bar{E}^*)\cdot d\bar{l}$$

Il campo elettromotore è un campo non conservativo. Può avere varie origini, ma non può essere semplicemente generato da una carica in quiete.

$$\int_A^B \bar{E}_{el}\cdot d\bar{l} + \int_B^A (\bar{E}_{el}+\bar{E}^*)\cdot d\bar{l} = \underbrace{\cancel{\oint \bar{E}_{el}\cdot d\bar{l}}}_{\to 0} = \int_B^A \bar{E}^*\cdot d\bar{l}$$

Si ha dunque che la forza elettromotrice di un circuito in cui scorre corrente continua è l'integrale di linea del campo elettromotore all'interno del generatore.

Ogni generatore sarà caratterizzato da una forza elettromotrice, ed il campo elettromotore sarà sempre il responsabile dello scorrere della corrente.

$$\mathcal{E} = \int_A^B \bar{E}_{el}\cdot d\bar{l} + \int_B^A \bar{E}\cdot d\bar{l} = \underbrace{(V_A - V_B)}_{R i} + i r$$

dove r è detta resistenza interna del generatore.

$$\boxed{r = \frac{1}{i}\int_B^A \bar{E}\cdot d\bar{l}}$$

cioè l'integrale di linea di tutto il campo elettrico presente all'interno del generatore (elettrostatico + elettromotore).

$$\mathcal{E} = \underbrace{V_A - V_B}_{\text{ddp ai capi del generatore}} + ri$$

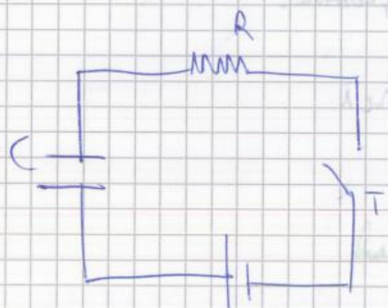
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 228

Voglio misurare la corrente → metto l'amperometro in serie con il circuito (bassa resistenza d'entrata).

Voglio misurare la tensione → metto il voltmetro in parallelo al circuito (alta resistenza d'entrata).

CORRENTE E CONDENSATORE

Per analizzare la relazione tra intensità di corrente e condensatore prendiamo un circuito RC:



$\mathcal{E}$ → trascuro la res. interna

Inizialmente il circuito è aperto, non circola corrente e la carica sulle armature del condensatore è nulla.

In $t=0$ chiudo T.

$\Rightarrow \mathcal{E} = Ri + \frac{q}{C}$ → caduta di potenziale ai capi del condensatore.

Ricordando $i = \frac{dq}{dt}$ avrò:

$$\mathcal{E} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{R} = \frac{dq}{\mathcal{E} - q/C}$$

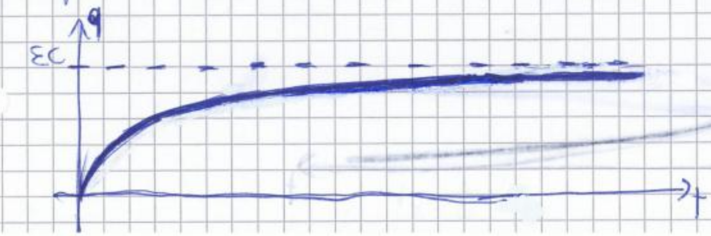
$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dt}{R} = \int_0^q \frac{dq}{\mathcal{E} - q/C} \Rightarrow \frac{t}{R} = \left[-C\ln\left(\mathcal{E} - q/C\right)\right]_0^q$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\frac{\mathcal{E} - q/C}{\mathcal{E}}$$

Carica del condensatore:

$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{\mathcal{E}} \longrightarrow q = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

La carica sulle armature del condensatore varia al variare del tempo.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 228

Ciò vuol dire che effettivamente la variazione di corrente è avvertita praticamente allo stesso istante in tutto il circuito.

Adesso vediamo un discorso di tipo energetico:

$$\mathcal{E}\, i\, dt = R i^2 dt + \frac{q}{C} i\, dt$$

lavoro del generatore $\Rightarrow$ viene dissipato in parte nelle resistenze per effetto joule ($R i^2 dt$) ed in parte per incrementare la carica sull'armatura del condensatore di una quantità $dq = i\,dt$ ($\frac{q}{C} i\,dt$).
Dunque questo lavoro viene immagazzinato sotto forma di energia elettrica nel condensatore.

Per la potenza:

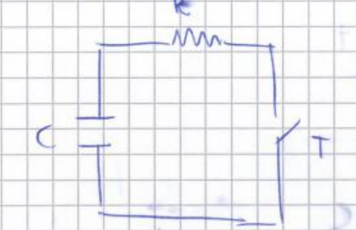
$$\int_0^{\infty} \mathcal{E}\, i\, dt = \int_0^{\infty} R i^2 dt + \int_0^{\infty} \frac{q}{C} i\, dt =$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \mathcal{E} \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} dt = \int_0^{\infty} R \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} e^{-2t/RC} dt + \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E} C}{C}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}^2 C = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2} + \frac{\mathcal{E}^2 C}{2}$$

Metà del lavoro fornito dal generatore viene dissipato per effetto Joule e metà viene immagazzinato nel condensatore, indipendentemente dai valori di R e di C.

Adesso partendo dal condensatore carico stacchiamo il generatore e apriamo il circuito:



Inizialmente ho $q_0 = \mathcal{E} C$, $i = 0$

In $t = 0$ chiudo il circuito:

$$0 = V_C + V_R = \frac{q}{C} + R i = \frac{q}{C} + \frac{R\,dq}{dt}$$

Inizia a circolare corrente e a scaricarsi il condensatore.

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = -t/RC$$

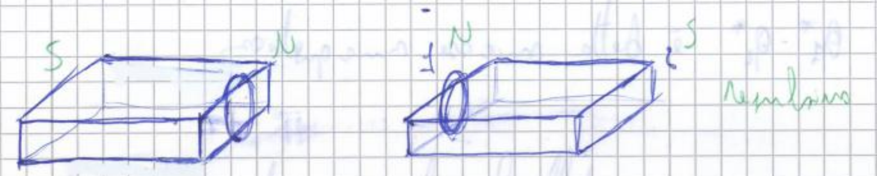
$$\Rightarrow \frac{q}{q_0} = e^{-t/RC}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 228

CAMPO MAGNETICO

Cosa può generare un campo magnetico?

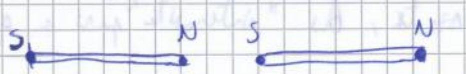
Ad esempio le calamite. Immaginiamo di avvicinare due



Osserviamo fenomeni di tipo attrattivo e repulsivo. Inoltre noteremo che la forza di attrazione/repulsione andrà localizzata dalle facce che poggiano l'una davanti all'altra. Infatti ribaltando una calamita noteremo un fenomeno attrattivo lì dove vi erano repulsione e viceversa

Definiamo quindi un polo sud ed un polo nord.

Facciamo un esperimento simile a quello delle cariche di Coulomb



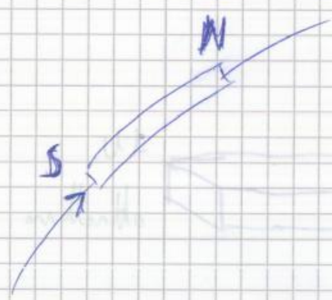
Noto che la forza agente ha andamento simile a quella di Coulomb:

$$F \propto \frac{q_1^* \, q_2^*}{r^2}$$

Dove $q_1^* \cdot q_2^*$ è detta massa magnetica

Noto come un ago della bussola magnetica si orienta verso la direzione nord

$\Rightarrow$ deduco che le linee di forza del campo magnetico sono entranti nel polo sud ed uscenti dal polo nord



Ma a differenza delle cariche non riesco a separare ed isolare i due poli. Se spezzo una calamita si vengono a creare dei nuovi poli nelle parti spezzate, di "intensità" pari a quella di prima.

Sappiamo quindi che la materia ha, per quanto riguarda

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 228

$[B] \rightarrow$ Tesla, T

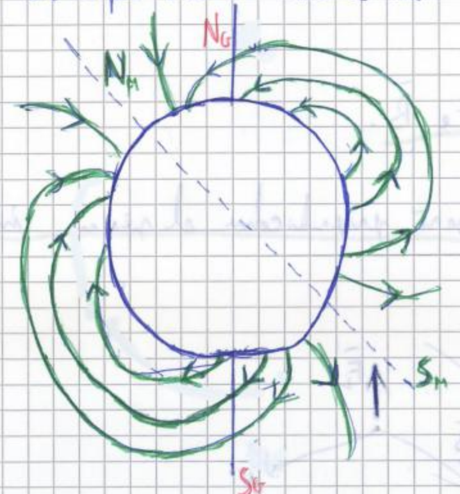
Diffidare di valori di 100 T!

Il campo magnetico si misura anche in Gauss, G.

$1\,T = 10^4\,G$

$1\,G = 10^{-4}\,T.$

Ad esempio la terra è un grande magnete.



C'è da distinguere tra polo geografico e polo magnetico. Questi ultimi non sono fissi ma migrano nel tempo.

N.B. ciò che sta dalla parte del polo nord geografico è in realtà un polo sud magnetico, infatti le linee di forza sono entranti da quella parte.

L'ordine di grandezza del campo magnetico terrestre è di $10^{-4} \div 10^{-5}\,T$.

CARICHE NEL CAMPO MAGNETICO

Una carica elettrica in quiete non risente della presenza del campo magnetico. Per risentirne la carica dev'essere in moto. In questo caso la carica risente di una forza, la forza di Lorentz, tale che:

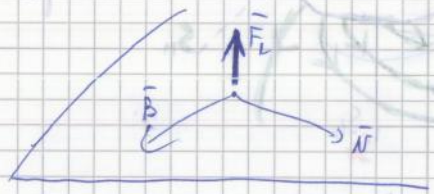
$$\boxed{\bar{F}_L = q\bar{v} \times \bar{B}}$$

In modulo abbiamo:

$F_L = qvB\sin\theta$

Dove θ è l'angolo tra $\bar{v}$ e $\bar{B}$.

La direzione della forza sarà perpendicolare al piano individuato da $\bar{v}$ e $\bar{B}$:



Se la forza è sempre perpendicolare alla velocità: sarà una forza centripeta

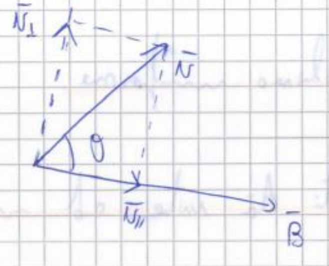
$\Rightarrow$ la forza di Lorentz varia la direzione di $\underline{v}$ ma non il modulo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 228

Il periodo del moto circolare sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

• $\bar{B}$ uniforme, $\hat{\bar{v}\bar{B}} \neq \pi/2$



Scomponiamo $\bar{v}$ nelle sue componenti parallela e perpendicolare a $\bar{B}$

$$\bar{F}_L = q(\bar{v}_\perp + \bar{v}_\parallel) \times \bar{B} = q\bar{v}_\perp \times \bar{B}$$ → $\bar{v}_\parallel$ non dà contributo

$$F_L = qvB \sin\theta$$

Sul piano perpendicolare alla direzione di $\bar{B}$ si avrà:

$$F_L = qvB \cancel{\sin\theta} = m\frac{v^2 \sin^2\theta}{r}$$ → la velocità utilizzata è data dalla $v_\perp = v\sin\theta$

$$\Rightarrow r = \frac{mv\sin\theta}{qB}$$

Ma $\sin\theta$ rimane costante, perché la forza di Lorentz non fa variare l'angolo di inclinazione di v rispetto a $\bar{B}$

$\Rightarrow r = \text{cost.}$

Sul piano perpendicolare alla direzione di $\bar{B}$ si ha un moto circolare uniforme.

Sul piano parallelo alla direzione di $\bar{B}$ si ha che $\bar{v}_\parallel = \text{cost.}$

Il moto che ne risulta è rettilineo uniforme.

La combinazione dei due moti dà vita ad un moto elicoidale uniforme:

L'avvolgimento dell'elica in avanti o indietro, dipenderà dal verso di percorrenza orario o antiorario del moto circolare uniforme

$$\omega = \frac{v_\perp}{r} = \frac{v\sin\theta}{r}$$

$$\Rightarrow q\bar{v}_\perp \times \bar{B} = m\bar{\omega} \times \bar{v}_\perp = -m\bar{v}_\perp \times \bar{\omega}$$

$$\bar{\omega} = -\frac{q\bar{B}}{m}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 228

CARICHE IN MOTO ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO

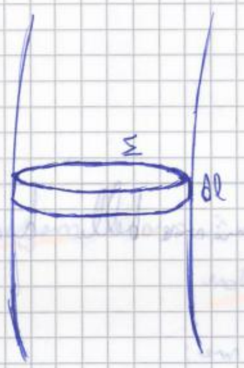
Le cariche sono in moto sia per la velocità di agitazione termica, sia per la velocità di deriva dovuta al campo elettrico. Dunque in presenza di campo magnetico le cariche vengono effettivamente deviate:

velocità di agitazione termica

$$\bar F_L = (-e)\,(\bar v_{th} + \bar v_d) \times \bar B$$

velocità di deriva

Dato l'alto numero di portatori di carica, prendo una parte infinitesima di conduttore:



$$d\bar F = \underbrace{n \Sigma\, dl}_{dN}\,(-e)\,(\bar v_{th} + \bar v_d) \times \bar B$$

numero di portatori nella mia Area infinitesima di conduttore

Le componenti della forza di Lorentz dovuta alla velocità di agitazione termica si annulla, poiché ogni portatore ha una direzione casuale rispetto ad un altro.

$$\Rightarrow d\bar F = \big(\underbrace{n(-e)\,\bar v_d}_{\bar J} \times \bar B\big)\underbrace{\Sigma\, dl}_{dV}$$

Allora sull'unità di volume del conduttore, la forza che agisce sarà:

$$\bar F_V = \frac{d\bar F}{dV} = \bar J \times \bar B$$

La forza in teoria agisce sui portatori, ma in realtà la forza è esercitata sul conduttore. Semplicemente perché i portatori hanno ad urtare con gli ioni del reticolo trasferendo l'effetto della forza di Lorentz proprio agli stessi ioni.

Si noti come sia $\bar J$ che $\bar B$ possono variare da punto a punto $\Rightarrow$ anche $\bar F_V$

Conduttori filiformi

La lunghezza di un conduttore filiforme è molto maggiore della dimensione che caratterizza la sua sezione.

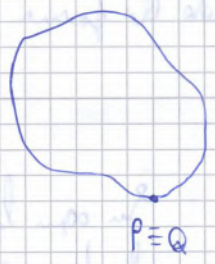
Andiamo a isolare una Area infinitesima:

Posso associare a dl un vettore $d\bar l$ che ha stesso verso della densità di corrente

Inoltre con il conduttore filiforme posso affermare che $\bar J$ è $\perp$ alla sezione del conduttore e quindi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 228

Nel caso di circuito chiuso avremo che la forza magnetica è nulla.

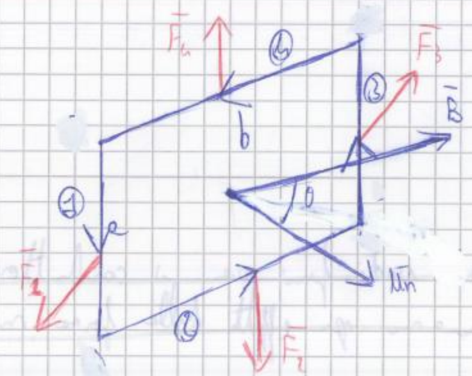


$\bar{F} = 0$

N.B. in tutti i casi visti finora i conduttori sono rigidi e non si deformano per effetto delle forze magnetiche.

MOMENTI MAGNETICI

Immaginiamo di avere un circuito di forma semplificata: una spira rettangolare:



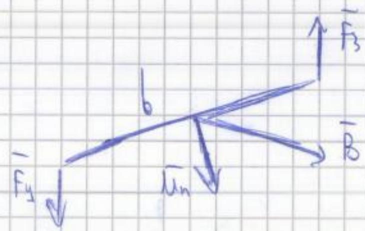
In ogni lato esaminiamo la forza magnetica.

$$F_2 = F_4 = i b B$$

F_2 e F_4 hanno modulo e direzione uguali, ma verso opposto. Se il circuito non fosse rigido lo deformerebbero, ma siccome parliamo di conduttori rigidi le due forze si elidono:

$$\bar{F}_2 + \bar{F}_4 = 0$$

Le forze F_1 e F_3 sono schematizzabili come segue:



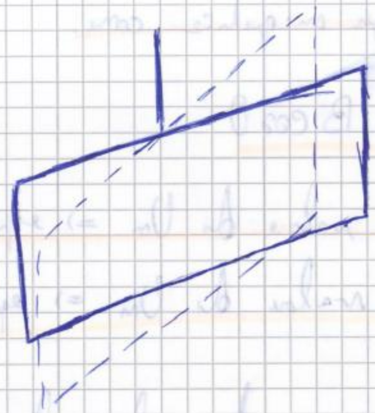
$$F_3 = F_1 = i a B$$

Le forze sono uguali ed opposte, ma hanno rette di azione diverse

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 228

MOMENTO DI RICHIAMO DELLA SPIRA

Immaginiamo di avere una spira appesa ad un filo e immersa in un campo elettrico. La ruotiamo di un certo angolo rispetto alla posizione di equilibrio.



Ho un momento meccanico di richiamo verso la posizione d'equilibrio. La spira inizia ad oscillare attorno ad esse.

$$\bar{M} = I\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow -mB\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

In regime di piccole oscillazioni vale che $\sin\theta \sim \theta$:

$$\Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mB\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{I}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mB}}$$

Dunque il periodo dipende da B. Noti perciò tutti gli altri parametri possiamo dare una definizione operativa del campo magnetico attraverso il metodo della spira che oscilla.

Possiamo definire l'energia magnetica come:

$$U_m = -\bar{m}\cdot\bar{B} = -mB\cos\theta$$

$\theta = 0 \Rightarrow$ minimo valore di $U_m \Rightarrow$ equilibrio stabile

$\theta = \pi \Rightarrow$ massimo valore di $U_m \Rightarrow$ equilibrio instabile

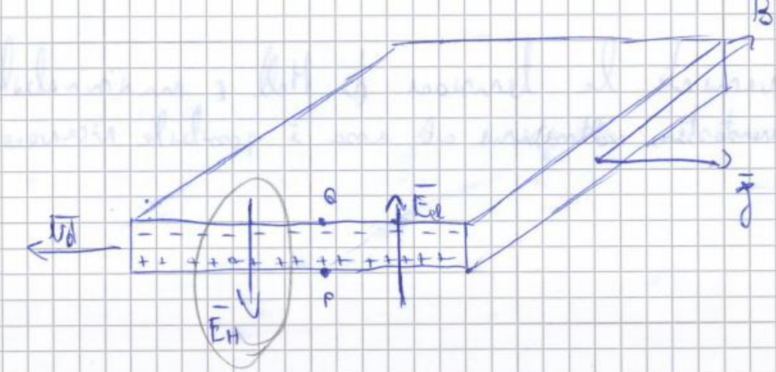
Nell'ipotesi che il campo magnetico nel quale è immersa la spira non sia uniforme avrò che la risultante delle forze non sarà nulla:

$$\bar{F} = (\bar{m}\cdot\nabla)\bar{B}$$

Sempre in analogia con il dipolo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 228

Nell'ipotesi di una velocità di deriva diretta verso sinistra si avrà:



I portatori di carica, questa volta di carica negativa, si andranno ad accumulare sulla faccia superiore. Al contrario quelli positivi andranno ad accumularsi sulla faccia inferiore. Si genererà come prima un campo elettrostatico e nuovamente l'accumulo di carica si fermerà quando $\bar{E}_{el}$ eguaglierà in modulo $\bar{E}_H$. La forza elettromotrice di Hall avrà questa volta però segno opposto a prima poiché da P a Q si percorrerà un segmento contrario al verso di $\bar{E}_H$. In generale possiamo scrivere:

$$\mathcal{E}_H = \int_P^Q \bar{E}_H \cdot d\bar{l} = \pm E_H b$$

In quale altro modo possiamo scrivere $\mathcal{E}_H$?

$$\pm E_H b = \pm v_d B b = \pm \frac{J}{nq} B b = \pm \frac{i}{a \cancel{b} n q} B \cancel{b}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_H = \pm \frac{iB}{anq}$$

Operativamente la tensione di Hall è misurabile attraverso un tester, e grazie ad essa è possibile ricavare n.

Il segno $\pm$ dipende dal segno dei portatori di carica. Misurando la corrente non è possibile risalire ad esso. Misurando invece la tensione di Hall ciò è possibile.

Alcuni materiali (zinco) mostrano un comportamento di portatori positivi. Questi portatori si chiamano lacune. Una lacuna non è un vero e proprio portatore positivo, ma una mancanza di portatori negativi (elettroni), ovvero un eccesso di carica positiva. I soli elettroni passano da una "lacuna" all'altra ed è come se a spostarsi fossero le lacune.

Una sonda di Hall è un conduttore noto che permette da una misura di tensione di risalire al campo magnetico nello spazio (precisione dell'ordine dei 10 μT).

NB: tutto ciò vale per $\bar{J} \perp \bar{B}$!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 228

$$d\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, di\, \frac{d\bar{l} \times \bar{u}_r}{r^2} =$$

$\Downarrow$

$\bar{J}\, d\Sigma$

$\bar{J} \parallel d\bar{l} \Rightarrow$ nulla cambia se il carattere vettoriale viene trasferito da $d\bar{l}$ a $\bar{J}$

$$\Rightarrow d\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J} \times \bar{u}_r}{r^2}\, dl\, d\Sigma = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J} \times \bar{u}_r}{r^2}\, dVol$$

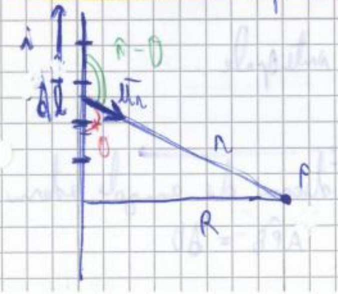
Per il campo magnetico totale in P avremo:

$$\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{Vol} \frac{\bar{J} \times \bar{u}_r}{r^2}\, dVol$$

Questa volta, in assenza di conduttore filiforme, avremo che $\bar{J}$ può variare in ogni punto del conduttore.

Casi particolari

- Filo rettilineo infinito



Quanto vale $\bar{B}(P)$?

Dividendo il conduttore in tante parti infinitesime; ognuna darà un contributo per il campo magnetico.

$$d\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, i\, \frac{d\bar{l} \times \bar{u}_r}{r^2}$$

$$\Rightarrow \bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, i \int_\ell \frac{d\bar{l} \times \bar{u}_r}{r^2}$$

Quale è il risultato di $d\bar{l} \times \bar{u}_r$?

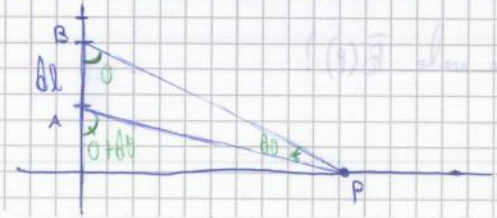
$$d\bar{l} \times \bar{u}_r = dl \sin(\pi-\theta)\, \bar{u}_\phi = dl \sin\theta\, \bar{u}_\phi$$

Dove $\bar{u}_\phi$ è un versore entrante nel foglio.

Qualunque sia il $d\bar{l}$ preso in considerazione varia l'angolo θ ma non varia la direzione e il verso del vettore risultante: saranno sempre quelli di $\bar{u}_\phi$.

$$\Rightarrow \bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, i \int_\ell \frac{d\bar{l} \times \bar{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\int_\ell \frac{dl \sin\theta}{r^2} \right) \bar{u}_\phi$$

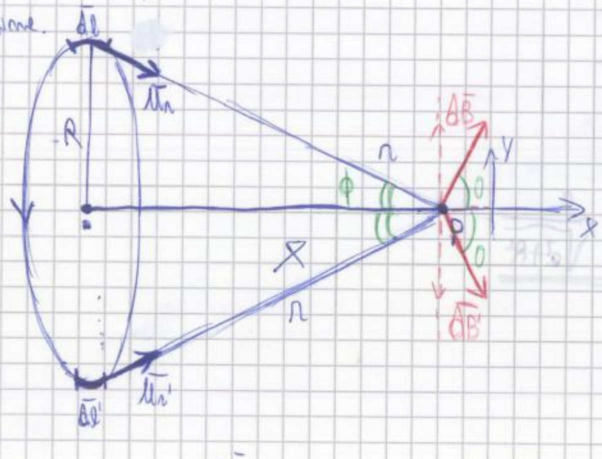
Adesso dobbiamo ridurre le variabili nell'integrale.



Per questione di angoli esterni ho che $\widehat{APB} = d\theta$.

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA SPIRA CIRCOLARE

Consideriamo una spira circolare percorsa da corrente e dividiamola in tante parti infinitesime.



$\phi = \pi/2 - \theta$

$$\overline{dB}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\overline{dl} \times \overline{u}_r}{r^2} \longrightarrow$$ i nuovi contributi avranno ognuno una direzione diversa

$$\overline{dB} + \overline{dB'} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} (\overline{u}_1 + \overline{u}_2)$$

Notiamo come per simmetria i contributi diametralmente opposti si annullano nella loro componente y.

$$\Rightarrow \overline{dB} + \overline{dB'} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} 2\cos\theta \, \overline{u}_x$$

Considerando gli elementi infinitesimi $\overline{dl}$ a due a due posso riportare il mio integrale di vettori ad un integrale normale:

$$\overline{B} = \int \overline{dB} + \overline{dB'} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{r^2} \left(\oint_{2\pi R} dl \right) \overline{u}_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{r^2} 2\pi R \, \overline{u}_x$$

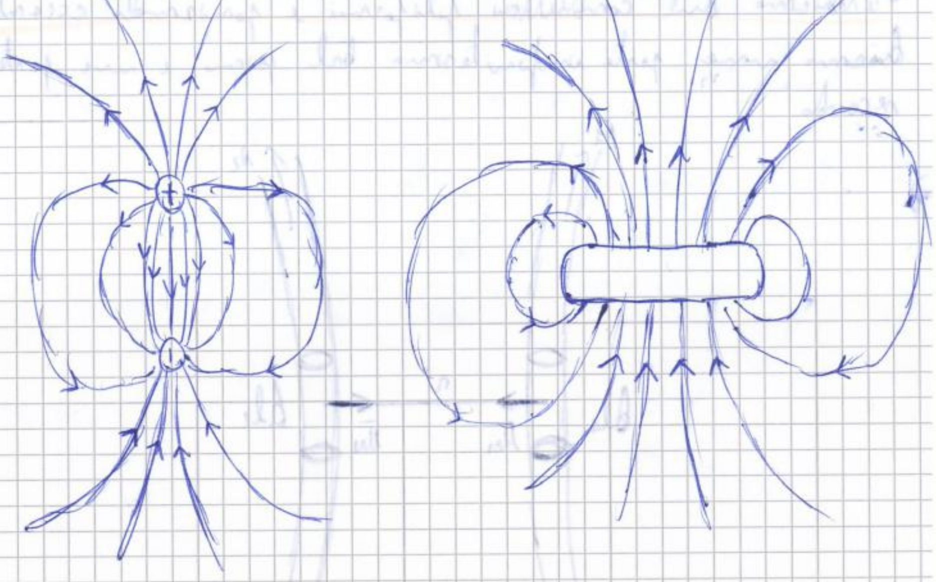
dove $\cos\theta$ è ricavabile con il teorema di Pitagora, come:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow \overline{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 228

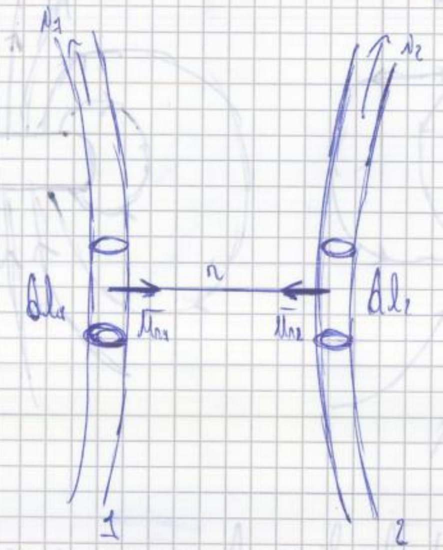
Confronto delle linee di forza



La differenza è che le linee di campo magnetico sono tutte chiuse, quelle di campo elettrico no.

INTERAZIONE TRA FILI PERCORSI DA CORRENTE

Consideriamo due conduttori filiformi e posizionati accanto. Prendiamo una parte infinitesima del primo e una parte del secondo



La forza infinitesima che agisce su dl_2 a causa del tratto dl_1 è:

$$d\bar F_{1,2} = i_2 \, d\bar l_2 \times d\bar B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{d\bar l_2 \times (d\bar l_1 \times \bar u_{r1})}{r^2}$$

La forza totale sarà:

$$\bar F_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \int_{l_1}\int_{l_2} \frac{d\bar l_2 \times (d\bar l_1 \times \bar u_{r1})}{r^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 228

ze di un metro l'uno dall'altro genera una forza attrattiva o repulsiva tra di essi che per unità di lunghezza è pari a $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.

Con questa definizione di Ampere possiamo definire anche μ_0:

$$F_L = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \rightarrow \text{forza che agisce fra i due fili}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0 \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} \Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$$

~~Inoltre ricordando che~~

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

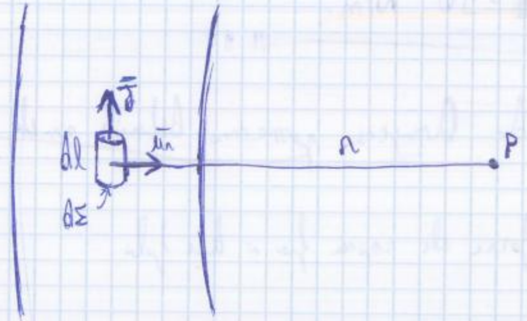
Dove $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, si ha che:

$$\varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m = \frac{1}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} \Rightarrow \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$$

Dunque ε_0 e μ_0 dipendono direttamente dalla definizione di Ampere.

Invece ε_r e μ_r sono delle proprietà specifiche del materiale e non dipendono dalla definizione di Ampere, quindi non dipendono dal sistema di riferimento. ε_0 e μ_0 invece sì.

CAMPO MAGNETICO DEL SINGOLO PORTATORE



$$d\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J} \times \bar{u}_n}{r^2} dVol = \frac{\mu_0}{4\pi} nq \frac{\bar{v}_d \times \bar{u}_n}{r^2} dVol$$

$n\,dVol$ è il numero di portatori presenti in quell'unità infinitesima di volume. Chiamiamo $n\,dVol = dN$

Se voglio conoscere il campo magnetico dovuto al singolo portatore avrò:

$$\bar{B}_p = \frac{d\bar{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v}_d \times \bar{u}_n}{r^2}$$

Posso dividere e moltiplicare per ε_0 ottenendo:

$$\bar{B}_p = \frac{d\bar{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} q \frac{\bar{v}_d \times \bar{u}_n}{r^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \bar{v}_d \times \bar{E}$$

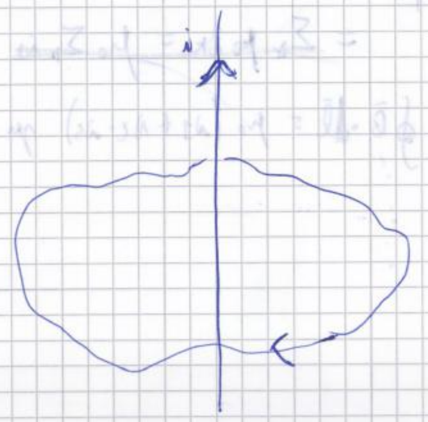
Dove $\bar{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \bar{u}_n$ è il campo elettrico del portatore di carica. Nonostante il portatore sia in movimento posso utilizzare le relazioni del campo elettrico di cariche puntiformi in quiete se la velocità del portatore è molto inferiore a quella della luce in

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 228

$$\oint B \cdot dr = \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{x} x \, d\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} i \oint d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cancel{2\pi}$$

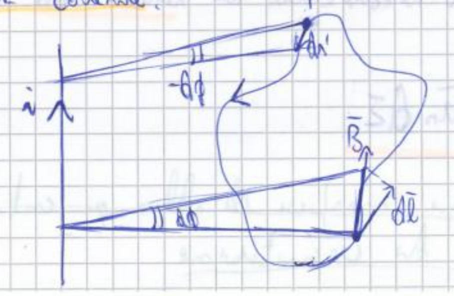
La circuitazione del campo magnetico attraverso una linea chiusa è uguale al prodotto di μ_0 per la corrente concatenata a quella linea chiusa.

Se invece avessimo scelto il verso di percorrenza orario:



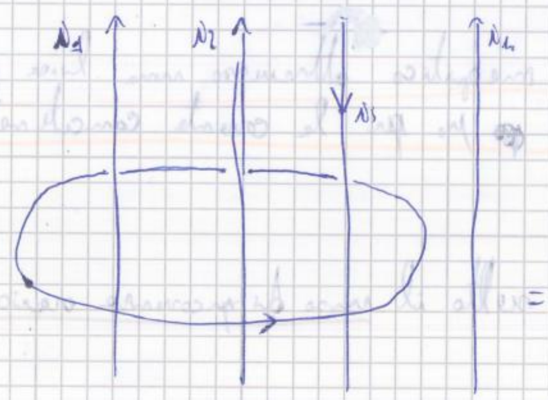
$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = -\mu_0 i$$

Cosa succede se la linea di circuitazione non concatena nessuna corrente?



Per ogni punto sulla linea dove la proiezione di $d\bar{l}$ su $\bar{B}$ è vista dal filo con un angolo $d\phi$, ce sarà un'altro dove il filo vede quella proiezione con un angolo $-d\phi$. $\Rightarrow \oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = 0$

E nel caso di una linea di circuitazione che concatena più fili?



$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \oint \sum_k \bar{B}_k \cdot d\bar{l} =$$

$$= \sum_k \oint \bar{B}_k \cdot d\bar{l} =$$

$$= \sum_k \mu_0 i_k = \mu_0 \sum_k i_k$$

Nello specifico caso in figura si ha $\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 (i_1 + i_2 - i_3)$ per il verso delle correnti.

La legge di Ampère scritta come:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum_k i_k$$

è in forma integrale. Adesso possiamo scriverla in forma locale, in modo da legare il campo magnetico alle sue sorgenti punto per punto. Per fare ciò ricorriamo al teorema del rotore:

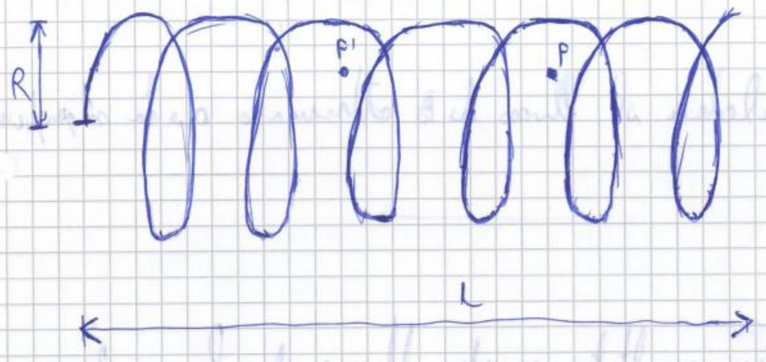
$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_\Sigma \text{rot}\, \bar{B} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma$$

Σ qualunque superficie che abbia per contorno la linea di circuitazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 228

SOLENOIDI

Il solenoide è un sistema di spire poste in serie. Si parla di solenoide rettilineo infinito quando le spire sono tutte sullo stesso asse e la lunghezza di questo è molto maggiore delle dimensioni delle spire.



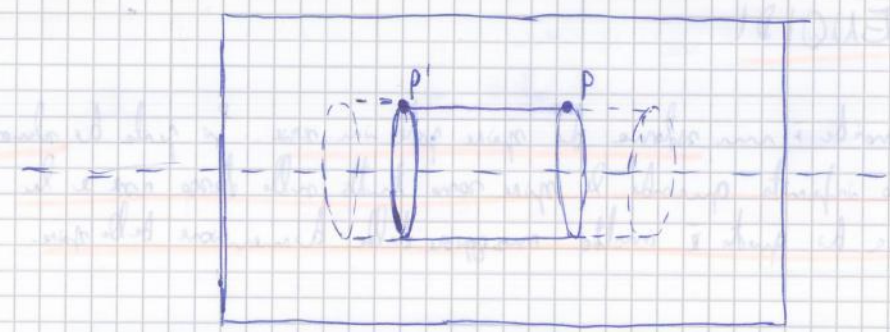
$L >> R$

Come è il campo magnetico all'interno del solenoide?

Vi sono tante spire una dietro l'altra, tutte con lo stesso asse $\Rightarrow$ il campo magnetico sarà diretto parallelamente all'asse.

Consideriamo un punto P interno al solenoide. In condizioni di omogeneità di quest'ultimo avremo che tutti i punti alla stessa distanza dall'asse avranno stesso valore di campo elettrico.

Consideriamo ora una superficie cilindrica coassiale al solenoide che passi per P e P'.



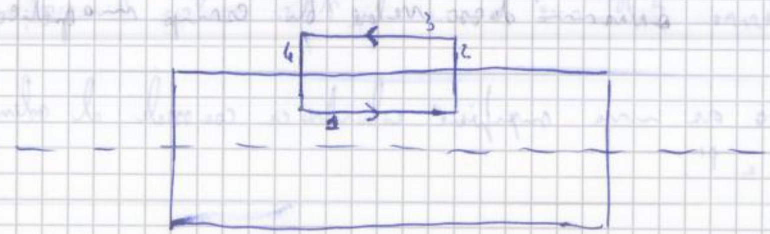
Se vado a calcolare il flusso di $\vec{B}$ attraverso questa superficie troverò che:

$\Phi(\vec{B}) = 0$

E otterrò lo stesso risultato anche allungando la superficie. Dunque il flusso dipenderà solo dalle due superfici di base, e quello attraverso la superficie laterale sarà nullo.

$\Rightarrow$ il campo magnetico è diretto parallelamente all'asse delle spire. Il verso sarà dato dalla regola della mano destra.

Ricaviamo ora il modulo. Riprendiamo il solenoide e disegniamo una linea di circuitazione opportuna.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 228

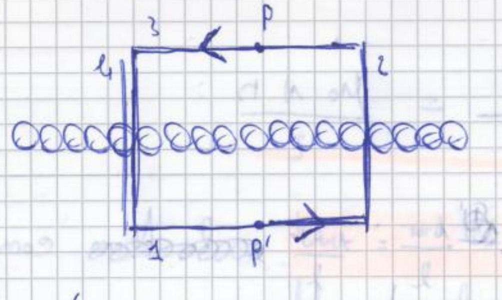
Sull'asse x $\bar{B}$ e $\bar{B}'$ hanno componenti uguali e concordi. Sull'asse y invece le loro componenti si elidono.

Prendendo a coppie a due a due i fili sopravvivranno sempre le componenti dell'asse x. Dunque il campo magnetico è diretto parallelamente al piano dove passano le correnti, ed il verso è dato dalla regola della mano destra.

Sul semipiano inferiore si otterrà lo stesso risultato con verso opposto di B.

N.B.: $\bar{B}$ è parallelo al piano di scorrimento delle correnti ma non al verso di scorrimento della corrente! Inoltre nulla vieta che al posto dei fili ci sia una lastra estesa percorsa da corrente.

Ora devo ricavare il modulo, utilizzo la legge di Ampere. Scelgo un'opportuna linea di circuitazione attorno ai fili:



$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int_1 \bar{B}\cdot d\bar{l} + \underbrace{\cancel{\int_2 \bar{B}\cdot d\bar{l}}}_{=0} + \int_3 \bar{B}\cdot d\bar{l} + \underbrace{\cancel{\int_4 \bar{B}\cdot d\bar{l}}}_{=0}$$

Chiamiamo $\bar{B}_1$ il campo magnetico nel semipiano inferiore e $\bar{B}_3$ il campo magnetico nel semipiano superiore.

Sul lato 1 e sul lato 3 mi aspetto di avere in ogni punto lo stesso valore di campo magnetico, vista la simmetria del problema e l'uniformità dei fili.

$$\Rightarrow \oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = B_1 \int_1 dl + B_3 \int_3 dl = B_1 l + B_3 l$$

Dato che P e P' hanno un'uguale distanza dal piano percorso da corrente avremo che $B_1 = B_3$ (in modulo, i campi infatti avranno versi opposti).

$$\Rightarrow B_1 l + B_3 l = 2Bl = \mu_0 i N'$$

dove N' è il numero di fili che ci sono nel tratto l.

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i N'}{2l} = \frac{\mu_0 i n}{2}$$

Definendo $J_s = \frac{i_{TOT}}{l} = \frac{iN'}{l}$ come densità di corrente per unità di lunghezza, abbiamo:

$$B = \frac{\mu_0 J_s}{2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 228

EQUAZIONI DI MAXWELL PER LA MAGNETOSTATICA

$\Phi(\bar{B}) = 0 \rightarrow \int_{\Sigma_{tt}} \bar{B} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = 0$

$\operatorname{div} \bar{B} = 0$

campo magnetico è un campo solenoidale

$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \, i_{\text{concatenata}}$

$\operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$

legge di Ampere in ipotesi di regime stazionario

Quest'ultima relazione ci fa notare come $\bar{B}$ non sia un campo conservativo.

Si definisce però il potenziale vettore $\bar{A}$ come:

$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$

MAGNETOSTATICA NEL MEZZO

Immaginiamo di prendere un solenoide e di riempirlo con una sostanza isotropa, omogenea e infinita (trascuriamo gli effetti di bordo).

Direzione e verso del campo magnetico non cambiano, cambierà il modulo

Il rapporto tra il campo magnetico nel mezzo e il campo magnetico nel vuoto dipende solo dal tipo di materiale:

$$\boxed{\frac{B}{B_0} = k_m}$$

B → campo magnetico nel mezzo

B_0 → campo magnetico nel vuoto

dove k_m è la permeabilità magnetica relativa.

$B - B_0 = B_0 (k_m - 1) = B_0 \chi_m$

dove χ_m è la suscettività magnetica relativa.

$B = B_0 + B_0 \chi_m = \mu_0 i n + \mu_0 i \chi_m n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 228