NUMERO: 1197

DATA: 24/10/2014

A P P U N T I

STUDENTE: Mitrotta

MATERIA: Fisica I + Eserc.

Prof. Scalerandi

REMINISCENZE DALLA MATEMATICA

differenziale → variazione infinitesima di una grandezza.
Dunque il simbolo dx rappresenta una variazione, non una grandezza.

Δx → variazione finita di una grandezza (in un intervallo di tempo misurabile).

ATTENZIONE ALLE CAGATE!

$\vec{v} = \frac{\cancel{\delta}\vec{r}}{\cancel{\delta}t}$ NO!

dx è una variazione infinitesimale, Δx è una variazione finita

$\Delta S > 0$ → S aumenta
$S > 0$ → S è positivo

$\cancel{\boxed{\underbrace{S}_{finita} = \underbrace{dt}_{infinitesima} + \underbrace{4}_{finita}}}$ NO!

$S = \underbrace{\int dt}_{finita} + 4$ OK

$\vec{a} = \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{finita}$ → $d\vec{v}$ infinitesima, dt infinitesima

GRANDEZZE FISICHE E MISURA

Una grandezza fisica è una quantità misurabile, ossia è possibile realizzare un esperimento con il quale assegnarle un numero. Le grandezze fisiche costituiscono la base del linguaggio scientifico attraverso il quale i veri fisici possono confrontarsi. Ciò che non è misurabile di per sé non rientra strettamente nell'ambito della fisica.

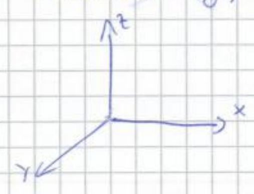
Per definire una misura occorrono due parametri fondamentali:

- l'unità di misura: un oggetto con cui effettuare il confronto, ossia una grandezza base con cui confrontare la grandezza fisica. Può essere qualunque cosa purché sia consistente e specificata. Inoltre quando si sceglie un campione per il confronto si deve tener presente il fatto che questo campione debba essere il più accessibile e meno variabile possibile;
- sistema di riferimento (non per tutte le grandezze, in genere sì): non ha senso definire un risultato senza stabilire un sistema di riferimento, cioè un'origine e dei rispettivi assi.

Esempio: 10 milioni di persone bevono coca-cola. Ma in che sistema di riferimento? Italia, Europa, ... senza di questo la misura non ha senso.

Le unità di misura e i sistemi di riferimento usati in fisica sono:

a) sistema internazionale → massa kg, lunghezza m, tempo s;
b) sistema cartesiano



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 260

Lavoro ed energia cinetica

Caso particolare: $W = F \cdot x$

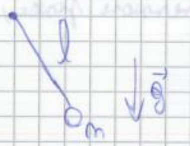
$$[W] = [F][L] = [M][L]^2[T]^{-2}$$

Energia cinetica, caso particolare: $K = \frac{1}{2} m v^2$

$$[K] = [M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = [M][L]^2[T]^{-2}$$

Dato che K e W hanno stessa dimensione fisica, possono essere confrontate e sono entrambe delle energie.

Periodo del pendolo



grandezze in gioco: m, l, g

T = periodo di oscillazione

$T = f(m, l, g)$

HP $\Rightarrow T = m^\alpha l^\beta g^\gamma \cdot$ numero $\Rightarrow T \propto m^\alpha l^\beta g^\gamma$

$$[T] = [M]^\alpha [L]^\beta \left(\frac{[L]}{[T]^2}\right)^\gamma = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-2\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -2\gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ precisamente $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\vec{v} = 3t\,\overline{u}_x + 2e^{-t/4}\,\overline{u}_y$$

$$\vec{v} = v_x \overline{u}_x + v_y \overline{u}_y$$

Le componenti del vettore $\vec{v}$ mantengono la stessa dimensione fisica di questo, dunque v_x e v_y sono velocità.

$v_x = 3t \Rightarrow [v_x] = [3][t]$

↳ questo 3 deve per forza avere una dimensione fisica

$$[L][T]^{-1} = [3][T] \Rightarrow [3] = [L][T]^{-2}$$

Quindi 3 è un'accelerazione: $3\ m/s^2$

Per l'altra componente $v_y = 2e^{-t/4}$ n deve essere un argomento dell'esponenziale adimensionale con risultato adimensionale:

$$[v_y] = [2] \Rightarrow [L][T]^{-1} = [2]$$

2 è una velocità: $2\ m/s$

$$[t/4] = [M]^0[T]^0[L]^0 \Rightarrow [T] = [4]$$

4 è un tempo: $4\ s$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 260

DEVIAZIONE STANDARD

Per parlare del concetto di errore, introduciamo la definizione di deviazione standard di una misura:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\left[(t_1 - \langle t \rangle)^2 + (t_2 - \langle t \rangle)^2 + \dots + (t_n - \langle t \rangle)^2 \right] \cdot \frac{1}{n-1}}$$

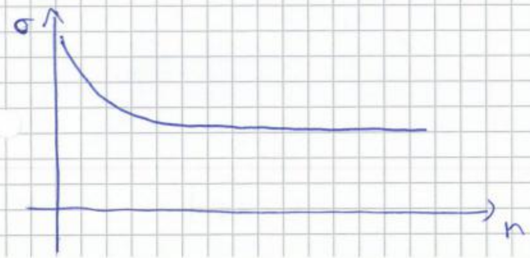
quanto la misura si discosta dal valor medio

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \rightarrow \text{dev. st. della media}$$

Facendo n misure posso calcolare il valore medio $\langle t \rangle_n$. Per la misura n+1 trovo il valore t_{n+1} e con $n \to \infty$ la media risulta essere $\langle t \rangle_{n+1} = \langle t \rangle_n = \langle t \rangle$. Detto questo, ho il 68% di probabilità che $\langle t \rangle - \sigma_{\bar{x}} < t_{n+1} < \langle t \rangle + \sigma_{\bar{x}}$. Se, ad esempio, con n misure del tempo ho $\langle t \rangle = 1{,}02s$ con $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}02s$, la misura di t_{n+1} mi può dare qualsiasi valore (nel senso che posso commettere un errore umano nella misura), ma se faccio le cose per bene ho il 68% di probabilità che il valore mi cada dentro l'intervallo:

$$1{,}00s < t_{n+1} < 1{,}04s$$

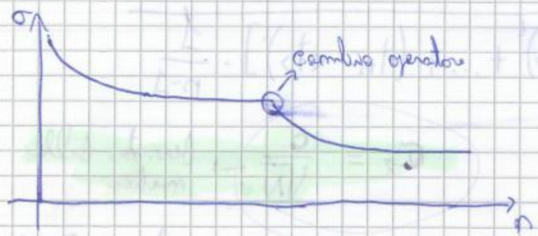
Volendo portare in un grafico l'andamento di σ al variare di n si otterrebbe quanto segue



Il valore $\sigma_{\bar{x}}$ rappresenta l'errore casuale nella misura.

Più $\sigma_{\bar{x}}$ è piccolo, più la misura è precisa e quindi più l'errore casuale che ho commesso è basso.

In laboratorio ogni operatore ha il suo errore casuale, e $\sigma_{\bar{x}}$ è molto sensibile ad eventuali cambi di operatore.



Inoltre σ è altamente influenzabile da cambi di condizioni ambientali, di temperatura, ecc.

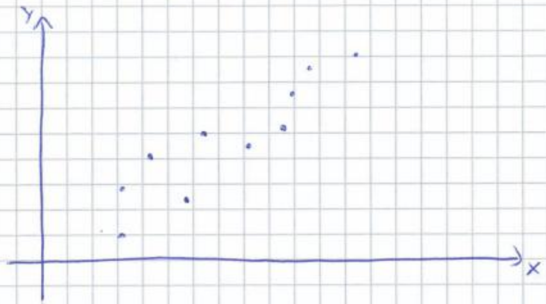
Quando si esprime una misura bisogna sempre indicarla con M (valore medio) e $\sigma_{\bar{x}}$. In fisica è più importante essere precisi su quest'ultimo poiché si assume che il primo sia molto grande.

MISURA = valor medio ± errore + unità di misura

$$t = (1{,}02 \pm 0{,}02)\,s$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 260

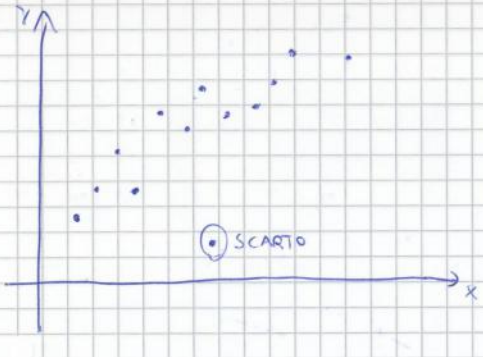
Disegno il grafico:



Se la teoria afferma che $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ vuol dire che nel grafico si deve avere una retta $y = kx$. Questo significa trovare la retta che approssima meglio i punti trovati. Al computer ciò è possibile con l'operazione FIT:

$$FIT \Rightarrow Y = (\text{numero}) \cdot X$$
$$\Downarrow$$
$$Y = v_m X$$

In questo modo si verificano un errore sul punto, in entrambi le componenti X e Y, e l'errore sulla costante della retta.



Se trovo un punto isolato nel grafico, esso sarà dovuto ad un errore dell'operatore, e quindi lo scarto.

Oppure se il mio strumento ha un errore sistematico e mi segna sempre una quantità in più avrò uno spostamento della retta da quella reale.

GRANDEZZE MISURATE E CIFRE

$$v = (13,38742 \pm \underbrace{0,004394}_{\downarrow})\ m/s$$

questo valore mi indica l'incertezza della misura. Ma dato che non ha senso specificare l'incertezza oltre la prima cifra diversa da 0, mi fermo a quella.

$\Rightarrow$ sul valore della misura mi fermerò alla stessa cifra dell'errore:

$$v = (13,387 \pm 0,004)\ m/s$$

Quando leggo un valore dalla calcolatrice tronco il numero alle cifre che mi interessa:

$v = 13,3412\ldots$

$v = (13,34 \pm \underbrace{0,01}_{\downarrow})\ m/s$

errore strumentale supposto della calcolatrice

Se ad esempio volessi calcolare una v_2 da confrontare con v_1

$v_2 = 0,004513\ldots$

$v_2 = (0,0045 \pm 0,0001)\ m/s \longrightarrow$ SBAGLIATO!

Non posso prendere ad una misura due cifre dopo la virgola, e ad un'altra quattro cifre.

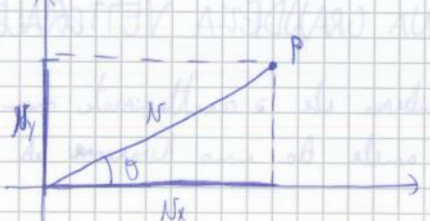
Verso → uno dei due estremi del segmento.

Un vettore si può indicare in questo modo:

$\vec{v} = (v, \theta)$
↳ direzione
↳ modulo → a questo si associa misura e unità di misura.

$\vec{v} \Rightarrow \underbrace{50\ km/h}_{v}\ \underbrace{\text{direzione est}}_{\theta}$

In fisica può essere molto utile definire il vettore secondo le sue componenti. Queste sono le proiezioni del vettore sugli assi coordinati (o su quelli di qualsiasi altro sistema di riferimento).



↳ qui indicato come modulo, non come vettore, dato che manca "→"

Dunque possiamo stesso indicare il vettore $\vec{v}$ come

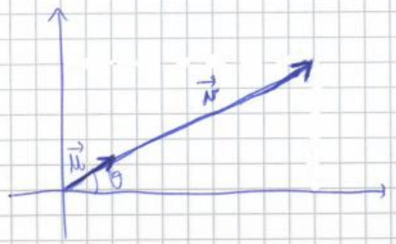
$\vec{v} = (v_x, v_y)$

$v_x = v\cos\theta$ $\qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_y = v\sin\theta$ $\qquad tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$

Definiamo ora il concetto di versore. Esso è un vettore di modulo 1 e quindi contiene informazioni solo sulla direzione.

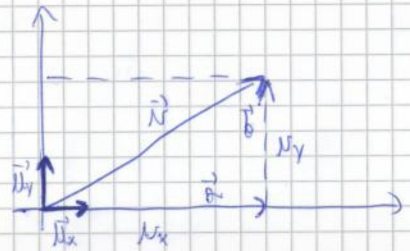
Rispetto ad un vettore generico $\vec{v}$, il suo versore $\vec{u}$ si definisce come segue:



$\vec{u} = (1, \theta)$

$\vec{v} = v \cdot \vec{u}$

Le coordinate cartesiane di un vettore risultano essere le sue componenti in un sistema di riferimento di assi cartesiani.



Il vettore $\vec{v}$ può essere ridefinito come

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

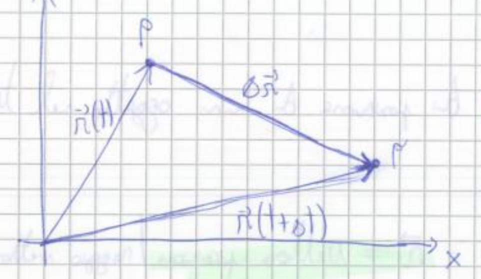
dove

$\vec{a} = v_x \cdot \vec{u}_x \qquad \vec{b} = v_y \cdot \vec{u}_y$

e quindi si ha:

$\vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y$

Introduciamo ora un nuovo vettore: il **vettore spostamento**, ovvero la differenza fra i due vettori posizione.



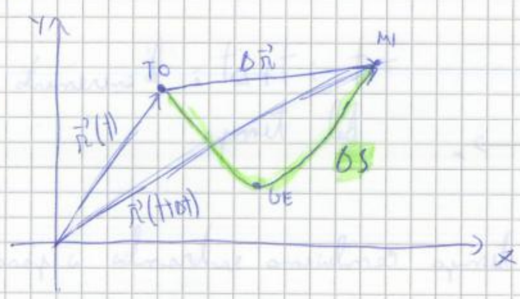
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

N.B.: il modulo del vettore $\Delta\vec{r}$ non può essere in alcun modo identificato con lo spazio percorso dall'oggetto.

Lo spazio percorso viene calcolato su quella che si chiama traiettoria:

spazio percorso = Δs = lunghezza della traiettoria.

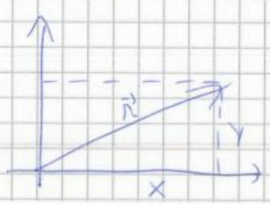
La traiettoria è quella linea composta dai punti in cui si trova P lungo il moto.



Come si indica $\vec{r}$?

$\vec{r} = (r, \theta)$

$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$



In quest'ultima relazione dipendono dal tempo solo ~~x~~ e ~~y~~, dato che $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ sono versori che mantengono modulo e direzione costanti nel tempo.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$$

Quanto detto è valido solo per sistemi di riferimento fissi.

Traiettoria

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \text{rappresentazione parametrica della traiettoria}}$$

Esempio: $\vec{r}(t) = \underbrace{3t}_{x}\,\vec{u}_x + \underbrace{(1-t^2)}_{y}\,\vec{u}_y$

Dunque la traiettoria sarà: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$

Per avere la traiettoria ricavo t dalla prima e poi sostituisco nell'altra:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{3} \\ y = 1 - \frac{x^2}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{posso in questo modo disegnarla}$$

Nota la funzione $\vec{r}(t)$, posso conoscere la posizione $\vec{r}$ per ogni valore del tempo t.

Ad esempio per $t = 0$ s ottengo:

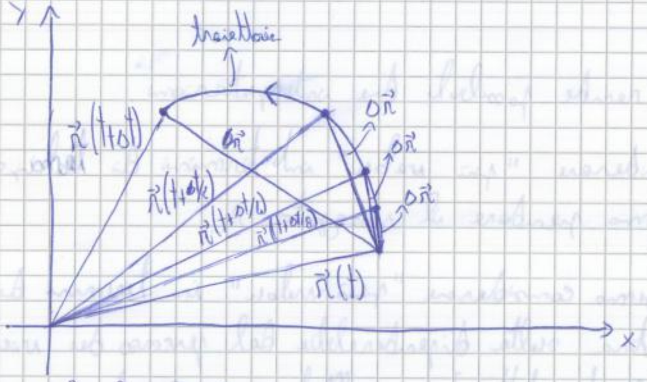
$$\vec{r}(t=0) = 0\,\vec{u}_x + \vec{u}_y$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 260

La velocità media non è dunque una grandezza fisica interessante perché non è possibile definirla in un modo univoco.
Posso invece ben definire il concetto di velocità istantanea. Per poterlo fare, do al tempo un incremento via via sempre più piccolo:

$t \to t+\Delta t,\ t+\Delta t/2,\ t+\Delta t/3, \dots, t+\Delta t/n,\ t+dt$

↳ quantità infinitesima



Facendo il limite di $\Delta\vec{r}$:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta\vec{r} = \begin{cases} \text{modulo} \to \Delta s \\ \text{direzione} \to \text{tangente alla traiettoria} \end{cases}$$

Dunque definiamo velocità istantanea il limite:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

L'espressione:

$$v = \cancel{\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

è quindi incompleta, poiché manca dell'informazione sulla direzione.

Conoscendo il vettore posizione in funzione del tempo t, $\vec{r}(t)$ si ha:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Che ci ricorda

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ossia la definizione della derivata di una funzione.

Dunque la velocità istantanea è la derivata del vettore posizione nel tempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Il vettore velocità è la grandezza fisica che descrive la variazione di posizione nel tempo, e la sua direzione è sempre tangente alla traiettoria che stiamo seguendo.

Se $\vec{v} = 0$ allora $\vec{r}$ è costante.

Di seguito vediamo i modi in cui si può scrivere il vettore velocità:

$$\vec{v} = v\,\underbrace{\overline{u}_T}_{\text{versore tangente alla traiettoria}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\overline{u}_x + y\overline{u}_y\right)$$

Se il sistema di riferimento è fisso si ha: $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\overline{u}_x + \frac{dy}{dt}\overline{u}_y$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 260

La definizione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

implica che il vettore $\vec{v}$ possa variare in modulo e direzione.

Ad esempio se $v = cost.$ ma $\vec{a} \neq 0$ allora si è sicuramente in un moto circolare ($\vec{v}$ cambia in direzione).

In generale quando un vettore qualsiasi varia, può farlo in modulo oppure in verso.

Quando la velocità cambia in direzione non ha senso assegnare un segno al ~~modulo~~ modulo del vettore accelerazione.

ACCELERAZIONE IN COORDINATE INTRINSECHE

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Voglio che il vettore $\vec{a}$ mi dia informazioni sulle variazioni in modulo e in direzione della velocità.

Ricordando che:

$$\vec{v} = \underbrace{v}_{\text{modulo}}\ \underbrace{\bar{u}_T}_{\text{versore (direzione)}}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \bar{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + \frac{d\bar{u}_T}{dt}v$$

se la direzione della velocità cambia $\frac{d\bar{u}_T}{dt} \neq 0$

$\frac{dv}{dt}\bar{u}_T = a_T\bar{u}_T$ = accelerazione tangenziale con direzione tangente alla traiettoria dell'oggetto e parallela a $\vec{v}$

se $a_T\bar{u}_T$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$ allora $v = \|\vec{v}\|$ cresce.

$\frac{d\bar{u}_T}{dt}$ = accelerazione normale

dove $\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{u}_T(t+\Delta t) - \bar{u}_T(t)}{\Delta t}$ → differenza fra vettori

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 260

$$v \frac{d\overline{u}_T}{dt} = \text{accelerazione normale} = v\left(-\frac{1}{R} v \overline{u}_N\right) = -\frac{v^2}{R}\overline{u}_N$$

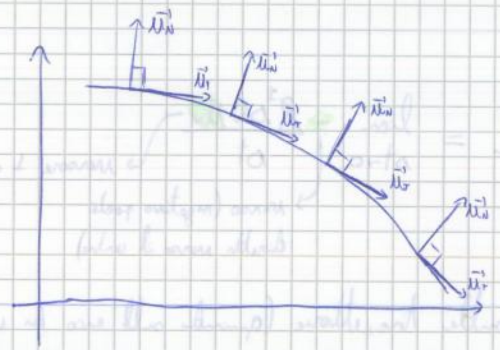
$$\rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_T \overline{u}_T - \frac{v^2}{R}\overline{u}_N$$

dove $a_T = \frac{dv}{dt}$

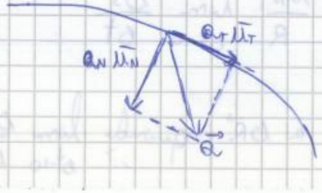
In questo modo ho definito due direzioni particolari:

- $\overline{u}_T$ → tangente alla traiettoria;
- $\overline{u}_N$ → perpendicolare alla traiettoria.

Costante ~~definiscon~~ il sistema di coordinate intrinseche.

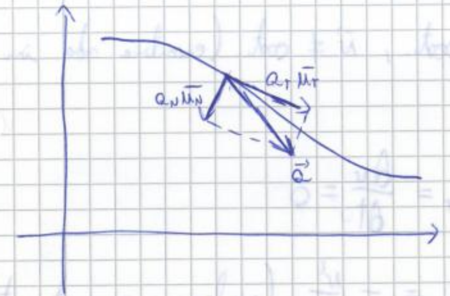


Il sistema di riferimento a coordinate intrinseche non è fisso, perché esso cambia con il moto dell'oggetto.
Attraverso questo sistema è più facile visualizzare le accelerazioni:



Conclusione: il vettore $\vec{v}$ è sempre tangente alla traiettoria.
Il vettore $\vec{a}$ è sempre la somma di due vettori:

- $a_T \overline{u}_T$ tangente alla traiettoria → il significato fisico è quello di descrivere le variazioni di $\vec{v}$ in modulo;
- $a_N \overline{u}_N$ normale alla traiettoria → il significato fisico è quello di descrivere le variazioni di $\vec{v}$ in direzione.



Se $a_T \overline{u}_T$ ha lo stesso verso di $\vec{v}$ allora il modulo di $\vec{v}$ aumenta, viceversa esso diminuisce.

Ora prendiamo ad esempio il seguente caso:

L'accelerazione in figura è impossibile per quella traiettoria. L'accelerazione normale infatti dev'essere sempre diretta verso il centro della circonferenza il cui arco approssima quella piccola porzione di traiettoria.
Non può mai essere diretta verso l'esterno.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 260

Esempio

$\vec{a} = 3t\,\bar{u}_x + 0\,\bar{u}_y$

Condizioni iniziali: $t = 1s \Rightarrow \vec{v} = \bar{u}_x + \bar{u}_y$, $\vec{r} = 0\,\bar{u}_x + 0\,\bar{u}_y$

$$\vec{v} = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{C_1} = \frac{3}{2}t^2\,\bar{u}_x + C_{1x}\bar{u}_x + C_{1y}\,\bar{u}_y$$

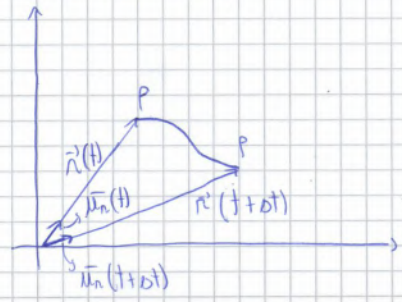
$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{3}{2}t^2 + C_{1x}\right)\bar{u}_x + C_{1y}\,\bar{u}_y$$

$$\vec{v}(t=1) = \left(\frac{3}{2} + C_{1x}\right)\bar{u}_x + C_{1y}\,\bar{u}_y$$

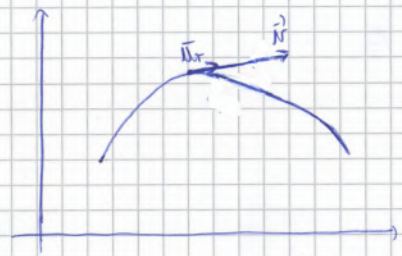
$$\begin{cases} \frac{3}{2} + C_{1x} = 1 \\ C_{1y} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{1x} = -\frac{1}{2} \\ C_{1y} = 1 \end{cases}$$

CINEMATICA

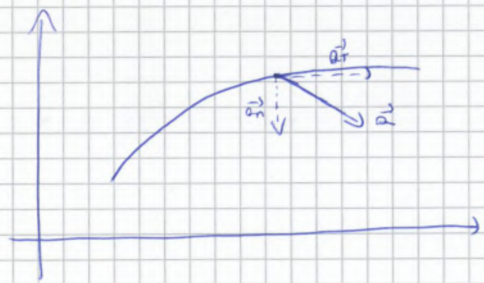
a) $\vec{r}(t) = x(t)\,\bar{u}_x + y(t)\,\bar{u}_y = r(t)\,\bar{u}_r(t)$



b) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = v\,\bar{u}_T = v_x\,\bar{u}_x + v_y\,\bar{u}_y$



c) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = a_x\,\bar{u}_x + a_y\,\bar{u}_y = a_T\,\bar{u}_T + a_n\,\bar{u}_n$



$a_T = \dfrac{dv}{dt}$

$a_n = -\dfrac{v^2}{R}$

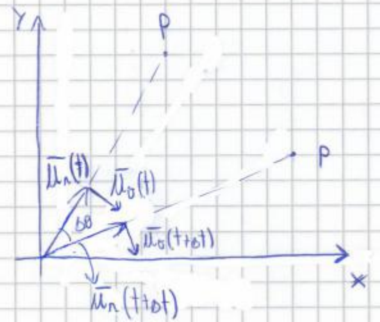
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 260

ACCELERAZIONE IN COORDINATE POLARI

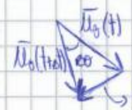
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\bar{u}_r + \frac{r\,d\theta}{dt}\bar{u}_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}\bar{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\bar{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\bar{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta \quad , \quad \frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = ?$$



$$\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\bar{u}_\theta(t+\Delta t) - \bar{u}_\theta(t)}{\Delta t}$$



$\bar{u}_\theta(t+\Delta t) - \bar{u}_\theta(t) \rightarrow$ direzione: $-\bar{u}_r$ (è diretto verso l'origine)

modulo: $R \cdot \Delta\theta = 1 \cdot \Delta\theta = \Delta\theta$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\bar{u}_\theta(t+\Delta t) - \bar{u}_\theta(t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\bar{u}_r = -\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_r$$

$$\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_r$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}\bar{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\bar{u}_r$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\bar{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\bar{u}_\theta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 260

CONCLUSIONE

Abbiamo introdotto tre sistemi di riferimento:

- cartesiano
- intrinseco con $\overline{u}_T$ e $\overline{u}_n$ ⇒ ci da il significato fisico dell'accelerazione
- polari con $\overline{u}_r$ e $\overline{u}_\theta$ ⇒ ci da il significato fisico della velocità

a) $\vec{r} = x(t)\,\overline{u}_x + y(t)\,\overline{u}_y$

in coord. pol. $\vec{r} = r\,\overline{u}_r$

in coord. intr. ⇒ non serve

b) $\vec{v} = v_x\,\overline{u}_x + v_y\,\overline{u}_y$

in coord. pol. $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\overline{u}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\overline{u}_\theta$ ⇒ significato fisico nella variazione in modulo e direzione del vettore posizione.

in coord. intr. $\vec{v} = v\,\overline{u}_T$ ⇒ significato fisico nella direzione del vettore velocità

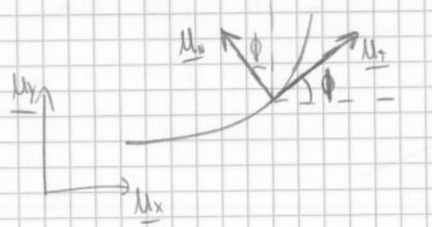
c) $\vec{a} = a_x\,\overline{u}_x + a_y\,\overline{u}_y$

in coord. pol. $\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overline{u}_r + \left[r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\overline{u}_\theta$

in coord. intr. $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\overline{u}_T - \frac{v^2}{R}\,\overline{u}_n$ ⇒ significato fisico nella variazione in modulo e direzione del vettore velocità.

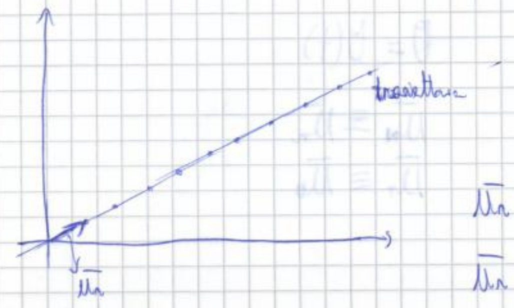
$$a_x = \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\sin\phi$$

$$a_y = \frac{dv}{dt}\sin\phi - \frac{v^2}{R}\cos\phi$$



CASI PARTICOLARI

a) moto rettilineo



$\overline{u}_r = $ cost. $\theta = $ cost.

$\overline{u}_r \equiv \overline{u}_T$ $R = \infty$

In coord. pol. la velocità è:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\overline{u}_r + 0$

↳ l'angolo θ è cost., quindi la sua derivata è 0

in coord. intr. ⇒ $\vec{v} = v\,\overline{u}_r$

In questo caso il modulo della velocità coincide con il modulo della derivata di $\vec{r}$ (che è cosa ben diversa dalla derivata del modulo di $\vec{r}$).

In coord pol l'accelerazione è:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\,\overline{u}_r\right) = \frac{d^2 r}{dt^2}\,\overline{u}_r + 0$

↳ $\overline{u}_r$ è costante, la sua derivata è 0

in coord intr. ⇒ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\overline{u}_r\right) = \frac{dv}{dt}\,\overline{u}_r + 0$

↳ $\overline{u}_r$ è costante, la sua derivata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 260

Scrivo invece la relazione in un altro modo:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f(\vec{r})$$

→ questa equazione differenziale mi permette di conoscere $\vec{r}(t)$

Quando devo risolvere il problema fondamentale nel piano ho due componenti da prendere in considerazione (direzioni x e y nel sistema di riferimento cartesiano).

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$$

$$\vec{v} = \underbrace{\left(\int a_x\, dt + CI\right)}_{v_x} \vec{u}_x + \underbrace{\left(\int a_y\, dt + CI\right)}_{v_y} \vec{u}_y$$

$$\vec{r} = \underbrace{\left(\int v_x\, dt + CI\right)}_{X} \vec{u}_x + \underbrace{\left(\int v_y\, dt + CI\right)}_{Y} \vec{u}_y$$

Ciò che succede nella direzione x non dipende da quello che succede nella direzione y e viceversa, quindi posso lavorare per componenti in maniera indipendente.

Dir. X $\Rightarrow$ $v_x = \int a_x\, dt + CI$

$X = \int v_x\, dt + CI$

Dir. Y $\Rightarrow$ $v_y = \int a_y\, dt + CI$

$Y = \int v_y\, dt + CI$

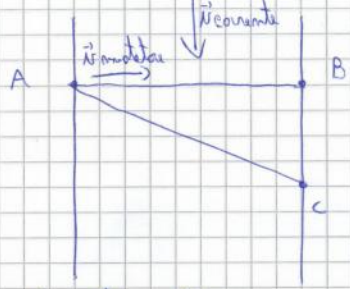
Ed infine posso esprimere i vettori come somme delle loro componenti:

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

$$\vec{r}(t) = X \vec{u}_x + Y \vec{u}_y$$

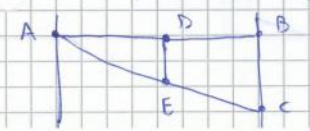
Questo procedimento si avvale del principio di sovrapposizione dei moti: se $\vec{a}$ dipende solo da t, un moto a due dimensioni può essere considerato come il risultato della sovrapposizione vettoriale di 2 moti a 1 dimensione nel medesimo Δt.

Esempio: il motoscafo nel fiume.



Il moto del motoscafo può essere descritto come la sovrapposizione di due moti monodimensionali:
- moto da A a B nell'intervallo di tempo $[0, t]$;
- moto da B a C nell'intervallo di tempo $[0, t]$.

L'intervallo di tempo in cui si considerano i due moti monodimensionali dev'essere lo stesso.
Ad esempio, se mi fermo a $t/2$ ho che:



per l'intervallo $[0, t/2]$ il moto è scomponibile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 260

b) Moto uniformemente accelerato

Questo moto è caratterizzato da:

$a = a_0 = \text{cost.}$ + 2 CI: per $t = t_0$ si ha che $v = v_0$, $x = x_0$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_0 + a(t - t_0) \\ x &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ N.B: non è la stessa cosa di $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, quest'ultima è valida solo se $t_0 = 0$

valgono solo per $a = \text{cost}$ e quelle due condizioni iniziali

Qualcuno si chiederà: e l'accelerazione normale?

Attenzione! L'accelerazione normale era quella componente dell'accelerazione che descriveva la variazione in direzione della velocità. In questo caso però, il moto è monodimensionale e quindi non ha senso parlare di accelerazione normale.

c) Caso generico (con dipendenza esplicita)

$a = f(t)$

Esempio

$a = 3t$; $t = 0 \Rightarrow v = 0, x = 0$

$\cancel{x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(3t)t^2}$ CAGATA! $\rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ vale solo quando $a = \text{cost}$.

$v = \int a\, dt = \int 3t\, dt = \frac{3}{2}t^2 + C_1$

$t = 0,\ v = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow v = \frac{3}{2}t^2$

$$x = \int v\, dt = \int \frac{3}{2}t^2\, dt = \frac{1}{2}t^3 + C_2$$

$t = 0,\ x = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{t^3}{2}$

d) Caso generico (con dipendenza implicita)

$\rightarrow$ si risolve con un'equazione differenziale.

I esempio

$a = -\omega^2 x(t)$ $\qquad t = 0 \Rightarrow x = 0,\ v = A\omega$

$\Downarrow$

moto particolare: moto armonico $\rightarrow$ a è direttamente proporzionale alla posizione x mediante una costante di proporzionalità negativa:

$a = kx$ con $k < 0$, in questo caso $k = -\omega^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \rightarrow \text{equazione differenziale}$$

La soluzione dovrà essere una funzione trigonometrica, poiché cambia di segno:

$x = C_1 \sin(\omega t + C_2)$

$v = \frac{dx}{dt} = C_1 \omega \cos(\omega t + C_2)$

$t = 0 \Rightarrow x = 0,\ v = A\omega$

$\begin{cases} C_1 \sin C_2 = 0 \\ C_1 \omega \cos C_2 = A\omega \end{cases}$ $\quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = A \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 260

$t = 0 \Rightarrow x = R$

$R = -\frac{1}{3} v_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = R + \frac{1}{3} v_0$

$\Rightarrow x = R + \frac{1}{3} v_0 \left(1 - e^{-3t}\right)$

Come si evince dal risultato, non è possibile utilizzare la formula particolare: $x = \frac{1}{2} a t^2$, poiché l'accelerazione non è costante.

COMBINAZIONE DI MOTI

Un moto a due dimensioni può essere descritto come sovrapposizione di 2 moti monodimensionali che avvengono nello stesso tempo.

$x = x(t)$ retta
$y = y(t)$ retta

Si deve risolvere ogni moto in maniera indipendente per poi ricavarne la traiettoria.

$\vec{r}(t) = x(t)\, \vec{u}_x + y(t)\, \vec{u}_y$

Esempi

1) $a_x = 0 \qquad t = 0 \quad v_x = 0$
$\qquad x = 3$

$a_y = 0 \qquad t = 0 \quad v_y = 3\,m/s$
$\qquad y = 0$

2o Se è un moto rettilineo uniforme in x, y ($\vec{a} = 0$)

$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$

$x = x_0 \Rightarrow$ la particella rimane ferma

$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0)$

$y = v_{0y} \cdot t$

$\Rightarrow \vec{r} = x_0 \vec{u}_x + v_{0y} \cdot t\, \vec{u}_y$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 260

La sovrapposizione fra un moto rettilineo uniforme ed un moto rettilineo uniformemente accelerato mi dà sempre un moto parabolico

3) Moto armonico lungo x e lungo y con lo stesso ω.

$a_x = -\omega^2 x \qquad t = 0 \quad x = A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad v_x = 0$

$a_y = -\omega^2 y \qquad t = 0 \quad y = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad v_y = A\omega$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$v_x = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

Per soddisfare le condizioni iniziali $\varphi = 0$

$y = B\cos(\omega t + \varphi')$

$v_y = -B\omega \sin(\omega t + \varphi')$

Per soddisfare le condizioni iniziali ho che:

$$\begin{cases} y = B\cos(\varphi') = 0 \\ v_y = -B\omega \sin(\varphi') = A\omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi' = \pi/2 \\ B = -A \end{cases}$$

Le mie due componenti della posizione saranno quindi:

$x = A\cos \omega t$

$y = +A\cos(\omega t + \pi/2) = A\sin(\omega t) \qquad$ ricordando $\cos(\alpha + \pi/2) = \sin\alpha$

Il fatto di imporre $\varphi' = \pi/2$ anziché a $3/2\,\pi$ è indifferente, perché la soluzione trovata in questo caso è equivalente alla prima:

$$\begin{cases} \varphi' = 3/2\,\pi \\ B = A \end{cases}$$

$y = -A\cos(\omega t + 3/2\,\pi) = A\sin(\omega t) \qquad$ ricordando $\cos(\alpha + 3/2\,\pi) = -\sin\alpha$

Il vettore posizione risulta essere alla fine:

$$\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + A\sin(\omega t)\,\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = A\sin(\omega t) \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = A^2\cos^2(\omega t) + A^2\sin^2(\omega t) \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$

Se cambiassi le fasi in modo uguale su entrambe le componenti avrei avuto ugualmente un moto circolare ma partendo da un punto diverso.

Cambiando le fasi in maniera diversa sulle due componenti non è più vero che ho un moto circolare:

$x^2 + y^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi_1) + A^2\sin^2(\omega t + \varphi_2)$

In generale, qualunque condizione iniziale io cambi otterrò sempre una variazione nel risultato.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 260

A) Invece di usare le coordinate x, y posso utilizzare:

$$\gamma = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

e questi sono sufficienti a descrivere il moto

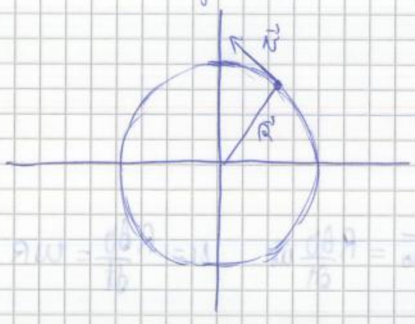
$$\gamma R = a_T$$

$$\omega R = v_T$$

$\vec{v} = \omega R \, \vec{u_T}$ in fisica si scrive come:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

dove $\vec{\omega}$ è un vettore di modulo ω e direzione perpendicolare al piano della circonferenza e verso uscente dal foglio.



$\vec{\omega}$ è perpendicolare al piano della circonferenza, $\vec{R}$ giace su quel piano, quindi $\vec{\omega} \perp \vec{R}$

$$\Rightarrow \|\vec{\omega} \wedge \vec{R}\| = \omega R = v$$

Il verso di ω cambia a seconda che l'oggetto si muova sulla circonferenza in modo antiorario o orario.

VELOCITÀ ANGOLARE $\vec{\omega}$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

La direzione è costante ed è perpendicolare al piano

Un discorso analogo si può fare per γ: $\vec{a_T} = \vec{\gamma} \wedge \vec{R}$

ACCELERAZIONE ANGOLARE $\vec{\gamma}$

$$\gamma = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

La direzione è costante ed è perpendicolare al piano.

Nota $\gamma(t)$:

$$\omega(t) = \int \gamma(t)\, dt + \underbrace{\text{cost}}_{C.I.}$$

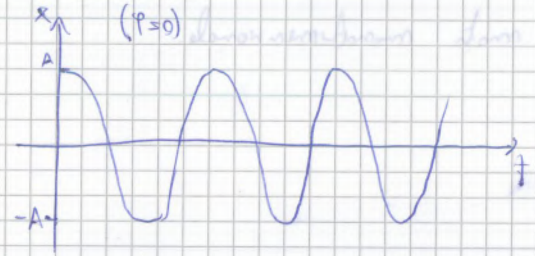
$$\theta(t) = \int \omega(t)\, dt + \underbrace{\text{cost}}_{C.I.}$$

Dunque il moto circolare è la stessa cosa di quello rettilineo, solo che cambiano i simboli

$$\left.\begin{array}{l} x \to \theta \\ v \to \omega \\ a \to \gamma \end{array}\right\} \text{1-D} \quad \text{rimane in una dimensione}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 260

Possiamo fare il grafico x-t:



Ma attenzione perché questo non è il grafico della traiettoria! Quest'ultima è data dal grafico x-y:

Il mio oggetto si muove avanti e indietro da A a $-A$ e viceversa.

MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE

$$a = -k v$$

con k cost. positiva

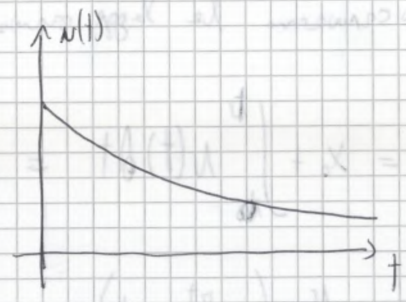
$\Rightarrow$ acc. sempre contraria alla velocità

$$\frac{dv}{dt} = -k v$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

v_0 è la vel. in $t=0$; $v_0 \neq 0$ necessariamente, altrimenti non c'è moto.

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$



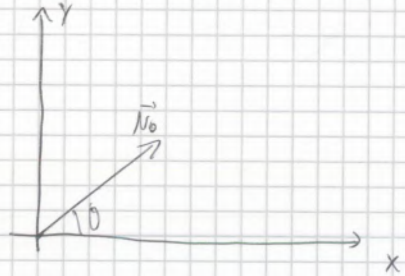
Vogliamo esprimere la velocità in funzione dello spazio:

$$v(x) = v(x(t))$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 260

MOTO PARABOLICO



per $t = 0$ si ha:

- $\vec{r} = 0$
- $\vec{v} = \vec{v}_0$
- $\vec{a} = \vec{g} = -g\,\bar{u}_y$

$$\underline{v}(t) = \underline{v_0} + \int_0^t \underline{a}(t)\,dt = \underline{v_0} - g t\,\underline{u_y}$$

$$\underline{v_0} = v_0 \cos\theta\,\underline{u_x} + v_0 \sin\theta\,\underline{u_y}$$

$$\Rightarrow \underline{v}(t) = v_0\cos\theta\,\underline{u_x} + (v_0\sin\theta - g t)\,\underline{u_y}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - g t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0\cos\theta\, t \\ y = v_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad y(x) = x\,tg\theta - \frac{g}{2 v_0^2\cos^2\theta}\,x^2$$

$$tg\,\phi = \frac{v_y}{v_x} = \text{direzione del moto (generale)}$$

Gittata:

$$x_G = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = 2\,x_M$$

↳ 2 volte la coordinata del punto di massimo

Altezza massima

$$y_M = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Tempo di volo:

$$t = \frac{x_G}{v_0\cos\theta} = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

Se $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a_T = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow v \text{ cost. e traiettoria rettilinea.}$$

In assenza di forze un corpo può al massimo muoversi con moto rettilineo uniforme.

B) II principio / legge di Newton

La somma delle forze è direttamente proporzionale all'accelerazione e la costante di proporzionalità è data dalla massa.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

La massa in fisica viene definita come la grandezza che descrive la resistenza di un punto a variare il suo stato di moto.

Per una m più grande di un'altra per ottenere la stessa variazione di v ($\vec{a}$) è necessario applicare una $\vec{F}$ maggiore.

Possiamo andare ad analizzare le componenti dei vettori, supponendo di avere un'unica forza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y = m\vec{a} = m a_x \vec{u}_x + m a_y \vec{u}_y$$

Ovvero ciò che vale per il vettore, vale anche per le singole componenti:

$F_x = m a_x$ $\quad F_y = m a_y$

Se più di una forza, vale lo stesso ragionamento:

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \sum F_x = m a_x$ $\quad \sum F_y = m a_y$

Coordinate intrinseche

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n) = m a_T \vec{u}_T + m a_n \vec{u}_n$$

Componente tangenziale $\rightarrow F_T = m a_T$

Componente centripeta $\rightarrow F_n = m a_n$

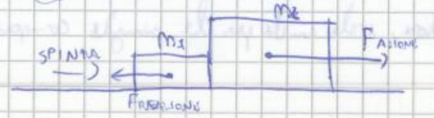
C) III principio - azione e reazione

Per parlare di questo principio bisogna tener presente che abbiamo 2 corpi e 2 punti di applicazione.

Se un corpo A applica una forza (su) un corpo B allora B applica una forza uguale e contraria su A.

Attenzione: A e B hanno un ruolo diverso. Il corpo A applica una forza, dunque è la sorgente, la causa che produce la forza. B è il corpo che subisce la forza, cioè la sonda, ciò che sente la forza. In seguito B diventa nuova sorgente su la sorgente iniziale.

Il (su) indica il punto di applicazione



m_1 = sorgente

m_2 = sonda

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 260

SCHEMA

1) 3 principi

2) Risultati forza $\Rightarrow \vec{a}$

---

1) 3 principi

i) $\sum \vec{F} = 0 \iff \vec{v} = cost$

$\iff \vec{a} = 0$

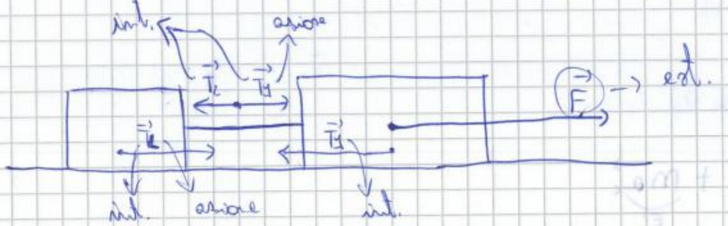
ii) $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$m \Rightarrow$ resistenza di un corpo a variare il suo stato di moto

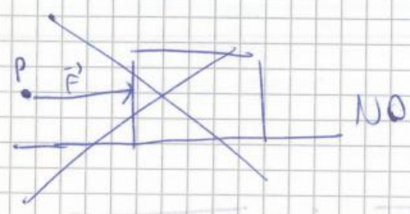
iii) $\underbrace{\vec{F}_{AB}}_{\text{sorgente, sonda}} = - \underbrace{\vec{F}_{BA}}_{\text{sorgente, sonda}}$

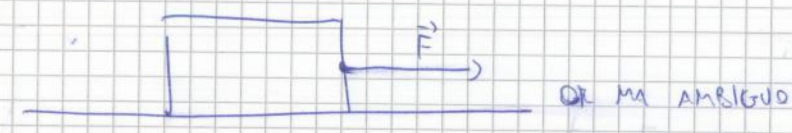
$\vec{F}_{ext.} \Rightarrow$ sorgente al di fuori del sistema $\Rightarrow$ non tengo conto del concetto di azione e reazione

$\vec{F}_{int.} \Rightarrow$ sorgente appartenente al sistema $\Rightarrow$ devo tener presente il concetto di azione e reazione



Punti di applicazione





---

2) Azione della forza

$\Rightarrow$ gli oggetti devono avere una massa m

$\Rightarrow$ gli oggetti devono essere in movimento

$\Delta t \Rightarrow$ variazione di tempo (come col procedere dell'esperimento)

vi è una variazione di posizione $\Rightarrow \vec{r}(t)$

a) $\vec{F}$ produce una $\vec{a}$

$\Downarrow$

$(\sum \vec{F})$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$F = \underbrace{m\vec{a}_1}_{\vec{F}_1} + \underbrace{m\vec{a}_2}_{\vec{F}_2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 260

Lungo x: $F_x = m a_x$

$$a_x = \frac{3t \cos \pi/3}{m}$$

C.I.: $t = 0$ $\quad \vec{r} = 0$, $\vec{v} = 0$

$$v_x = \frac{3}{2} \frac{\cos \pi/3}{m} t^2 + \cancel{c_1}$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{\cos \pi/3}{m} t^3 + \cancel{c_2}$$

Lungo y: $F_y = m a_y$

$$a_y = \frac{3t \sin \pi/3}{m}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi/3}{m} t^3$$

Combino i due moti:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \frac{\cos \pi/3}{m} t^3 \vec{u}_x + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi/3}{m} t^3 \vec{u}_y$$

~ ~ ~ ~ ~

b) ⇒ quantità di moto

Ovvero ci occupiamo di studiare l'effetto di una forza per un Δt finito. Ci interessa l'effetto complessivo.

Per vedere l'effetto complessivo di una forza in un Δt finito dovrei effettuare una "somma delle forze" nel tempo. Dunque integro $\vec{F}$ secondo Δt:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt \Rightarrow \text{questo si definisce impulso}$$

Teoria della quantità di moto

$$\vec{J} \overset{def}{=} \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m\left[\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)\right]$$

$$\vec{J} = m\underbrace{\vec{v}_f}_{\text{velocità al tempo } t_1} - m\underbrace{\vec{v}_{in}}_{\text{velocità al tempo } t_0}$$

$$\vec{q} \overset{def}{=} m\vec{v}$$

$$\vec{J} = \vec{q}_f - \vec{q}_{in} \Rightarrow \vec{J} = \Delta\vec{q}$$

L'effetto di una forza che agisce per un certo tempo è far variare la quantità di moto.

d) Teorema della conservazione della quantità di moto.

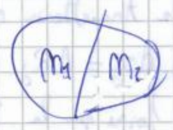
Hp $\Rightarrow$ $\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$

Se $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow$ la derivata è nulla, dunque $\vec{q} = \text{cost}$.

$\Longrightarrow \vec{q_{in}} = \vec{q_f}$ (per quest'ultima implicazione non vale necessariamente il viceversa)

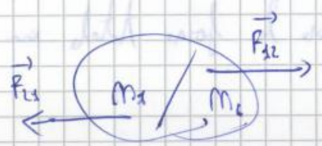
Se $m = \text{cost}$, quanto detto è equivalente al primo principio ($\vec{v} = \text{cost}$)

Esempio



$\vec{v_o} = 0$

Si verifica un'esplosione $\Rightarrow$ le due masse si allontanano.



m_1 applica una forza su m_2, e per il III principio m_2 si applica una uguale e contraria su m_1.

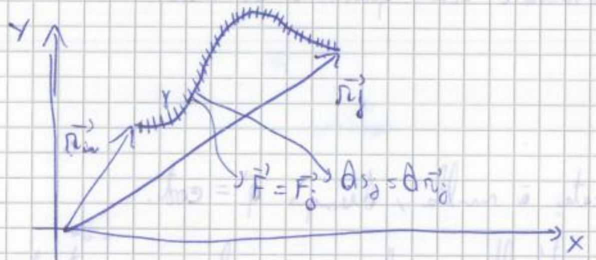
$\sum \vec{F} = \vec{F_{21}} + \vec{F_{12}} = 0$

$\Rightarrow \vec{q} = \text{cost} \Rightarrow \vec{q_{in}} = \vec{q_f}$

$m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2}$

Misurando la velocità di una massa posso sapere quella dell'altra.

e) Effetto di una forza quando varia la posizione dell'oggetto



Come nel caso del tempo anche qui integro $\vec{F}$ secondo $d\vec{r}$.

$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} \Rightarrow$ questo significa dividere la curva in pezzettini infinitesimi, per ognuno di essi ho una forza definita $\vec{F_j}$. Inoltre per una quantità tendente a 0, monitorando la traiettoria rappresento lo spostamento e non la posizione, quindi $ds_j = d\vec{r_j}$. Quindi praticamente io faccio la somma di tutte le forze per la traiettoria, su ogni pezzettino $d\vec{r}$, e poi integro.

$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$ l'integrale mi dice la forza totale su un certo spazio

(vettore; prodotto scalare; vettore)

Quest'integrale corrisponde al lavoro:

$W \stackrel{def}{=} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Teorema energia-lavoro

$\vec{F} = F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y}$

$d\vec{r} = dx\, \vec{u_x} + dy\, \vec{u_y}$

Dunque posso fare

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F\, dr \cos\theta = F \int dr \cos\theta(t)\,,$$

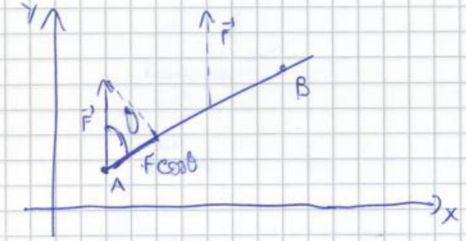
in caso di $\vec{F}$ costante

Inoltre se $\vec{F} = \text{cost}$ e la traiettoria γ è una traiettoria rettilinea, allora anche $d\vec{r}$ ha direzione costante.

$\Rightarrow \theta$ = angolo fra $\vec{F}$ e $d\vec{r}$, risulta costante.

$$W = F\cos\theta \cdot \int_\gamma d\vec{r} = F\cos\theta \cdot \ell$$

ℓ → lunghezza della traiettoria



Possiamo riscrivere la relazione come:

$W = F_{\parallel} \cdot \ell$

$F_{\parallel}$ → componente di $\vec{F}$ parallela alla traiettoria

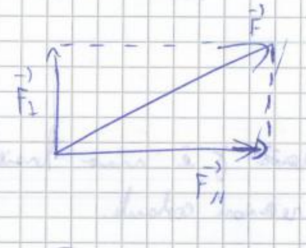
N.B.: vale solo se contemporaneamente $\vec{F} = \text{cost.}$ e $d\vec{r} = \text{cost.}$

iii) Addizione dei lavori

Se $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots = W_1 + W_2 + \ldots$$

Importante: data una forza posso sempre pensare di scomporla in due componenti, una parallela allo spostamento e una ortogonale.

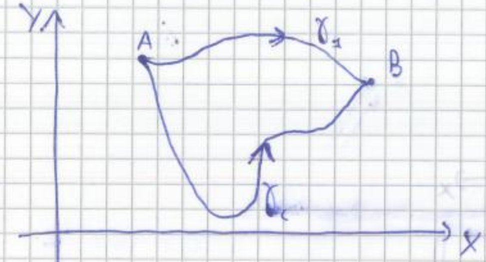


$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_\perp$$

$W = W_{\parallel} + W_\perp$

$W_\perp$ → $= 0$ perché $\vec{F}_\perp \perp d\vec{r}$ dunque il prodotto scalare è nullo.

iv)



Se il lavoro è un integrale, e l'integrale è una somma, il lavoro per andare da A a B non è sempre lo stesso.

$$W_{AB}^{\gamma_1} \neq W_{AB}^{\gamma_2}$$

Il lavoro dipende dalla traiettoria percorsa.

$$\Delta K = \int_{x=0\,m}^{x=L\,m} F \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \int_{0\,m}^{L\,m} 3e^x\, dx$$

v_i → 1 (ipotesi)

$$\int_{0\,m}^{L\,m} 3e^x\, dx = \left[3e^x\right]_0^L = 3(e^L - 1) \Rightarrow v_f = \sqrt{\left(3(e^L-1) + \frac{m}{2}\right)\frac{2}{m}}$$

Per una x generica:

$$\int_0^x 3e^x\, dx = 3e^x - 3$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m 1^2 = 3e^x - 3$$

$$v = \sqrt{\left(3e^x - 3 + \frac{m}{2}\right)\frac{2}{m}}$$

iv) $\Delta q = m(v_f - v_i) = m\left(\sqrt{\left(3(e^L-1)+\frac{m}{2}\right)\frac{2}{m}} - 1\right) = J$

per $x \in [0, L]$

v) $v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(3e^x - 3 + \frac{m}{2}\right)}$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\ldots}$ posso fare un'equazione diff a variabili separabili

$$\frac{dx}{\sqrt{\ldots}} = dt \quad \Rightarrow \text{risolvo}$$

ELENCO DI FORZE

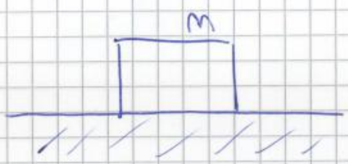
Premessa

Bisogna tener ben presenti i seguenti concetti:

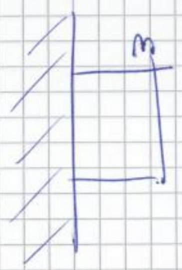
- modulo;
- direzione;
- verso;
- punto di applicazione;
- sorgente.

1 Reazioni vincolari

i) La sorgente è un "vincolo", cioè un oggetto che impedisce il moto in una particolare direzione.



Il tavolo impedisce il moto lungo y, verso il basso



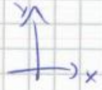
La parete impedisce il moto lungo x, verso sinistra

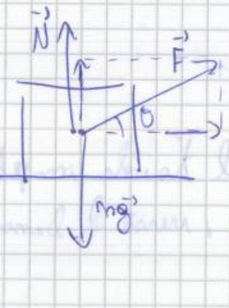
ii) $\vec{N}$ è un vettore con direzione perpendicolare alla superficie vincolante.
Modulo = somma delle altre forze perpendicolari alla superficie.
Verso ⇉ uscente dalla superficie.
Se non vi sono forze applicate alla superficie vincolante allora il modulo di $\vec{N}$ è 0.

iii) Punto di applicazione

Nel caso dei corpi approssimabili a punti materiali il punto di applicazione di una forza è equivalente per ogni punto della superficie di contatto.

Esempi





$|\vec{F}| = F$

$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y$

$F_x = F\cos\theta$

$F_y = F\sin\theta$

Lungo $x \Rightarrow F_x = m a_x$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 260

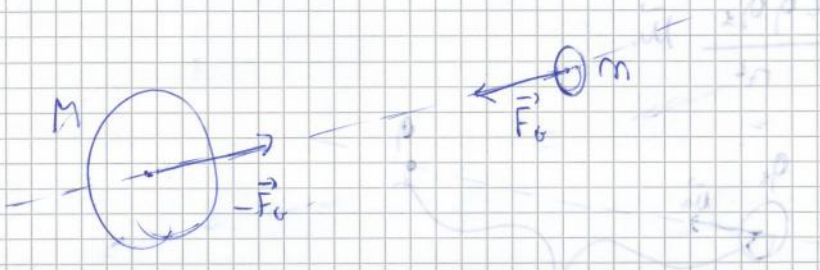
N.B.: r in questo caso è un modulo, non un vettore

Il verso della forza è attrattivo, dunque una massa tende ad avvicinarsi all'altra. Matematicamente questo si indica con il segno "−";

$$\vec{F}_G = -G\,\frac{mM}{r^2}\cdot \vec{u}_r$$

dove $\vec{u}_r$ è un versore parallelo alla retta congiungente le due masse.

Si ricorda che vale sempre il principio di azione e reazione.



Caso particolare

M = massa della terra

r = raggio della terra

$$|\vec{F}_G| = \underbrace{\frac{G M_T}{r_T^2}}_{\text{sono tutte costanti, ed il risultato è } \approx 9,8\,m/s^2}\, m$$

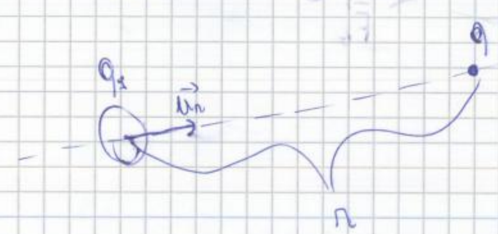
$$g = \frac{M_T G}{r_T^2} = 9,8\,m/s^2$$

$F_{peso} = mg$
- direzione verticale
- verso il basso.

3) Forza di Coulomb

1) La sorgente è una carica elettrica q_1 che esercita la forza su di un'altra carica q.

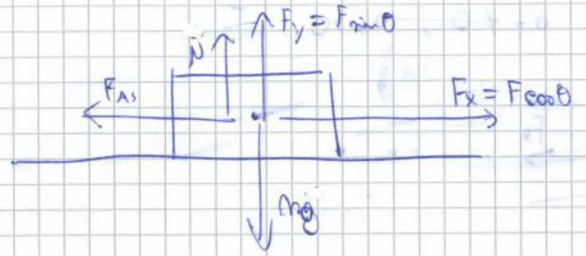
$$\vec{F}_{coulomb} = \frac{k\,q\,q_1}{r^2}\,\vec{u}_r$$



Questa forza è completamente analoga a quella gravitazionale. L'unica differenza è costituita dal verso.

- attrattiva se $q\cdot q_1 < 0$ $\qquad \circ\xrightarrow{-\vec{F}_c} \qquad \xleftarrow{\vec{F}_c}\circ \qquad q_1 q < 0$
- repulsiva se $q\cdot q_1 > 0$ $\qquad \xleftarrow{-\vec{F}_c}\circ \qquad \circ\xrightarrow{\vec{F}_c} \qquad q_1 q > 0$

Di solito la costante k può essere scritta come: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$



Ipotizzo anzitutto che non si muova.

y) $N + F\sin\theta - mg = 0$

$N = mg - F\sin\theta = 100 - 1 = \underbrace{99\ Nw}_{N>0 \Rightarrow OK}$

x) $F\cos\theta - F_{AS} = 0$ (la nostra ipotesi è che non si muova)

$F_{AS} = F\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$F_{AS}^{MAX} = \mu_s N = 0{,}2 \cdot 99 = 19{,}8 \Rightarrow F_{AS} < F_{AS}^{MAX} \Rightarrow OK$

$a_x = 0$, $a_y = 0 \Rightarrow N_y = 0$

Ora per lo stesso problema cambiamo i dati della massa m e della forza F:

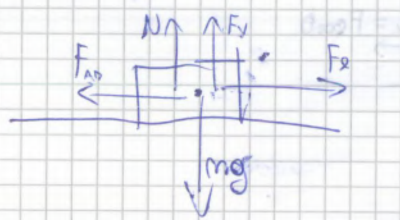
$m = 1kg$ $F = 18N$

Ipotizziamo nuovamente $a_x = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\theta = 10 - 9 = 1\,N$

$F_{AS} = F\cos\theta = 9\sqrt{3}\,N$

$F_{AS}^{MAX} = \mu_s N = 0{,}2\,N$ Ma $F_{AS} > F_{AS}^{MAX} \Rightarrow$ l'ipotesi $a_x = 0$ è errata

Ipotizziamo allora $a_x \neq 0$, $a_x > 0$.



y) $N = mg - F_y$

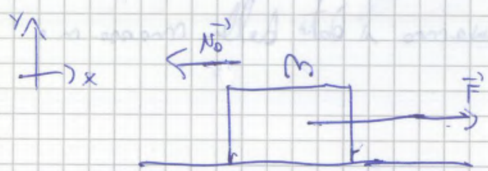
x) $F_x - \mu_d \cdot N = m a_x$ ↳ come trovarla?

$F_{TOT} = F_x - \mu_d N = cost$

$\Delta q = F_{TOT} \Delta t$

$m v_f - \cancel{m v_i} = F_{TOT} \Delta t \Rightarrow v_f = \frac{F_{TOT} \Delta t}{m}$ ($v_i = 0$)

Esempio 2



$v_0 < 0$

$\mu_s \neq 0$

$\mu_d \neq 0$

TH

Δx prima di fermarsi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 260

Per quanto riguarda m_1:

$y)\ N_B - m_1 g - N_A = 0$

$x)\ F_{AD} - F_{AD_1} = m_1 a_{1x}$

Per m_2:

$y)\ N_A - m_2 g = 0$

$x)\ F - F_{AD} = m_2 a_{2x}$

$N_A = m_2 g \qquad N_B = (m_1 + m_2) g$

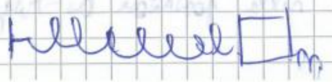
$F_{AD_2} = \mu_{D_2} N_A$

$F_{AD_1} = \mu_{D_1} N_B$

$$\begin{cases} F - \mu_{D_2} m_2 g = m_2 a_{2x} \\ \mu_{D_2} m_2 g - \mu_{D_1}(m_1 + m_2) g = m_1 a_{1x} \end{cases}$$

6) Forza elastica

i) La sorgente è una "molla", a cui è attaccata la nostra massa.



Per una molla ideale si assume $m_{molla} = 0$

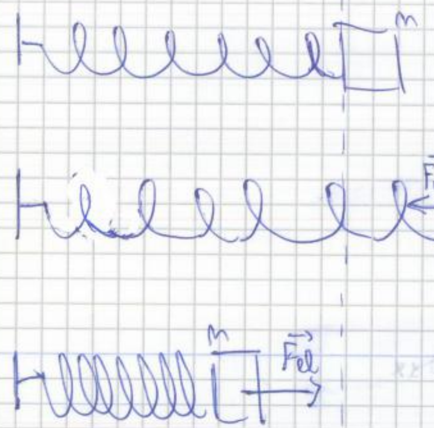
ii) La forza elastica sulla massa F_{el} è data da:

- modulo $\Rightarrow F_{el} = K \cdot \Delta l$

Δl = allungamento = $l - l_0$

l → lunghezza molla deformata; l_0 → lunghezza molla a riposo

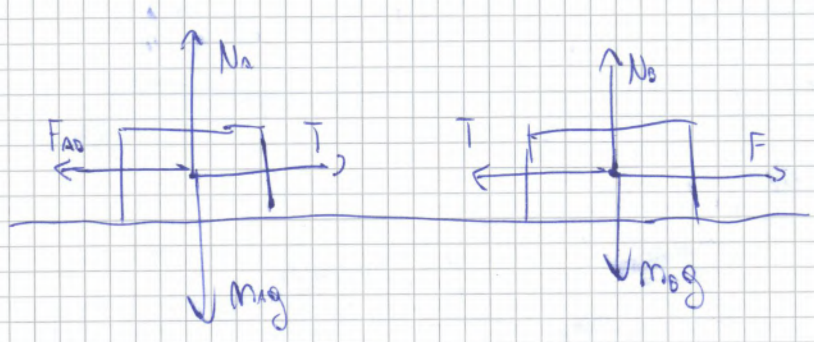
- direzione parallela all'asse della molla
- verso di richiamo, ossia verso la posizione d'equilibrio.



Nella forza elastica il modulo dipende dalla posizione, e quindi dipende implicitamente dal tempo. Dunque l'accelerazione non sarà mai costante, ed il moto sarà sempre vario.

Per studiare il moto, scelgo un sistema di riferimento intelligente. Scelgo di porre l'origine nella posizione di riposo della molla.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 260



y) $N_A = m_A g$

$N_B = m_B g$

x) $T - F_{AD} = m_A a_x$

$F - T = m_B a_x$

Quando l'accelerazione è massima? Quando la tensione è uguale al carico di rottura.

$T = T_0$

$-F_{AD} = -\mu_a N_A$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{T_0 - \mu_a N_A}{m_A} \\ F = m_B a_x + T_0 \end{cases}$$

EFFETTI FORZE

i) $\vec{F} = m\vec{a}$ $\qquad \vec{F} = \Sigma \vec{F}$

ii) $\Delta \vec{q} = \int \vec{F}\, dt = \vec{J}$

$\vec{q} = m\vec{v}$

$\vec{F}$ è cost $\Rightarrow \Delta \vec{q} = \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{J}$

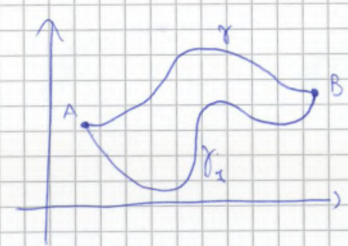
iii) $\Delta K = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = W$

$K = \frac{1}{2} m v^2$

$W = \int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$

In generale

$W_\gamma \neq W_{\gamma_1}$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 260

ENERGIA POTENZIALE

Per introdurre questa grandezza partiamo dal considerare una forza conservativa, ossia una forza tale per cui il lavoro W dipende solo da A e da B (stati iniziale e finale)

Possiamo definire la funzione energia potenziale come una funzione che dipende solo dalla posizione dell'oggetto:

$$E = E(\vec{r}) = E(x, y, z)$$

Per definizione:

$$\Delta E \stackrel{def}{=} -W^{cons} \quad , \quad E^B - E^A \stackrel{def}{=} -W^{cons}$$

Osservazioni

a) Noi definiamo la variazione ΔE di energia potenziale, e non l'energia potenziale E in modo diretto. Dunque essa è definita a meno di una costante additiva arbitraria.

Ciò vuol dire che definendo due energie potenziali:

$$E = f(x,y,z) \qquad E' = f(x,y,z) + k = E + k$$

entrambe soddisfano la definizione data.

$$\Delta E = -W$$

$$E_B - E_A = -W$$

$$(E'_B - k) - (E'_A - k) = -W$$

$$E'_B - E'_A = -W$$

Come fare per eliminare l'ambiguità legata alla k!

Fisso un sistema di riferimento per energie potenziali. Ovvero fisso una posizione $\vec{r} = \vec{r}_0$ dove l'energia potenziale E è pari a 0.

$$E(\vec{r} = \vec{r}_0) + k = 0$$

$$k = -E(\vec{r} = \vec{r}_0)$$

b) $\Delta E = -W$ vale anche in forma differenziale.

$$dE = -dW$$

Ricordando che $E = E(x,y,z)$

$$dE \stackrel{def}{=} \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz$$

dove i tre termini sono le derivate parziali rispetto a x, y, z.

Dunque avremo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z) \cdot (dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) =$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy + \frac{\partial E}{\partial z} dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Perché siano uguali i termini dell'espressione devono essere a due a due

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 260

$$E_B - E_A = -\int \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}_{el} \parallel d\vec{r}$ con $\theta = 180°$ (versi discordi) $\Rightarrow \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -F_{el}\, dr = -F_{el}\, dx$

$$\Rightarrow -\int -F_{el}\, dx = -\int -kx\, dx \quad \Rightarrow -\int \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = \int kx\, dx$$

$$E_B - E_A = \left[\frac{1}{2} kx^2\right]_{x=x_A=0}^{x=x_B} = (-)\frac{1}{2} k x_B^2$$

Dunque se $E = 0$ in $x = x_A = 0$, allora

$$E_B = \frac{1}{2} k x_B^2 \quad \text{e in generale}$$

$$E_{el} = -\frac{1}{2} kx^2$$

dove x è l'allungamento rispetto allo 0 del sistema di riferimento, e il segno "−" indica il verso di richiamo della forza

In realtà il lavoro è negativo, non l'energia potenziale

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Partiamo dall'ipotesi $W = \Delta K$ per ogni forza.

Se ho sia forze conservative che non conservative il lavoro totale W è dato:

$$W = W^{NC} + W^{CONS}$$

$$W^{NC} + W^{CONS} = K_{fin} - K_{in}$$

$$W^{NC} \underbrace{- \Delta E}_{E_{in} - E_{fin}} = K_{fin} - K_{in}$$

$$\Rightarrow K_{in} + E_{in} + W^{NC} = K_{fin} + E_{fin}$$

che è il teorema di conservazione dell'energia, dove il termine W^{NC} rappresenta l'energia dissipata

La somma tra l'energia cinetica e potenziale di un corpo è detta energia meccanica:

$$E^{MECCANICA} = K + E$$

K: legata alla velocità

E: legata alla posizione

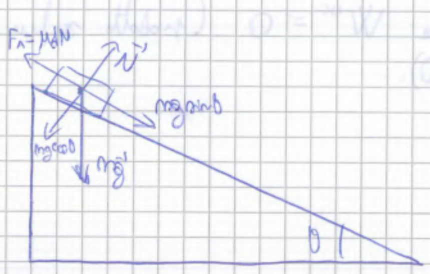
Riguardo l'energia dissipata W^{NC} notiamo che:

Dato $W^{NC} = \int_\gamma \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}$, se $\vec{F}$ ha lo stesso verso di $d\vec{r}$ allora $W^{NC} > 0$

$\Rightarrow E_{in}^{MECC} + W^{NC} = E_{fin}^{MECC}$ quindi in questo caso $E_{fin}^{MECC} > E_{in}^{MECC}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 260

Rifacciamo lo stesso problema adesso aggiungendo l'attrito.



HP aggiuntive: attrito μ_d

$W^{NC} \Rightarrow \vec{N} \rightarrow W^{NC} = 0$

$\vec{F}_{AD} \rightarrow$ cost. e // a $d\vec{r}$, ma verso opposto

$W^{NC} = -\mu_d N \cdot L$

$E_i + K_i + W^{NC} = E_f + K_f$

$mgh - \mu_d \underbrace{mg\cos\theta}_{N} \cdot L = \frac{1}{2} m v_f^2$

La soluzione alternativa è la seguente.

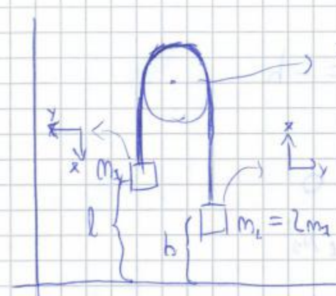
x) $F_x = mg\sin\theta - \mu_d N = ma_x$

$L = \frac{1}{2} a_x t_1^2 \qquad v_1 = a_x t_1$

y) $N - mg\cos\theta = 0$

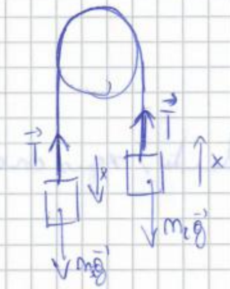
$N = mg\cos\theta$.

Problema B4



Trovare la v con cui m_2 tocca terra.

↳ 1 = 0

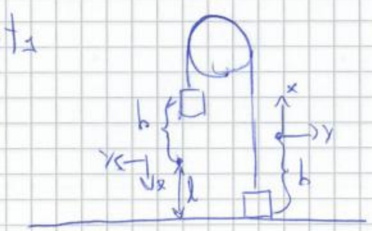


Secondo il mio sistema di riferimento ho moto solo in x

$t = 0$

$m_1 \Rightarrow$	$x = 0$	$m_2 \Rightarrow$	$x = 0$
	$v = 0$		$v = 0$
	QUOTA $= l$		QUOTA $= h$
	$K = 0$		$K = 0$
	$E = mgl$		$E = mgh$

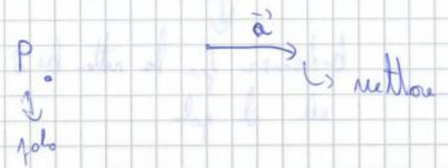
$t = t_1$



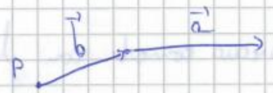
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 260

MOMENTO ANGOLARE

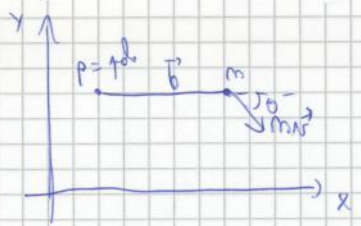
Per introdurre il concetto di momento di un vettore devo definire un **polo**. Questo è un punto qualsiasi rispetto a cui calcolo il momento.
Ho così due elementi importanti: il vettore $\vec{a}$ e il polo P.



Il momento si definisce come il prodotto vettoriale fra il braccio e il vettore, dove il braccio è il vettore posizione $\vec{b}$ di $\vec{a}$ rispetto al polo:



Definiamo il momento angolare $\vec{L}$ come il momento della quantità di moto.

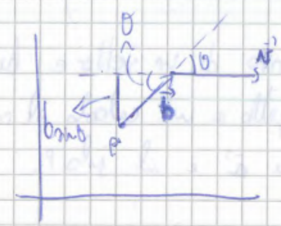


$$\vec{L}_P = \vec{b} \wedge m\vec{v} = \vec{b} \wedge \vec{q}$$

i) $\vec{L} = 0$ se $\vec{b} \parallel \vec{q}$

ii) $\vec{L} = \vec{b} \wedge m\vec{v}$ ha direzione perpendicolare al piano di $\vec{b}$ e $\vec{v}$

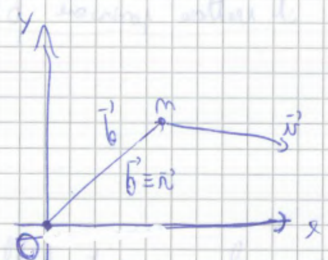
$$|\vec{L}| = |\vec{b}|\, m\, |\vec{v}| \cdot \sin\theta$$



$|\vec{L}| = b \sin\theta\, m v = d\, m v$

d ⇓ distanza fra la retta di $\vec{v}$ ed il polo

iii) Caso in cui il polo coincide con l'origine O.



In questo caso il braccio coincide con il vettore posizione.

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

a) Coordinate polari:

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$

$\vec{v}_r$ → radiale, $\parallel$ a $\vec{r}$

$\vec{v}_\theta$ → angolare, $\perp$ a $\vec{r}$

$$\vec{v}_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \cancel{\vec{r} \wedge m\vec{v}_r} + \vec{r} \wedge m\vec{v}_\theta$$

$\vec{r} \parallel \vec{v}_r$

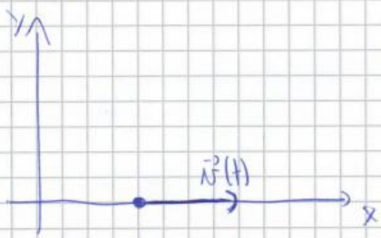
b) Moto $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

so solo come varia il prodotto vettoriale, ma non conosco $\vec{r}(t)$ quindi non posso conoscere $\vec{q}(t)$.

N.B.: se $\vec{M} = 0 \not\Rightarrow \vec{F} = 0 \not\Rightarrow \vec{q} = \text{costante}$

Implica solo che $\vec{L} = \text{costante}$

Esempio



$\vec{v}(t) = 3t\,\vec{u}_x \qquad t=0 \quad x=0$

$\vec{a}(t) = 3\,\vec{u}_x \qquad y=0$

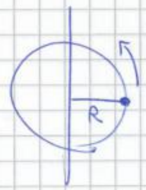
$\vec{r}(t) = \frac{3}{2}t^2\,\vec{u}_x + 0\,\vec{u}_y$

$\vec{F} = \frac{3}{m}\vec{u}_x$

$\vec{q} = 3mt\,\vec{u}_x$

Dato che $\vec{v} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = 0$

Inoltre, siccome $\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = 0$



$r = R \qquad \theta = \omega t \qquad \omega = 3t^2$

$\vec{v}_T = \omega R = 3Rt^2\,\vec{u}_T$

$\vec{q} = m\vec{v}_T$

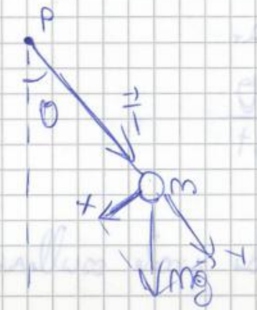
$\vec{L} = mr^2 \frac{d\theta}{dt}\underbrace{\vec{u}_\perp}_{\perp \text{ al piano}} = mr^2\vec{\omega} = \underbrace{mR^2}_{I = \text{momento d'inerzia}}\omega$

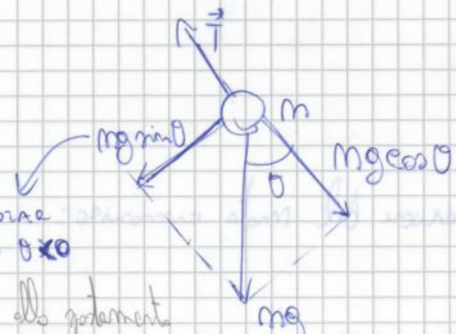
DINAMICA DEL PUNTO

* Pendolo matematico
* Forze centrali

PENDOLO

Il pendolo è costituito da un oggetto di massa m puntiforme sospeso mediante una fune ideale rispetto ad un punto P.



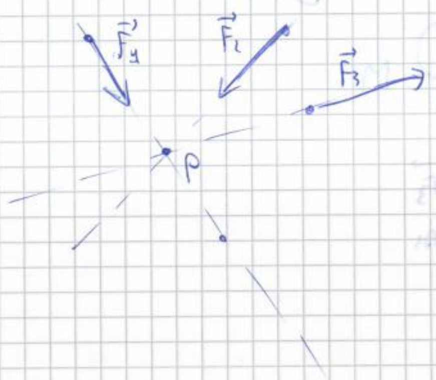


è una forza negativa se θ>0

si oppone allo spostamento

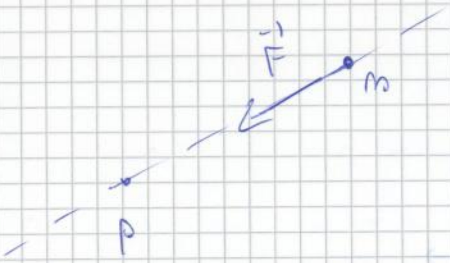
FORZE CENTRALI

a) Definizione: due o più forze si dicono centrali se le loro rette di azione si incontrano in un punto.

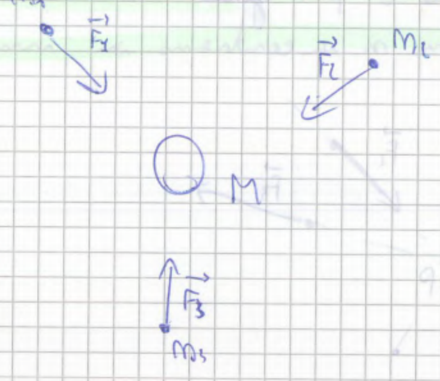


Attenzione: non ci interessa che le forze siano attrattive o repulsive.

Un oggetto di massa m posizionato in un campo di forze centrali subisce una forza $\vec{F}$ che ha direzione lungo la retta congiungente il corpo con il punto P.



b) Esempi: campi gravitazionali o elettromagnetici.



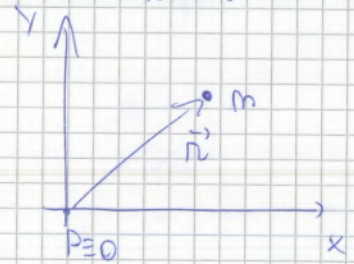
c) Proprietà:

- forze conservative
- $\vec{L}$ = costante

Dimostrazione

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

↳ braccio



$\vec{M}$ = momento della forza = $\vec{r} \wedge \vec{F}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 260

MOTI RELATIVI

a) Definizioni

b) Formula matematica

c) Trasformazioni delle velocità

d) Trasformazioni delle accelerazioni

e) Esempio

f) Forze apparenti

---

a) DEFINIZIONI

I moti relativi ci permettono di capire come cambiano le grandezze cinematiche se cambio il sistema di riferimento.

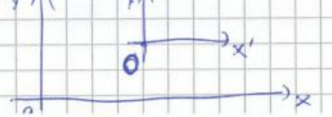
Se ho definito $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ in SR, essi diventeranno:

$\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}'$ in S'R'

Per prima cosa dobbiamo classificare S'R', dato SR come sistema fisso. Posso farlo in più modi:

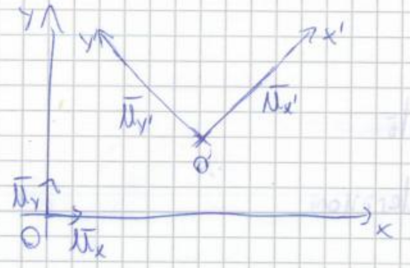
i) O' può non coincidere con O

Per cui possiamo avere che $x' // x$ e $y' // y$



ii) O' non coincide con O

x' e y' non sono paralleli a x e y



I versori del primo SR non possono essere usati per il nuovo.

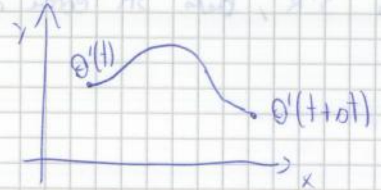
Per definire il nuovo S'R' ho bisogno di due informazioni:

- $\vec{r}_{O'}$ ⇒ descrive la posizione di O' rispetto a SR;
- θ ⇒ descrive l'orientazione di $\vec{u}_{y'}$ e $\vec{u}_{x'}$ rispetto a SR.

posizione della nuova origine + angolo di rotazione

Se S'R' è caratterizzato da $\vec{r}_{O'}(t)$ e $\theta_{O'}(t)$ allora esso non è fisso.

Dunque se si ha $\vec{r}_{O'}(t)$ allora O' si muove lungo una traiettoria.



Per quanto riguarda invece $\theta(t)$ si ha una rotazione continua degli assi.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 260

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{o'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

↳ alla fine viene : $\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$$\frac{d\vec{r}_{o'}}{dt} = \vec{v}_{o'}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\overline{u_{x'}} + y'\overline{u_{y'}} + z'\overline{u_{z'}}\right)$$

dove $x' = x'(t)$ e $\overline{u_{x'}} = \overline{u_{x'}}(t)$

blocco versori + derivate scalari

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\overline{u_{x'}} + \frac{dy'}{dt}\overline{u_{y'}} + \frac{dz'}{dt}\overline{u_{z'}} + \boxed{x'\frac{d\overline{u_{x'}}}{dt} + y'\frac{d\overline{u_{y'}}}{dt} + z\frac{d\overline{u_{z'}}}{dt}} =$$

blocco scalari + derivate versori

$$= \vec{v}' + x' \cdot \vec{\omega} \wedge \overline{u_{x'}} + y' \cdot \vec{\omega} \wedge \overline{u_{y'}} + z' \cdot \vec{\omega} \wedge \overline{u_{z'}}$$

ricordando che $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{a}$ con $\|\vec{a}\|$ cost, come per i versori.

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\left(x'\overline{u_{x'}} + y'\overline{u_{y'}} + z'\overline{u_{z'}}\right)}_{\vec{r}'} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

$\vec{v}$ = velocità in SR

$\vec{v}_{o'}$ = velocità di O' in SR

$\vec{v}'$ = velocità in S'R'

$\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ = termine correttivo → dipende direttamente da $\vec{\omega}$, ossia dalla velocità con cui ruotano gli assi di S'R'

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$\vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \Rightarrow$ velocità di trascinamento $\vec{v}_T$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$

↳ velocità di trascinamento

d) Trasformazioni accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\overline{u_x} + \dots$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\overline{u_{x'}} + \dots$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) =$$

$$= \frac{d\vec{v}_{o'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$\frac{d\vec{v}_{o'}}{dt} \rightarrow \vec{a}_{o'}$

$\frac{d\vec{v}'}{dt} \rightarrow \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

↳ termine correttivo

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$\vec{a}$ = accelerazione in SR

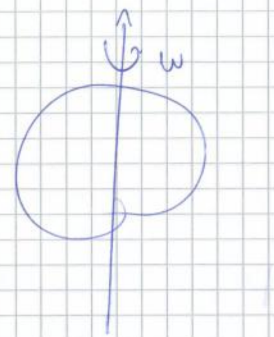
$\vec{a}'$ = accelerazione in S'R'

$\vec{a}_{o'}$ = accelerazione di O' in SR

$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ = accelerazione centrifuga

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \text{accelerazione di trascinamento}$$

(9) Rotazione della Terra



$O' \equiv O$

$\frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \omega = \text{cost.}$

Che effetto ha su $\vec{g}$?

* Osservatore esterno.

$\vec{g}$ diretta verso il centro della terra

$|\vec{g}| = 9,81 \, m/s^2$

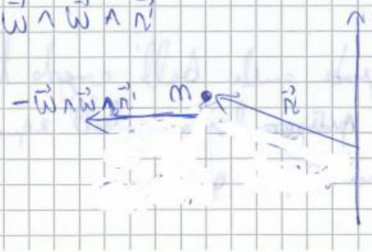
* Osservatore sulla Terra

$\vec{g}' \neq \vec{g}$ → abbiamo visto come varia l'accelerazione se $O' \equiv O$ e gli assi ruotano con ω cost.

L'oggetto da questa prospettiva non cade verticalmente.

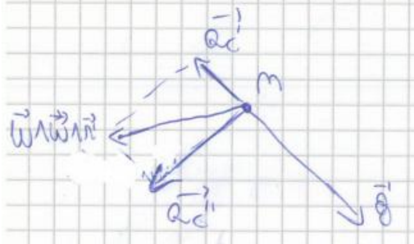
$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

i) $-\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$



$\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ è ⊥ al foglio, con verso uscente

$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ è ⊥ al piano individuato da $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ (il piano perpendicolare al foglio)

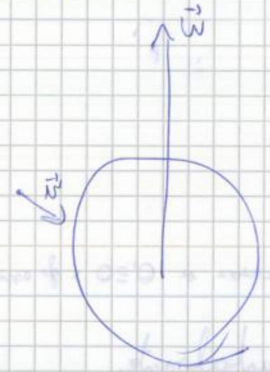


$\vec{a_c}'$ è opposto a $\vec{g} \Rightarrow |\vec{g}'| < |g|$

$\vec{a_c}''$ comporta una deviazione verso l'equatore.

Ciò comporta uno spostamento di 17 cm ogni 100 m di caduta.

ii) $-2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$



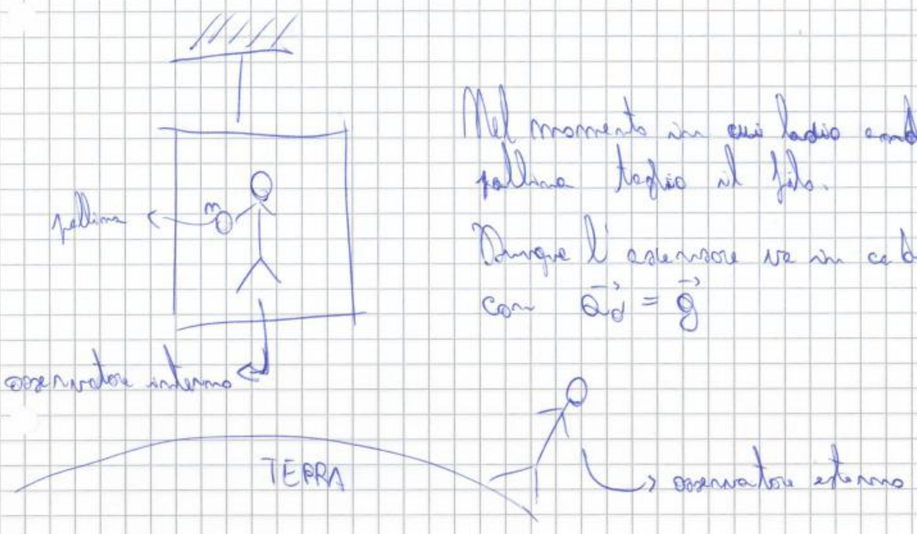
Il vettore $-\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ è ⊥ al foglio con verso uscente

$\vec{a}_{coriolis} \Rightarrow$ tangente alla Terra lungo il parallelo corrispondente con direzione verso est.

Dunque la componente di Coriolis dipende anche dall'angolo tra $\vec{\omega}$ e $\vec{r}'$ e dunque ad un parallelo più lontano dall'equatore corrisponde un modulo della componente più grande.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 260

6° esempio: prendiamo l'ascensore!



Nel momento in cui lascio cadere la pallina taglio il filo.

Dunque l'ascensore va in caduta libera con $\vec{a_0} = \vec{g}$

* Osservatore esterno

$F = mg$

$mg = ma \Rightarrow g = a$

Vede la pallina con moto uniformemente accelerato.

* Osservatore interno

$F = mg$, ma vede la pallina ferma! Quindi pensa:

$\cancel{F = ma = 0}$ ma è sbagliato! Quindi si inventa una forza:

$$F + F_{APP} = ma' = 0 \Rightarrow F_{APP} = -mg = -ma_0$$

CONCLUSIONE

Porsi in un sistema di riferimento fisso vuol dire che esso deve essere assunto fisso per tutti gli altri. Per convenienza utilizzo le stelle fisse dell'universo.

In questo sistema di riferimento definisco le forze fisiche (gravità, tensione, ...).

Ora prendo $S'R' \neq SR$

i) $\vec{a'} = \vec{a}$ $\Rightarrow$ sistema di riferimento inerziale: vedo le stesse accelerazioni che vedrei nel sistema delle stelle fisse.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a'} = \vec{F'}$$

Questo accade solo se O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O, con gli assi fissi.

ii) $\vec{a'} \neq \vec{a}$ $\Rightarrow$ sistema di riferimento non inerziale.

$$\vec{F} = m\vec{a} \neq m\vec{a'} = \vec{F'}$$

Posso fare il giochetto di inventarmi una forza:

$$\vec{F'} = \vec{F} + \vec{F}_{APP} = m\vec{a'}$$

Dunque le forze apparenti sono dei semplici componenti matematici.

$$\vec{F}_{APP} = m\vec{a'} - \underbrace{\vec{F}}_{\text{forze fisiche}} = m\vec{a'} - m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{APP} = m\left(\vec{a'} - \vec{a}\right) = -m\left(\vec{a_0} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v'})\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 260

OBIETTIVI

$$\left.\begin{array}{l} \vec{Q} = \vec{Q}_{cm} \\ \vec{L} \neq \vec{L}_{cm} \end{array}\right\} \vec{Q}, \vec{L} \text{ indipendenti}$$

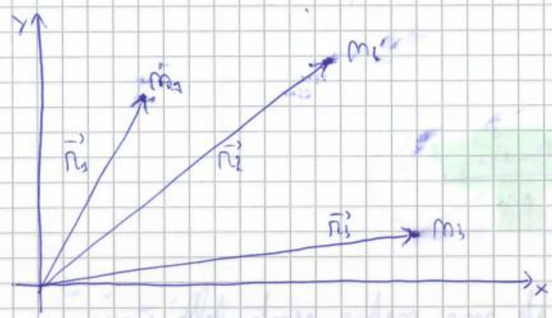
Esempio

$\vec{Q} = 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; \vec{L} = 0$

$\vec{L} = 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; \vec{Q} = 0$

(A) DEFINIZIONI

Un sistema di punti è un insieme di N particelle con massa m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) con distanze fra loro variabili



$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = f(t)$

↳ funzione del tempo

Ogni punto del sistema ha un certo numero di gradi di libertà che corrispondono al numero di coordinate indipendenti del sistema di riferimento.

Dunque, nello spazio, per ogni particella ho 3 coordinate. Con N particelle ho in tutto 3N coordinate, da cui posso ricavare 3N equazioni:

$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1$

$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2$ ⟶ Ma 3N equazioni possono essere troppe da risolvere!

$\dots$

$m_N \vec{a}_N = \vec{F}_N$

Quindi introduco il concetto di baricentro o centro di massa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 260

Per la particella $i \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{b}_i \wedge \vec{q}_i$

Per il centro di massa $\Rightarrow \vec{L}_{cm} = \vec{b}_{cm} \wedge \vec{q}_{cm} = \vec{b}_{cm} \wedge \sum \vec{q}_i =$

$= \sum \vec{b}_{cm} \wedge \vec{q}_i$

Quanto vale il momento angolare $\vec{L}$ del sistema? La somma dei momenti angolari!

$\Rightarrow \vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{b}_i \wedge \vec{q}_i$

Notiamo come $\sum \vec{b}_{cm} \wedge \vec{q}_i \neq \sum \vec{b}_i \wedge \vec{q}_i$

$\Rightarrow \vec{L}_{cm} \neq \vec{L}$

Ossia il momento angolare del centro di massa non è sempre uguale a quello del sistema.

RIEPILOGO

Punto	Sistema	CM
$\vec{a}_i$ $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$		$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$
$\vec{q}_i = m_i \vec{v}_i$ $\vec{F}_i = \frac{d\vec{q}_i}{dt}$	$\vec{Q} = \sum \vec{q}_i$	$\vec{q}_{cm} = M \vec{v}_{cm} = \vec{Q}$
$\vec{L}_i = \vec{b}_i \wedge m_i \vec{v}_i$ $\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$	$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$	$\vec{L}_{cm} = \vec{b}_{cm} \wedge \vec{q}_{cm} \neq$ $\neq \vec{L}$

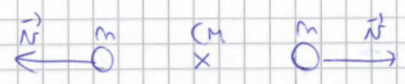
$\vec{a}_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$

$\vec{v}_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \vec{v}_{cm} = 0$

Ma non vale il contrario!

$\vec{a}_{cm} = 0 \not\Rightarrow \vec{a}_i = 0 \ \forall i$

Esempio



$\vec{a}_{cm} = \frac{m\vec{v}}{M} - \frac{m\vec{v}}{M} = 0$

Ma le velocità dei punti non sono nulle!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 260

N.B. $\Rightarrow$ Avrò $F_{13} + F_{31} = 0$ per il principio di azione e reazione.

Dunque nelle parentesi avrò tutte coppie di forze tali che:

$F_{ke} + F_{ek} = 0$

$\Rightarrow \sum_i \sum_j F_{ij}^{int} = 0$

Quindi la risultante delle forze totali che agiscono sul sistema sarà pari alla risultante della sommatoria delle forze esterne.

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = \vec{R}^{ext}$

Esempio

Con il problema precedente, la risultante delle forze sul sistema è:

$\vec{R}^{ext} = \vec{F} - \vec{F}_{A1}$

ii) $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{M}{M} \sum m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{cm}$

Prima equazione cardinale

$\vec{F} = \vec{R}^{ext} = M \vec{a}_{cm}$

Il moto del centro di massa dipende solo dalle forze esterne al sistema.

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{q}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{q}_i\right) = \frac{d\vec{q}_{cm}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{R}^{ext} = \frac{d\vec{q}_{cm}}{dt}$ equivalente alla prima equazione scritta.

La forza che agisce su un sistema equivale soltanto o a $M\vec{a}_{cm}$ o a $\frac{d\vec{q}_{cm}}{dt}$

iii) Teorema della conservazione della quantità di moto

MP: $\vec{F} = \vec{R}^{ext} = \frac{d\vec{q}_{cm}}{dt}$

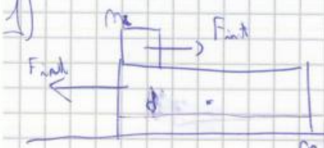
Se $\vec{R}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{q}_{cm} = $ costante

Ma attenzione: $\vec{R}^{ext} = 0 \not\Rightarrow \vec{q}_i = $ costante!

(non vale per ogni singola particella)

Esempi

1)

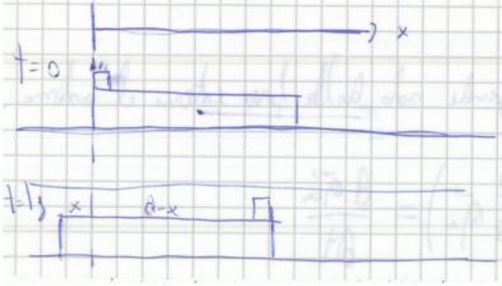


$N_1 = N_2 = N_{cm} = 0$

Forza attrito interna e conservazione: m_1 applica F_{int} su m_2 e quest'ultima applica $-F_{int}$ su m_1

Forze int. $\Rightarrow m_2$

Cosa accade in un caso!



Attenzione: è il centro di massa a muoversi di moto rettilineo uniforme, non i punti! Questi ultimi hanno un moto accelerato.

Ⓒ ENERGIA E MOMENTI DI FORZE

i) Energia cinetica

Per il punto $\Rightarrow$ $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Per il sistema $\Rightarrow$ $K = \sum K_i$

Per il centro di massa $\Rightarrow$ $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

Sostituendo a v_{cm} la sua definizione:

$$K_{cm} = \frac{1}{2} M \left(\frac{\sum m_i v_i}{M}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{M}\left(\sum m_i v_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2M}\left(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N\right)^2 = \frac{1}{2M}\left(m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + \dots + 2 m_1 v_1 m_2 v_2 + \dots\right)$$

$\neq K$

$\Rightarrow$ $K_{cm} \neq K$

ii) Lavori

La forza totale che agisce sulla singola particella m_i è $\vec{F}_i$.

Il lavoro è:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$dW_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} dW_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,est} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,int} \cdot d\vec{r}_i$$

lavoro totale del sistema

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 260

$\vec{M}_i + \vec{M}_j = \vec{M}^{ext} + (\vec{b}_i - \vec{b}_j) \wedge \vec{F}_{ij}^{int}$ + ALTRI

$\vec{F}_{ij}^{int} \parallel (\vec{b}_i - \vec{b}_j) \Rightarrow (\vec{b}_i - \vec{b}_j) \wedge \vec{F}_{ij}^{int} = 0$

$\Rightarrow$ le forze interne non danno alcun contributo al momento delle forze del sistema.

$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{b}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} = \vec{M}^{ext}$

RIEPILOGO FORZE E MOMENTI

$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$ (per ogni massa m_i)

$\Rightarrow \vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{R}^{ext}$ (per tutto il sistema)

$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \vec{M}^{ext}$

Dal punto di vista dell'energia:

$W = \sum W_i = W^{ext} + W^{int}$

W^{ext} → legato agli spostamenti assoluti delle particelle all'interno del sistema rispetto ad un sistema di riferimento esterno

W^{int} → legato allo spostamento relativo delle particelle fra di loro

Se $\vec{M}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$

(teorema della conservazione del momento angolare)

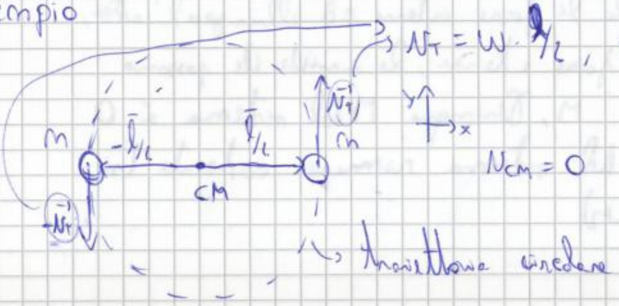
Attenzione:

$\vec{M}^{ext}_i = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cost.}$

$\not\Rightarrow \vec{L}_i = \text{cost.}$

Vale per il sistema, ma non per la singola particella.

Esempio



$\vec{q}_{CM} = \vec{Q} = \frac{m v_T - m v_T}{2m} = 0$

$L_{CM} = 0$

$\vec{L} = \frac{\vec{l}}{2} \wedge m\vec{v}_T + \left(-\frac{\bar{l}}{2}\right) \wedge m\left(-\vec{v}_T\right) = \bar{l} \wedge m\vec{v}_T$

Si può notare ancora come $L_{CM} \neq L$

$K_{CM} = 0$

$K = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} m v_T^2 = m v_T^2$

Delle forze interne allungano un'asta da l a $2l$.

$\vec{v}_T \longrightarrow \vec{v}_T'$

$\vec{L}^{fin} = 2\bar{l} \wedge m\vec{v}_T'$

$\vec{M}^{ext} = 0 \Rightarrow 2\bar{l} \wedge m\vec{v}_T' = \bar{l} \wedge m\vec{v}_T \Rightarrow \vec{v}_T' = \frac{1}{2}\vec{v}_T$

$l = \text{cost}$

↳ sono state solo le forze interne ad allungare l'asta, non vi sono forze esterne, le uniche che possono contribuire a M, dunque M del sistema è 0 e quindi L del sistema rimane costante (vale per $P \equiv CM$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 260

$\vec{L_1} \neq \vec{L_2} \Rightarrow \vec{L}$ dipende dal polo $b_1 \neq b_2$

Dunque negli esercizi è fondamentale scegliere un polo ottimale per avere un momento angolare semplice.

Per quanto riguarda il momento delle forze:

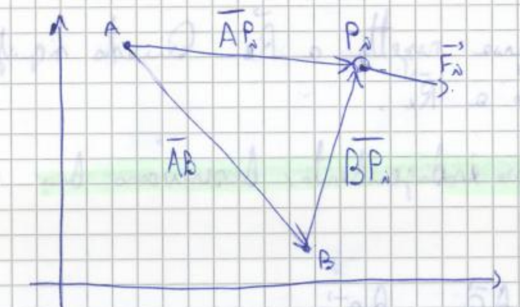
$\vec{M} \rightarrow \vec{F_i}$ non dipendono dal polo, solo il braccio è dipendente

$\vec{M_1} = \sum \vec{b_{i1}} \wedge \vec{F_i}$

$\vec{M_2} = \sum \vec{b_{i2}} \wedge \vec{F_i}$

$\Rightarrow \vec{M_1} \neq \vec{M_2}$ M dipende dal polo

TEOREMA DEL LEGAME DI $\vec{M}$ RISPETTO A 2 POLI DIVERSI



$\vec{M_A} = \sum \overline{AP_i} \wedge \vec{F_i}$

$\overline{AP_i} = \overline{AB} + \overline{BP_i}$

$\vec{M_A} = \sum \overline{AB} \wedge \vec{F_i} + \sum \overline{BP_i} \wedge \vec{F_i}$

↳ non dipende dall'indice i ⇒ porto fuori dalla sommatoria

$\vec{M_A} = \overline{AB} \wedge \sum \vec{F_i} + \sum \overline{BP_i} \wedge \vec{F_i}$

$\sum \vec{F_i}$ = risultante delle forze esterne

$\Rightarrow \vec{M_A} = \overline{AB} \wedge \vec{R}^{ext} + \sum \overline{BP_i} \wedge \vec{F_i}$

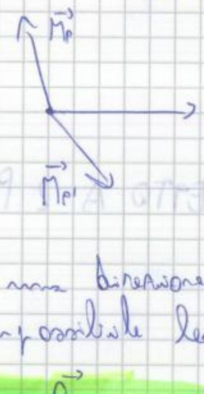
↳ prodotto vettoriale di un braccio per una forza → momento

collega i due poli; risultante delle forze esterne nel sistema

$\Rightarrow \vec{M_A} = \overline{AB} \wedge \vec{R}^{ext} + \vec{M_B}$

Significato

i) $\vec{M_P} \neq \vec{M_{P'}}$ significa diverso in modulo e direzione.



$\vec{M_P}$ ha una direzione arbitraria rispetto a $\vec{R_e}$. Questo significa che è impossibile legare $\vec{M_P}$ a $\vec{R_e}$.

$\Rightarrow \vec{M}$ e $\vec{R_e}$ sono grandezze indipendenti, descrivono due moti diversi.

Risultante $\vec{R_e} \rightarrow \vec{R_e} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \dfrac{d\vec{q_{cm}}}{dt}$

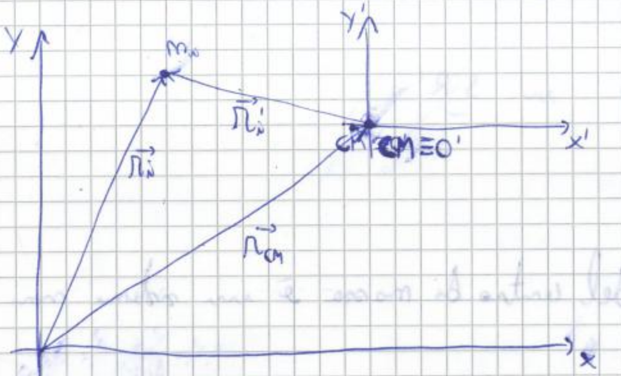
→ descrive il moto del centro di massa del sistema, non delle singole particelle

Momento $\vec{M} \rightarrow$ descrive la rotazione delle particelle attorno al polo.

c) SR E POLO PRIVILEGIATI

$S'R' \Rightarrow$ sistema di riferimento del CM:

- $O' \equiv CM$
- x' e y' sono paralleli a x e y (non ruotano)



$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$ (per $\vec{\omega} = 0$) $\rightarrow$ gli assi non ruotano

$\vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{a}_{CM}$

Proprietà

$\vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$

$\vec{r}\,'_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i'}{\sum m_i} = 0$ $\hookrightarrow$ poiché $O' \equiv CM$

$\Rightarrow \sum m_i \vec{r}_i' = 0$ e $\sum m_i \vec{v}_i' = 0$ e $\sum m_i \vec{a}_i' = 0$

a) Quantità di moto

$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_{CM} \neq 0$ in SR

$\vec{Q}' = M \cdot \vec{v}\,'_{CM} = 0$ in $S'R'$ poiché $CM \equiv O' \rightarrow v'_{CM} = 0$

$\vec{R}^{ext} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \neq 0$ in SR

$\vec{R}^{ext'} = \dfrac{d\vec{Q}'}{dt} = 0$ in $S'R'$

$\Rightarrow \vec{R}^{ext} \neq \vec{R}^{ext'}$

Il sistema $S'R'$ del centro di massa è un sistema non inerziale.

$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{F}_{APP}$ $\qquad a = a' + a_{o'} + \omega \wedge \omega \wedge r' + \dfrac{d\omega}{dt} \wedge r' + 2\omega \wedge v'$

$\hookrightarrow$ massa $\cdot$ acc. di trascinamento $\quad v' = 0,\ r' = 0,\ \omega = 0$

$\Rightarrow \vec{R}^{ext} = \vec{R}^{ext'} + M\vec{a}_{CM}$ poiché l'origine del sistema, cioè il centro di massa si muove con accelerazione $\vec{a}_{CM}$

$\vec{\omega} = 0 \quad \vec{a}' = 0 \qquad \vec{a}_{CM} \rightarrow \vec{a}_{o'}$

$\Rightarrow \vec{F}_i = \vec{F}_i' + m_i \vec{a}_{CM}$

$\hookrightarrow$ termine correttivo

b) Momento angolare

Scegliamo un polo che coincide con il centro di massa e quindi con O'.

POLO $\equiv$ CM $\equiv O'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 260