NUMERO: 1191A - ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Parisi

MATERIA: Elettrotecnica, Prof.Corinto

Lezione 1   1-6

Libri di testo:
- R. Perfetti - CIRCUITI ELETTRICI - Zanichelli
- M. Biey - ESERCITAZIONI DI ELETTROTECNICA - Clut

Sistemi elettrici

- I sistemi (o apparati) elettrici per l'energia o per l'informazione sono essenzialmente basati sull'elettricità, cioè l'insieme di quei fenomeni (macroscopici) che coinvolgono le cariche elettriche e le loro interazioni.
- Sistemi elettrici per l'informazione hanno come obiettivo il trattamento di segnali elettrici (l'interesse è per l'informazione e non per l'energia che trasportano).
- I sistemi elettrici per l'energia hanno invece l'obiettivo di trasportare l'energia proveniente da una certa fonte e destinata ad un certo utilizzo.

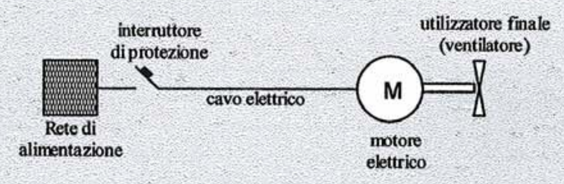
Classificazione Sistemi Elettrici:

① Sistemi elettrici per l'informazione
② Sistemi elettrici per l'energia

① Ad esempio i sistemi informatici (telefoni)
Obbiettivo: trattamento dei segnali; l'importante è il contenuto dell'informazione e non la parte associata all'energia del segnale.

② Obbiettivo: energia che trasportano.
Ad esempio un ventilatore.

Esempi di sistemi elettrici



Il fenomeno Elettromagnetico:

La presenza di cariche ferme da origine a forze di tipo elettrostatico, descrivibili tramite campi elettrici.

Il fenomeno elettromagnetico

- Una struttura spaziale (sistema elettrico) contenente corpi diversi (ambiente eterogeneo) è sede di fenomeni elettromagnetici (e.m.) dovuto all'esistenza delle cariche elettriche
- Per una caratterizzazione quantitativa del fenomeno e.m. occorre introdurre:
  a) Grandezze fisiche appropriate
  b) Relazioni costitutive dei materiali
  c) Equazioni di Maxwell

Per descrivere un fenomeno e.m. abbiamo bisogno di:
- Grandezze fisiche appropriate
- Relazioni costitutive dei materiali
- Equazioni di Maxwell

Grandezze fisiche

unità di misura del Sistema Internazionale (SI)

- $E(r,t)$ CAMPO ELETTRICO [V/m]: determinato da una distribuzione di cariche
- $D(r,t)$ INDUZIONE ELETTRICA [C/m²]: determinato dall'interazione di E con un materiale elettrico
- $H(r,t)$ CAMPO MAGNETICO [H/m]: determinato da cariche in movimento
- $B(r,t)$ INDUZIONE MAGNETICA [Wb/m²]: determinato dall'interazione di H con un materiale magnetico
- $J(r,t)$ DENSITÀ DI CORRENTE DI CONDUZIONE [A/m²]: legata al moto delle cariche

Grandezze fisiche:
- $E(r,t)$: campo elettrico $\frac{V}{m}$
- $D(r,t)$: induzione elettrica $\frac{C}{m^2}$
- $H(r,t)$: campo magnetico $\frac{H}{m}$
- $B(r,t)$: induzione magnetica $\frac{Wb}{m^2}$
- $J(r,t)$: intensità di corrente $\frac{A}{m^2}$

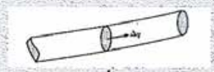
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 198

Ipotesi teoria dei circuiti

- Approccio della teoria dei circuiti implica che si impongono limitazioni su:
  - frequenze di lavoro (campi e.m. lentamente variabili)
    - condizioni stazionarie e quasi-stazionarie
  - natura dei componenti (presenza in un componente di un solo fenomeno e.m. per volta, invarianza temporale delle sue caratteristiche, ecc.)
- le leggi ed i modelli che descrivono il funzionamento dei circuiti elettrici solo in termini di:
  - correnti elettriche nei terminali dei componenti
  - tensioni elettriche che si stabiliscono tra i terminali

Corrente

- Intensità delle correnti elettriche
  - La corrente elettrica è un movimento "ordinato" di cariche elettriche.
  - L'intensità di corrente attraverso una sezione del conduttore è indipendente dalla sezione scelta in condizioni stazionarie (conservazione della carica)
  - La corrente si misura in ampere [A]



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$$

Tensione

- Tensione elettrica
  - Il campo elettrico compie lavoro sulle cariche in moto
  - Immaginiamo a tal fine una carica unitaria positiva che si muova dal punto a al punto b lungo una linea
  - in condizioni stazionarie il lavoro non dipende dalla "linea". La variazione di energia subita dalla carica è legata al potenziale (energia per unità di carica)
  - La tensione si misura in volt [V]

$$v_{a\to b}|_\gamma = \int_\gamma E \cdot t\,dl$$

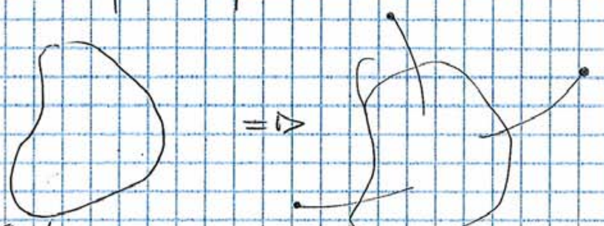
$$V(r) = \frac{w(r)}{q}$$

$$v_{a\to b}|_\gamma = v_{ab} = V(a) - V(b)$$

Ipotesi teoria dei circuiti:

- frequenze non troppo alte →
  → condizioni stazionarie o quasi stazionarie $\left(\frac{\partial}{\partial t} \cong 0\right)$.
  In condizioni quasi stazionarie le variazioni rispetto al tempo sono trascurabili
- un solo fenomeno e.m per volta.

Sotto queste ipotesi:



Sistema elettrico ⟹ elemento circuitale

Corrente: (i)

- Un movimento di cariche genera una corrente (movimento ordinato)
- La variazione della carica nel tempo prende il nome di intensità di corrente.
- In condizioni stazionarie o quasi la corrente non dipende dalla sezione del conduttore. (principio di conservazione della carica.)
- La corrente si misura in A (Ampere) $C \cdot s^{-1}$.

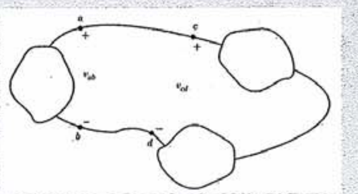
Tensione: (v)

In condizioni stazionarie o quasi stazionarie:

- il lavoro non dipende dalla curva γ
- $v_{a\to b}|_\gamma = \int_\gamma \vec{E} \cdot t\,dl$ $\qquad V(\vec{r}) = \frac{\vec{w}(\vec{r})}{q}$
- la tensione si misura in Volt (V)
- Il campo elettrico è conservativo.

Circuito elettrico a parametri concentrati

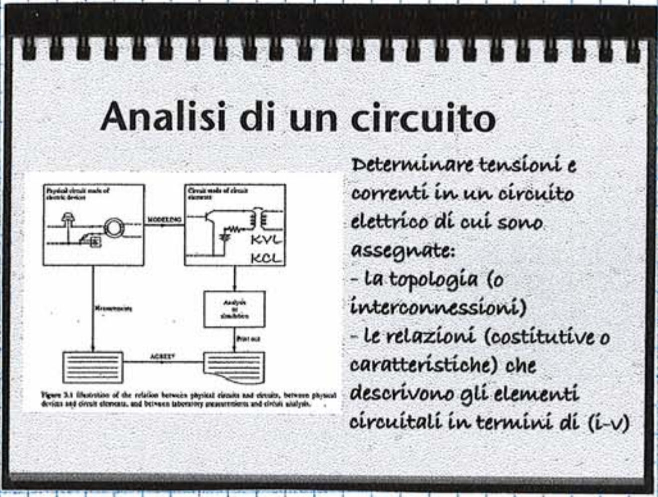
- Le variazioni di energia avvengono, ossia sono concentrate, solo all'interno degli elementi circuitali.
- Le interconnessioni non compiono lavoro!

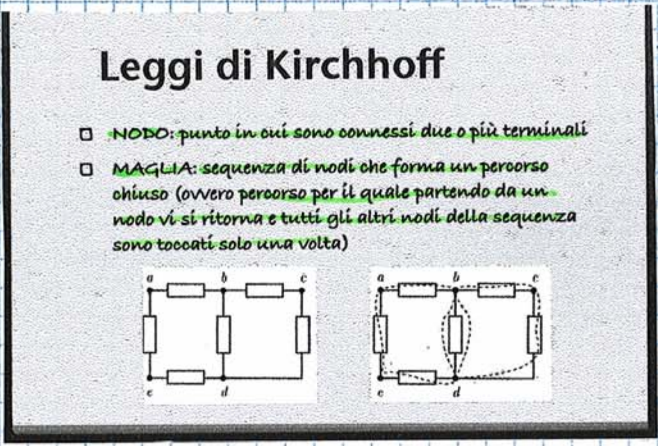


Circuito elettrico a parametri concentrati:
Le variazioni di energia avvengono solo all'interno degli elementi circuitali.
Le interconnessioni non compiono lavoro.
Esistono anche circuiti a parametri distribuiti.

Sommario

- I sistemi elettrici sono modellati, in condizioni stazionarie o quasi-stazionarie, da circuiti elettrici costituiti dall'interconnessione di elementi circuitali.
- Il comportamento elettrico degli elementi circuitali è descritto in termini delle grandezze elettriche tensione e corrente.





Analisi di un circuito:

Se il campo magnetico è in condizioni stazionarie o quasi stazionarie possiamo modellare un modello fisico in un circuito elettrico formato da elementi circuitali.

Dato un circuito elettrico, analizzarlo significa determinare tutte o alcune delle correnti e delle tensioni in esso una volta specificata la topologia (ossia come gli elementi circuitali sono interconnessi) e il comportamento di ciascun elemento circuitale in termini di i e v (relazioni costitutive)

Il processo opposto all'analisi è la sintesi.

I vincoli imposti dalle interconnessioni sono espressi dalle leggi di Kirchhoff (1° legge: KCL, 2° legge: KVL)

In base alla precisione tra risultato del modello e risultato del circuito fisico, comprendo l'accuratezza del modello.

Leggi di Kirchhoff:

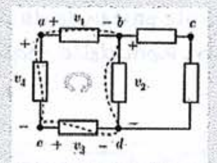
Sostituiscono le eq. di Maxwell.
Per essere enunciate richiedono il concetto di NODO e di MAGLIA.

- NODO è il punto in cui sono connessi due o più terminali
- MAGLIA è una sequenza di nodi che forma un percorso chiuso. (tutti i nodi sono toccati una volta sola.)

Legge di Kirchhoff per le tensioni

- La somma algebrica delle tensioni lungo una maglia è uguale a zero, istante per istante (principio di conservazione dell'energia).
- Con somma algebrica si intende: le tensioni che hanno versi di riferimento concordi con il verso di percorrenza scelto per la maglia intervengono con il proprio segno nella somma, quelle con versi discordi sono sommate con segni opposti
- La scelta del verso di percorrenza è arbitraria

Legge di Kirchhoff per le tensioni



$$\sum_h (\pm) v_h(t) = 0$$

$$-v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0$$
$$v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4$$

Legge di Kirchhoff per le tensioni: KVL

Traduce il principio di conservazione dell'energia.

ENUNCIATO: la somma algebrica delle tensioni lungo una maglia è uguale a zero, istante per istante.

$$\boxed{\sum_h (\pm) v_h(t) = 0}$$

La somma delle tensioni entranti sono uguali a quelle uscenti.

KVL si applica anche in presenza di multipoli.

Esempio: $V_4 = 7V$, $V_5 = 9V$, $V_6 = 8V$.

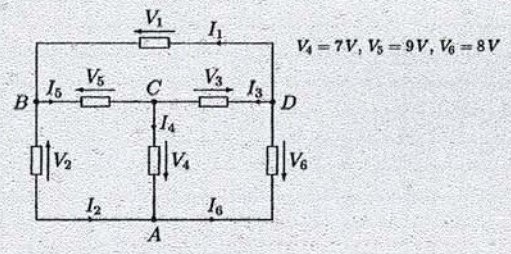
V_1 in DBAD $V_1 + V_2 - V_6 = 0$ $V_1 = 10V$

V_2 in ABCA $V_2 - V_5 + V_4 = 0$ $V_2 = 2V$

V_3 in CDAC $V_3 + V_6 - V_4 = 0$ $V_3 = -1V$

Legge di Kirchhoff per le tensioni

- Esempio



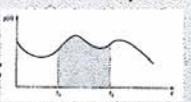
Sommario

- Criterio (necessario ma non sufficiente) per verificare l'ipotesi di condizioni stazionarie o quasi-stazionarie
- Leggi di Kirchhoff per le tensioni e le correnti descrivono i vincoli imposti dalle interconnessioni (ovvero dalla topologia del circuito)

Energia elettrica e Passività

- L'energia elettrica assorbita da un bipolo in un intervallo (t_1,t_2)

$$w(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,i(t)\,dt$$

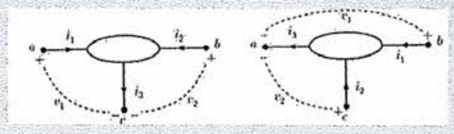


- Un bipolo si dice passivo se $w(t)=\int_{-\infty}^{t} v(t')\,i(t')\,dt' \geq 0, \forall t$
- Un bipolo passivo non può erogare più energia elettrica di quanta, in precedenza, ne abbia assorbita.
- Un bipolo si dice attivo se non è passivo.
- Un bipolo è strettamente passivo se $w(t) > 0, \ \forall t$

Potenza elettrica

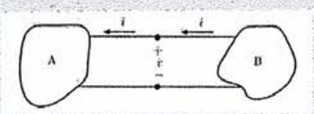
- potenza assorbita da un tripolo

$$p(t)=v_1(t)\,i_1(t)+v_2(t)\,i_2(t)$$



Potenza elettrica

- conservazione della potenza istantanea



$$p_A(t)=v(t)\,i(t)$$
$$p_B(t)=-v(t)\,i(t)$$
$$p_A(t)+p_B(t)=0$$

La somma algebrica delle potenze istantanee assorbite da tutti gli elementi di un circuito è nulla in ogni istante $\quad \sum_K p_K(t)=0$

(dimostrazione nelle prossime lezioni)

Bipolo passivo: Definizione

Un bipolo è passivo se l'energia da esso assorbita non è mai $\leq 0 \ \forall t$

Quindi: $w(t)=\int_{-\infty}^{t} v(t')\,i(t')\,dt' \geq 0, \forall t$

Esso dunque non può erogare più energia di quanta ne abbia assorbita

Un bipolo è attivo se non è passivo.

Potenza assorbita da un tripolo:

$$\boxed{p(t)=v_1(t)\,i_1(t)+v_2(t)\,i_2(t)}$$

Conservazione della potenza:

La potenza assorbita da A ha la convenzione degli utilizzatori.

La potenza assorbita da B ha la convenzione dei generatori.

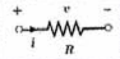
La somma delle potenze assorbite, istante per istante è uguale a zero: $\boxed{\sum_K p_K(t)=0}$

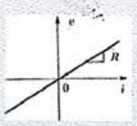
La somma delle potenze erogate è anchessa eguale a zero.

Per cui la somma delle potenze assorbite è uguale alla somma delle potenze erogate

Resistori lineari

$v(t) = R\,i(t)$ (legge di Ohm)



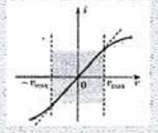


$R > 0$ resistenza si misura in $\Omega = \frac{V}{A}$

$R = \rho \frac{l}{A}$

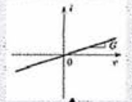
ρ è resistività del materiale

Resistore lineare è un elemento ideale in quanto approssima un resistore reale in opportune condizioni di funzionamento.



Resistori lineari

$i(t) = G\,v(t)$ (legge di Ohm)



$G = \frac{1}{R} > 0$ conduttanza si misura in $S = \frac{A}{V} = \Omega^{-1}$

Il resistore è un bipolo passivo.

$p(t) = v(t)\,i(t) = R\,i^2(t) = G\,v^2(t) > 0 \Rightarrow w(t) > 0$

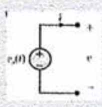
La legge di Ohm con la convenzione dei generatori è:

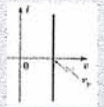
$v(t) = -R\,i(t) \qquad i(t) = -G\,v(t)$

Generatori indipendenti

Generatore (indipendente) di tensione

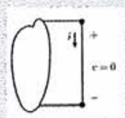
$v(t) = v_s(t),\ \forall i(t)$





Corto Circuito

$v(t) = 0,\ \forall i(t) \Rightarrow R = 0$



Resistore lineare: $c = 0$

Se $c = 0 \rightarrow v = -\frac{b}{a} i$

$-\frac{b}{a}$ costante $= R > 0$

Quindi $\boxed{v(t) = R\,i(t)}$ Legge di Ohm

$\boxed{R > 0 = \rho \frac{l}{A}}$ è la resistenza.

La resistenza si misura in $\boxed{\Omega = \frac{V}{A}}$

Se $c = 0 \rightarrow i = -\frac{a}{b} v$ Legge di Ohm

$-\frac{a}{b} = G =$ costante.

Quindi $i(t) = G(v)(t)$

$\boxed{G = \frac{1}{R} > 0}$ è la conduttanza.

G si misura in Siemens: $\boxed{S = \frac{A}{V} = \Omega^{-1}}$

Nella convenzione degli utilizzatori, il resistore è un bipolo passivo.

$$\boxed{\begin{array}{l} p(t) = v(t)\,i(t) = R\,i^2(t) = G\,v^2(t) > 0 \\ w(t) > 0 \end{array}}$$

Nella convenzione dei generatori:

$$\boxed{v(t) = -R\,i(t) \quad | \quad i(t) = -G(v(t))}$$

Generatore di tensione: $b = 0$

Se $b = 0$, $\boxed{v(t) = v_s(t)}$ $\forall i(t)$

$v_s(t) = -\frac{c}{a}$

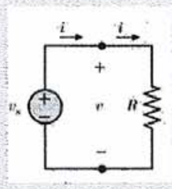
I generatori di tensione sono dei bipoli che impongono la tensione tra due punti indipendentemente dal valore della corrente che li attraversa. (impone il valore della tensione).

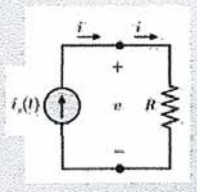
Un caso particolare del generatore di tensione è il corto circuito:

$\boxed{v(t) = 0} \quad \forall i(t) \Rightarrow \boxed{R = 0}$

Il corto circuito oltre ad essere visto come un generatore di tensione con

Circuiti elementari





$i(t) = \frac{v_s(t)}{R}$ $\qquad$ $v(t) = R\, i_s(t)$

Circuiti elementari:

Figura ①: Resistore connesso ad un generatore di tensione.

Figura ②: Resistore connesso ad un generatore di corrente.

①: il generatore di tensione impone che la tensione ai capi dei resistori sia v_s.
Quindi abbiamo che la legge di Ohm è: $v(t) = R\, i(t)$ =
e $v(t)$ applicata ai capi del resistore è v_s: $v(t) = v_s$

$$\begin{cases} v(t) = R\, i(t) \\ v(t) = v_s \end{cases} \rightarrow \boxed{i(t) = \frac{v_s(t)}{R}}$$

Analizzare questo circuito significa analizzare e calcolare $i(t)$.

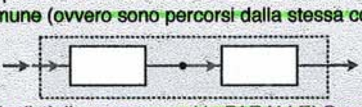
②: il generatore di corrente impone che la corrente "i" che scorre nel resistore sia uguale a i_s.

Quindi dalla legge di Ohm ricavo: $\boxed{v(t) = R\, i_s(t)}$

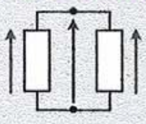
Connessione di bipoli

Due bipoli si dicono connessi in SERIE se hanno un terminale in comune (ovvero sono percorsi dalla stessa corrente).

$i_1 = i_2 = i$



Due bipoli si dicono connessi in PARALLELO se hanno due terminali in comune (ovvero hanno in comune la stessa tensione).



$v_1 = v_2 = v$

Connessioni tra bipoli:

① Connessioni in SERIE

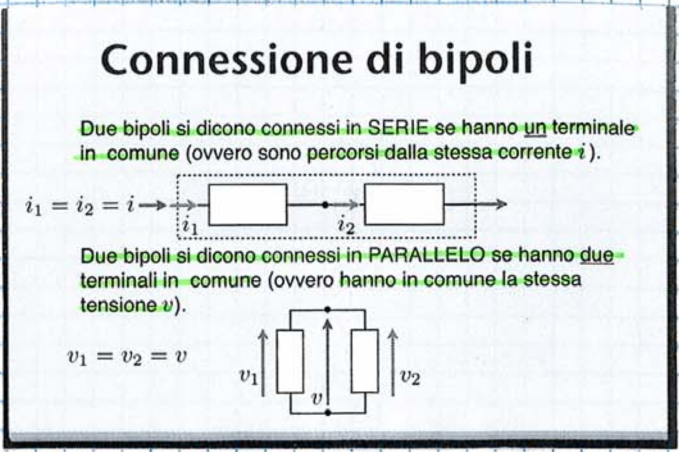
② Connessioni in PARALLELO

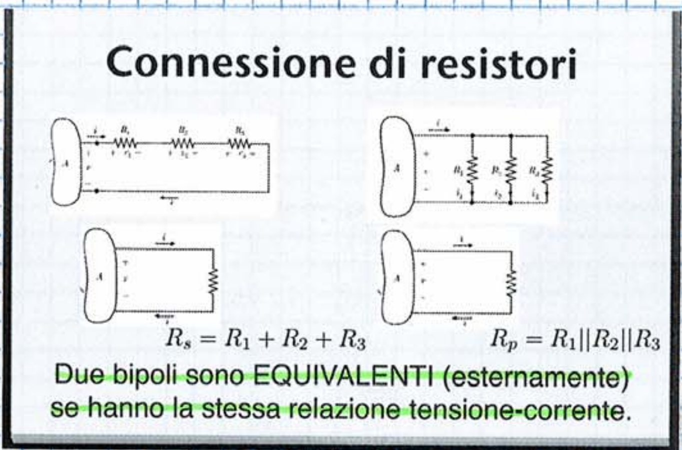
① Due bipoli si dicono connessi in serie se hanno un terminale in comune; $i_1 = i_2 = i$ sono quindi percorsi dalla stessa corrente.

② Due bipoli si dicono connessi in parallelo se hanno due terminali in comune, $v_1 = v_2 = v$ hanno in comune la stessa tensione.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 198

Lezione 4   28 - 46   55 - 56





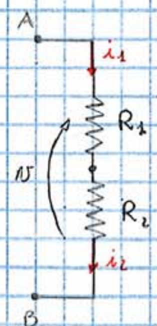
Connessione di bipoli:

- SERIE: due bipoli si dicono connessi in serie se hanno un terminale in comune.
- PARALLELO: due bipoli si dicono connessi in parallelo se hanno due terminali in comune.

Connessione di resistori:

Relazione fondamentale: Due bipoli sono equivalenti se hanno la stessa relazione tensione-corrente (le curve nel piano i, v sono uguali)

Esempio: Se abbiamo due resistori con un unico terminale in comune:



Voglio determinare la relazione tra i e v

Il vincolo di connessione di tipo serie impone: $i = i_1 = i_2$

Per la legge di Ohm, con convenzione degli utilizzatori: $v_1 = R_1 i_1$

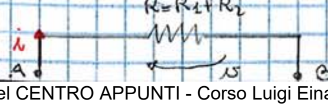
$v_2 = R_2 i_2$

Utilizzando KVL: $v = v_1 + v_2$

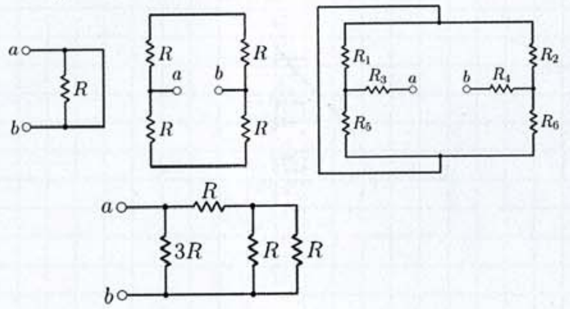
Quindi: $\Rightarrow \; = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)\, i$

La tensione è proporzionale alla corrente attraverso un coefficiente che vale $(R_1 + R_2)$ ossia la somma delle resistenze.

Il circuito può anche esser scritto come:



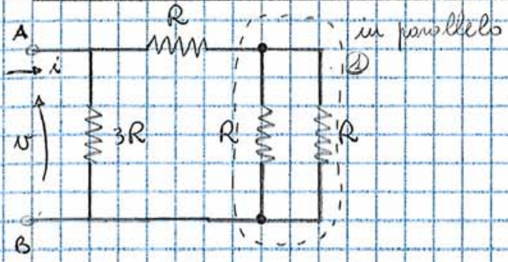
Calcolo delle resistenze equivalenti



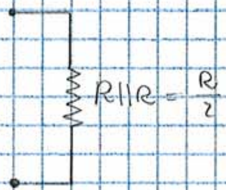
Calcolo delle resistenze equivalenti:

Figura (4): Formato da quattro resistori. Trovare la resistenza equivalente (R_{eq}).

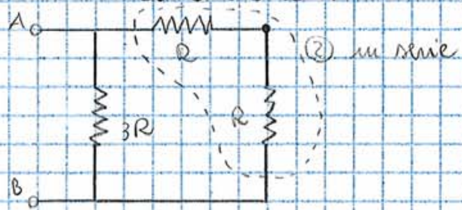
Per trovarla devo: • identificare le resistenze in serie o in parallelo
• sostituirle con resistenze equivalenti



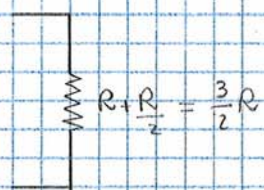
① viene sostituito con:



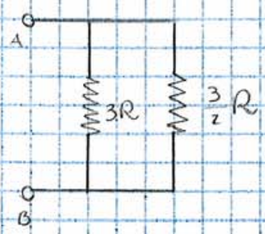
Ora il circuito è:



② viene sostituito con:



Ora abbiamo:

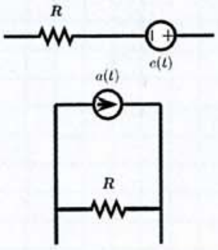


$$\Rightarrow R_{eq} = 3R \,\|\, \frac{3}{2}R = \frac{\frac{9}{2}R^2}{\frac{9}{2}R} = R$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 198

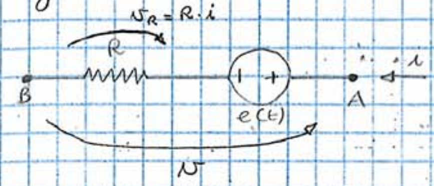
Bipoli equivalenti: generatori reali

Due bipoli sono EQUIVALENTI (esternamente) se hanno la stessa relazione tensione-corrente.



Generatori reali:

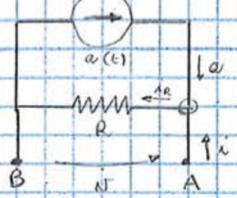
Figura ①: in serie



$$\boxed{v = R\cdot i + e}$$

Per e costante, v è una retta nel piano v, i. R è la pendenza di tale retta.

Figura ②: in parallelo



$$i_R = G\cdot v$$

$$\boxed{i = Gv - a = \frac{1}{R}v - a}$$

Due bipoli sono equivalenti se hanno la stessa relazione tensione corrente:

$$v = Ri + e \Rightarrow i = \frac{v}{R} - \frac{e}{R}$$

$$i = \frac{1}{R}v - a$$

Quindi i due bipoli sono equivalenti se e solo se $\frac{e}{R} = a$.

Vengono chiamati generatori reali poiché il resistore tiene conto delle perdite del generatore.

Riassumendo: Se $a = \frac{e}{R}$, una resistenza in serie con un generatore di tensione è equivalente ad una resistenza in parallelo con un generatore di corrente.

Quindi: $v_R = (R_1 + R_2)\, i = v_G \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{v_G}{R_1 + R_2}$$

Sapendo che: $v_1 = R_1 i$ e

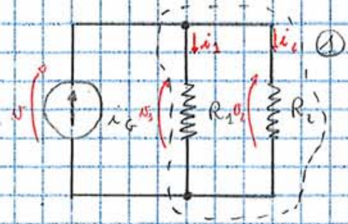
$v_2 = R_2 i$

Sostituiamo in v_1 e $v_2 \to i$:

$$\boxed{v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_G} \qquad \boxed{v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_G}$$

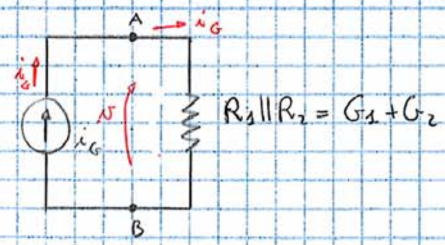
↳ fattore di partizione di tensione

Dimostrazione formule partitore di corrente:



Il vincolo delle connessioni in parallelo impone: $v_1 = v_2 = v$

① può essere sostituito da un unico resistore di valore $R_1 \| R_2$ o $G_1 + G_2$



$$v = \frac{i_G}{G_1 + G_2}$$

Da qui ricaviamo: $\boxed{i_1 = G_1 v = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i_G}$

$$\boxed{i_2 = G_2 v = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i_G}$$

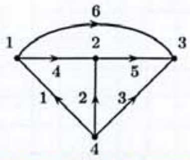
Sostituendo: $\frac{1}{R_1} = G_1$ e $\frac{1}{R_2} = G_2$

si ricavano:

$$\boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i_G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_G}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i_G = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_G}$$

KCL in forma matriciale



positivo
verso uscente

$$\Rightarrow \begin{cases} -i_1 + i_4 + i_6 = 0 \\ -i_2 - i_4 + i_5 = 0 \\ -i_3 - i_5 - i_6 = 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

Se in un circuito si scrivono le KCL a tutti i nodi, allora le equazioni ottenute risultano linearmente dipendenti. Si può provare che: **se in un circuito con n nodi si scrivono le KCL a tutti i nodi tranne uno, allora le (n-1) equazioni ottenute risultano linearmente indipendenti.**

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{Ai} = 0 \\ \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n-1,l} \end{matrix}$$

Matrice di incidenza ridotta

$$\boldsymbol{Ai} = 0$$

La matrice $\boldsymbol{A}$ è detta matrice di incidenza ridotta, in quanto associata a n − 1 nodi.
Il suo numero di colonne è uguale al numero di rami l del grafo e il suo numero di righe è uguale al numero di nodi meno 1, ossia n − 1.
I suoi elementi a_{ij} valgono:
+1 se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente uscente dal nodo;
−1 se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente entrante nel nodo;
0 se il ramo j non incide nel nodo i.

KCL in forma matriciale:

Su ciascun nodo posso scrivere la legge di Kirchhoff per le correnti (KCL), ad esempio utilizzando come positivo il verso delle correnti uscenti.

Se si scrivono le KCL di tutti i nodi, allora le eq. sono linearmente dipendenti.

Se si scrivono le KCL di tutti i nodi meno uno (n - 1), allora le eq. sono linearmente indipendenti.

① + ② + ③ + ④ = 0 l. d.

① + ② + ③ ≠ 0 l. i.

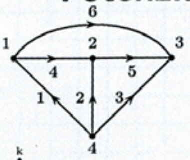
KCL in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

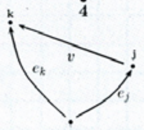
Matrice di incidenza ridotta: $Ai = 0$

A è detta matrice di incidenza ridotta in quanto associata a n - 1 nodi.
I suoi elementi valgono:
- +1 se il ramo j incide nel nodo i con verso uscente
- -1 se il ramo j incide nel nodo i con verso entrante
- 0 se il ramo j non incide sul nodo i

KVL in forma matriciale: Potenziale di nodo



$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 - v_4 = 0, & (4124) \\ -v_2 + v_3 - v_5 = 0, & (4234) \\ v_4 + v_5 - v_6 = 0, & (2132) \\ v_1 - v_3 + v_6 = 0, & (4314) \end{cases}$$



$$v = e_k - e_j$$

$$v_1 = -e_1 \quad v_2 = -e_2 \quad v_3 = -e_3 \quad v_4 = e_1 - e_2 \quad v_5 = e_2 - e_3 \quad v_6 = e_1 - e_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$$

Se uso il potenziale di nodo allora la tensione tra ogni coppia di nodi è espresso dalla relazione: $\boxed{v = e_k - e_j}$

In genere $\boxed{n-1 < l}$

Scrivere le tensioni di lato attraverso i potenziali di nodo implica che le leggi di Kirchhoff sono tutte automaticamente soddisfatte poiché ottengo delle identità.

$\boxed{v = A^t \cdot e}$

Teorema di Tellegen

$$\mathbf{Ai} = 0 \qquad \mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n-1,l}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{i}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p(t) = \sum_{k=1}^{l} v_k(t)\, i_k(t) = \mathbf{v}^T\,\mathbf{i} = 0$$

Per i circuiti a parametri concentrati la conservazione dell'energia è una conseguenza delle leggi di Kirchhoff.

Teorema di Tellegen: (o di conservazione $p(t)$)

$A i = 0 \qquad A \in R^{n-1,l} \longrightarrow$ KCL

$v = A^t e \longrightarrow$ KVL

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix} \qquad \vec{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_l \end{pmatrix}$$

$$p(t) = \sum_{k=1}^{l} v_k(t)\, i_k(t) = \vec{v}^{\,t}\,\vec{i} = 0$$

Le connessioni non compiono lavoro, ma tutti gli scambi di energia sono concentrati all'interno degli elementi circuitali.

Forma canonica delle equazioni circuitali

$$\mathbf{Ai} = 0 \qquad \mathbf{Bv} = 0$$

$$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n-1,l} \qquad \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{l-(n-1),l}$$

$$\underbrace{(n-1)}_{\text{KCL}} + \underbrace{[l-(n-1)]}_{\text{KVL}} = l$$ equazioni di interconnessione in funzione delle l correnti di ramo e l tensioni di ramo

$F(\mathbf{v},\mathbf{i}) = 0$, l equazioni caratteristiche che descrivono il comportamento dei bipoli in termini delle l correnti di ramo e l tensioni di ramo

Sistema di 2l equazioni in 2l incognite.
Nei casi di nostro interesse le equazioni di interconnessione e le equazioni caratteristiche sono tra loro indipendenti e compatibili.

Forma canonica delle eq circuitali:

$$\underbrace{(n-1)}_{\text{KCL}} + \underbrace{[l-(n-1)]}_{\text{KVL}} = l$$

$Ai = 0 \;+\; Bv = 0 \;+\; F(v,i) = 0$ formano un sistema di $2l$ equazioni in $2l$ incognite.

Questo sistema prende il nome di FORMA CANONICA DELLE EQUAZIONI CIRCUITALI.

Lezione 6 73-83

Richiami

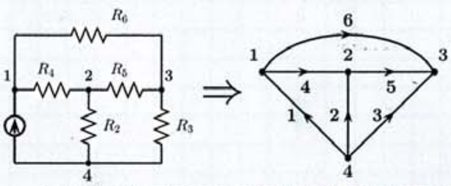
- Formulazione delle leggi di Kirchhoff in forma matriciale
  - se in un circuito con n nodi si scrivono le KCL a tutti i nodi tranne uno, allora le (n-1) equazioni ottenute risultano linearmente indipendenti
    $$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$$
    $$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n-1,l}$$
  - se in un circuito con n nodi e l rami si scrivono le KVL a l-(n-1) maglie (fondamentali) allora le equazioni ottenute risultano linearmente indipendenti.
    $$\mathbf{B}\mathbf{v} = 0 \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$$
    $$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{l-(n-1),l}$$
  - Se le tensioni di un circuito sono espresse attraverso i potenziali di nodo allora esse verificano automaticamente la legge di Kirchhoff per le tensioni per qualsiasi maglia del circuito.
    $$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$
    $$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})^T$$

Richiami

$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n-1,l}$ matrice di incidenza ridotta con elementi a_{ij} determinati in base al seguente algoritmo:
+1 se il ramo *j* incide nel nodo *i* con il verso della corrente uscente dal nodo;
−1 se il ramo *j* incide nel nodo *i* con il verso della corrente entrante nel nodo;
0 se il ramo *j* non incide nel nodo *i*.

$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{l-(n-1),l}$ matrice di un insieme di maglie fondamentali

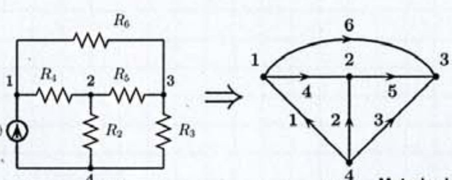
Circuito a-dinamico lineare



- Sia dato un grafo connesso $\mathcal{G}$. Un *albero* $\mathcal{A}$ di $\mathcal{G}$ è un suo sottografo connesso che comprende tutti i nodi del grafo e non contiene alcuna maglia.
- Il *coalbero* $\mathcal{C}$ di $\mathcal{G}$, corrispondente all'albero $\mathcal{A}$, è l'insieme dei lati complementare a quelli dell'albero: l'unione dei lati dell'albero e del coalbero coincide con l'insieme di tutti i lati di $\mathcal{G}$.

albero: 1,2,3 (n-1 lati su cui definiamo i potenziali di nodo)
coalbero: 4,5,6 (l-(n-1) lati che definiscono le maglie fondamentali)

Circuito a-dinamico lineare



$$-i_1 + i_4 + i_6 = 0 \;(1) \qquad v_1 = -e_1 \qquad i_1 = a(t)$$
$$-i_2 - i_4 + i_5 = 0 \;(2) \qquad v_2 = -e_2 \qquad v_2 = R_2 i_2$$
$$-i_3 - i_5 - i_6 = 0 \;(3) \qquad v_3 = -e_3 \qquad v_3 = R_3 i_3$$
$$v_4 = e_1 - e_2 \qquad v_4 = R_4 i_4$$
$$v_5 = e_2 - e_3 \qquad v_5 = R_5 i_5$$
$$v_6 = e_1 - e_3 \qquad v_6 = R_6 i_6$$

Metodo del Tableau
Sistema di 15 (2l+(n-1)) equazioni in 15 (2l+(n-1)) incognite.

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$$
$$\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{N}\mathbf{i} = \mathbf{u}_s$$

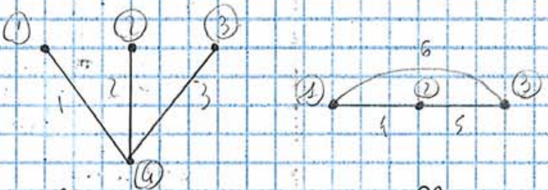
Richiami:

Formulazione delle leggi di Kirchhoff in forma matriciale:

- $A\,i = 0$, $\quad \vec{i} = (i_1, \dots, i_l)^t$
  $A \in \mathbb{R}^{n-1,l}$
- $B\,v = 0$ $\quad \vec{v} = (v_1, \dots, v_l)^t$
  $B \in \mathbb{R}^{l-(n-1),l}$
- $v = A^t e$ $\qquad e = (e_1, \dots, e_{n-1})^t$

Albero e coalbero:

- Un ALBERO A di G è un suo sottografo connesso che comprende tutti i nodi e non contiene alcuna maglia.
- Un COALBERO è quello che resta di un grafo se "togliamo" un albero.



$l = 6$
$n = 4$
$n-1 = 3$
$l-(n-1) = 3$

albero $(n-1)$ lati $\qquad$ coalbero $l-(n-1)$ lati

Le maglie si formano aggiungendo un lato del coalbero all'albero.

Circuito a-dinamico lineare:

$F(v, i) = 0$ corrisponde al set di equazioni: $\quad i_1 = a(t) \quad \forall v_1$

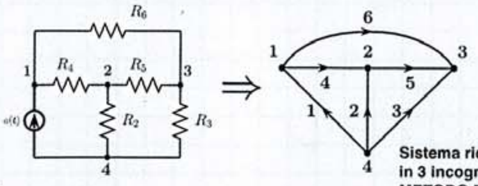
$v_2 = R_2 i_2$

$\vdots$

$v_6 = R_6 i_6$

Abbiamo quindi 12 equazioni in 12 incognite, poiché abbiamo tutte le correnti di lato e tutte le tensioni di lato

Circuito a-dinamico lineare



Sistema ridotto di 3 equazioni in 3 incognite.
METODO DEI NODI

$$\begin{cases} i_1 = a(t) \\ i_2 = -G_2 e_2 \\ i_3 = -G_3 e_3 \\ i_4 = G_4(e_1 - e_2) \\ i_5 = G_5(e_2 - e_3) \\ i_6 = G_6(e_1 - e_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -i_1 + i_4 + i_6 = 0 \;\; (1) \\ -i_2 - i_4 + i_5 = 0 \;\; (2) \\ -i_3 - i_5 - i_6 = 0 \;\; (3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (G_6 + G_4)e_1 - G_4 e_2 - G_6 e_3 = a(t) \\ -G_4 e_1 + (G_2 + G_4 + G_5)e_2 - G_5 e_3 = 0 \\ -G_6 e_1 - G_5 e_2 + (G_3 + G_5 + G_6)e_3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{G}\,\mathbf{e} = \mathbf{u}$$

Metodo dei nodi

Si articola nei seguenti passi:

1. si numerano i nodi del circuito, prendendone uno come riferimento (nodo 0). Quindi si assumono come incognite le tensioni dei nodi rispetto al nodo di riferimento prescelto.
2. ad ogni nodo si scrive la legge di Kirchhoff delle correnti (KCL), assumendo per semplicità lo stesso verso di riferimento per tutti i rami incidenti nel nodo (tipicamente si assume come verso positivo di riferimento quello uscente);
3. si utilizzano le relazioni costitutive dei singoli rami per esprimere le correnti dei rami in funzione delle rispettive tensioni di ramo e delle correnti dei generatori di corrente indipendenti;
4. infine si usa la legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL) per esprimere le tensioni dei rami in funzione delle tensioni dei nodi.

Metodo dei nodi

Osservazioni:

- Perché il metodo possa essere applicato così come indicato, occorre che i singoli rami del circuito siano descritti da relazioni costitutive del tipo $i = g(v)$, in modo che ciascuna corrente di ramo possa essere espressa in funzione della corrispondente tensione di ramo (bipoli comandati in tensione);
- In tal caso il sistema di equazioni che descrive il circuito può essere scritto in forma automatica, a vista;
- Il metodo permette di scrivere un numero minimo di equazioni e si presta assai bene ad essere utilizzato per analisi di circuiti di dimensioni limitate, usando carta e penna;
- Nel caso siano presenti generatori ideali di tensione, indipendenti o dipendenti, oppure amplificatori operazionali ideali, il metodo dei nodi deve essere opportunamente modificato per poter essere utilizzato anche con questi componenti.

Metodo dei nodi

La matrice **G** delle conduttanze di nodo ha la seguente struttura:

- i termini della diagonale principale $G_{i,i}$ contengono la somma delle conduttanze che incidono nel nodo i-esimo del circuito;
- quelli fuori diagonale $G_{i,j},\ i \neq j$ sono l'opposto delle conduttanze esistenti tra il nodo i-esimo e j-esimo;
- il vettore dei termini noti è costituito, per ciascuna riga i, dalla somma algebrica delle intensità di corrente impresse dai generatori.

Sostituendo questo sistema:

$$\begin{cases} i_1 = a(t) \\ i_2 = -G_2 e_2 \\ i_3 = -G_3 e_3 \\ i_4 = G_4(e_1 - e_2) \\ i_5 = G_5(e_2 - e_3) \\ i_6 = G_6(e_1 - e_3) \end{cases}$$

otteniamo un sistema ridotto a 3 equazioni e 3 incognite.

Queste equazioni sono quindi state ottenute utilizzando le leggi di Kirchhoff per le correnti ai nodi (KCL) e le eq sono $n-1$ in $n-1$ incognite.

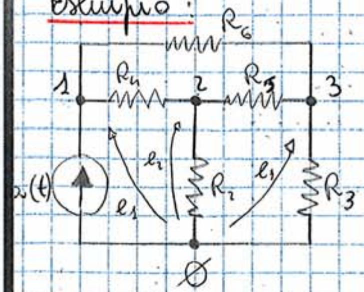
Inizialmente avevamo un sistema di 6 eq in 6 incognite. Semplificando con il metodo del Tableau abbiamo ottenuto 3 eq in 3 incognite.

Metodo dei nodi:

Consiste nella riduzione delle eq. ottenute con il metodo del Tableau

Per poter applicare il metodo dei nodi, la corrente di ciascun lato deve essere esprimibile in termini della tensione di lato.

Esempio:

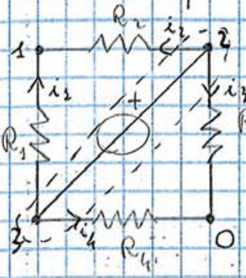


$G e = u$

$$G = \begin{pmatrix} G_4 + G_6 & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ -G_6 & -G_5 & G_3 + G_5 + G_6 \end{pmatrix}$$

- il generatore non collegato al nodo di riferimento (generatori flottanti)

Ad esempio:



In questo caso è sufficiente scrivere le eq. di Kirchhoff KCL ad una superficie che racchiude il generatore di tensione (supernodo).

$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$

In termini delle conduttanze:

$G_1(e_3 - e_1) + G_2(e_2 - e_1) + G_3 e_2 + G_4 e_3 = 0$

Questa eq. rappresenta la legge di Kirchhoff ai supernodi.

Le leggi di Kirchhoff ai nodi restanti si possono scrivere come:

KCL ⓪ ①: $-i_1 - i_2 = a(t)$

$-G_1(e_3 - e_1) - G_2(e_2 - e_1) = a(t)$

(vincolo gen. tens): $e_2 - e_3 = e(t)$

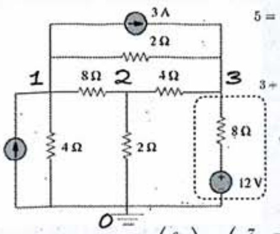
Sistema di 3 eq. in 3 incognite.

Sommario

- Metodi generali di analisi dei circuiti
- Esempio di analisi di un circuito a-dinamico lineare attraverso:
  - Equazioni circuitali in forma canonica
  - Metodo del Tableau
  - Metodo di nodi (bipoli comandati in tensione)
  - Metodo dei nodi modificato in presenza di generatori di tensione

Metodo dei nodi

Esempio:



$$5 = 3 + \frac{e_1 - e_3}{2} + \frac{e_1 - e_2}{8} + \frac{e_1}{4} \rightarrow 16 = 7e_1 - e_2 - 4e_3$$

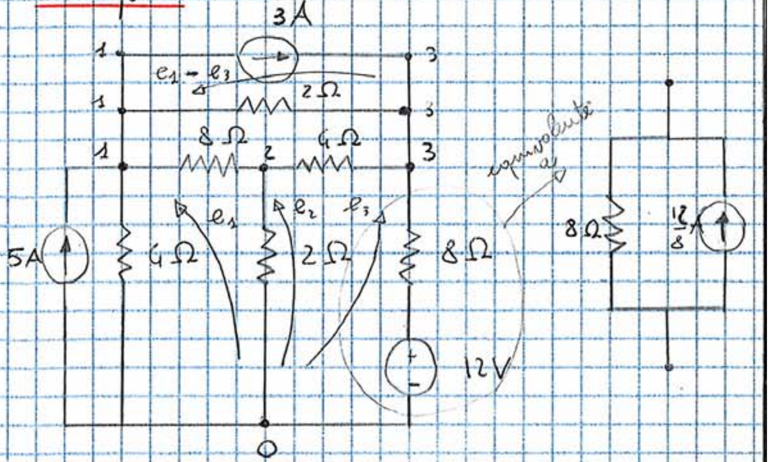
$$\frac{e_1 - e_2}{8} = \frac{e_2 - e_3}{4} + \frac{e_2}{2} \rightarrow 0 = -e_1 - 7e_2 - 2e_3$$

$$3 + \frac{12 - e_3}{8} + \frac{e_2 - e_3}{4} + \frac{e_1 - e_3}{2} = 0 \rightarrow -36 = 4e_1 + 2e_2 - 7e_3$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & -2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e_1 &= 10V \\ e_2 &= 4.933V \\ e_3 &= 12.267 \end{aligned}$$

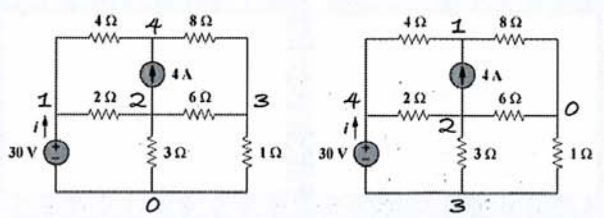
Esempio:



Ci si può ora ricondurre ad un circuito che ha solo generatori di corrente e resistenze, quindi possiamo fare l'analisi del circuito "a vista" utilizzando le regole in slide ⑤

Metodo dei nodi modificato

Esempio:



Esempio:

Abbiamo un ramo che non è un bipolo comandato in tensione, quindi il generatore è flottante.

Figura ①: Se un generatore di tensione ha un terminale collegato a massa, allora scrivo KCL a tutti i nodi tranne al terminale a cui è connesso il generatore di tensione.

Quindi in questo circuito andrò a scrivere la legge di Kirchhoff al nodo ②, ③, ④.

in ②: $\frac{e_2 - e_1^{=30}}{2} + \frac{e_2}{3} + \frac{e_2 - e_3}{6} + 4 = 0$

in ③: $\frac{e_3}{1} \quad \frac{e_3 - e_2}{6} + \frac{e_3 - e_4}{8} = 0$

in ④: $\frac{e_4 - e_3}{8} - 4 + \frac{e_4 - 30}{4} = 0$

3 eq in 3 incognite $(e_2\, e_3\, e_4)$

dalla corrente che scorre in un altro bipolo collegato ai terminali C e D.
Dal punto di vista circuitale, il generatore è un elemento circuitale a 4 terminali (A B C D). Esso è connesso ad un circuito R che ha anch'esso 4 terminali (A B C D)

Gli elementi a 4 terminali si chiamano quadripoli, ma se il circuito può essere organizzato a coppie di terminali allora l'elemento diventa un doppio bipolo.
Queste coppie devono però avere la seguente proprietà: la corrente che entra in un terminale della coppia deve essere uguale alla corrente che esce dall'altro terminale (la corrente che entra in A è uguale a quella che esce in B).
Se ciò accade l'elemento prende il nome di PORTA.

Quindi questo elemento formato da 4 terminali e due porte, prende il nome di DUE-PORTE (o DOPPIO BIPOLO).

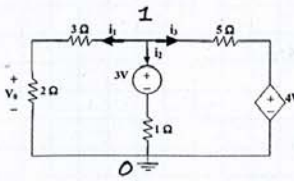
Il simbolo utilizzato ricorda quello del generatore di tensione ma anziché esserci un cerchio vi è un rombo.

Figura ②: generatore di tensione controllato da un altra tensione. (VCVS)

La tensione tra C e D determina la tensione imposta dal generatore tra A e B.

Metodo dei nodi modificato

Esempio:

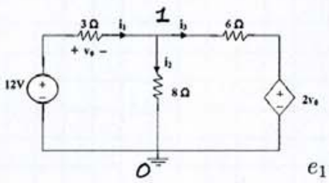


$$v_0 = \frac{2}{2+3}e_1$$

$$\frac{e_1}{5} + \frac{e_1 - 3}{1} + \frac{e_1 - 4\frac{2}{2+3}e_1}{5} = 0 \longrightarrow e_1 = 2.778V$$

Metodo dei nodi modificato

Esempio:



$$\frac{12 - e_1}{3} = \frac{e_1}{8} + \frac{e_1 - 2v_0}{6}$$

$$e_1 + v_0 - 12 = 0 \to v_0 = 12 - e_1$$

$$\frac{12 - e_1}{3} = \frac{e_1}{8} + \frac{3e_1 - 24}{6} \to e_1 = 8.348,\ v_0 = 3.652V$$

Quindi posso scrivere KCL come abbiamo fatto quando erano presenti sole resistori e generatori di corrente.

Abbiamo 3 eq in 3 incognite ($e_1\ e_2\ e_3$)

Esempio:

Se abbiamo il generatore di tensione possiamo utilizzare lo stesso metodo dei nodi.

Il generatore di tensione può essere:

- con terminale collegato a massa
- con nessuno dei terminali collegato a massa.

Se il generatore è collegato a massa utilizzo lo stesso metodo per i generatori indipendenti: scrivo le KCL a tutti i nodi tranne a quello cui è collegato il generatore di tensione.

Sommario

- Metodo di nodi (bipoli comandati in tensione)

ANALISI NODALE: algoritmo 1

1. Scegliere un nodo qualsiasi come nodo di riferimento.
2. Applicare la LKC a tutti i nodi, tranne quello di riferimento.
3. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo.

Sommario

- Metodo dei nodi modificato in presenza di generatori di tensione indipendenti e dipendenti (o controllati)

ANALISI NODALE: Algoritmo 2

1. Scegliere un nodo di riferimento.
2. Evidenziare eventuali *super-nodi*, relativi ai generatori di tensione *non connessi al riferimento*. Ogni super-nodo ingloba anche i due nodi ai quali è connesso il generatore.
3. Applicare la LKC a tutti i super-nodi e a tutti i nodi rimanenti, escludendo quello di riferimento, e quelli *connessi al riferimento tramite un generatore di tensione*.
4. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo. Aggiungere i vincoli imposti dai generatori di tensione.

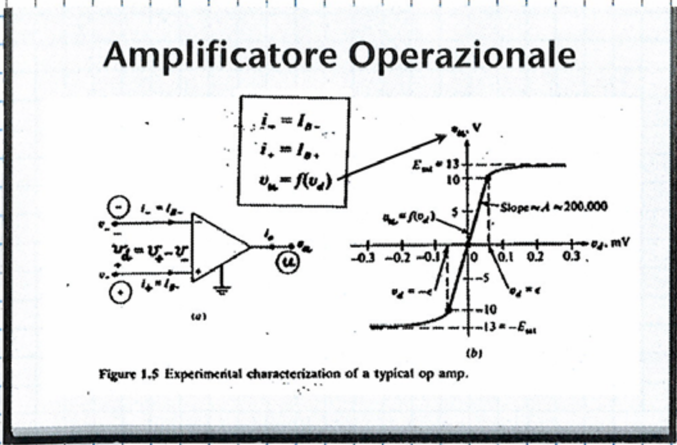


Figure 1.5 Experimental characterization of a typical op amp.

Per descrivere il comportamento elettrico del dispositivo posso applicare un segnale al terminale $-In$ e uno al terminale $+In$ e poi guardare l'uscita in funzione della differenza di potenziale tra $-In$ e $+In$.

v_d = tensione differenziale.

Se vado ad osservare come varia la tensione sui terminali di uscita al variare della tensione v_d, ottengo la curva in figura ②.

$$\boxed{v_u = f(v_d)}$$

Un circuito equivalente che rappresenta un amplificatore operazionale è rappresentato in figura ① slide ⑥:

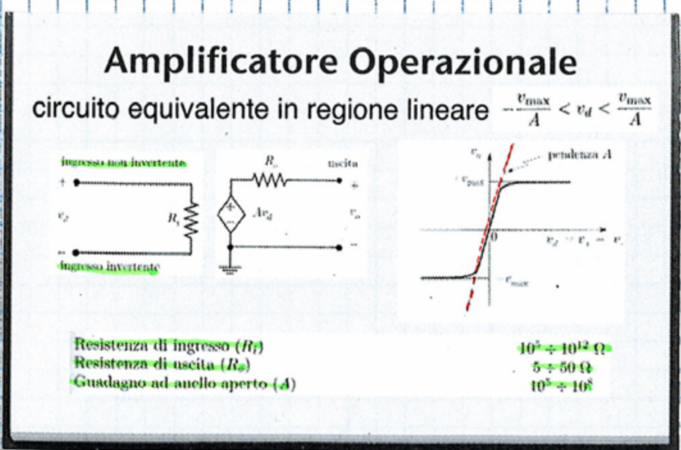
tra $-In$ e $+In$ assumiamo che ci sia una resistenza molto elevata mentre l'uscita, v_o, è rappresentata da un generatore di tensione il cui valore dipende (generatore di tensione dipendente controllato) dalla tensione v_d attraverso una costante A (guadagno ad anello aperto) che rappresenta la pendenza della curva caratteristica nell'intervallo:

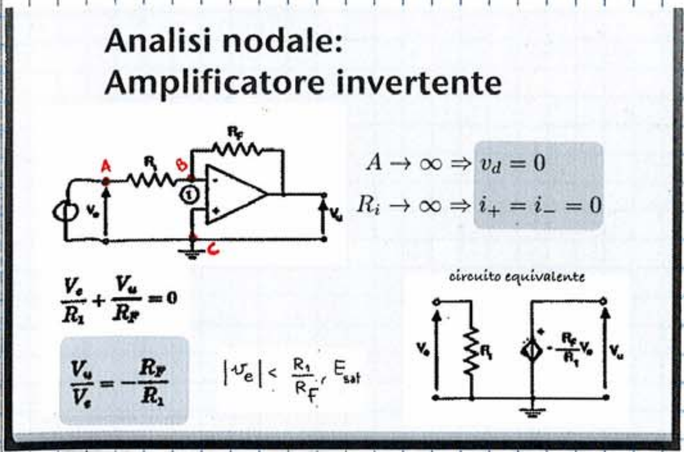
$\frac{v_{max}}{A}$ e $-\frac{v_{max}}{A}$.

Quindi per $-\frac{v_{max}}{A} < v_d < \frac{v_{max}}{A}$: $\boxed{v_u = A\, v_d}$

(la tensione di uscita cresce linearmente con la tensione v_d)

I valori tipici della resistenza di ingresso sono molto alti, mentre quelli di uscita sono molto bassi.





Analisi nodale: amplificatore invertente.

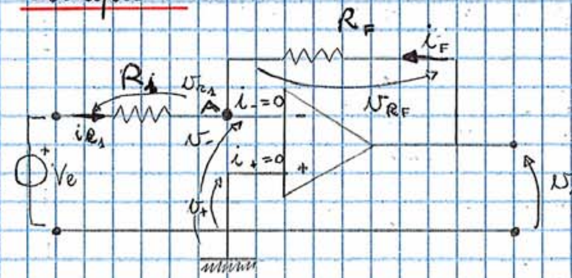
Il terminale -In è allo stesso potenziale di +In che è collegato a massa (quindi a zero). Questo vuol dire che anche $\boxed{v_- = 0}$.

A questo punto possiamo calcolare la tensione ai capi del resistore R_1 con il metodo dei nodi:

La tensione tra a e c è esattamente uguale alla tensione tra a e b perché b e c sono allo stesso potenziale.

KCL su ①: $\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_u}{R_f} = 0$

Esempio:



Vincoli: $i_- = i_+ = 0$

$v_- - v_+ = v_d = 0 \qquad v_- = v_+$

$v_e - v_{R_1} - \overset{=v_-}{v_+} = 0 \Rightarrow v_e = v_{R_1} + \overset{=0}{v_-}$

$\Rightarrow v_e = v_{R_1}$ tensione ai capi di R_1

$i_{R_1} = \frac{v_{R_1}}{R_1} = \frac{v_e}{R_1}$

$v_u - v_{R_F} - v_+ = 0 \qquad v_u = v_{R_F} + \overset{=0}{v_-}$

$\Rightarrow v_u = v_{R_F}$ tensione ai capi di R_F

$i_F = \frac{v_F}{R_F} = \frac{v_u}{R_F}$

Ora posso scrivere la KCL nel nodo A:

$i_{R_1} + i_{R_F} = i_- = 0 \Rightarrow i_{R_1} + i_{R_F} = 0$

$\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_u}{R_F} = 0 \qquad \boxed{v_u = -\frac{R_F}{R_i} v_e}$

Lezione 3 pag 109 - 117

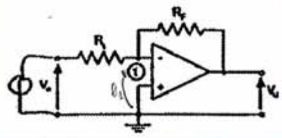
Metodo dei nodi con AO

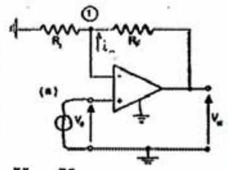
- Metodo dei nodi modificato in presenza amplificatori operazionali (AO) ideali, generatori di tensione dipendenti e indipendenti

ANALISI NODALE: Algoritmo 3

1. Scegliere un nodo di riferimento.
2. Evidenziare eventuali super-nodi, relativi ai generatori di tensione non connessi col riferimento.
3. Applicare la LKC a tutti i super-nodi e a tutti i nodi rimanenti, tranne:
   - il nodo di riferimento;
   - i nodi connessi al riferimento tramite un generatore di tensione;
   - *i nodi di uscita degli amplificatori operazionali.*
4. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo. Aggiungere i *vincoli* imposti dai generatori di tensione e dagli *amplificatori operazionali.*

Richiami: Amplificatore invertente e non invertente





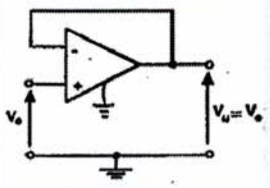
$$\frac{V_e}{R_1}+\frac{V_u}{R_F}=0$$

$$\frac{V_u}{V_e}=-\frac{R_F}{R_1}$$

$$\frac{V_e}{R_1}+\frac{V_e-V_u}{R_F}=0,$$

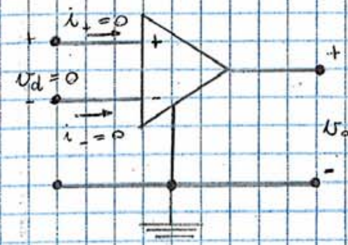
$$\frac{V_u}{V_e}=1+\frac{R_F}{R_1}$$

Amplificatore con guadagno unitario



[1] pag. 103 - Esempio 4.1
Inseguitore di tensione

Richiami: Amplificatore operazionale ideale



① $A \to \infty \Rightarrow v_d = 0$

② $R_i \to \infty \Rightarrow i_+ = i_- = 0$

① corto circuito

② circuito aperto.

Utilizzando il metodo dei nodi per risolvere il circuito, è importante che non si scrivano le KCL ai nodi di uscita dell'amplificatore operazionale.

Figura ①:

KCL in ①: $\frac{e_1 - v_e}{R_1} + \frac{e_1 - v_u}{R_F} = 0$

$e_1 = v_- = v_+ = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{v_e}{R_1} + \frac{v_u}{R_F} = 0$

Figura ②:

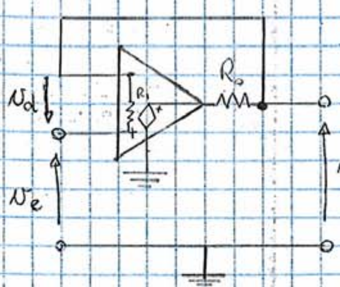
KCL in ①: $\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_1 - v_u}{R_F} + i_- = 0$

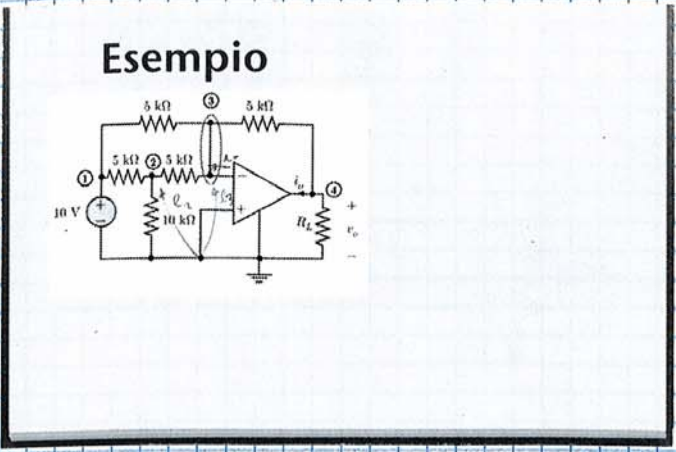
$i_- = 0, \quad v_e = v_+ = v_- = e_1$

$e_1 = v_e \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{v_e}{R_1} + \frac{v_e - v_u}{R_F} = 0$

Richiami: Amplificatore con guadagno unitario (buffer). pag 103





Esempio:

Utilizzando il metodo dei nodi, devo evitare il nodo ① perché collegato ad un generatore di tensione e devo evitare il nodo ④ perché è all'uscita dell'operazionale.

Quindi le KCL andiamo scritte al nodo ② e al nodo ③.

Nodi connessi ad un unico corto circuito equivalgono ad un unico nodo.

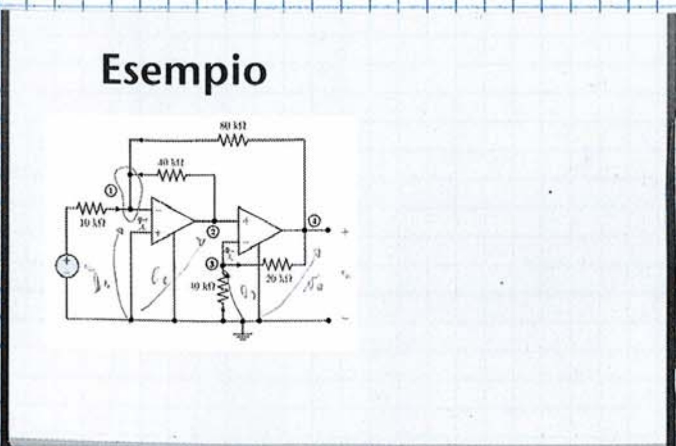
$$②: \quad \frac{e_2 - 10}{5K} + \frac{e_2}{10K} + \frac{e_2 - e_3}{5K} = 0$$

$$③: \quad \frac{e_3 - 10}{5K} + \frac{e_3 - e_2}{5K} + i_- + \frac{e_3 - v_0}{5K} = 0$$

$$i_- = 0$$

$$e_3 = v_- = v_+ = 0 \qquad e_3 = 0$$

Le uniche incognite sono: v_0, e_2



Esempio:

Utilizzando il metodo dei nodi non posso scrivere le KCL al nodo ② perché è l'uscita dell'operazionale e al nodo ④ perché è l'uscita dell'operazionale.

Quindi posso scriverle al nodo ③ e ①

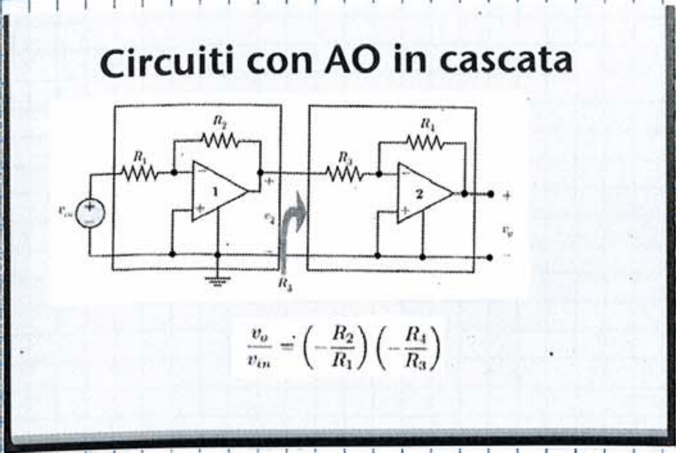
$$①: \quad \frac{\overset{=0}{\cancel{e_1}} - v_{in}}{10K} + \overset{=0}{i_-} + \frac{\overset{=0}{\cancel{e_1}} - e_2}{40K} + \frac{\overset{=0}{\cancel{e_1}} - \overset{=e_4}{v_0}}{80K} = 0$$

$$③: \quad \overset{=0}{i_-} + \frac{\overset{=e_2}{e_3}}{10K} + \frac{\overset{=e_2}{e_3} - v_0}{20K} = 0$$

Utilizzando i vincoli: $v_d = 0 \Rightarrow$

$e_3 = e_2 \qquad e_1 = 0$

Le incognite sono: e_2, v_0



Circuiti con AO in cascata:

Il primo è la configurazione dell'amplificatore operazionale invertente, quindi: $\frac{v_2}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$.

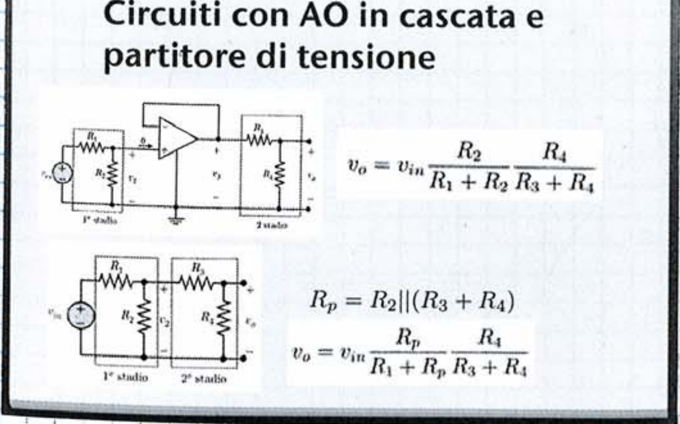
Inoltre la tensione in uscita dall'operazionale, non dipende dalla resistenza a cui esso è collegato.

Sappiamo anche che per il secondo amplificatore: $\frac{v_o}{v_2} = -\frac{R_4}{R_3}$

Connettendoli in cascata a me interessa trovare $\frac{v_o}{v_{in}}$ che si può anche scrivere come:

$$\frac{v_o}{v_{in}} = \frac{v_o}{v_2} \cdot \frac{v_2}{v_{in}} \Rightarrow \frac{v_o}{v_{in}} = \left(-\frac{R_2}{R_1}\right)\left(-\frac{R_4}{R_3}\right)$$

Quindi il rapporto tra la tensione di uscita e la tensione d'ingresso è dato da tanti fattori quanti sono i circuiti con operazionale in cascata.



Circuiti con AO in cascata e partitore di tensione:

In questo circuito sappiamo che la tensione v_o è legata alla tensione v_3 dal partitore di tensione:

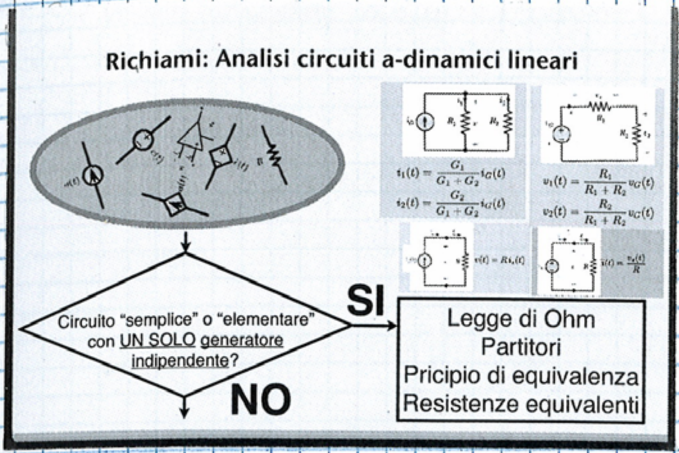
$$v_o = \frac{R_4}{R_4+R_3} v_3$$

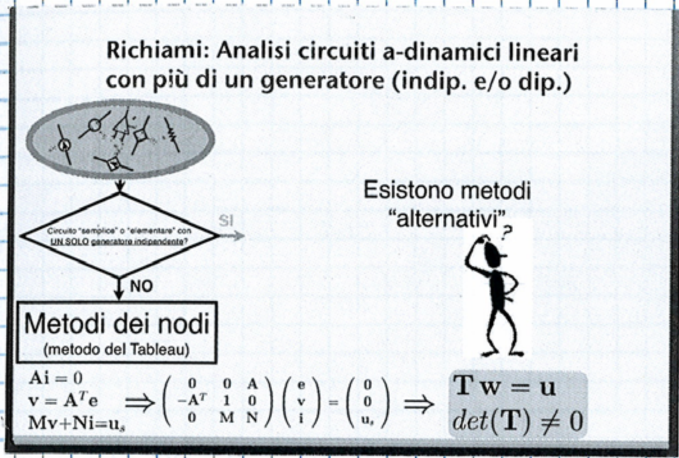
La tensione v_2 è legata alla tensione v_{in} dal partitore di tensione:

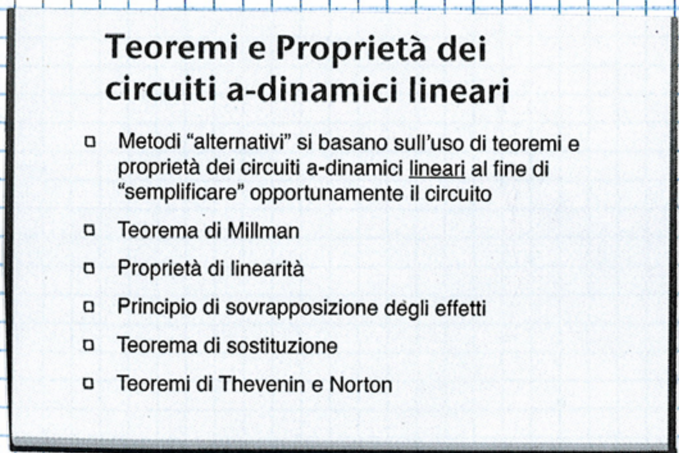
$$v_2 = \frac{R_2}{R_2+R_1} v_{in}$$

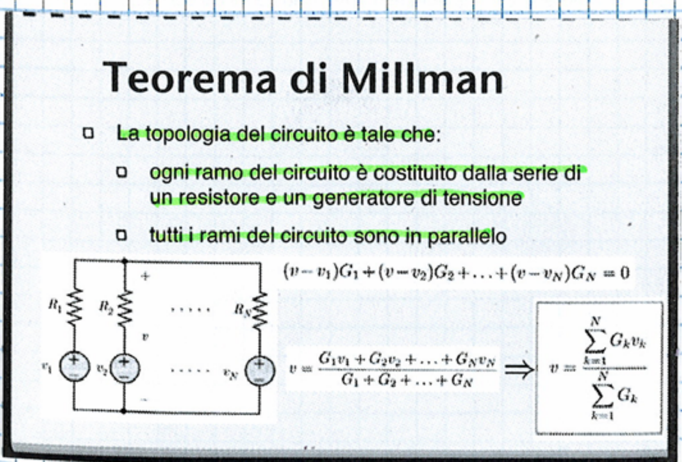
Il Voltage Follower (Buffer) impone

Lezione 10   83   133 - 142









Richiami:

Se un circuito è semplice (cioè costituito da un solo generatore e un solo resistore) o elementare (con un solo generatore indipendente) allora l'analisi del circuito è basata sull'uso della legge di Ohm o dei partitori (si può fare l'analisi a vista).

Se invece non è riconducibile alle classi precedenti, allora possiamo usare il metodo dei nodi (Tableau) (circuiti con più generatori o con amplificatori operazionali)

Teorema di Millman

Si applica a circuiti con una particolare topologia.

L'ipotesi è che il circuito sia costituito da tanti rami in parallelo e ogni ramo è la serie di un generatore di tensione e di un resistore.

Se il circuito ha queste caratteristiche, il teorema di Millman consente di calcolare la tensione tra i nodi A e B.

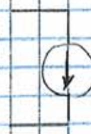
La formula per calcolare la tensione è:

$$\boxed{v = \frac{\sum_{k=1}^{N} G_k v_k \quad ①}{\sum_{k=1}^{N} G_k \quad ②}}$$

① Conduttanze moltiplicate per tensioni

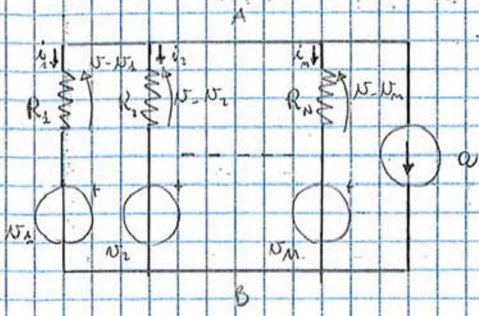
② Somma conduttanze.

Questo vuol dire che:



$a = a_1 - a_2 + \dots + (-a_n)$

Ora il circuito è:



Applicando KCL in (A): $\sum_{K=1}^{N} G_k(v - v_k) + a = 0$

L'unica incognita è v.

Quindi il teorema di Millman si generalizza anche al caso in cui abbiamo un ramo costituito da un generatore di corrente.

Proprietà di linearità:

Implica un legame di proporzionalità tra causa (generatori indipendenti) ed effetto (tensione e corrente in qualche parte del circuito).

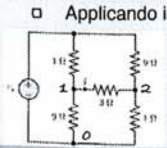
La dimostrazione per un circuito lineare a-dinamico con un solo generatore la si fa utilizzando il metodo del Tableau.

Figura (1): circuito formato da un generatore di tensione e cinque resistori.

In questo circuito non posso usare serie e parallelo per semplificare il circuito in modo da ricondurlo ad un circuito semplice o elementare, pur

Proprietà di Linearità

- In un circuito LINEARE esiste un legame di proporzionalità tra causa (generatori indipendenti) ed effetto (corrente o tensione in qualche elemento del circuito)
- CASO PARTICOLARE: In un circuito a-dinamico lineare con un solo generatore indipendente qualunque tensione o corrente è proporzionale alla grandezza del generatore
- Dimostrazione si basa su metodo del tableau
- Applicando il metodo dei nodi si può illustrare tale proprietà

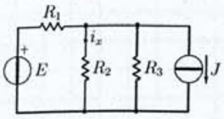


$$\frac{e_1 - v_s}{1} + \frac{e_1 - e_2}{3} + \frac{e_1}{9} = 0 \qquad \frac{e_2 - v_s}{9} + \frac{e_2 - e_1}{3} + \frac{e_2}{1} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 v_s \\ \alpha_2 v_s \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{\alpha_1 g_{22} - \alpha_2 g_{12}}{\Delta} v_s \qquad e_2 = \frac{\alpha_2 g_{11} - \alpha_1 g_{21}}{\Delta} v_s$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Esempio:



$$i_x = i_{x|E} + i_{x|J}$$

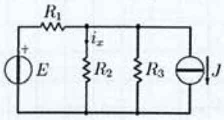
$$i_{x|E} = \frac{R_3}{R_3+R_2}\,\frac{E}{R_1+R_3||R_2}$$

$$i_{x|J} = -\frac{R_1||R_3}{R_3+R_2+R_1}J$$

- PRO e CONS
  - notevoli implicazioni teoriche
  - occorre analizzare tanti circuiti (spesso "semplici" o "elementari") diversi quanti sono i generatori indipendenti

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Esempio:



$$i_x = i_{x|E} + i_{x|J}$$

$$i_{x|E} = \frac{R_3}{R_3+R_2}\,\frac{E}{R_1+R_3||R_2}$$

$$i_{x|J} = -\frac{R_1||R_3}{R_3+R_2+R_1}J$$

$$p_{R_2} = R_2\, i_x^2 = R_2\,(i_{x|E} + i_{x|J})^2 = R_2\, i_{x|E}^2 + R_2\, i_{x|J}^2 + 2R_2\, i_{x|E}\, i_{x|J} \neq R_2\, i_{x|E}^2 + R_2\, i_{x|J}^2$$

- Il principio di sovrapposizione NON vale per le potenze

Sommario

- Metodi "alternativi" si basano sull'uso di teoremi e proprietà dei circuiti a-dinamici lineari al fine di "semplificare" opportunamente il circuito
- Teorema di Millman
- Proprietà di linearità
- Principio di sovrapposizione degli effetti

Quando un generatore di corrente viene disattivato ($i=0$) vuol dire che esso viene sostituito con un circuito aperto.

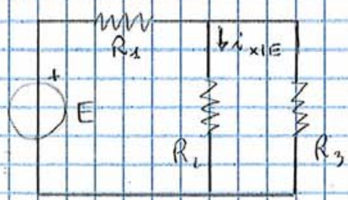
Esempio:

i_x è la somma degli effetti dovuti al generatore di tensione E ($i_{x|E}$) più l'effetto dovuto al generatore di corrente J ($i_{x|J}$)

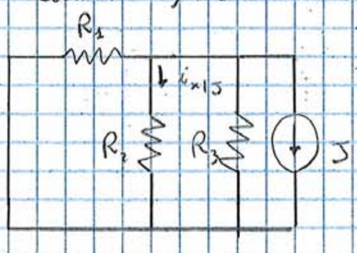
$i_{x|E}$ vuol dire $J=0$ gen. cor. dis.

$i_{x|J}$ vuol dire $E=0$ gen. tens. dis.

Nel caso in cui disattivo il generatore di corrente ($i_{x|E}$) il circuito sarà: un generatore di tensione E con in serie due resistori paralleli ad R_3



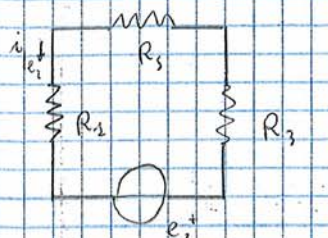
Nel caso $i_{x|J}$ (disattivo il generatore di tensione) il circuito sarà:



Il principio di sovrapposizione non vale per le potenze.

Quindi: $i|_{e_1} = + \dfrac{e_1}{R_1 + R_5 + R_3}$

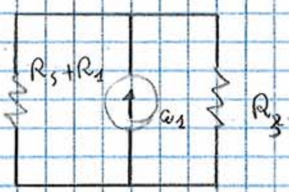
$i|_{e_2}$ semplificato:



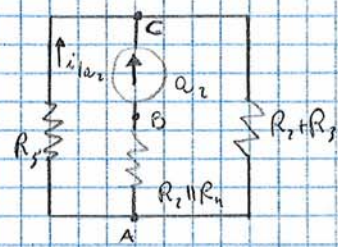
non abbiamo preso le due resistenze in serie R_1 R_4 poiché in parallelo con un generatore di tensione danno un gen di tensione.

$$i|_{e_2} = \frac{e_2}{R_1 + R_5 + R_3}$$

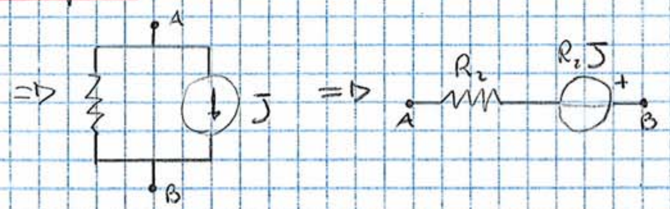
$$i|_{a_1} = \frac{R_3}{R_3 + R_5 + R_1} a_1$$

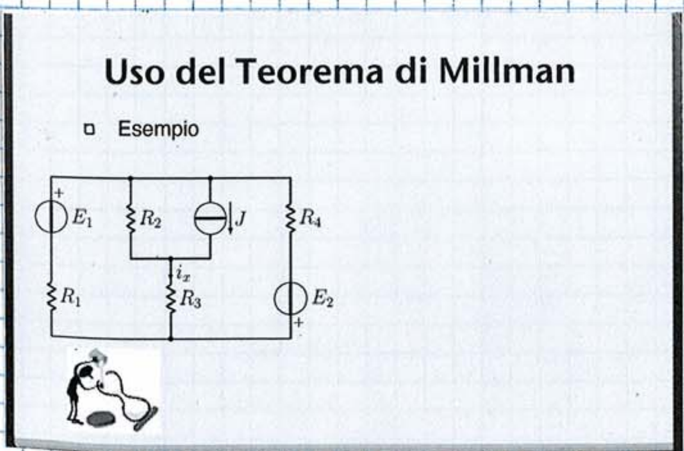


$$i|_{a_2} = -\frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_3 + R_5} a_2$$



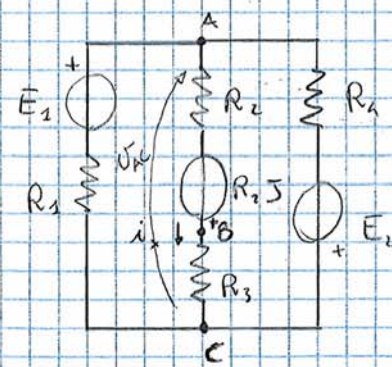
Esempio:




Uso del Teorema di Millman

- Esempio

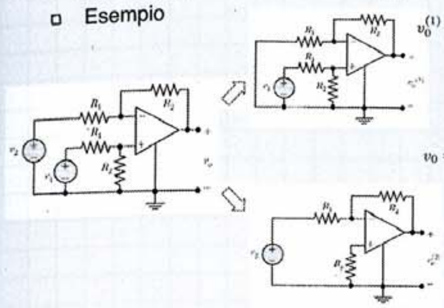
Sostituendo all'interno del circuito:



Questo circuito soddisfa i vincoli richiesti dal teorema di Millman, poiché tra A e C abbiamo tutti rami in parallelo e ogni ramo è costituito da un generatore di tensione che ha in serie un resistore.

Uso del principio di sovrapposizione degli effetti

- Esempio



$$v_0^{(1)} = \frac{R_2}{R_1}v_1$$

$$v_0 = v_0^{(1)} + v_0^{(2)} = \frac{R_2}{R_1}(v_1 - v_2)$$

$$v_0^{(2)} = -\frac{R_2}{R_1}v_2$$

Esempio:

E' possibile analizzare con la sovrapposizione degli effetti anche circuiti con amplificatori operazionali.

In questo caso abbiamo un amplificatore differenziale.

Nulla vieta di risolvere il circuito con il principio di sovrapposizione degli effetti tenendo acceso un generatore per volta.

$v_0^{(1)} = v_0|_{v_1}$ e $v_0^{(2)} = v_0|_{v_2}$

Il circuito 2 e' la classica configurazione dell'amplificatore invertente.

Quindi in questo caso possiamo utilizzare la sovrapposizione degli effetti per semplificare il circuito e poi applicare il metodo dei nodi.

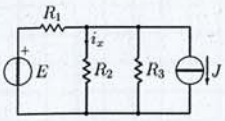
In conclusione il principio di sovrapposizione degli effetti se non sono presenti generatori pilotati operazionali porta via molto tempo e se sono presenti generatori pilotati o amplificatori operazionali tanto vale utilizzare il metodo dei nodi diretto.

Sommario

- Teorema di Millman consente di analizzare circuiti con una topologia ben definita
- Principio di sovrapposizione degli effetti considera la somma degli effetti di ogni singolo generatore. Occorre analizzare tanti circuiti quanti sono i generatori indipendenti. Se lo conosci lo eviti!

Richiami

- Teorema di Millman (CORREZIONE)

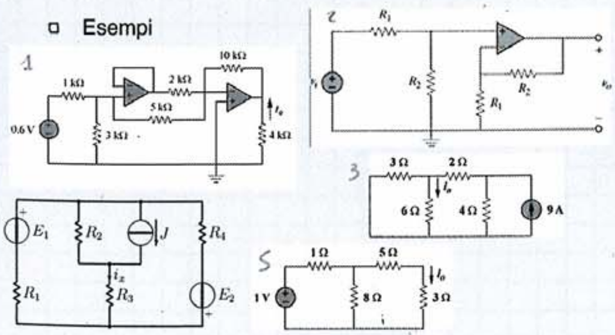


$$v_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$i_x = \frac{v_{AB}}{R_2}$$

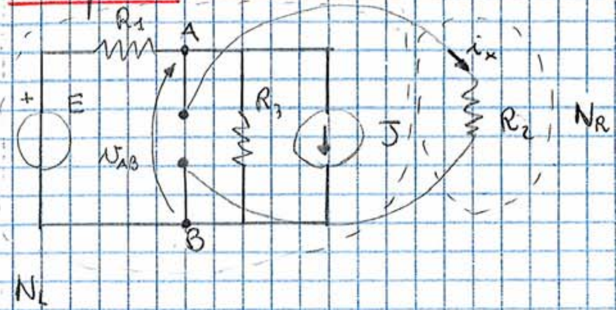
Uso del principio di sostituzione

- Esempi

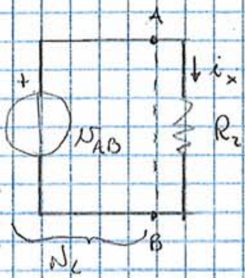


Il valore del generatore di tensione deve essere esattamente pari alla tensione v che conosco e per la corrente rispettivamente.

Esempio:



Sostituiamo N_L:

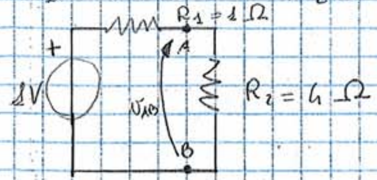


Esempio:

Figura (4): sostituiamo

Figura (5): Abbiamo un gen. tensione che ha in serie un bipolo resistivo che ha in serie un altro bipolo resistivo.
Si identifica facilmente la struttura del circuito che consente di applicare il partitore di tensione

$R_1 = 1\,\Omega$ $\quad R_2 = 8 \| 8 = 4\,\Omega$



$$v_{AB} = \frac{4}{4+1} \cdot 1 = 0,8\,V$$

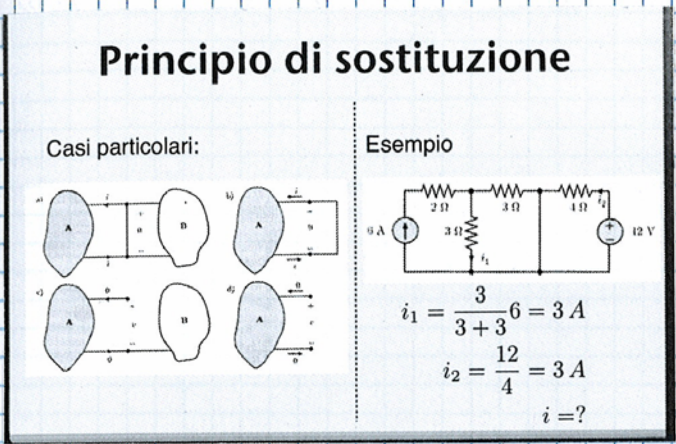
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 198

Figura ①

Con il metodo dei nodi:

$$\frac{e_1 - 0,6}{1\,k\Omega} + \frac{e_1}{3\,k\Omega} + \frac{e_1 - e_2}{5\,k\Omega} = 0$$

$$\frac{e_2 - e_1}{5\,k\Omega} + \frac{e_2 - e_1}{5\,k\Omega} + \frac{e_2 - v_0}{10\,k} = 0$$

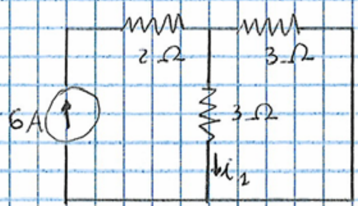


Casi particolari principio sostituzione:

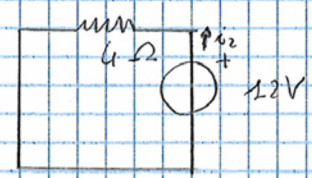
Caso ⓐ: se possiamo separare il circuito in due parti ma la tensione è uguale a zero, allora posso sostituire B con un corto circuito (figura b)

Caso ⓒ: se la corrente è uguale a zero vuol dire che posso sostituire B ad un circuito aperto (figura d)

Esempio:



per calcolare i_1



per calcolare i_2.

Per calcolare i (corrente nel corto circuito) bisogna guardare il circuito a cui è connesso il corto circuito, quindi andando a scomporre i attraverso KCL al nodo a cui è connesso il corto circuito.
Cioè i può essere scomposta in i_2 e i_3: $i = i_2 + i_3$

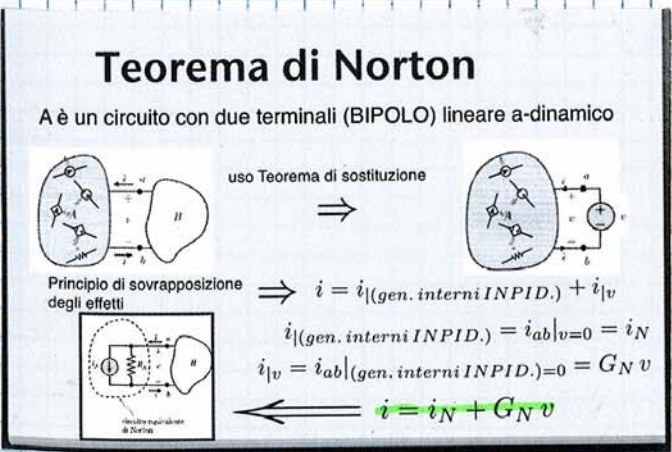
con un altra tensione (tensione su resistenza).

Quindi il teorema di Thevenin ci dice che il bipolo A è equivalente alla serie gen. di tensione - resistore, dove v_T è la tensione tra A e B quando $i = 0$ e R_T è la resistenza di Thevenin ovvero il rapporto tra v_{AB} e i quando i generatori interni indipendenti sono spenti.

Quindi il bipolo A ammette un circuito equivalente formato da un generatore di tensione - resistore. Questo circuito equivalente prende il nome di EQUIVALENTE DI THEVENIN.

Teorema di Norton:

Se suppongo di conoscere invece che la corrente i (teorema di Thevenin) la tensione v, ottengo il teorema di Norton.



A questo punto B viene sostituito da un generatore di tensione.

Posso ora calcolare i come l'effetto dovuto ai generatori interni ad A più l'effetto dei generatori esterni.

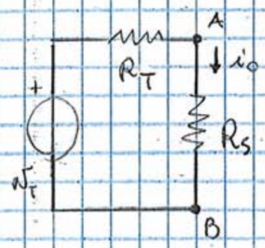
$$\boxed{i = \text{effetto generatori interni} + \text{effetto generatori esterni.}}$$

i_N = corrente di corto circuito

La corrente tra a e b sarà proporzionale all'unico generatore presente ossia il generatore v.

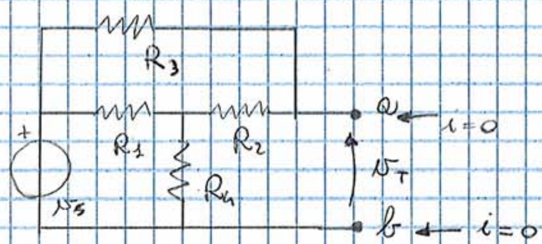
Ossia posso dare ad ① una rappresentazione formata da un generatore di tensione con in serie un resistore.

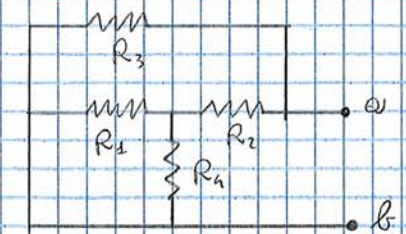
Utilizzando Thevenin:



Utilizzando la legge di Ohm:

$$i_0 = \frac{v_T}{R_T + R_S}$$





$$R_T = [(R_1 \| R_4) + R_2] \| R_3$$

v_T è la tensione tra a e b quando $i=0$.

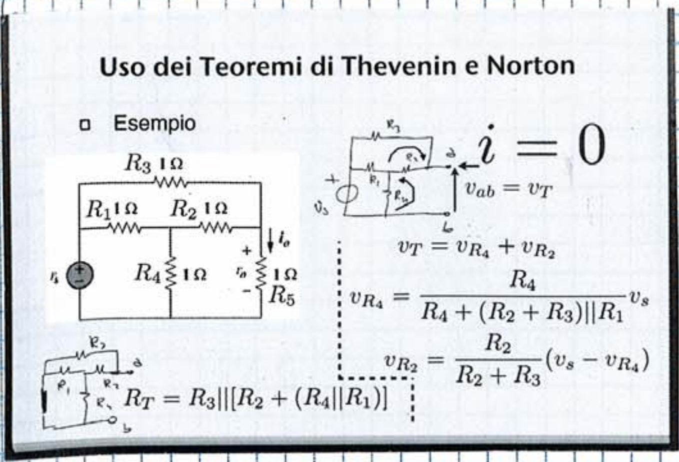
Se $i=0$, $R_2 R_3$ sono in serie e il tutto è in parallelo con R_1

$$v_T = \frac{R_4}{R_4 + R_1 \| (R_2+R_3)} + \frac{R_1 \| (R_2+R_3)}{[R_1 \| (R_2+R_3)] + R_4} \cdot \frac{R_2}{R_2+R_3} v_S$$

Usando Thevenin abbiamo evitato l'uso del metodo dei nodi.

Sommario

- Principio di sostituzione consente di semplificare opportunamente il circuito
- Teorema di Thevenin consente di sostituire un bipolo lineare a-dinamico con un generatore di tensione di valore v_T che ha in serie una resistenza R_T
- Teorema di Norton consente di sostituire un bipolo lineare a-dinamico con un generatore di corrente di valore i_N che ha in serie una resistenza R_N



la resistenza R_5 che contiene i_o da calcolare.

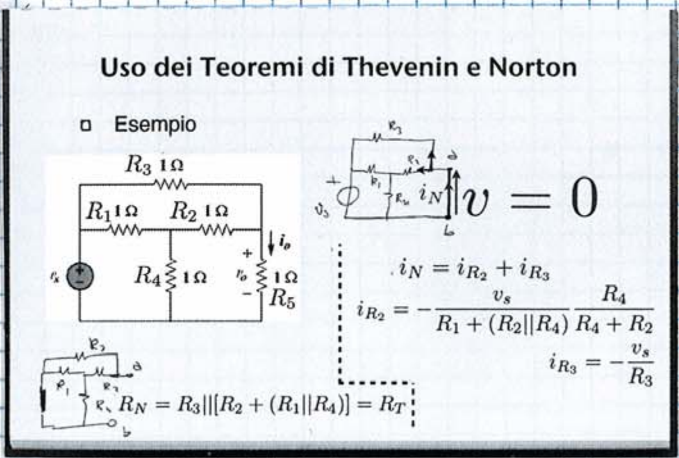
Ora per il teorema di Thevenin o Norton posso sostituire tutto il primo bipolo in figura ② con il suo equivalente di tipo serie o parallelo. (figura ③ e ④)

In slide ④ abbiamo la risoluzione tramite il teorema di Thevenin; vincolo: $i=0$ (sia in a che in b).

R_4 è in serie con v_s poiché $i=0$ e un terminale in comune.

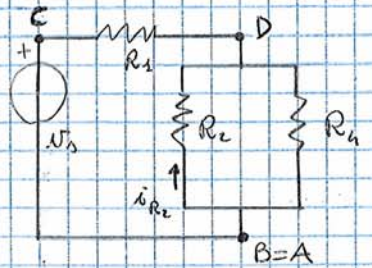
Posso ricavare v_{R_4} utilizzando la formula del partitore di tensione.

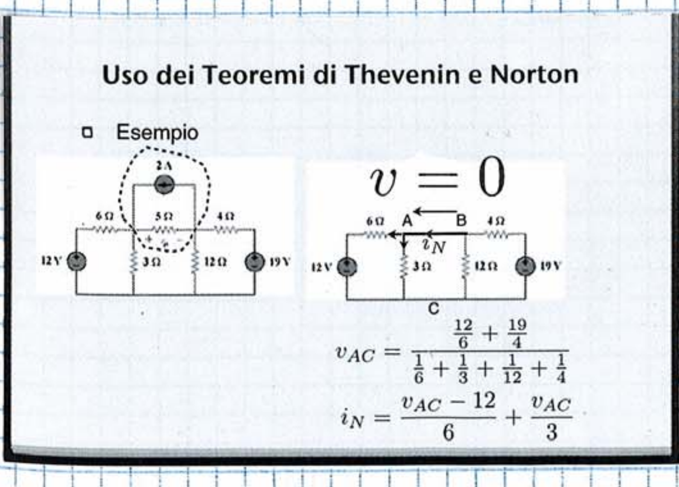
$v_{R_1} = v_s - v_{R_4}$



In slide ⑦ abbiamo la risoluzione tramite il teorema di Norton.

vincolo: $v=0$

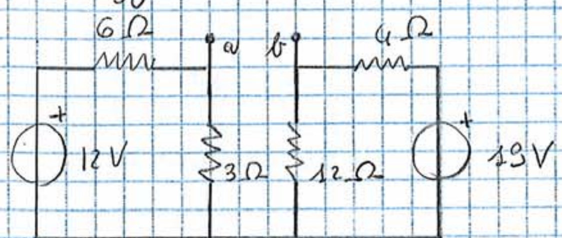




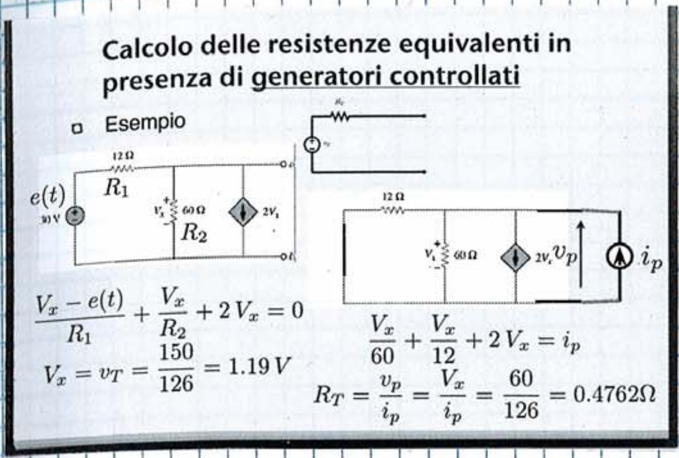
Esempio: v_o ?

Uso teorema di Norton.

Posso sostituire la parte di circuito tratteggiata ottenendo:



Ora calcolo i_N e v_{AC}.



Il rapporto tra v_p e i_p ci dà la resistenza: $R = \frac{v_p}{i_p}$

Quindi il metodo del generatore arbitrario consiste nell'applicare un generatore di prova, di corrente o di tensione, e calcolare la grandezza coniugata. (calcolare non misurare)

- se applico un gen. di corrente calcolo la tensione di prova v_p
- se applico un gen. di tensione calcolo la corrente di prova i_p

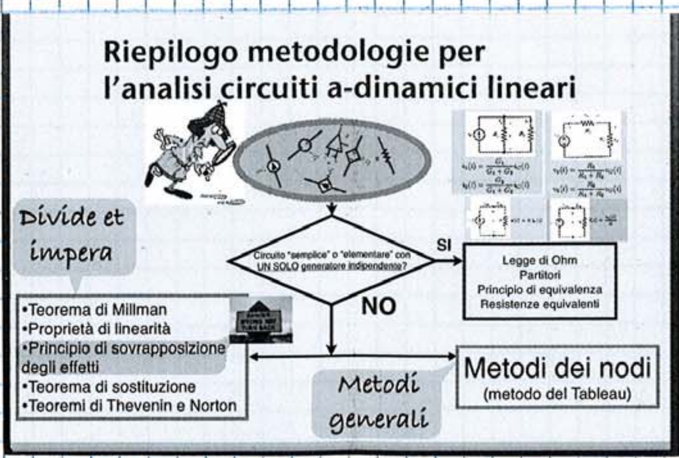
I generatori dipendenti rimangono attivi, vengono spenti solo quelli indipendenti.

Esempio:

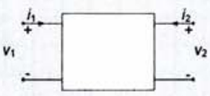
Voglio calcolare il circuito equivalente di Thevenin tra i nodi a e b del circuito in figura ②.

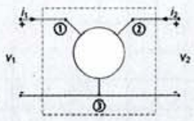
$v_T = v_{ab}|_{i=0}$

Applico il metodo dei nodi.



Doppi bipoli





$$f_1(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0$$
$$f_2(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0$$

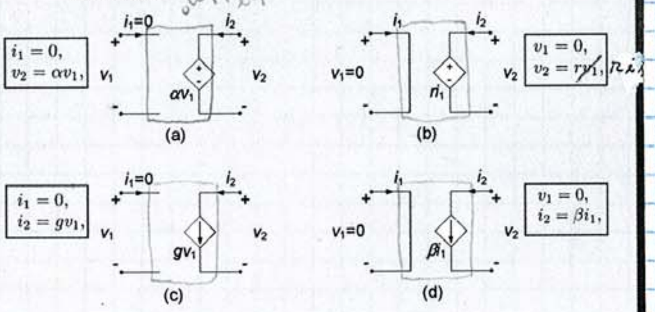
Il funzionamento del doppio bipolo è descritto da due relazioni indipendenti tra le due intensità di corrente i_1, i_2 e le due tensioni v_1, v_2, relazioni che dipendono unicamente dalla natura fisica del componente che il doppio bipolo rappresenta.

L'espressione della potenza elettrica assorbita da un doppio bipolo, tenuto conto della convenzione adottata (utilizzatore) è data da:

$$p^{(a)} = v_1 i_1 + v_2 i_2, \qquad (6.10)$$

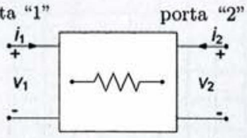
Doppi bipoli a-dinamici lineari

doppio bipolo



Doppi bipoli adinamici lineari

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 = 0$$
$$c_1 i_1 + c_2 i_2 + d_1 v_1 + d_2 v_2 = 0$$



- rappresentazione su *base corrente*: le intensità di corrente i_1 e i_2 sono le *variabili indipendenti* e le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili *dipendenti;*
- rappresentazione su *base tensione*: le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili *indipendenti* e le intensità di corrente i_1 e i_2 sono le variabili *dipendenti*;
- rappresentazioni *ibride*: la tensione v_1 e la intensità di corrente i_2 sono le variabili *indipendenti* e la intensità di corrente i_1 e la tensione v_2 sono le variabili *dipendenti* (o viceversa);
- rappresentazioni di *trasmissione*: la tensione v_1 e la intensità di corrente i_1 sono le variabili *indipendenti* e la tensione v_2 e la intensità di corrente i_2 sono le variabili *dipendenti* (o viceversa).

Così come il bipolo è descritto in termini di tensione e corrente, il doppio-bipolo è descritto in termini di due correnti e due tensioni (4 grandezze scalari).

La potenza assorbita dal doppio bipolo è

$$\boxed{p^{(a)} = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v^T i}$$

potenza assorbita porta 1 + potenza assorbita porta 2.

I generatori dipendenti possono essere visti come dei doppi-bipoli particolari:

a) generatore di tens. controllato in tensione.

b) generatore di tensione controllato in corrente

c) generatore di corrente controllato in tensione

d) generatore di corrente controllato in corrente.

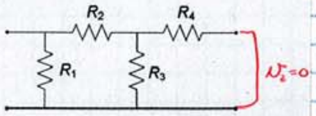
Doppio-bipolo adinamico lineare:

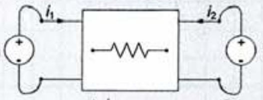
Se il doppio-bipolo è adinamico lineare, allora sono possibili 6 rappresentazioni per un bipolo:

- su base corrente: prendo le correnti i_1 e i_2 come variabili indipendenti. Posso ricavare v_1 e v_2 in funzione di $_1$ e i_2.
- su base tensione: prendo le tensioni v_1 e v_2 come variabili indipendenti. Posso ricavare i_1 e i_2 in funzione di v_1 e v_2.
- ibridi: v_1 e i_2 sono le variabili indipendenti e posso ricavare i_1 e v_2 in funzione di v_1 e i_2. (o viceversa)
- trasmissione: posso prendere v_1 e i_1 come variabili indipendenti e v_2 e i_2 come variabili dipendenti. (o viceversa).

Doppi bipoli a-dinamici lineari - Rappresentazione su base tensione

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2, \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2, \end{cases}$$





$G_{11} = \frac{i_1}{v_1}|_{v_2=0} = \frac{i_1'}{v_1}$, $G_{12} = \frac{i_1}{v_2}|_{v_1=0} = \frac{i_1''}{v_2}$,

$G_{21} = \frac{i_2}{v_1}|_{v_2=0} = \frac{i_2'}{v_1}$, $G_{22} = \frac{i_2}{v_2}|_{v_1=0} = \frac{i_2''}{v_2}$.

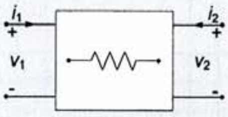
$G_{11} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2=0} = G_1 + \frac{G_2(G_3+G_4)}{G_2+G_3+G_4}$ $\quad G_{12} = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0} = -G_{22}\frac{R_3}{R_2+R_3}$

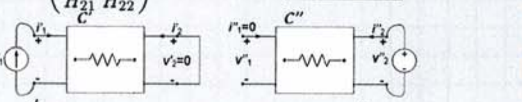
$G_{21} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0} = -G_{11}\frac{R_1}{R_1+R_2+(R_3 \parallel R_4)}\frac{R_3}{R_3+R_4}$ $\quad G_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{v_1=0} = \frac{(G_2+G_3)G_4}{G_2+G_3+G_4}$

Doppi bipoli a-dinamici lineari -Rappresentazione ibrida-I

$$v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2,$$
$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2.$$

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$





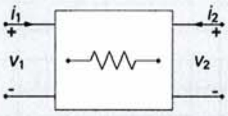
$H_{11} = \frac{v_1}{i_1}|_{v_2=0} = \frac{v_1'}{i_1}$, resistenza equivalente $\quad H_{12} = \frac{v_1}{v_2}|_{i_1=0} = \frac{v_1''}{v_2}$, *guadagno in tensione*

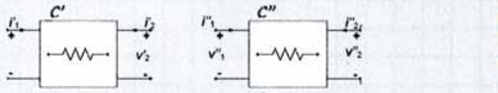
$H_{21} = \frac{i_2}{i_1}|_{v_2=0} = \frac{i_2'}{i_1}$. *guadagno in corrente* $\quad H_{22} = \frac{i_2}{v_2}|_{i_1=0} = \frac{i_2''}{v_2}$, conduttanza equivalente

Alla matrice H si da il nome di *matrice ibrida* del doppio bipolo.

Doppi bipoli a-dinamici lineari -Rappresentazione ibrida-II

$$i_1 = H_{11}'v_1 + H_{12}'i_2,$$
$$v_2 = H_{21}'v_1 + H_{22}'i_2.$$
$$H' = H^{-1}$$





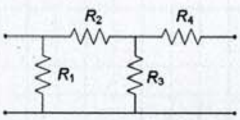
$H_{11}' = \frac{i_1}{v_1}|_{i_2=0}$ conduttanza equivalente $\quad H_{12}' = \frac{i_1}{i_2}|_{v_1=0}$ *guadagno in corrente*

$H_{21}' = \frac{v_2}{v_1}|_{i_2=0}$ *guadagno in tensione* $\quad H_{22}' = \frac{v_2}{i_2}|_{v_1=0}$ resistenza equivalente

Alla matrice H'si da il nome di *matrice ibrida* del doppio bipolo.

Doppi bipoli a-dinamici lineari - Rappresentazione su base ibrida-III

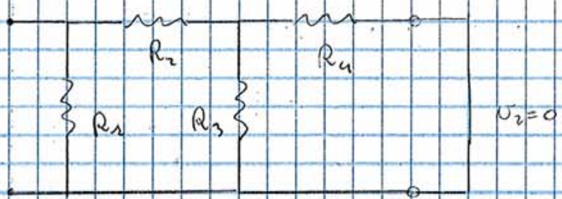
$$i_1 = H_{11}'v_1 + H_{12}'i_2,$$
$$v_2 = H_{21}'v_1 + H_{22}'i_2.$$



$$H_{11}' = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{i_2=0} = [R_1 \parallel (R_2+R_3)]^{-1}$$
$$H_{22}' = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{v_1=0} = (R_2 \parallel R_3) + R_4$$
$$H_{12}' = -H_{21}' = -\frac{R_3}{R_2+R_3}$$

Esempio:

Calcolo di G_{11}:



$$G_{11} = G_1 + \frac{G_2(G_3+G_4)}{G_2+G_3+G_4}$$

Rappresentazioni ibride:

Variabili indipendenti: i_1 e v_2

Variabili dipendenti: i_2 e v_1

o viceversa

$$\begin{cases} v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2 \end{cases}$$

$H_{11} = \frac{v_1}{i_1}$ con $v_2 = 0$

$H_{21} = \frac{i_2}{i_1}$ con $v_2 = 0$

$H_{12} = \frac{v_1}{v_2}$ con $i_1 = 0$

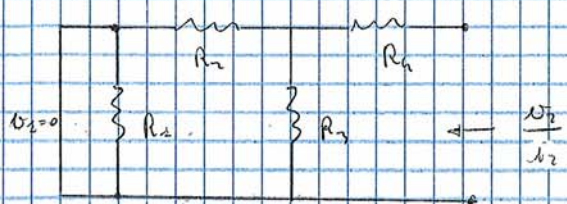
$H_{22} = \frac{i_2}{v_2}$ con $i_1 = 0$

H = matrice ibrida $\quad \boxed{H' = H^{-1}}$

Esempio:

$$H_{22}' = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{v_1=0} = (R_2 \parallel R_3) + R_4$$

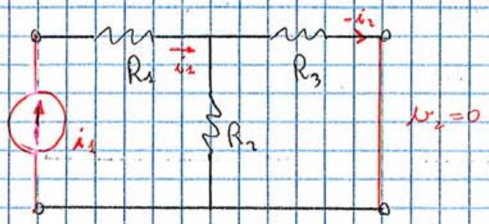
ossia:



$$v_2 = R_2 i_1$$

$$T_{21} = \frac{1}{R_2}$$

Calcolo di T_{22}:



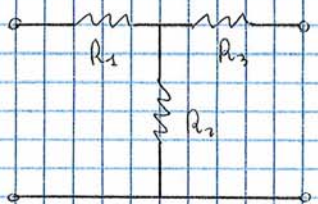
$$T_{22} = \frac{i_1}{-i_2}\Big|_{v_2=0} = \frac{1}{\frac{-i_2}{i_1}\Big|_{v_2=0}}$$

$$-i_2 = \frac{R_2}{R_2+R_3}\, i_1 \qquad \text{(partitore corrente)}$$

$$T_{22} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_2+R_3}} = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

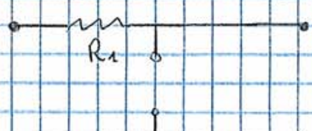
$$T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_3 + \frac{R_1}{R_2}(R_2+R_3) \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{pmatrix} \qquad \det = 1$$

Caso particolare:



$\Rightarrow$ $R_3 = 0$, $R_2 = \to \infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$$T = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det = 1$$

Lezione 15   637 - 639

2 3 4 5

Riepilogo rappresentazioni tra doppi-bipoli:

Doppi bipoli a-dinamici lineari

Confrontando le varie espressioni delle equazioni di un doppio bipolo si riconosce che:
- la matrice G è l'inversa della matrice R
- la matrice H è l'inversa della matrice H'
- la matrice T è l'inversa della matrice T' con i coefficienti della diagonale secondaria cambiati di segno

Le altre relazioni tra le varie rappresentazioni si possono ottenere utilizzando le definizioni dei coefficienti delle matrici.

Doppi bipoli a-dinamici lineari

	R	G	H	H'	T	T'
R	$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta G} & -\frac{g_{12}}{\Delta G} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta G} & \frac{g_{11}}{\Delta G} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta R} & -\frac{r_{12}}{\Delta R} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta R} & \frac{r_{11}}{\Delta R} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta T'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
H	$\boxed{\begin{matrix} \frac{\Delta R}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ -\frac{r_{21}}{r_{22}} & \frac{1}{r_{22}} \end{matrix}}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta G}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta H} & -\frac{h'_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta H} & \frac{h'_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta T'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
H'	$\begin{matrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{r_{11}} & \frac{\Delta R}{r_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta T'}{D'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\Delta R}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{22}}{g_{21}} & -\frac{1}{g_{21}} \\ -\frac{\Delta G}{g_{21}} & -\frac{g_{11}}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta H'}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{B'}{\Delta T'} \\ \frac{C'}{\Delta T'} & \frac{A'}{\Delta T'} \end{matrix}$
T'	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{r_{12}} & \frac{\Delta R}{r_{12}} \\ \frac{1}{r_{12}} & \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ -\frac{\Delta G}{g_{12}} & -\frac{g_{22}}{g_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta H}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{C}{\Delta T} & \frac{A}{\Delta T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

Doppi bipoli a-dinamici lineari

Relazione tra H e R

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}$$

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

variabile indipendente

$$\boxed{v_2 = 0} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ 0 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} i_2 &= \overbrace{-\frac{r_{21}}{r_{22}}}^{h_{21}} i_1 \\ v_1 &= \underbrace{\left(r_{11} - r_{12} \frac{r_{21}}{r_{22}} \right)}_{h_{11}} i_1 = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} i_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{11} = \frac{\det(\mathbf{R})}{r_{22}} \qquad h_{21} = -\frac{r_{21}}{r_{22}}$$

Doppi bipoli a-dinamici lineari

Relazione tra H e R

$$\begin{aligned} v_1 &= r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 &= h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{aligned}$$

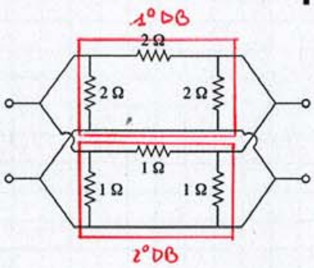
$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$$

variabile indipendente

$$\boxed{i_1 = 0} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= r_{12} i_2 \\ v_2 &= r_{22} i_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} i_2 &= \overbrace{\frac{1}{r_{22}}}^{h_{22}} v_2 \\ v_1 &= \underbrace{\frac{r_{12}}{r_{22}}}_{h_{12}} v_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_{12} = \frac{r_{12}}{r_{22}} \qquad h_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

Connessione parallelo

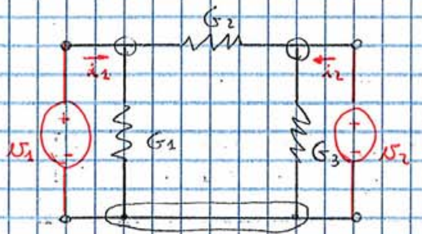


$\mathbf{i}' = G'\mathbf{v}$, $\mathbf{i}'' = G''\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{i}' + \mathbf{i}'' = (G' + G'')\mathbf{v}$.

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_{21}}{\left(1+\frac{R_{22}}{R_2}\right)} \cdot \frac{1}{(R_s+R_{11})} - \frac{R_L}{R_{12}}$$

Esempio connessione in parallelo:

Calcolare la matrice G.



$$i_1 = G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) = (G_1+G_2)v_1 - G_2 v_2$$

$$i_2 = G_3 v_2 + G_2(v_2 - v_1) = -G_2 v_1 + (G_1+G_3) v_2$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1+G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_1+G_3 \end{pmatrix}$$

Quindi al 1° DB:

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

al 2° DB:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Connessione di doppi-bipoli in cascata:

Vincolo: $i_1'' = -i_2'$ e $v_2' = v_1''$

La matrice dei parametri di trasmissione risultante, è data dal prodotto delle matrici dei singoli doppi bipoli:

$T = T_1 \cdot T_2$

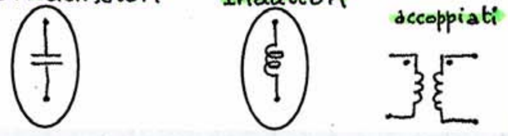
Circuiti dinamici

Def.: Circuiti contenenti elementi nelle cui equazioni costitutive intervengono v, i e le loro DERIVATE (rispetto al tempo) eventualmente anche di ordine superiore al primo.

Circuiti dinamici

Nuovi elementi:

Condensatori — Induttori — Induttori accoppiati



Circuiti dinamici

Conseguenza: il funzionamento del circuito è governato da un sistema di equazioni DIFFERENZIALI (e non da un sistema di equazioni algebriche, come nel caso dei circuiti resistivi)

Circuiti dinamici:

Definizione: circuiti con elementi nelle cui equazioni costitutive sono presenti v, i e le derivate o integrali (rispetto al tempo).

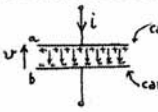
La conseguenza è che le equazioni costitutive non saranno più eq. algebriche, ma saranno delle eq. differenziali.

I nuovi elementi circuitali che sottostanno alle regole dei circuiti dinamici e che quindi hanno eq. costitutive differenziali sono:

- Condensatori
- Induttori
- Induttori accoppiati.

Condensatore lineare

Hp.: Facce piane e parallele, di area A, a distanza d



$\int_S \bar{D}\cdot\bar{n}\, dS = q$ (Legge di Gauss)

data la geometria della struttura, le linee di campo sono rette perpendicolari alle armature:

$|D|A = q$, ma $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$

$\varepsilon|E|A = q$

$|E| = \frac{q}{\varepsilon A}$

Condensatore lineare

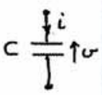
$|E| = \frac{q}{\varepsilon A}$

$v = \int_a^b \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{d}{\varepsilon A} q$, da cui

$q = \frac{\varepsilon A}{d} v = C v$

con $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ (Farad)

capacità



Infine:

$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$, con $q = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$

Condensatore lineare:

E' un sistema costituito da due conduttori paralleli (facce piane) di area "a" e distanza "d".

Tra le due lastre vi e' un materiale dielettrico caratterizzato da una costante "ε". Potrebbe esserci anche dell'aria.

Per la legge di Gauss:

il flusso di induzione dielettrica "D" e' uguale alla carica q dove q e' la carica accumulatasi nelle due lastre.

$$\boxed{\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = q}$$

La presenza di q fa si che si formi tra le due lastre un campo elettrico che va dalle cariche positive "+" a quelle negative "−"

A = superficie

ε = materiale tra le due lastre

L'integrale di linea tra un punto "a" e un punto "b" ci da la tensione tra le lastre:

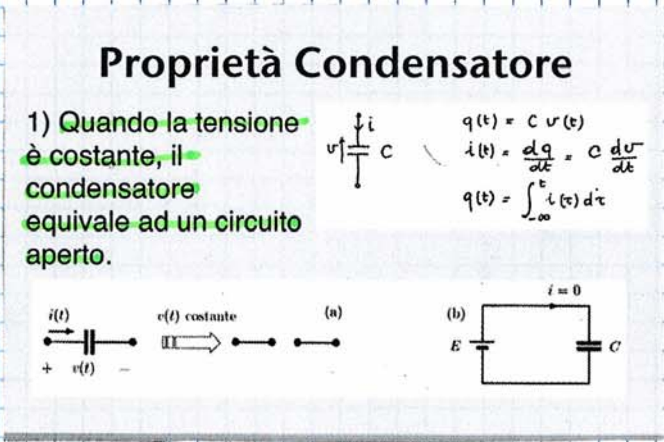
$$\boxed{v = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{d}{\varepsilon A} q =} \quad \text{con } d = \text{distanza}$$

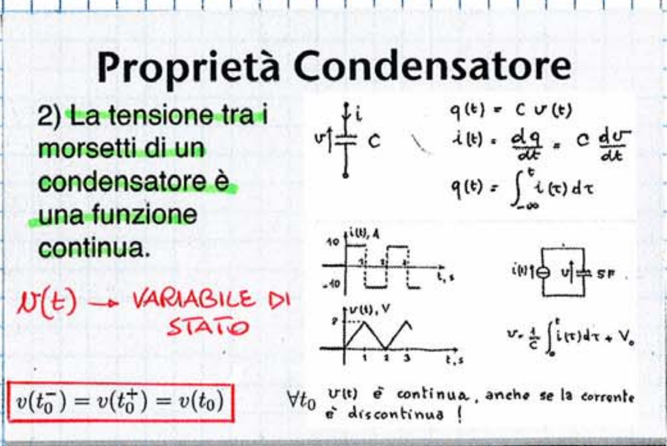
$$\boxed{= d^{2}|E|}$$

$v \propto q$:

in un sistema formato da due lastre la tensione e' proporzionale alla carica sulle due lastre.

$v \propto q$ attraverso "C" = capacità del condensatore, legata alle proprietà geometriche.





$$i(t) = \frac{\varphi}{L} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau =$$

$$= \underbrace{i(t_0)}_{} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

CONDIZIONE INIZIALE = corrente in t_0

In $i(t_0)$ c'è tutto ciò che è accaduto da $-\infty$ all'istante iniziale t_0.

Proprietà condensatore:

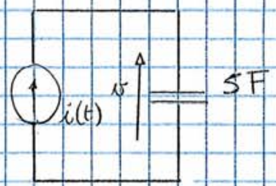
1) Quando la tensione è costante, generatore con tensione costante, allora il condensatore equivale ad un circuito aperto.

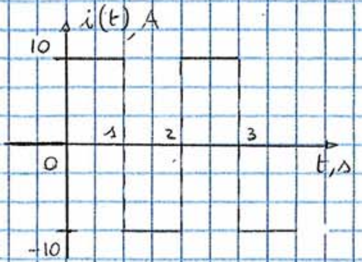
Se $v = \text{cost} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow i(t) = C\frac{dv}{dt} = C \cdot 0 = 0$

$i(t) = 0. \quad \forall\, v = \text{cost}$

2) La tensione ai terminali di un condensatore è una funzione continua





Facendo l'integrale di $i(t)$: (l'integrale di una costante è una retta):

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\, d\tau + V_0$$

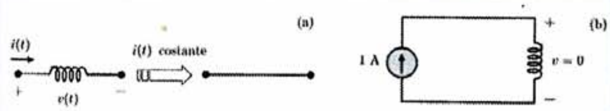
Proprietà Induttore

1) Quando la corrente è costante, l'induttore equivale ad un corto circuito.

$\varphi(t) = L\, i(t)$

$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}$

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau$



Proprietà Induttore

2) La corrente nell'induttore è una funzione continua.

$\varphi(t) = L\, i(t)$

$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}$

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau$

$$i(t_0^-) \neq i(t_0^+) \Rightarrow v(t_0) \to \infty \Rightarrow p(t_0) \to \infty$$

$i(t)$ VARIABILE DI STATO

Proprietà Induttore

3) L'induttore non dissipa energia, ma può immagazzinarla.

$\varphi(t) = L\, i(t)$

$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}$

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau$

L'energia assorbita in un intervallo di tempo generico (t_0, t_1) vale

$$w(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = L \int_{t_0}^{t_1} i \frac{di}{dt} dt = L \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} i di$$

$$w(t_0,t_1) = \frac{1}{2} L[i^2(t_1) - i^2(t_0)] = \frac{1}{2L}[\varphi^2(t_1) - \varphi^2(t_0)]$$

Proprietà Induttore

3) L'induttore non dissipa energia, ma può immagazzinarla.

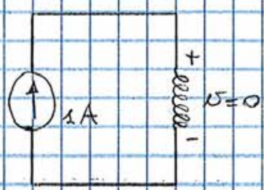
$$w(t_0,t_1) = \frac{1}{2} L[i^2(t_1) - i^2(t_0)] = \frac{1}{2L}[\varphi^2(t_1) - \varphi^2(t_0)]$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t) = \frac{1}{2L} \varphi^2(t) \geq 0$$

Proprietà induttore:

1) Un induttore quando è soggetto ad una corrente costante, si comporta come un corto-circuito.

Se $i = cost \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$
$v(t) = 0 \quad \forall i = cost.$



2) La corrente in un induttore è una funzione continua.

$i(t_0^-) \neq i(t_0^+) \Rightarrow v(t_0) \to \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow p(t_0) \to \infty$ IMPOSSIBILE

Quindi $i(t)$ deve essere continua.
$i(t)$ è una variabile di stato.

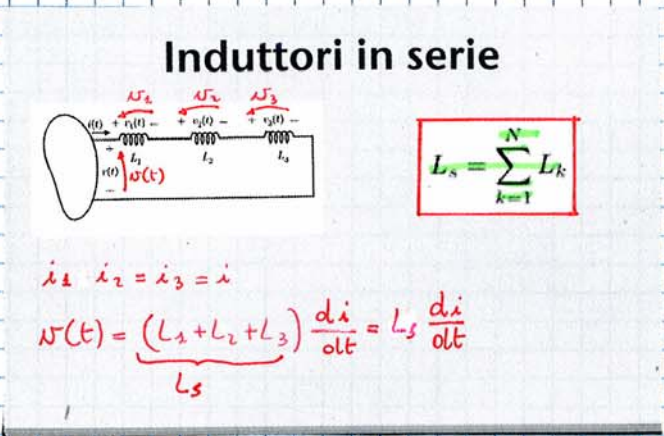
3) L'induttore non dissipa energia ma può immagazzinarla.

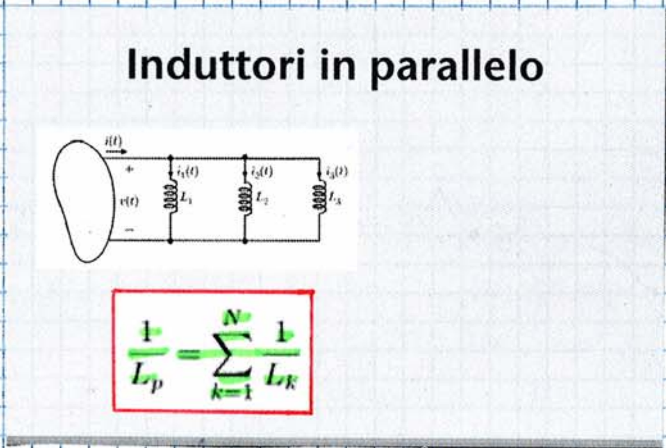
$$\boxed{p(t) = v(t)\, i(t) = L\, i(t) \frac{di(t)}{dt}}$$

$$w(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = L \int_{t_0}^{t_1} i \frac{di}{dt} dt =$$
$$= L \int_{i(t_0)}^{i(t_1)} i\, di = L \left[\frac{i^2}{2}\right]_{i(t_0)}^{i(t_1)}$$

$$w(t_0,t_1) = \frac{1}{2} L \left[i^2(t_1) - i^2(t_0)\right] = \quad \cdot L \text{ e } \div L$$
$$= \frac{1}{2L}\left[\varphi^2(t_1) - \varphi^2(t_0)\right]$$

L'induttore è un bipolo PASSIVO in quanto non può restituire più energia magnetica di quanta ne abbia accumulata in precedenza.





Induttori in serie:

Vincolo: gli induttori sono attraversati dalla stessa corrente.

Per KVL:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + L_3\frac{di_3}{dt}$$

$$i_1 = i_2 = i_3 = i$$

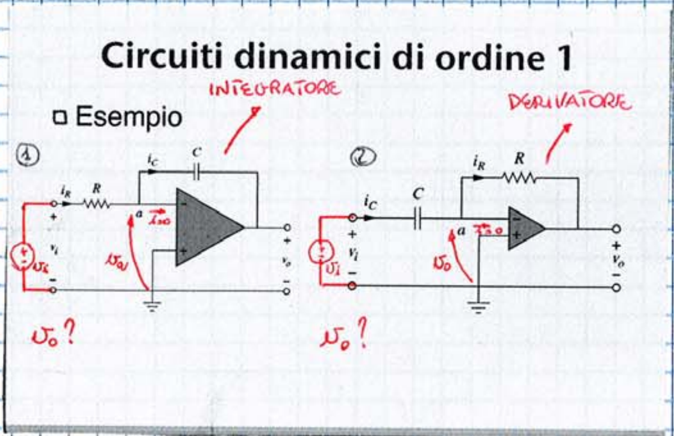
$$v(t) = \underbrace{(L_1+L_2+L_3)}_{L_s}\frac{di}{dt} = L_s\frac{di}{dt}$$

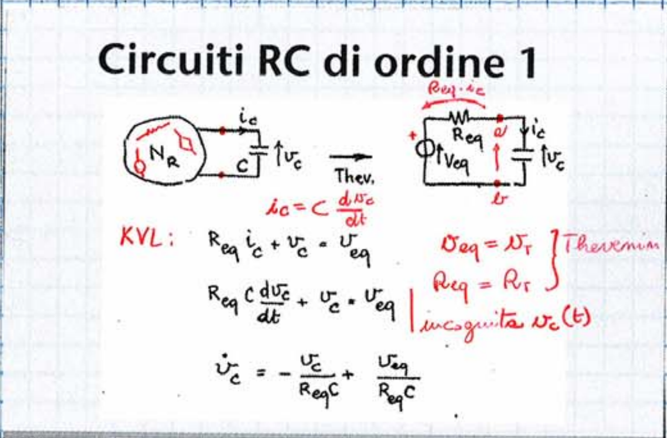
L_s ha come induttanza la somma delle induttanze.

Induttori in parallelo:

Vincolo: gli induttori in parallelo hanno tensioni uguali.

Il reciproco dell'induttanza in parallelo L_p è la somma dei reciproci delle induttanze.





Esempio:

Figura ①: INTEGRATORE

Usando il metodo dei nodi:

$$a: \frac{v_a - v_i}{R} = i_c = C\frac{d(v_a - v_o)}{dt}$$

$$v_a = 0$$

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{RC} v_i \Rightarrow v_o = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_i(\tau)\,d\tau$$

Figura ②: DERIVATORE

$$i_c = C\frac{d(v_i - v_a)}{dt} = \frac{v_o - v_a}{R}$$

$$v_a = 0$$

$$v_o = RC\frac{dv_i}{dt}$$

Circuiti RC di 1° ordine:

RC = resistenza - condensatore.

Il circuito può essere diviso in due parti: la parte a-dinamica e la parte dinamica.

Sulla parte a-dinamica posso calcolare il circuito equivalente di Thevenin.

Ora posso determinare l'eq. che descrive il funzionamento del circuito sul circuito semplificato.

KVL ci consente di scrivere v_{eq} ed è dato dalla tensione ai capi del resistore e della tensione ai capi del condensatore

v_c = variabile di stato.

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$\dot{v}_c = -\frac{v_c}{R_{eq}C} + \frac{v_{eq}}{R_{eq}C} \longrightarrow$$

eq. differenziale 1° ordine con coeff. costanti non autonoma.

Circuiti RC e RL con generatori costanti

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau} \quad , \quad x(t_0)$$

int. omogenea associata : $x = K e^{-t/\tau}$ +

int. particolare : $x = x_\infty$ =

int. generale $x = K e^{-t/\tau} + x_\infty$

cond. iniziale $x(t_0) = K e^{-t_0/\tau} + x_\infty$

$$\Downarrow$$

$$K = [x(t_0) - x_\infty]\, e^{t_0/\tau}$$

Circuiti RC/RL con generatori costanti:

Caratterizzati da equazioni differenziali del primo ordine a coeff. costanti (τ = cost) non autonomo ma con un ingresso costante (x_∞):

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau}}$$

Metodo per determinare la soluzione dell'eq. differenziale:

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau}$$

- omogenea associata:

$\dot{x} = -\frac{x}{\tau}$ (1)

$x_{om}(t) = K e^{\lambda t}$ (2) con K, λ = cost

Sostituisco (2) in (1)

$$\dot{x}_{om}(t) = \lambda K e^{\lambda t} = -\frac{1}{\tau} K e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right) K e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{\tau}$$

$$x_{om}(t) = K e^{-t/\tau}$$

- soluzione particolare:

$x_p(t) = x$ cost $\Rightarrow 0 = -\frac{x}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau}$

$\Rightarrow x = x_\infty$

$x_p(t) = x_\infty$

- Integrale generale:

$x = K e^{-t/\tau} + x_\infty$ (3)

Bisogna ancora determinare K: imponendo $x(t_0)$ in (3) ottengo K:

$$x(t_0) = K e^{-\frac{t_0}{\tau}} + x_\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = [x(t_0) - x_\infty]\, e^{t_0/\tau} \quad (4)$$